

Программа спецкурса «Дополнительные главы комплексного анализа и некоторые приложения, 1 семестр»

1. Комплексные числа и планиметрия.
2. Метрическое доказательство Теоремы Жордана (о замкнутой жордановой кривой на плоскости) и ее следствия (по работе [2]).
 - (1) Доказательство, что всегда есть ограниченная компонента дополнения.
 - (2) Доказательство, что их не более одной.
3. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Выполнение всех аксиом, кроме параллельности. Анализ в п.Л.
4. Регулярные векторные поля на плоскости. Теория обтекания крыла: теоремы Чаплыгина и Жуковского (см. также [3], гл. III, §2).
 - (1) До обтекания цилиндра с вихрем (искл.).
 - (2) Обтекание цилиндра с вихрем. Крыло Жуковского. Условие Чаплыгина.
 - (3) Уравнения движения для идеальной жидкости. Закон Эйлера — Бернулли.
 - (4) Формулы Чаплыгина и Жуковского.
5. Формула Помпейю. Свойства потенциала Коши ограниченной функции на компакте.
6. Определение основных пространств функций. Доказательство теоремы Рунге.
7. Локализационный оператор Витушкина и его свойства.
8. Стандартное разбиение единицы и оценочная лемма при касании третьего порядка на ∞ .
9. Доказательство теорем Мергеляна о приближении полиномами и рациональными функциями комплексного переменного.
10. Следствия теоремы Мергеляна: уточненные варианты интегральной теоремы и формулы Коши, формулы Коши для производных и теоремы о вычетах.
11. Примеры Рот и Долженко об отсутствии равномерной рациональной аппроксимации (см. также [4], гл. II: с. 41-42; гл. VIII: с. 285-287).

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Парамонов П.В. Конспект лекций (ПДФ) по спецкурсу, 2024.
- [2] Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. *Доказательство Х. Тверберга теоремы о замкнутой жордановой кривой.*// Алгебра и анализ. Изд. Наука (СПб.). 2015, т. 27:5, с. 207-220.

[3] Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М. “Наука”, 1965.

[4] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М., “Мир”, 1973.

Задачи к экзамену по спецкурсу, 1 семестр

- Задача 1.** Доказать теорему Бриансона или теорему Паскаля о шестиугольниках.
- Задача 2.** Пусть γ — замкнутый жорданов путь в $\mathbb{C}$. По теореме Жордана, $\mathbb{C} \setminus [\gamma] = D \sqcup \Omega$, где D — ограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, Ω — неограниченная. Доказать, что $\text{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ для всех $z \in \Omega$, $\text{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ (или $\text{ind}_\gamma(z) \equiv -1$) для всех $z \in D$.
- Задача 3.** Доказать неравенство треугольника для метрики Лобачевского в модели Пуанкаре.
- Задача 4.** Верна ли в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского теорема о медианах треугольника?
- Задача 5.** Пусть $D \subset \mathbb{P}_+$ — треугольник в пЛ, т.е. множество точек, ограниченных со всех сторон тремя отрезками пЛ. Пусть α, β, γ — абсолютные величины *внутренних* углов этого треугольника (в радианах). Доказать, что $S^+(D) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.
- Задача 6.** Доказать, что модельное обтекание барьера $(0, i]$ регулярным течением в верхней полуплоскости (конформный образ горизонтального течения) является вполне регулярным. Доказать отсутствие вполне регулярности для течения, определяемого каким-либо стандартным диполем.
- Задача 7.** Для диполя с параметром $\mu = 4\pi$ и центром в нуле найти время движения частицы по каждой своей замкнутой траектории.
- Задача 8.** Для внешности симметричного крыла Жуковского с параметрами $\theta = 0$, $\beta = 3$ найти функцию Шварца и ее особые точки.
- Задача 9.** Доказать следующий вариант теоремы Рунге. Если область D односвязна в $\mathbb{C}$, то пространство всех полиномов комплексной переменной плотно в пространстве $\mathcal{A}(D)$.
- Задача 10.** Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Доказать, что оператор Витушкина V_φ непрерывен в пространстве $\text{Lip}_\tau(\mathbb{C})$, $\tau \in (0, 1)$.
- Задача 11.** Привести пример компакта K , у которого K° связна, односвязна и плотна в K , но $C_A(K) \neq R(K)$ (пример Долженко).
- Задача 12.** Пусть K_1 замкнуто, а K_2 — компакт в $\mathbb{C}$, причем $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Если $f \in C(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2))$, то существуют такие функции f_1 и f_2 класса $C(\mathbb{C})$, голоморфные вне K_1 и K_2 соответственно, что $f = f_1 + f_2$. Эти функции f_1 и f_2 определены однозначно с точностью до аддитивных постоянных.
- Задача 13.** Пусть $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, и пусть $f \in C(K)$. Верно ли, что если $f^2 \in P(K)$, то и $f \in P(K)$?
- Задача 14.** Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ со связным дополнением, и пусть $f \in C(K)$. Доказать, что если $f^2 \in P(K)$, то и $f \in P(K)$.

