

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций и функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

_____/Кашин Б. С. /
«__» _____ 20__ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Функциональный анализ

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Направление подготовки (специальность):

01.03.01 «Математика»

Направленность (профиль) ОПОП:

Общий

Форма обучения:
очно-заочная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена
на заседании кафедры теории функций и функционального анализа
(протокол № __, «__» _____ 20__ года)

Москва 201__

На обратной стороне титула:

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по специальности «Математика» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение _____

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО: относится к базовой части ОПОП ВО.
2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть):
освоение дисциплин «математический анализ», «алгебра», «дифференциальные уравнения».
3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников (коды)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с компетенциями
ПК-1	Знать: основные понятия теории функций и функционального анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки основных утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.
ОПК-2	Уметь: решать задачи на вычисление и задачи теоретического характера в области функционального анализа.
УК-1, ОПК-3	Владеть: математическим аппаратом функционального анализа, методами решения задач и способами доказательства утверждений в этой области.

4. Формат обучения _____ очный _____ (отметить, если дисциплина или часть ее реализуется с использованием электронного обучения и (или) дистанционных образовательных технологий)
5. Объем дисциплины (модуля) составляет 8 з.е., в том числе 144 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 72 часа лекций, 72 часа семинаров), 144 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.
6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий

№	Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе			
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			Самостоятельная работа обучающегося, часы (виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр. – указываются при необходимости)
			Лек	Сем	Всего	
1.	Метрические пространства: основные понятия и примеры. Нормированные и евклидовы пространства. Пространства непрерывных и ограниченных функций. Пространства последовательностей.	16	4	4	8	8
2.	Полные метрические пространства. Банаховы и гильбертовы пространства. Примеры. Изометрия. Вложение метрического пространства в пространство ограниченных функций. Пополнение метрического пространства.	8	2	2	4	4
3.	Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категории. Примеры.	8	2	2	4	4
4.	Топологические пространства; примеры. Непрерывные отображения топологических пространств.	8	2	2	4	4
5.	Компакты в топологических пространствах и их свойства.	8	2	2	4	4
6.	Вполне ограниченные множества в метрических	16	4	4	8	8

	пространствах. Критерий вполне ограниченности в терминах фундаментальных последовательностей. Равносильность различных определений компакта в метрическом пространстве.					
7.	Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве. Критерий компактности в $B(M)$. Теорема Арцела.	8	2	2	4	4
8.	Теоремы о неподвижных точках: теорема о сжимающих отображениях и теорема Шаудера. Применения.	8	2	2	4	4
	Текущий контроль: Контрольная работа №1	2		2	2	
9.	Ортонормированные системы и базисы в евклидовых пространствах. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.	14	4	2	6	8
10.	Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и непрерывность оператора. Теорема Банаха-Штейнгауза.	8	2	2	4	4
11.	Теоремы Банаха об открытом отображении и обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Примеры применения.	8	2	2	4	4
	Текущий контроль: Контрольная работа №2	2		2	2	
12.	Теорема Хана-Банаха и ее следствия. Сопряженное пространство. Отделение выпуклых множеств. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид	14	4	2	6	8

	сопряженных к конкретным пространствам. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Ограниченность слабо ограниченных множеств.					
13.	Слабая и *-слабая сходимости; *-слабая компактность шара в сопряженном пространстве. Выделение *-слабо сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности функционалов на сепарабельном нормированном пространстве. Слабая сходимости и слабая компактность в гильбертовом пространстве.	8	2	2	4	4
14.	Компактные операторы и их свойства; примеры компактных и некомпактных операторов.	8	2	2	4	4
	Промежуточная аттестация: зачет, экзамен	4				4
15.	Обратный оператор; открытость множества обратимых операторов. Спектр и резольвента. Компактность и непустота спектра. Примеры. Теорема об отображении спектров для многочленов от ограниченных операторов. Норма и спектр оператора умножения на ограниченную функцию. Циклические векторы.	20	6	6	12	8
16.	Спектр компактного оператора. Альтернатива Фредгольма	16	4	4	8	8
17.	Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора. Совпадение нормы самосопряженного оператора с точной верхней гранью значений модуля его квадратичной формы на единичной сфере.	16	4	4	8	8
18.	Непрерывные функции от самосопряженных операторов. Унитарные операторы и унитарная эквивалентность операторов. Эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на	14	4	2	6	8

