Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций и функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
______________/Кашин Б. С. /
«___» ________________20 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Функциональный анализ

Уровень высшего образования:
специалитет

Направление подготовки (специальность):

01.05.01 «Фундаментальные математика и механика»

Направленность (профиль) ОПОП:

Специализация «Математические методы экономики»

Форма обучения:
очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена
на заседании кафедры теории функций и функционального анализа
(протокол №__, «___» ___________ 20__ года)

Москва 201_

На обратной стороне титула:

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по специальности «Фундаментальные математика и механика» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение __________

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО: относится к базовой части ОПОП ВО.
2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть):
освоение дисциплин «математический анализ», «алгебра», «дифференциальные уравнения».
3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников (коды)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с компетенциями**
ПК-1	Знать: основные понятия теории функций и функционального анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки основных утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.
ОПК-2	Уметь: решать задачи на вычисление и задачи теоретического характера в области функционального анализа.
УК-1, ОПК-3	Владеть: математическим аппаратом функционального анализа, методами решения задач и способами доказательства утверждений в этой области.

4. Формат обучения _____очный______________ *(отметить, если дисциплина или часть ее реализуется с использованием электронного обучения и (или) дистанционных образовательных технологий)*

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 4 з.е., в том числе 72 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 36 часов лекций, 36 часов семинаров), 72 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий

№	**Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),** **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Всего (часы)**	В том числе			
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			**Самостоятельная работа обучающегося, часы** *(виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр. – указываются при необходимости)*
			Лек	Сем	Всего	
1.	Метрические пространства: основные понятия и примеры. Нормированные и евклидовы пространства. Пространства непрерывных и ограниченных функций. Пространства последовательностей.	6	2	2	4	2
2.	Полные метрические пространства. Банаховы и гильбертовы пространства. Примеры. Изометрия. Вложение метрического пространства в пространство ограниченных функций. Пополнение метрического пространства.	6	2	2	4	2
3.	Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категории. Примеры.	6	2	2	4	2
4.	Топологические пространства; примеры. Непрерывные отображения топологических пространств.	8	2	2	4	4
5.	Компакты в метрических пространствах и их свойства.	8	2	2	4	4

6.	Вполне ограниченные множества в метрических пространствах. Критерий вполне ограниченности в терминах фундаментальных последовательностей. Равносильность различных определений компакта в метрическом пространстве.	8	2	2	4	4
7.	Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве. Критерий компактности в B(M). Теорема Арцела.	8	2	2	4	4
8.	Теоремы о неподвижных точках: теорема о сжимающих отображениях. Применения.	4	2		2	2
	Текущий контроль: Контрольная работа №1	2		2	2	
9.	Ортонормированные системы и базисы в евклидовых пространствах. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.	8	2	2	4	4
10.	Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и непрерывность оператора. Теорема Банаха--Штейнгауза.	8	2	2	4	4
11.	Теоремы Банаха об открытом отображении и обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Примеры применения.	8	2	2	4	4
	Текущий контроль: Контрольная работа №2	2		2	2	

12.	Теорема Хана-Банаха и ее следствия. Сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Ограниченность слабо ограниченных множеств.	8	2	2	4	4
13.	Слабая и *-слабая сходимость; *-слабая компактность шара в сопряженном пространстве. Выделение *-слабо сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности функционалов на сепарабельном нормированном пространстве. Слабая сходимость и слабая компактность в гильбертовом пространстве.	8	2	2	4	4
14.	Компактные операторы и их свойства; примеры компактных и некомпактных операторов.	8	2	2	4	4
	Промежуточная аттестация: зачет, экзамен	4				4
15.	Обратный оператор; открытость множества обратимых операторов. Спектр и резольвента. Компактность и непустота спектра. Теорема о спектральном радиусе. Примеры.	14	4	2	6	8
16.	Спектр компактного оператора. Альтернатива Фредгольма.	8	2	2	4	4
17.	Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма. Теорема Гильберта-Шмидта.	8	2	2	4	4
	Промежуточная аттестация: зачет, экзамен	4				4
	Всего часов	144	36	36	72	72

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.
На каждом семинарском занятии студентам дается домашнее задание, состоящее из задач по пройденной теме, например, из задачника Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу, МЦНМО, 2017 (http://маткнига.рф/wp-content/uploads/2017/01/978-5-4439-3092-3-Borodin-Savchuk-SHejpak-Zadachi-po-funktsionalnomu-analizu.pdf)
В начале семинара преподаватель проводит опрос студентов и разбор домашнего задания.
В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. Помимо этого, проводятся 2 контрольные работы (на семинарах). Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ.

