Программа специального курса
«Введение в кратные тригонометрические ряды»[1]
Мех-мат, осень 2020/21 уч.г.

1. Кратные числовые ряды и виды их сходимости. Стремление к нулю общего члена ряда при сходимости по Прингсхейму.

2. Кратная тригонометрическая система. Представление частичных сумм через ядра Дирихле и прямоугольных средних через ядра Фейера. Лемма Римана — Лебега о стремлении коэффициентов Фурье к нулю.

3. Сходимость кратных средних Чезаро для непрерывных функций и для функций из $L_p(\mathbb{T}^m)$.

4. Сохраняющие меру преобразования. Существование сохраняющего классическую меру преобразования отрезка на куб.

5. Многомерная теорема Хаусдорфа — Юнга. Многомерная теорема Рисса.

6. Многомерная теорема Пэли.

7. Принцип локализации для крестообразных окрестностей. Оценки для

$$\int_a^b \frac{\cos lx}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx \quad \text{и} \int_a^b \frac{\sin^2(lx)}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx.$$

8. Пример непрерывной функции, для которой не выполняется свойство локализации в смысле обычной окрестности.

9. Оценка частичной суммы через соболевскую норму для функции, равной нулю на кубе. Теорема Гоффмана и Лю о локализации кубических сумм в классах Соболева $W_p^1(\mathbb{T}^m)$.

10. Классы Соболева $W_p^1(\mathbb{T}^m)$, в которых свойство локализации кубических сумм не выполняется.

11. Многомерный признак Дини.

12. Достаточное условие сходимости ряда Фурье по Прингсхейму почти всюду в терминах модуля непрерывности в пространстве $L_1(\mathbb{T}^m)$.

13. Сходимость почти всюду кубических частичных сумм для функций из $L_2(\mathbb{T}^m)$.

14. Оценка нормы в $L_1(\mathbb{T}^m)$ мажоранты частичных сумм для функции из $L_2(\mathbb{T}^m)$.

15. Множитель Вейля. Теорема Качмажа — Жижиашвили о множителе Вейля для сходимости прямоугольных сумм почти всюду.

16. Теорема Ульянова — Жижиашвили об условии типа Дини для сходимости почти всюду по Прингсхейму. Достаточное условие сходимости ряда Фурье по Прингсхейму почти всюду в терминах модуля непрерывности в пространстве $L_2(\mathbb{T}^m)$.

17. Пример Фефффермана: две леммы об оценке величины

$$R(N,H,x) = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{\sin N(s-x)}{s-x} e^{iHs}\,ds.$$

[1] Название в зачетке будет проставляться согласно требованиям учебной части

18. Пример Феффермана: переход к модифицированным ядрам Дирихле, оценка частичных сумм для f_λ с номерами, далекими от λ.

19. Пример Феффермана: основная лемма о больших частичных суммах.

20. Пример Феффермана: леммы об оценке частичных сумм «сглаживающей» части и об оценке частичных сумм вне $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]^2$.

21. Пример Феффермана: оценка модуля непрерывности и завершение доказательства.

22. U-сходимость кратного ряда. Интегрируемая мажоранта U-частичных сумм ряда

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\alpha} n^{\alpha-1} \cos mx \cos ny, \qquad \alpha \in (0,1).$$

23. Оценка L_1-нормы мажоранты U-частичных сумм ряда Фурье функции, удовлетворяющей условию Вейля.

24. Теорема Дьяченко о множителях Вейля для U-сходимости почти всюду. Достаточное условие U-сходимости в терминах интегрального модуля непрерывности в L_2.

Лектор, профессор А. Н. Бахвалов

Список задач к специальному курсу
«Введение в кратные тригонометрические ряды»

1. Привести пример множества B, для которого из B-сходимости двойного ряда по неотрицательным номерам к нулю следует стремление к нулю его члена $c_{\mathbf{n}}$ при $\max\limits_k n_k \to \infty$.

