Программа спецкурса «Дополнительные главы комплексного анализа и некоторые приложения, часть I»

1. Комплексные числа и планиметрия (1 лекция), [1].

2. Метрическое доказательство Теоремы Жордана (о замкнутой жордановой кривой на плоскости) и её следствия (по работе [2], требуется 2-3 лекции).

(1) Доказательство, что всегда есть ограниченная компонента дополнения.
(2) Доказательство, что их не более одной.

3. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского (2 лекции), [1]. Выполнение всех аксиом, кроме параллельности. Анализ в пЛ.

4. Регулярные векторные поля на плоскости. Теория обтекания крыла: теоремы Чаплыгина и Жуковского ([3], гл. III, §2; 2-3 лекции).

(1) До обтекания цилиндра с вихрем (искл).
(2) Обтекание цилиндра с вихрем. Крыло Жуковского. Условие Чаплыгина.
(3) Формулы Чаплыгина и Жуковского.

5. Формула Помпейю. Свойства потенциала Коши ограниченной функции на компакте, [1].

6. Определение основных пространств функций. Доказательство теоремы Рунге, [1].

7. Локализационный оператор Витушкина и его свойства, [1].

8. Стандартное разбиение единицы и оценочная лемма при касании третьего порядка на ∞, [1].

9. Доказательство теорем Мергеляна о приближении полиномами и рациональными функциями комплексного переменного, [1].

10. Следствия теоремы Мергеляна: уточненные варианты интегральной теоремы и формулы Коши, формулы Коши для производных и теоремы о вычетах, [1].

11. Примеры Рот и Долженко об отсутствии равномерной рациональной аппроксимации ([1]; [4], гл. II: с. 41-42; гл. VIII: с. 285-287).

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Парамонов П.В. Настоящий конспект лекций (ПдФ) по спецкурсу, 2024.

[2] Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. *Доказательство Х. Тверберга теоремы о замкнутой жордановой кривой.*// Алгебра и анализ. Изд. Наука (СПб.). 2015, т. 27:5, с. 207-220.

[3] Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М. "Наука 1965.

[4] Гамелин Т. "Равномерные алгебры". М., "Мир 1973.

Список задач к экзамену по указанному спецкурсу, часть I.

Задача 1. Доказать теорему Брианшона или теорему Паскаля о шестиугольниках.

Задача 2. Пусть γ – замкнутый жорданов путь в $\mathbb{C}$. По теореме Жордана, $\mathbb{C} \setminus [\gamma] = D \sqcup \Omega$, где D – ограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, Ω – неограниченная. Доказать, что $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ для всех $z \in \Omega$, $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ (или $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv -1$) для всех $z \in D$.

Задача 3. Доказать неравенство треугольника для метрики Лобачевского в модели Пуанкаре.

Задача 4. Верна ли в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского теорема о медианах треугольника?

Задача 5. Пусть $D \subset \Pi_+$ – треугольник в пЛ, т.е. множество точек, ограниченных со всех сторон тремя отрезками пЛ. Пусть α, β, γ – абсолютные величины *внутренних* углов этого треугольника (в радианах). Доказать, что $S^+(D) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Задача 6. Доказать, что модельное обтекание вертикального барьера $(0, i]$ регулярным течением в верхней полуплоскости (конформный образ горизонтального течения) является вполне регулярным. Доказать отсутствие вполне регулярности для течения, определяемого каким-либо стандартным диполем.

Задача 7. Для диполя с параметром $\mu = 4\pi$ и центром в нуле найти время движения частицы по каждой своей замкнутой траектории.

Задача 8. Для внешности (симметричного) крыла Жуковского с параметрами $\theta = 0$, $\beta = 3$ найти функцию Шварца и её особые точки.

Задача 9. Доказать следующий вариант теоремы Рунге. Если область D односвязна в $\mathbb{C}$, то пространство всех полиномов комплексной переменной плотно в пространстве $\mathcal{A}(D)$.

Задача 10. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Доказать, что оператор Витушкина V_φ непрерывен в пространстве $\operatorname{Lip}_\tau(\mathbb{C})$, $\tau \in (0, 1)$.

Задача 11. Привести пример компакта K, у которого K° связна, односвязна и плотна в K, но $C_\mathcal{A}(K) \neq R(K)$ (пример Долженко).

Задача 12. Пусть K_1 – замкнуто, а K_2 – компакт в $\mathbb{C}$, причем $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Если $f \in BC(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2))$, то существуют такие f_1 и f_2 класса $BC(\mathbb{C})$, голоморфные вне K_1 и K_2 соответственно, что $f = f_1 + f_2$. Эти f_1 и f_2 определены однозначно с точностью до аддитивных постоянных.

Задача 13. Пусть $K = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$, и пусть $f \in C(K)$. Верно ли, что если $f^2 \in P(K)$, то и $f \in P(K)$?

Задача 14. Пусть K – компакт в $\mathbb{C}$ со связным дополнением, и пусть $f \in C(K)$. Доказать, что если $f^2 \in P(K)$, то и $f \in P(K)$.