Программа специального курса «Введение в кратные тригонометрические ряды»[1]
Мех-мат, осень 2015/16 уч.г.

1. Кратные числовые ряды и виды их сходимости. Стремление к нулю общего члена ряда при сходимости по Прингсхейму.

2. Кратная тригонометрическая система. Представление частичных сумм через ядра Дирихле и прямоугольных средних через ядра Фейера. Лемма Римана — Лебега о стремлении коэффициентов Фурье к нулю.

3. Сходимость кратных средних Чезаро для непрерывных функций и для функций из $L_p(\mathbb{T}^m)$.

4. Сохраняющие меру преобразования. Существование сохраняющего классическую меру преобразования отрезка на куб.

5. Многомерная теорема Хаусдорфа — Юнга. Многомерная теорема Рисса.

6. Многомерная теорема Пэли.

7. Принцип локализации для крестообразных окрестностей. Оценки для

$$\int_a^b \frac{\cos lx}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{\sin^2(lx)}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx.$$

8. Пример непрерывной функции, для которой не выполняется свойство локализации в смысле обычной окрестности.

9. Оценка частичной суммы через соболевскую норму для функции, равной нулю на кубе. Теорема Гоффмана и Лю о локализации кубических сумм в классах Соболева $W_p^1(\mathbb{T}^m)$.

10. Классы Соболева $W_p^1(\mathbb{T}^m)$, в которых свойство локализации кубических сумм не выполняется.

11. Многомерный признак Дини.

12. Достаточное условие сходимости ряда Фурье по Прингсхейму почти всюду в терминах модуля непрерывности в пространстве $L_1(\mathbb{T}^m)$.

13. Сходимость почти всюду кубических частичных сумм для функций из $L_2(\mathbb{T}^m)$.

14. Оценка нормы в $L_1(\mathbb{T}^m)$ мажоранты частичных сумм для функции из $L_2(\mathbb{T}^m)$.

15. Множитель Вейля. Теорема Качмажа — Жижиашвили о множителе Вейля для сходимости прямоугольных сумм почти всюду.

16. Теорема Ульянова — Жижиашвили об условии типа Дини для сходимости почти всюду по Прингсхейму. Достаточное условие сходимости ряда Фурье по Прингсхейму почти всюду в терминах модуля непрерывности в пространстве $L_2(\mathbb{T}^m)$.

17. Пример Феффермана: две леммы об оценке величины

$$R(N,H,x) = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{\sin N(s-x)}{s-x} e^{iHs}\,ds.$$

18. Пример Феффермана: переход к модифицированным ядрам Дирихле, оценка частичных сумм для f_λ с номерами, далекими от λ.

19. Пример Феффермана: основная лемма о больших частичных суммах.

20. Пример Феффермана: леммы об оценке частичных сумм «сглаживающей» части и об оценке частичных сумм вне $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]^2$.

21. Пример Феффермана: оценка модуля непрерывности и завершение доказательства.

Лектор, профессор А. Н. Бахвалов

[1] Название в зачетке будет проставляться согласно требованиям учебной части

Список задач к специальному курсу «Введение в кратные тригонометрические ряды»

1. Привести пример множества B, для которого из B-сходимости двойного ряда по неотрицательным номерам к нулю следует стремление к нулю его члена $c_{\mathbf{n}}$ при $\max\limits_k n_k \to \infty$.

2. Доказать, что если функция k раз непрерывно дифференцируема, то для любого набора $\{k_j\}$ неотрицательных целых чисел, $\sum_{j=1}^m k_j = k$, при $n_j \neq 0$ выполнена оценка

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| = o\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^m |n_j|^{k_j}}\right)$$

3. Доказать, что для функции с модулем непрерывности

$$\omega(f,\delta)_1 = \sup_{\|\mathbf{y}\|\leq\delta} \|f(\cdot) - f(\cdot + \mathbf{y})\|_1$$

выполняется оценка

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| = O\left(\min_{j=1,\ldots,m} \omega(f, \frac{\pi}{|n_j|})_1\right).$$

4*. Доказать, что если функция $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ равна нулю в крестообразной δ-окрестности нуля, то для любого $\delta_1 \in (0,\delta)$ ряд Фурье f сходится по Прингсхейму к нулю равномерно на $[-\delta_1, \delta_1]^m$.

5*. Справедлива ли теорема Гоффмана и Лю о локализации в классах Соболева, если вместо кубических сумм рассматривать прямоугольные с ограничением на отношение компонент (λ-сходимость)?

6. Для каких $\lambda > 1$ построенный в лекциях пример Фефтермана гарантирует λ-расходимость ряда Фурье почти всюду?

7*. Для заданного $\lambda > 1$ предложить схему такой модификации примера Фефтермана, которая гарантировала бы λ-расходимость ряда Фурье почти всюду.

8. Доказать, что для величины

$$R(N,H,x) = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{\sin N(s-x)}{s-x} e^{iHs}\, ds$$

при $x \in \mathbb{T}$, $N > 2H > 2$ или $H > 2N > 2$ выполнена оценка $|R(N,H,x)| \leq C = 15$.

9*. Доказать, что если $\lambda > 100$ и $x, y \in \mathbb{T}$, то существует такой зависящий от точки номер $N_0 = N_0(x,y)$, что если M и N больше N_0, $\frac{1}{10} \leq \frac{M}{N} \leq 10$, и оба натуральных числа M, N лежат одновременно либо на $[1, \sqrt{\lambda}]$, либо на $[\lambda^2, \infty)$, то

$$\left| \int_Q e^{i\lambda xt} \frac{\sin N(t-y)}{t-y} \int_{\frac{2\pi}{3}-x}^{\frac{4\pi}{3}-x} \frac{\sin Mu \cos \lambda tu}{u}\, du \right| < C$$

для некоторой абсолютной постоянной C.

10*. Доказать, что если $\lambda > 100$ и $x, y \in \mathbb{T}$, то существует такой зависящий от точки номер $N_0 = N_0(x,y)$, что если M и N больше N_0, $\frac{1}{10} \leq \frac{M}{N} \leq 10$, и оба натуральных числа M, N лежат одновременно либо на $[1, \sqrt{\lambda}]$, либо на $[\lambda^2, \infty)$, то

$$\left| \int_Q e^{i\lambda xt} \frac{\sin N(t-y)}{t-y} \int_{\frac{2\pi}{3}-x}^{\frac{4\pi}{3}-x} \frac{\sin Mu \sin \lambda tu}{u}\, du \right| < C$$

для некоторой абсолютной постоянной C.