

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций и функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____/Кашин Б. С. /
«__» _____ 20__ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Функциональный анализ

Уровень высшего образования:
специалитет

Направление подготовки (специальность):
01.05.01 «Фундаментальные математика и механика»

Направленность (профиль) ОПОП:
Специализация «Фундаментальная механика»

Форма обучения:
очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена
на заседании кафедры теории функций и функционального анализа
(протокол № __, «__» _____ 20__ года)
Москва 201__

На обратной стороне титула:

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по специальности «Фундаментальные математика и механика» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение _____

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО: относится к базовой части ОПОП ВО.
2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть):
освоение дисциплин «математический анализ», «алгебра», «дифференциальные уравнения».
3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников (коды)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с компетенциями
ПК-1	Знать: основные понятия теории функций и функционального анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки основных утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.
ОПК-2	Уметь: решать задачи на вычисление и задачи теоретического характера в области функционального анализа.
УК-1, ОПК-3	Владеть: математическим аппаратом функционального анализа, методами решения задач и способами доказательства утверждений в этой области.

4. Формат обучения очный (отметить, если дисциплина или часть ее реализуется с использованием электронного обучения и (или) дистанционных образовательных технологий)
5. Объем дисциплины (модуля) составляет 7 з.е., в том числе 140 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 70 часов лекций, 70 часов семинаров), 112 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.
6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий

№	Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе			
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			Самостоятельная работа обучающегося, часы (виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр. – указываются при необходимости)
			Лек	Сем	Всего	
1.	Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств; счетные множества и множества мощности континуума; метрические пространства; открытые и замкнутые множества.	12	4	4	8	4
2.	Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа; критерии предкомпактности множества в конкретных полных метрических пространствах ($C[a,b]$, l_p).	8	2	2	4	4
3.	Отображения метрических пространств. Непрерывные, сжимающие отображения. Изометрия метрических пространств.	8	2	2	4	4
4.	Свойства полных метрических пространств: теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений. Пополнение метрических пространств. Топологические пространства; примеры	10	3	3	6	4

5.	Мера и интеграл Лебега: построение меры Лебега на прямой; общее понятие аддитивной меры; лебеговское продолжение меры.	8	2	2	4	4
6.	Измеримые функции их свойства; определение интеграла Лебега; класс суммируемых функций; предельный переход под знаком интеграла.	8	2	2	4	4
7.	Связь интеграла Лебега с интегралом Римана; интеграл Стильеса; теорема Радона–Никодима.	10	3	3	6	4
8.	Прямое произведение мер и теорема Фубини; пространства L_1 , L_p ($p>1$); неравенства Гёльдера и Минковского.	7	2	1	3	4
	Текущий контроль: Контрольная работа №1	2		2	2	
9.	Банаховы пространства: определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства; сопряженное пространство, его полнота.	7	2	1	3	4
10.	Теорема Хана–Банаха о продолжении линейного функционала и следствия из неё: существование нетривиальных непрерывных функционалов, достаточность непрерывных функционалов, изометричность вложения нормированного пространства во второе сопряжённое).	8	2	2	4	4
11.	Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах (в $C[a,b]$, c_0 , l_p , L_p).	10	3	3	6	4
12.	Линейные операторы; норма оператора; сопряжённый оператор; принцип равномерной ограниченности.	7	2	1	3	4
	Текущий контроль: Контрольная работа №2	2		2	2	
13.	Обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратном операторе.	9	3	2	5	4

14	Компактные операторы и их свойства; компактность интегральных операторов; понятие об индексе оператора.	12	4	4	8	4
	Промежуточная аттестация: зачет, экзамен	4				4
15	Теоремы Фредгольма; примеры использования теорем Фредгольма (задача Штурма–Лиувилля, теория потенциала, индекс дифференциального оператора).	8	2	2	4	4
16	Гильбертовы пространства: скалярное произведение; неравенство Коши–Буняковского–Шварца, ортогональное дополнение.	12	4	4	8	4
17	Ортогональные системы; неравенство Бесселя; теорема Рисса–Фишера; базисы и размерность гильбертова пространства; теорема об изоморфизме.	8	2	2	4	4
18	Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы.	8	2	2	4	4
19	Спектр самосопряженного и унитарного операторов; теорема Гильберта–Шмидта о компактных самосопряженных операторах.	9	3	2	5	4
	Текущий контроль: Контрольная работа №3	2		2	2	
20	Функциональное исчисление; приведение самосопряженного оператора к виду умножения на функцию.	7	2	1	3	4
21	Спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры.	8	2	2	4	4
22	Линейные топологические пространства; полинормированные пространства. Функционал Минковского; нормируемость и метризуемость пространства.	8	2	2	4	4
23	Топологии в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве.	8	2	2	4	4

