

# Программа спецкурса по аналитической сложности

В.К.Белошапка, М.А.Степанова

1. Разрешимость алгебраических уравнений в радикалах. Доказательство Арнольда теоремы Абеля. Преобразование Чирнгауза, резольвенты Лагранжа. XIII-я проблема Гильберта.
2. Проблема суперпозиций для непрерывных функций. Теорема Колмогорова-Арнольда. Функция как топологическое пространство — дерево функции Кронрода. Современные версии теоремы Колмогорова.
3. Суперпозиции гладких функций, теорема Витушкина. Оценки эpsilon-энтропии для разных функциональных классов.
4. Топологическая теория Галуа (Хованский).
5. Иерархия классов сложности аналитических функций двух переменных. Уравнение первого класса. Аналитическая сложность. Примеры Островского функций бесконечной сложности.
6. Псевдогруппа калибровочных преобразований. Инвариантность аналитической сложности. 3-ткани на плоскости, дифференциально-геометрическая теория: функция ткани, форма кривизны. Ткани нулевой кривизны и функции сложности один.
7. Стабилизатор функции, теорема о стабилизаторе. Характеристика функций 1-го класса как функций с 3-мерным стабилизатором.
8. Теорема Вейерштрасса и структура алгебраических функций сложности один.
9. Замена базовой функции иерархии. Предпорядок на аналитических функциях двух переменных. Примеры Степановой.
10. Дифференциальные инварианты калибровочной группы. Проблема эквивалентности функций. Уравнения 1-го класса для общей базовой функции.
11. Дифференциальные кольца и идеалы. Теорема Ритта-Роденбаша.
12. Схема суперпозиции и определяемый схемой класс. Порядок на схемах. Класс схемы как дифференциально-алгебраическое множество. Идеал класса схемы и его образующие (уравнения класса).
13. Оценки дифференциальных порядков и степеней дифференциальных образующих некоторых классов.
14. Оценка аналитической сложности полинома через степень, техника построения верхних оценок.
15. Сложность при дифференцировании и сложность при интегрировании.
16. Теорема Линдемана-Вейерштрасса и пример Степановой (решение уравнения теплопроводности бесконечной сложности). Гипотеза о сложности общей гипергеометрической функции. Проблема оценки аналитической сложности общей алгебраической функции.
17. Оценка аналитической сложности семейства решений дифференциального уравнения. Спектр уравнения по отношению к иерархии. Примеры.
18. Дифференциально-алгебраическое описание класса функций с 1-мерным стабилизатором.
19. Описание семейства решений сложности один для серии уравнений математической физики (Лапласа, теплопроводности, Бюргерса, Кортевега — де Фриза, ...).
20. Классификация многочленов степени два по сложности. Гипотезы о многочленах степени три.
21. Классы как бесконечномерные алгебраические множества и их касательные пространства. Линейные суперпозиции. Пример многочлена степени пять сложности три.

22. Общая индуктивная конструкция оценки сложности объектов генеральной совокупности. Примеры.
23. Колмогоровская аналитическая иерархия и ее сравнение с общей иерархией.
24. Ассоциативные аналитические функции двух переменных. Описание локально ассоциативных функций. Ассоциативные полиномы. Дистрибутивные пары.

Список литературы:

1. В.Б.Алексеев (по материалам с/к Арнольда), Теорема Абеля в задачах, Москва, Наука, 1976, сс.1--207.
2. В.В.Прасолов, Ю.П.Соловьев, Эллиптические функции и алгебраические функции, Москва, Факториал, 1997, сс.1 – 288.
3. A. Ostrowski, Ueber Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, Math. Z. 8, 241–298 (1920).
4. А.С.Кронрод, [О функциях двух переменных](#), Докл. АН СССР, 132:1 (1960),95–97.
5. В.И.Арнольд, О функциях трех переменных, Докл. АН СССР,114:4 (1957), 679–681.
6. А.Н.Колмогоров, [О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения](#), УМН, 13:4(82) (1958), 3–28.
7. А.Н.Колмогоров,  [\$\epsilon\$ -энтропия и  \$\epsilon\$ -емкость множеств в функциональных пространствах](#), Теория вероятн. и ее примен., 5:2 (1960), 222–227.
8. А.Г.Витушкин, Г.М.Хенкин, Линейные суперпозиции функций, УМН,22:1(133) (1967),77–124.
9. А.Г.Витушкин, 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы, УМН, 59:1(355) (2004),11–24.
10. И.Капланский, Введение в дифференциальную алгебру, Москва, изд. Иностранной литературы, 1959, 1–85.
11. В.Бляшке, Введение в теорию тканей, Москва, ГИТТЛ, 1957, 1–223.
12. Khovanskii A. G., Topological Galois theory. Solvability and unsolvability of equations in nite terms, Springer Monographs in Mathematics,XVIII, Springer, Berlin Heidelberg, 2014, 305pp.

А также работы В.К.Белошапки, В.А.Красикова, Т.М.Садыкова, М.А.Степановой на эту тему.