Примеры контрольных работ

5 семестр

Контрольная работа № 1

1. Исследовать сепарабельность пространств l_p.
2. Выяснить, является ли вполне ограниченным в C[0,1] и L[0,1] множество функций sin nt, n=1,2,…

Контрольная работа № 2

1. Найти норму функционала f на C[0,1], переводящего функцию x в интеграл от функции x(t) g (t), где g (t) из L[0,1].
2. Найти норму оператора сдвига в l_2.
3. Привести пример замкнутого подпространства банахова пространства, расстояние до которого в некоторых точках не достигается.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Примерный список экзаменационных вопросов:
5 семестр

1. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Полнота и сепарабельность. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра.

2. Нормированные пространства. Примеры: пространства непрерывных функций, интегрируемых функций и пространства последовательностей.

3. Топологические пространства. Компактные множества и их свойства.

4. Вполне ограниченные множества. Критерий вполне ограниченности в терминах фундаментальных последовательностей.

5. Равносильность различных определений компакта в метрическом пространстве.

6. Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.

7. Критерии компактности в C[a,b] (теорема Асколи-Арцела) и l_p.

8. Теорема о сжимающих отображениях.

9. Евклидовы пространства. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

10. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве.

11. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

12. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и его непрерывность.

13. Теорема Банаха-Штейнгауза.

14. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.

15. Теорема Хана-Банаха и ее следствия. Сопряженное пространство. Отделение выпуклых множеств (без доказательства).

16. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве, в l_p и $L_p[0,1]$.

17. Изометрическое вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Ограниченность слабо ограниченных множеств.

18. Теорема о *-слабой компактности шара в сопряженном пространстве (без доказательства). Выделение *-слабо сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности функционалов на сепарабельном нормированном пространстве. Слабая сходимость и слабая компактность в гильбертовом пространстве.

19. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.

20. Сопряженные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Равенство норм оператора и его сопряженного.

21. Спектр оператора. Замкнутость спектра, ограниченность и непустота спектра. Теорема о спектральном радиусе.

22. Самосопряженный оператор и его квадратичная форма.

23. Теорема Гильберта-Шмидта о компактных самосопряженных операторах.

24. Теорема Фредгольма.

25. Строение спектра компактного оператора в бесконечномерном пространстве.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
Знания *(виды оценочных средств: устные и письменные опросы и контрольные работы, тесты, и т.п.)*	Отсутствие знаний по функциональному анализу	Фрагментарные знания по функциональному анализу	Общие, но не структурированные знания по функциональному анализу	Сформированные систематические знания по функциональному анализу
Умения *(виды оценочных средств: практические контрольные задания, написание и защита рефератов на заданную тему и т.п.)*	Отсутствие умений решать задачи по функциональному анализу	В целом успешное, но не систематическое умение решать задачи по функциональному анализу	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение решать задачи по функциональному анализу (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение решать задачи по функциональному анализу
Навыки (владения, опыт деятельности) *(виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)*	Отсутствие навыков владения математическим аппаратом функционального анализа	Наличие отдельных навыков владения математическим аппаратом функционального анализа (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки владения математическим аппаратом функционального анализа, но используемые не в активной форме	Сформированные навыки владения математическим аппаратом функционального анализа, применяемые при решении задач

8. Ресурсное обеспечение:

а) основная литература:

1. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: РХД, 2009.
2. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу, Ч. I, II. Изд. „Попечительский совет механико-математического факультета" МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 2010.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006.
5. Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб: Лань, 2005.
6. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004.

б) дополнительная литература:

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы: сайт кафедры http://www.math.msu.su/tffa/index.html , на котором ежегодно публикуется программа экзамена по курсу.

Материально-техническое обеспечение дисциплины:

А. Помещения:

- аудитория

Б. Оборудование:

- доска в аудитории для лекций и семинаров; мел

9. Язык преподавания. Русский.

10. Преподаватель (преподаватели): Потапов М.К., Скворцов В.А., Смолянов О.Г., Степин А.М., Хелемский А.Я., Шкаликов А.А., Белошапка В.К., Дьяченко М.И., Сорокин В.Н., Парамонов П.В., Рыжиков В.В., Богачев В.И., Шейпак И.А., Бородин П.А, Бахвалов А.Н., Фёдоров В.М., Вячеславов Н.С., Куприков Ю.Е., Домрин А.В., Савчук А.М., Пальвелев Р.В., Лобанов М.С., Косов Е.Д.

11. Автор программы доцент Куприков Ю.Е.