	функцию (случай оператора с циклическим вектором и общий случай). Теорема Гильберта-Шмидта.					
	Текущий контроль: Контрольная работа №3	2		2	2	
19. *	Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Явное вычисление спектральной меры для оператора умножения на аргумент и для проектора.	8	2	2	4	4
20.	Понятие о локально выпуклом пространстве. Примеры. Пространства D и S и сходимость в них.	8	2	2	4	4
21.	Обобщенные функции классов D' и S' . Производная обобщенной функции. Умножение обобщенной функции на гладкую. Носитель и сингулярный носитель обобщенной функции.	8	2	2	4	4
22.	Преобразование Фурье интегрируемых функций и его свойства. Формула обращения. Преобразование Фурье в S и его непрерывность. Преобразование Фурье в S' . Примеры.	16	4	4	8	8
23.	Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Преобразование Фурье в L_2 и теорема Планшереля. Полнота системы функций Эрмита. Спектр оператора преобразования Фурье.	8	2	2	4	4
24.	Свертка интегрируемых функций. Свертка обычной и обобщенной функций. Спектр оператор свертки. Использование преобразования Фурье и свертки для решения дифференциальных уравнений.	8	2	2	4	4
	Текущий контроль: Контрольная работа №4	2		2	2	
25. *	Пространства S, L, S_0 Соболева и их характеристика через пополнение по соболевской норме. Описание $W^{2,k}$ через преобразование Фурье. Теоремы вложения.	10	4	2	6	4

	Промежуточная аттестация: зачет, экзамен	4				4
	Всего часов	288	72	72	144	144

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

На каждом семинарском занятии студентам дается домашнее задание, состоящее из задач по пройденной теме, например, из задачника Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу, МЦМНО, 2017

(<http://маткнига.рф/wp-content/uploads/2017/01/978-5-4439-3092-3-Borodin-Savchuk-Shejpak-Zadachi-po-funktsionalnomu-analizu.pdf>)

В начале семинара преподаватель проводит опрос студентов и разбор домашнего задания.

В каждом семестре проводятся по 2 контрольные работы (на семинарах). Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ.

Примеры контрольных работ

5 семестр

Контрольная работа № 1

1. Исследовать сепарабельность пространства ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с $\sup$ -нормой.
2. Выяснить, является ли вполне ограниченным в $C[0,1]$ множество функций f , для которых $f(0)=f'(0)=0$ и $|f''(t)|<2$.
3. Доказать, что сепарабельность нормированного пространства равносильна сепарабельности единичной сферы в нем.

Контрольная работа № 2

1. Найти норму функционала f на $C[0,1]$, переводящего функцию x в интеграл от функции $x(t) \sin 4\pi t$.
2. Найти норму оператора A из $C[0,1]$ в $L_2 [0,1]$, переводящего функцию x в функцию y , значение которой в точке t есть t , умноженное на интеграл от $sx(s)$.
3. Привести пример непрерывного линейного функционала на $C[0,1]$, не имеющего максимума на замкнутом единичном шаре.

6 семестр

Контрольная работа № 1

1. Найти спектр следующего оператора A в $L_2 [0,1]$: $Ax(t)=\sin (1/t) x(t)$.
2. Найти две первые обобщенные производные функции $f(t)=|t|$.
3. Решить в D' уравнение $x F'=0$.

Контрольная работа № 2

1. Найти преобразование Фурье обобщенной функции, заданной обычной функцией $f(t)$, равной 0 при $t<0$ и $\sin t$ при $t>0$.
2. Найти спектр оператора A в $L_2(\mathbb{R})$, переводящего функцию x в функцию y , значение которой в точке t есть интеграл от $\exp(-|t-s|)x(s)$ по s по всей прямой.
3. Решить уравнение $F'-F=0$ в пространствах D' и S' .

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Примерный список экзаменационных вопросов:

5 семестр

1. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Полнота и сепарабельность. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра.
2. Нормированные пространства. Примеры: пространства непрерывных функций, интегрируемых функций и пространства последовательностей. Изометричность метрического пространства M части банахова пространства $B(M)$ и существование пополнения M .
3. Топологические пространства. Компактные множества и их свойства.
4. Вполне ограниченные множества. Критерий вполне ограниченности в терминах фундаментальных последовательностей.
5. Равносильность различных определений компакта в метрическом пространстве.

6. Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
7. Критерии компактности в $B(\Omega)$, $C[a,b]$ (теорема Асколи-Арцела) и l_2 .
8. Теоремы о неподвижных точках: теорема о сжимающих отображениях и теорема Шаудера.
9. Евклидовы пространства. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
10. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве.
11. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса--Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
12. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и его непрерывность.
13. Теорема Банаха-Штейнгауза.
14. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
15. Теорема Хана-Банаха и ее следствия. Сопряженное пространство. Отделение выпуклых множеств (без доказательства).
16. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам (без доказательства).
17. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Ограниченность слабо ограниченных множеств.
18. Топология $\sigma(E,F)$ и совпадение F с сопряженным к E с топологией $\sigma(E,F)$. Слабая и *-слабая топологии в случае нормированных пространств.
19. Теорема о *-слабой компактности шара в сопряженном пространстве (без доказательства). Выделение *-слабо сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности функционалов на сепарабельном нормированном пространстве. Слабая сходимост и слабая компактность в гильбертовом пространстве.

20. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.

6 семестр

1. Сопряженные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Равенство норм оператора и его сопряженного.
2. Спектр оператора. Сохранение обратимости при малых возмущениях. Замкнутость спектра, включение его в круг радиуса, равного норме оператора, и непустота.
3. Спектр диагонального оператора. Норма и спектр оператора умножения на функцию.
4. Строение спектра компактного оператора в бесконечномерном пространстве.
5. Альтернатива Фредгольма.
6. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Критерий Вейля и вещественность спектра самосопряженного оператора.
7. Равенства $\|A\| = \sup \{ |(Ax, x)| : \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ |\lambda| : \lambda \text{ лежит в } \sigma(A) \}$ для самосопряженного оператора.
8. Теорема Гильберта-Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
9. Понятие о локально выпуклом пространстве. Примеры. Пространства D и S и сходимость в них. Плотность D в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.
10. Обобщенные функции классов D' и S' . Производная обобщенной функции. Равенство $(\ln |x|)' = V.P. 1/x$. Носитель и сингулярный носитель.
11. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его основные свойства (непрерывность, ограниченность, производная преобразования Фурье, преобразование Фурье производной).
12. Формула обращения для преобразования Фурье (для точек непрерывности ограниченной интегрируемой функции с интегрируемым преобразованием Фурье). Формула обращения в точках дифференцируемости (без доказательства).
13. Преобразование Фурье в S и его непрерывность.

14. Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Инъективность преобразования Фурье. Полнота системы функций Эрмита.
15. Преобразование Фурье в S' . Преобразование Фурье дельта-функции.
16. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ и теорема Планшереля. Понятие всплеска (вейвлета).
17. Свертка интегрируемых функций. Свертка обычной и обобщенной функций. Использование преобразования Фурье и свертки для решения дифференциальных уравнений.
18. Пространства С.Л.Соболева $W^{p,k}$ и их характеристика через пополнение по соболевской норме.
19. Описание $W^{2,k}$ через преобразование Фурье. Теоремы вложения в L_q и C (без доказательства).
20. Унитарные операторы и унитарная эквивалентность операторов. Спектр оператора преобразования Фурье и спектр оператора свертки.
21. Теорема об отображении спектров для многочленов. Непрерывные функции от самосопряженных операторов и равенство $\|f(A)\| = \sup \{ |f(t)| : t \in \sigma(A) \}$.
22. Циклические векторы. Эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию (доказательство для оператора с циклическим вектором).
23. Проекторы и проекторнозначные меры. Представление самосопряженного оператора в виде интеграла по проекторнозначной мере. Явное вычисление спектральной меры для оператора умножения на аргумент и для проектора.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
Знания (виды оценочных средств: устные и письменные опросы и контрольные работы, тесты, и т.п.)	Отсутствие знаний по функциональному анализу	Фрагментарные знания по функциональному анализу	Общие, но не структурированные знания по функциональному анализу	Сформированные систематические знания по функциональному анализу
Умения (виды оценочных средств: практические контрольные задания, написание и защита рефератов на заданную тему и т.п.)	Отсутствие умений решать задачи по функциональному анализу	В целом успешное, но не систематическое умение решать задачи по функциональному анализу	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение решать задачи по функциональному анализу (неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение решать задачи по функциональному анализу
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)	Отсутствие навыков владения математическим аппаратом функционального анализа	Наличие отдельных навыков владения математическим аппаратом функционального анализа (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки владения математическим аппаратом функционального анализа, но используемые не в активной форме	Сформированные навыки владения математическим аппаратом функционального анализа, применяемые при решении задач

8. Ресурсное обеспечение:

а) основная литература:

1. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: РХД, 2009.
2. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу, Ч. I, II. Изд. „Попечительский совет механико-математического факультета” МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 2010.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006.
5. Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб: Лань, 2005.
6. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004.

б) дополнительная литература:

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы: сайт кафедры <http://www.math.msu.ru/tffa/index.html> , на котором ежегодно публикуется программа экзамена по курсу.

Материально-техническое обеспечение дисциплины:

А. Помещения:

- аудитория

Б. Оборудование:

- доска в аудитории для лекций и семинаров; мел

9. Язык преподавания. Русский.

10. Преподаватель (преподаватели): Потапов М.К., Скворцов В.А., Смолянов О.Г., Степин А.М., Хелемский А.Я., Шкаликов А.А., Белошапка В.К., Дьяченко М.И., Сорокин В.Н., Парамонов П.В., Рыжиков В.В., Богачев В.И., Шейпак И.А., Бородин П.А., Бахвалов А.Н., Фёдоров В.М., Вячеславов Н.С., Куприков Ю.Е., Домрин А.В., Савчук А.М., Пальвелов Р.В., Лобанов М.С., Косов Е.Д.

11. Автор (авторы) программы профессор Богачев В.И.