

**Программа с/к "Геометрическая теория приближений"**  
**Осень 2020/21 уч.г.**

1. Выпуклость чебышевского множества в  $\mathbb{R}^n$ . Доказательства Л. Бунта и Л.П. Власова.
2. Теорема Л.П. Власова о выпуклости чебышевского множества с непрерывным оператором метрического проектирования в равномерно выпуклом гладком пространстве. Характеризация чебышевских множеств в строго выпуклом гладком конечномерном пространстве.
3. Пример Данхэма несолнечного и несвязного чебышевского множества в  $C[0, 1]$ .
4. Аппроксимативная компактность, ее связь с непрерывностью метрической проекции. Теорема Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина о равносильности аппроксимативной компактности и выпуклости для чебышевских множеств в равномерно выпуклом гладком пространстве. Пространства Ефимова-Стечкина и их характеристики.
5. Существование нетривиального чебышевского множества и аппроксимативно компактного, но не ограничено компактного множества в произвольном  $WCG$ -пространстве.
6. Теорема С.В. Конянина о выпуклости чебышевского множества в гильбертовом пространстве при условии, что точки разрыва метрической проекции лежат на конечном числе липшицевых гиперповерхностей.
7. Гипотеза о множествах со свойством единственности наиболее удаленной точки. Теорема Асплунда о существовании чебышевской каверны в гильбертовом пространстве при условии существования невыпуклого чебышевского множества.
8. Теорема Л.П. Власова о  $B$ -связности чебышевского множества в равномерно выпуклом пространстве.
9. Выпуклость  $N$ -чебышевского множества в равномерно выпуклом пространстве для четного  $N$ . Пример невыпуклого 3-чебышевского множества в равномерно выпуклом пространстве.
10. Выпуклость множества в гильбертовом пространстве, чебышевского относительно эллипсоидов, достаточно близких к шару.
11. Теоремы Моцкина и Брэндстеда–Бердышева о двумерных и трехмерных банаховых пространствах, в которых всякое чебышевское множество выпукло. Теорема И.Г. Царькова (б/д).
12. Монотонная линейная связность чебышевского множества на нормированной плоскости. Пример не монотонно линейно связного чебышевского множества. Теорема А.Р. Алимова о солнечности монотонно линейно связного чебышевского множества.
13. Теорема А.Р. Алимова–Е.В. Щепина о выпуклости чебышевского множества по направлениям, касательным к единичной сфере.
14. Теорема о дихотомии для  $m$ -членных приближений относительно произвольного словаря в гильбертовом пространстве.
15. Слабый жадный и слабый ортогональный жадный алгоритмы, их сходимости.
16. Скорость сходимости жадных алгоритмов для начальных элементов из выпуклой оболочки словаря.

## ЗАДАЧИ

Для сдачи спецкурса необходимо решение одной из нижеследующих задач или одной из задач, сформулированных на лекциях.

1. Множество  $M$  в гильбертовом пространстве обладает тем свойством, что метрическая проекция  $P_M(x)$  одноточечна для всех элементов  $x$  с  $\rho(x, M) > 1$ . Является ли  $M$  чебышевским?
2. Доказать, что секвенциально слабо компактное множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве аппроксимативно компактно.

3. Доказать, что множество рациональных функций степени не выше  $n$  аппроксимативно компактно в  $L_2[0, 1]$ .
4. Построить аппроксимативно компактное, но не ограниченно компактное множество в пространстве а)  $C[0, 1]$ ; б)  $L_1[0, 1]$ ; в)  $c_0$ ; г)  $l_1$ .
5. Совпадает ли множество  $\Phi(x)$  из доказательства теоремы Колягина с множеством всех слабых пределов минимизирующих последовательностей для  $x$ ?
6. Доказать, что всякое чебышевское множество в конечномерном пространстве  $B$ -связно.
7. Охарактеризовать все компакты на евклидовой плоскости, метрическая проекция на которые не более чем двужначна.
8. Привести пример 2-чебышевского, но не 3-чебышевского множества в каком-нибудь банаховом пространстве.
9. Доказать, что если всякая достижимая точка  $S(X)$  является точкой гладкости, то крайние точки сферы  $S(X^*)$  сопряженного пространства всюду плотны на  $S(X^*)$ .
10. Доказать, что в пространстве  $l_\infty^n$  всякое чебышевское множество монотонно линейно связно.
11. Следует ли из  $B$ -связности множества его монотонно линейная связность? А наоборот?
12. Верно ли, что (строго) монотонная кривая в банаховом пространстве является чебышевским множеством в этом пространстве?
13. Привести пример словаря в гильбертовом пространстве, при жадных приближениях по которому нормы остатков могут сходиться к нулю сколь угодно медленно.
14. Придумать словарь в  $c_0$ , при  $m$ -членных приближениях по которому все монотонные стремящиеся к нулю последовательности реализуются как последовательности  $m$ -членных уклонений.