2. Доказать, что если функция k раз непрерывно дифференцируема, то для любого набора $\{k_j\}$ неотрицательных целых чисел, $\sum_{j=1}^m k_j = k$, при $n_j \neq 0$ выполнена оценка

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| = o\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^m |n_j|^{k_j}}\right)$$

3. Доказать, что для функции с модулем непрерывности

$$\omega(f,\delta)_1 = \sup_{\|\mathbf{y}\|\le\delta} \|f(\cdot) - f(\cdot + \mathbf{y})\|_1$$

выполняется оценка

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| = O\left(\min_{j=1,\dots,m} \omega(f, \frac{\pi}{|n_j|})_1\right).$$

4. Придумать такое обобщение понятия модуля непрерывности на кратный случай, которое для функций класса $C^{(m)}(\mathbb{T}^m)$ давало бы при $n_j \neq 0$ оценку

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| = O\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^m |n_j|}\right).$$

5*. Доказать, что если функция $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ равна нулю в крестообразной δ-окрестности нуля, то для любого $\delta_1 \in (0,\delta)$ ряд Фурье f сходится по Прингсхейму к нулю равномерно на $[-\delta_1,\delta_1]^m$.

6*. Справедлива ли теорема Гоффмана и Лю о локализации в классах Соболева, если вместо кубических сумм рассматривать прямоугольные с ограничением на отношение компонент (λ-сходимость)?

7. Для каких $\lambda > 1$ построенный в лекциях пример Феффермана гарантирует λ-расходимость ряда Фурье почти всюду?

8*. Для заданного $\lambda > 1$ предложить схему такой модификации примера Феффермана, которая гарантировала бы λ-расходимость ряда Фурье почти всюду.

9. Доказать, что для величины

$$R(N,H,x) = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{\sin N(s-x)}{s-x} e^{iHs}\, ds$$

при $x \in \mathbb{T}$, $N > 2H > 2$ или $H > 2N > 2$ выполнена оценка $|R(N,H,x)| \le C = 15$.

10*. Доказать, что если $\lambda > 100$ и $x, y \in \mathbb{T}$, то существует такой зависящий от точки номер $N_0 = N_0(x,y)$, что если M и N больше N_0, $\frac{1}{10} \le \frac{M}{N} \le 10$, и оба натуральных числа M, N лежат одновременно либо на $[1,\sqrt{\lambda}]$, либо на $[\lambda^2,\infty)$, то

$$\left| \int_Q e^{i\lambda xt} \frac{\sin N(t-y)}{t-y} \int_{\frac{2\pi}{3}-x}^{\frac{4\pi}{3}-x} \frac{\sin Mu \cos \lambda tu}{u}\, du \right| < C$$

для некоторой абсолютной постоянной C.

11. Пусть у двойного ряда $\sum_{m,n} c_{m,n}$ равны нулю все члены, у которых оба индекса m и n отличны от нуля. Доказать, что для любого $U \in \mathcal{A}$ частичная сумма S_U этого ряда совпадает с некоторой прямоугольной суммой этого же ряда.

12. Доказать, что для функции с вещественными значениями все U-суммы её ряда Фурье вещественны.

13. Доказать, что если $c_{0,n}(f) = 0$ и $c_{m,0}(f) = 0$, то для любого $U \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$S_U(f,x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(t,s) D_U(x-t,y-s)\,dt\,ds = \frac{4}{\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} G(t,s) E_U(x-t,y-s)\,dt\,ds,$$

где $G(x,y)$ — функция с коэффициентами Фурье $c_{m,n}(G) = c_{m,n}(f)\cdot|m|^{\frac{\alpha}{2}}\cdot|n|^{\frac{1-\alpha}{2}}$, а

$$E_U(x,y) = \sum_{(m,n)\in U} \frac{\cos mx \cos ny}{m^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{1-\alpha}{2}}}.$$

14. Доказать, что если $\{w'_{m,n}\}$ и $\{w''_{m,n}\}$ — множители Вейля для некоторой сходимости п.в. (например, для U-сходимости), и $w_{m,n} = \min\{w'_{m,n}, w''_{m,n}\}$, то $\{w_{m,n}\}$ — тоже множитель Вейля для той же сходимости.

15. Доказать для функции $f \in L_2(\mathbb{T}^2)$ равенство

$$I(h,t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} |f(x+h,y+t) - f(x-h,y+t) - f(x+h,y-t) + f(x-h,y-t)|^2\,dx\,dy =$$

$$= 4\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |c_{m,n}(f)|^2 \sin^2 mh \sin^2 nt.$$