

**ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ**

*кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа*

1. (И.А. Шейпак) Последовательность a_n задается рекуррентно: $a_0 = 0$,
 $\int_{a_{n-1}}^{a_n} (1 + |\sin x|) dx = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$). Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n^3$.
2. (Д.В. Горяшин) Пусть функция f непрерывна и положительна на $[0; +\infty)$, и интеграл
 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Может ли сходиться интеграл

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx, \quad \text{где} \quad g(x) = \frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt}?$$

3. (П.А. Бородин) Для непрерывной на квадрате $[0, 1]^2$ функции f ее крест-приближение с узлом (a, b) при $f(a, b) \neq 0$ определяется как $CA(f; a, b)(x, y) = f(x, y) - f(a, y)f(x, b)/f(a, b)$. Докажите, что если f — многочлен степени не выше n , то за не более чем $n + 1$ произвольных последовательных крест-приближений получится тождественный нуль.
4. (В.В. Рыжиков) Пусть $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — биекция, сохраняющая меру Лебега μ ,
 A — множество положительной меры. Докажите, что если

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^N \Phi^n(A) \right) = o(N), \quad N \rightarrow \infty,$$

то для почти всякой точки $x \in A$ найдется такое n , что $\Phi^n(x) \in A$.

5. (J.W. Alexander) Пусть $P(z)$ — комплексный многочлен степени n , $P(0) = 0$, причем каждый из остальных $n - 1$ его корней имеет модуль больше n . Докажите, что отображение $z \rightarrow P(z)$ инъективно а) на окружности $\{z : |z| = 1\}$; б) в круге $\{z : |z| \leq 1\}$.