Программа специального курса «Введение в кратные тригонометрические ряды»[1]
Мех-мат, осень 2018/19 уч.г.

1. Кратные числовые ряды и виды их сходимости. Стремление к нулю общего члена ряда при сходимости по Прингсхейму.

2. Кратная тригонометрическая система. Представление частичных сумм через ядра Дирихле и прямоугольных средних через ядра Фейера. Лемма Римана — Лебега о стремлении коэффициентов Фурье к нулю.

3. Сходимость кратных средних Чезаро для непрерывных функций и для функций из $L_p(\mathbb{T}^m)$.

4. Сохраняющие меру преобразования. Существование сохраняющего классическую меру преобразования отрезка на куб.

5. Многомерная теорема Хаусдорфа — Юнга. Многомерная теорема Рисса.

6. Многомерная теорема Пэли.

7. Принцип локализации для крестообразных окрестностей. Оценки для

$$\int_a^b \frac{\cos lx}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{\sin^2(lx)}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx.$$

8. Пример непрерывной функции, для которой не выполняется свойство локализации в смысле обычной окрестности.

9. Многомерный признак Дини.

10. Достаточное условие сходимости ряда Фурье по Прингсхейму почти всюду в терминах модуля непрерывности в пространстве $L_1(\mathbb{T}^m)$.

11. Сходимость почти всюду кубических частичных сумм для функций из $L_2(\mathbb{T}^m)$.

12. Оценка нормы в $L_1(\mathbb{T}^m)$ мажоранты частичных сумм для функции из $L_2(\mathbb{T}^m)$ (максимальное неравенство Колмогорова — Селивёрстова).

13. Множитель Вейля. Теорема Качмажа — Жижиашвили о множителе Вейля для сходимости прямоугольных сумм почти всюду.

14. Теорема Ульянова — Жижиашвили об условии типа Дини для сходимости почти всюду по Прингсхейму. Достаточное условие сходимости ряда Фурье по Прингсхейму почти всюду в терминах модуля непрерывности в пространстве $L_2(\mathbb{T}^m)$.

15. Классы ограниченной Λ-вариации в одномерном случае. Точки разрыва функции ограниченной Λ-вариации.

16. Стремление Λ-вариации по стягивающимся интервалам к нулю. Случай непрерывной функции. Оценка коэффициентов Фурье функции ограниченной Λ-вариации на отрезке.

17. Теорема Ватермана о сходимости ряда Фурье функции ограниченной гармонической вариации.

18. Λ-вариация функции двух переменных. Стремление к нулю вариации по двум переменным на стягивающихся окрестностях регулярной точки.

19. Стремление к нулю вариаций по одному переменному (младших компонент) на стягивающихся окрестностях регулярной точки. Случай непрерывной функции. Лемма об умножении на функцию одного переменного.

20. Лемма о гармонической вариации функции $\varphi(s) = \int\limits_{\Delta^1} f(t,s)\frac{\sin Nt}{t}\,dt$. Лемма об оценке интеграла $\int\limits_{\mathbb{T}^2} f(t,s)\frac{\sin Nt}{t}e^{iMs}\,dt\,ds$. Лемма о локализации и переходе к модифицированным ядрам Дирихле.

21. Лемма об оценке интеграла $\int\limits_{\Delta} f(t,s)\frac{\sin Nt}{t}\frac{\sin Ms}{s}\,dt\,ds$. Теорема о сходимости ряда Фурье функции ограниченной гармонической вариации по прямоугольникам.

[1] Название в зачетке будет проставляться согласно требованиям учебной части

22. Пример Феффермана: две леммы об оценке величины

$$R(N,H,x)=\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}\frac{\sin N(s-x)}{s-x}e^{iHs}\,ds,$$

переход к модифицированным ядрам Дирихле.

23. Пример Феффермана: лемма о малом изменении «номеров», оценка частичных сумм для f_λ с номерами, далекими от λ, основная лемма о больших частичных суммах.

24. Пример Феффермана: Построение функции, непрерывной почти всюду, с почти всюду расходящимся рядом Фурье.

Лектор, профессор А. Н. Бахвалов

Список задач к специальному курсу «Введение в кратные тригонометрические ряды»

1. Привести пример множества B, для которого из B-сходимости двойного ряда по неотрицательным номерам к нулю следует стремление к нулю его члена $c_{\mathbf{n}}$ при $\max_k n_k\to\infty$.

2. Доказать, что если функция k раз непрерывно дифференцируема, то для любого набора $\{k_j\}$ неотрицательных целых чисел, $\sum_{j=1}^m k_j=k$, при $n_j\neq 0$ выполнена оценка

$$|c_{\mathbf{n}}(f)|=o\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^m |n_j|^{k_j}}\right)$$

3. Доказать, что для функции с модулем непрерывности

$$\omega(f,\delta)_1=\sup_{\|\mathbf{y}\|\le\delta}\|f(\cdot)-f(\cdot+\mathbf{y})\|_1$$

выполняется оценка

$$|c_{\mathbf{n}}(f)|=O\left(\min_{j=1,\dots,m}\omega(f,\frac{\pi}{|n_j|})_1\right).$$

4*. Доказать, что если функция $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$ равна нулю в крестообразной δ-окрестности нуля, то для любого $\delta_1\in(0,\delta)$ ряд Фурье f сходится по Прингсхейму к нулю равномерно на $[-\delta_1,\delta_1]^m$.

5. Доказать (в одномерном случае), что класс $\Lambda BV(\Delta)$ вложен в класс $\Gamma BV(\Delta)$, если

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{\gamma_k}\le C\sum_{k=1}^n\frac{1}{\lambda_k}.$$

6. Доказать неаддитивность гармонической вариации по объединению двух смежных отрезков.

7*. Доказать, что если последовательность $\{\lambda_n\}$ задает класс Ватермана, то можно выбрать последовательность, задающую тот же класс, у которой отношение λ_n/λ_{n+1} стремится к единице.

8. Аддитивна ли двумерная (обычная) вариация в смысле Харди (= полная) на прямоугольнике — объединении двух смежных прямоугольников? А в смысле Витали (= только по двум переменным)?

9. Доказать, что индикатор треугольника $\{(x,y)\,:\,0\le x\le y\le 1\}$ принадлежит классу $HBV([-\pi,\pi]^2)$.