

Программа спецкурса по CR-геометрии

В.К. Белошапка, М.А. Степанова

1. Вещественные подмногообразия комплексного пространства. Комплексная касательная. Вполне вещественное, комплексное, порождающее подмногообразие. CR-многообразие и его CR-тип. Примеры.
2. Векторные поля и дифференциальные формы на CR-многообразии. CR-векторные поля, CR-функции, касательные уравнения Коши-Римана. Связь CR-функций с голоморфными функциями.
3. Локальные уравнения CR-многообразия. Координатные представления CR-векторных полей.
4. Форма Леви вещественной гиперповерхности. Локальное голоморфное продолжение CR-функции с гиперповерхности. Форма Леви CR-многообразия коразмерности больше единицы. Леви-невыврожденность, псевдовыпуклость, продолжение CR-функций.
5. Распределения линейных подпространств и их задание с помощью дифференциальных форм и векторных полей. Интегрируемость распределения и теорема Фробениуса. Распределение комплексных касательных пространств на CR-многообразии и вырождение формы Леви, распределение ядер формы Леви.
6. Голоморфные отображения CR-многообразий, простейшие локальные инварианты.
7. Нормальная форма ростка аналитической гиперповерхности (Черн-Мозер).
8. Тип ростка CR-многообразия по Блуму-Грэмму, его инвариантность. Конечный тип. Аналитическое и геометрическое определение типа и их эквивалентность.
9. Алгебра Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов ростка CR-многообразия. Экспоненциальное отображение и локальная группа Ли голоморфных автоморфизмов.
10. Формальная эквивалентность многообразий и ее связь с голоморфной (теорема Зайцева). Зависимость ростка отображения от его струи (Бауэнди-Эбенфельт-Ротшильд).
11. 3-мерная сфера в 2-мерном комплексном пространстве. Неинтегрируемость распределения комплексных касательных на сфере по Фробениусу. Вычисление алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов сферы и соответствующей локальной группы.
12. Леви-невыврожденные модельные гиперквадрики: алгебра и группа автоморфизмов. Касательная модельная гиперквадрика для ростка вещественной гиперповерхности. Оценка размерности алгебры и группы автоморфизмов ростка, конструкция А. Пуанкаре для полей и отображений.
13. Голоморфная невырожденность. Критерий конечномерности алгебры автоморфизмов для гиперповерхности. Критерий конечномерности алгебры автоморфизмов для ростков конечного типа по Блуму-Грэмму.
14. Конечная невырожденность ростка CR-многообразия. Связь с голоморфной невырожденностью.
15. Касательная квадратичная модельная поверхность ростка высокой коразмерности, конструкция Пуанкаре. Естественная градуировка на алгебре Ли автоморфизмов (структура градуированной алгебры Ли). Групповая структура на однородной модельной поверхности.
16. Классификация невырожденных квадрик коразмерности два и описание их автоморфизмов (теория Шевченко). Квадрики типов (3,3) и (3,4) (Палинчак, Анисова, Арбатский). Примеры Уткина.
17. Теорема Мальгранжа-Эренпрайса-Паламодова, критерий конечномерности автоморфизмов квадрики. Исключительные квадрики.
18. Касательная модельная поверхность ростка CR-многообразия произвольного Блум-Грэм типа. Условие невырожденности. Конструкция Пуанкаре. Естественная градуировка на алгебре Ли автоморфизмов (структура градуированной алгебры Ли).
19. Взвешенно однородные модельные поверхности.

20. Голоморфная эквивалентность модельных поверхностей. Квазилинейная эквивалентности в пространстве квазиоднородных форм. Орбиты, инварианты, пространства модулей.
21. Сферичность CR-многообразия и ее критерии (Лобода, Меркер, Степанова).
22. Особенности CR-структуры, RC-особые точки, уравнения RC-особых ростков.
Ростки бесконечного типа, особенности гладкой структуры, конуса.
23. Реализация классических групп в виде групп автоморфизмов областей Картана (матричный круг, матричная полуплоскость, матричная арифметика).
24. Симметрические области ограниченного вида и их реализация в виде областей Зигеля 2-го рода (Винберг, Гиндикин, Пятецкий-Шапиро).
25. Положительно определенные квадратики как остовы областей Зигеля 2-го рода. Описание автоморфизмов областей Зигеля 2-го рода (Кауп, Сатаке).
26. Группа автоморфизмов невырожденной голоморфно однородной модельной поверхности как подгруппа группы Кремоны ограниченной степени (Туманов, Белошапка).
27. Классификация голоморфно однородных вещественно-аналитических многообразий малой размерности. Классификация Картана, Белошапки-Коссовского, Лободы.
28. CR-многообразие как G-структура, редукция G-структуры. Теория Танаки : фундаментальная алгебра, продолжение, стандартная модель.
29. Редукция CR-структуры к e-структуре (по Черну-Мозеру).
30. Универсальная фундаментальная алгебра, вполне невырожденные модельные поверхности, g_{+} -теорема жесткости (Сабзевари-Спиро-Грегорович).
31. Структура конечномерных вещественных коммутативных ассоциативных алгебр с единицей (теорема Веддебёрна-Артина). Алгебраизация сферы в S^2 и вещественные ассоциативные квадратики (RAQ-квадратики) (Ежов, Шмальц). Алгебраизация невырожденной модельной поверхности и их автоморфизмов (Белошапка).
32. Многомерный принцип симметрии и многообразия Сегре. Многообразия Сегре как семейства решений дифференциальных уравнений (Коссовский, Сухов).

Список литературы.

1. Б.В. Шабат, [Введение в комплексный анализ. Часть 2. Функции нескольких переменных.](#) Москва, «Наука» 1985, 464 с.
2. Е.М.Чирка, “Введение в геометрию CR-многообразий”, УМН, 46:1(277) (1991), 81–164.
3. M. Baouendi, P. Ebenfelt, L. Rothschild, Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings, Princeton University Press, 1999.
4. Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, Пер. с англ. 1970, 412 с.
5. Э.Б.Винберг, С.Г.Гиндикин, И.И.Пятецкий-Шапиро, “О классификации и канонической реализации комплексных однородных ограниченных областей”, Тр. ММО, 12, ГИФМЛ, М., 1963, 359–388.
6. -- N.Tanaka, On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups. J.Math.Koyto Univ., v.10, N1, 1970, pp.1-82.
-- N.Tanaka, On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections, Japan. J. Math. Vol. 2, No. 1, 1976, pp.131–190.
7. S.S.Chern, J.K.Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Mathematica, 1974, 133:219.
8. Th.Bloom, I.Graham, On Type Conditions for Generic Real Submanifolds of C^n , Invent. Math. 40, 217–243 (1977).
9. – В.К.Белошапка, Вещественные подмногообразия комплексного пространства их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации, Успехи математических наук, т.57, №1, 2002, стр. 1–44.
– V.K.Beloshapka, Model CR Surfaces: Weighted Approach, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 30, No. 1, 2023, pp. 25–45.

А также статьи Я.Грегоровича, В.В.Ежова, А.В.Исаева, А.В.Лободы, Ж.Меркера, В.Каупа, Б.Кругликова, И.Г.Коссовского, Н.Г.Кружилина, Н.Ф.Палинчак. М.Сабзевари, М.А.Степановой, А.Сухова, А.Е.Туманова, Г.Шмальца, С.Н.Шевченко.