Программа спецкурса «Дополнительные главы комплексного анализа и некоторые приложения, 2 семестр»

1. Аналитическая емкость γ : ее свойства и связь с устранимыми особенностями в классе ограниченных голоморфных функций (см. также [2], гл. VIII).
2. Аналитическая емкость α . Оценки емкостей γ и α (см. также [2], гл. VIII).
3. Локализационная теорема Бишопа. Топологические и метрические условия совпадения $C_A(X)$ и $R(X)$. Примеры отсутствия аппроксимации (см. также [3], гл. III).
4. Критерий Витушкина о приближении рациональными функциями для классов функций: доказательство необходимых условий приближаемости и предварительные оценки (см. также [2], гл. VIII; [4]).
5. Критерий Витушкина для классов функций: построение групп индексов и доказательство основных оценок приближения (по работе [4]).
6. Теорема Мельникова об оценке интеграла Коши (см. также [2], гл. VIII, п. 12).
7. Критерии равномерной приближаемости рациональными дробями для индивидуальных функций (по работе [4]).
8. Равномерные приближения с касанием мероморфными и целыми функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$ (см. также [3], Гл. 4, § 2; [5]).
9. Некоторые приложения: радиальные предельные значения целых функций (см. также [3], Гл. 4, § 5).
10. Эллиптические квадратичные формы; невырожденность (по работе [6]).
11. Фундаментальные решения для однородных эллиптических уравнений второго порядка (по работе [6], см. также [7], пп. 3.3 и 6.2).

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Парамонов П.В. Конспект лекций (ПДФ) по спецкурсу, 2024.
- [2] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М., “Мир”, 1973.
- [3] Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М., “Мир”, 1986.
- [4] Парамонов П.В. *Некоторые новые критерии равномерной приближаемости функций рациональными дробями.* // Матем. сб. 1995, т. 186:9, с. 97-112.
- [5] Парамонов П.В., Voivin A. *Аппроксимация мероморфными и целыми решениями эллиптических уравнений в банаховых пространствах распределений.* // Матем. сб. 1998, т. 189:4, с. 3-24.

[6] Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. *Явный вид фундаментальных решений некоторых эллиптических уравнений и связанные с ними B - и C -емкости.* // Матем. сб. 2023, т. 214:4, с. 114–131.

[7] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, том. 1, Теория распределений и анализ Фурье. М.: “Мир”, 1986, 464 с.

Задачи к экзамену по спецкурсу, 2 семестр

Задача 1. Доказать, что если Λ_1 — длина на прямой, а компакт K лежит на прямой, то

$$\frac{\Lambda_1(K)}{4} \leq \gamma(K) \leq \frac{\Lambda_1(K)}{\pi}.$$

Задача 2. Если K — замыкание жордановой области, то $\gamma(K) = \alpha(K) \asymp \text{diam}(K)$.

Задача 3. (Нерешенная проблема). Верно ли, что для любых компактов K_1 и K_2 в $\mathbb{C}$ справедливо неравенство $\gamma(K_1 \cup K_2) \leq \gamma(K_1) + \gamma(K_2)$?

Задача 4. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ с условием $\mathcal{M}^1(K) = 0$. Тогда $\gamma(K) = 0$. В частности, это так при $\dim_H(K) < 1$.

Задача 5. Пусть K является ГУНФ-компактом. Тогда для всякой области D в $\mathbb{C}$ всякая функция f , голоморфная в $D \setminus K$ и непрерывная в D , голоморфна в D .

Задача 6. Доказать критерий Витушкина для классов функций в случае $X^\circ = \emptyset$ (план, сведение к доказательству теоремы Мергеляна).

Задача 7. Пусть X_1 и X_2 — компакты в $\mathbb{C}$ с условиями $C(X_1) = R(X_1)$ и $C(X_2) = R(X_2)$. Доказать, что тогда $C(X_1 \cup X_2) = R(X_1 \cup X_2)$.

Задача 8. Привести примеры двух компактов X_1 и X_2 в $\mathbb{C}$ с условиями $C_{\mathcal{A}}(X_1) = R(X_1)$ и $C_{\mathcal{A}}(X_2) = R(X_2)$, но $C_{\mathcal{A}}(X_1 \cup X_2) \neq R(X_1 \cup X_2)$.

Задача 9. Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, $f \in C(X)$ и $f \neq 0$ на X . Доказать, что если $f^2 \in R(X)$, то $f \in R(X)$.

Нерешенная проблема: остается ли верным указанный факт, если убрать условие $f \neq 0$ на X ?

Задача 10. Доказать усиленный вариант принципа аргумента и его основных следствий.

Задача 11. Доказать существование двух *гомеоморфных* компактов X_1 и X_2 в $\mathbb{C}$ таких, что $C_{\mathcal{A}}(X_1) = R(X_1)$, но $C_{\mathcal{A}}(X_2) \neq R(X_2)$.

Задача 12. Доказать, что в теореме Аракеяна условие $(K - \mathbb{L})$ на множество X является также необходимым для наличия указанных аппроксимаций.

Задача 13. Доказать существование целой функции f , у которой образ $f(\mathbb{R})$ всюду плотен в $\mathbb{C}$.

Задача 14. Доказать формулы фундаментальных решений для уравнений Лапласа и Бицадзе в $\mathbb{R}^2$.