24	Основные пространства гладких функций; пространства обобщенных функций; операции над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных.	8	2	2	4	4
25	Классическое преобразование Фурье; связь гладкости функции со скоростью убывания преобразования Фурье; связь порядка убывания функции с гладкостью преобразования Фурье.	8	2	2	4	4
26	Преобразование Фурье в пространстве S и в пространстве $L_2(R)$. Теорема Планшереля. Спектр преобразования Фурье в $L_2(R)$.	8	2	2	4	4
27	Преобразование Фурье в S' .	7	3	2	5	2
	Текущий контроль: Контрольная работа №4	2		2	2	
28	Элементы нелинейного анализа: слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала; экстремум функционала; классические задачи вариационного исчисления; уравнение Эйлера; вторая вариация; условия Лежандра и Якоби.	7	3	2	5	2
	Промежуточная аттестация: зачет, экзамен	4				4
	Всего часов	252	70	70	140	112

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

На каждом семинарском занятии студентам дается домашнее задание, состоящее из задач по пройденной теме, например, из задачника Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу, МЦНМО, 2017

(<http://маткнига.рф/wp-content/uploads/2017/01/978-5-4439-3092-3-Borodin-Savchuk-SHejpak-Zadachi-po-funktsionalnomu-analizu.pdf>)

В начале семинара преподаватель проводит опрос студентов и разбор домашнего задания.

В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. В каждом семестре проводятся по 2 контрольные работы (на семинарах). Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ.

Примеры контрольных работ

5 семестр

Контрольная работа № 1

1. Найти меру множества, состоящих из тех чисел отрезка $[0, 1]$, в десятичной записи которых нет цифры 1.
2. Множество $A \subset [0, 1]$ построено следующим образом: вокруг каждой точки множества Кантора построен интервал длины $\frac{1}{9}$ с центром в этой точке. Найти меру Лебега полученного множества.
3. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$, принадлежащей пространству $L_3[0, 1]$, найти функцию $g \in L_q[0, 1]$, такую, что в неравенстве Гёльдера выполняется равенство.
4. $f(x) = 0$ в каждой точке канторова множества и $f(x) = n$ в каждом смежном интервале длины $\frac{1}{3^n}$. Определить, интегрируема ли функция по Лебегу. Если да, то найти значение интеграла.
5. Функция $f(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ измерима и $\mu(X) < +\infty$. Вычислить:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X e^{-n(f(x)-1)^2} d\mu.$$

Контрольная работа № 2

1. Вычислить норму оператора

$$A : C[a, b] \rightarrow C[a, b], \quad Ax(t) = t \int_a^b x(s) ds - t^2 x(a)$$

2. Найти норму функционала в указанном пространстве

$$C[-1, 1], \quad f(x) = \frac{1}{3}[x(-1) - x(1)] + \int_{-1}^1 |s|x(s) ds.$$

3. Найти норму функционала в указанном пространстве

$$l_2, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}.$$

4. Проверить, является ли множество функций предкомпактным в $C[0, 1]$:

$$\operatorname{arctg} \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}.$$

6 семестр

Контрольная работа № 1

1. Решить уравнение в пространстве $L_2[0; 1]$: $f(x) - \lambda \int_0^1 3xtf(t) dt = ax + 4x^2$.
2. Найти спектр оператора в $L_2[0; \pi]$: $Af(x) = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin(nx) \sin(nt) f(t) dt$.
3. Дано уравнение в $L_2[0; 1]$: $f(x) - \lambda \int_0^1 \left(|x - t| - \frac{1}{2} \right) f(t) dt = \cos(\pi(2N - 1)x)$.
 - 1) для каждого λ решить однородное уравнение;
 - 2) указать количество решений в зависимости от λ и $N \in \mathbb{N}$.

Контрольная работа № 2

1. Найти предел последовательности в $\mathcal{D}'$: $\{n \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Решить уравнение в обобщенных функциях: $xy'(x) = 1$.
3. С помощью преобразования Фурье найти частное решение уравнения

$$-y'' + y = -i\delta'(x).$$

4. Найти преобразование Фурье обобщенной функции: $f(x) = (x - a)^k$.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Примерный список экзаменационных вопросов:

5 семестр

1. Метрические пространства. Свойства полных метрических пространств (принцип сжимающих отображений, теорема о замкнутых шарах).
2. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Сепарабельные пространства. Критерий полноты подпространства метрического пространства.
3. Нормированные и банаховы пространства. Теорема о пополнении метрического пространства. Теорема Бэра.
4. Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах. Критерий Хаусдорфа.
5. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
6. Критерий предкомпактности множества в пространствах l_p ($1 \leq p < \infty$).
7. Критерий предкомпактности множества в пространстве $C[a, b]$.
8. Гильбертовы пространства. Тожество параллелограмма. Неравенство Коши-Буняковского. Теорема об ортогональном дополнении.

9. Ортонормированные системы. Полные, замкнутые системы. Условия, эквивалентные тому, что ортонормированная система образует базис в гильбертовом пространстве.
10. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
11. Системы множеств (полукольцо, кольцо, алгебра, σ -алгебра). Примеры. Аддитивные и σ -аддитивные меры.
12. Структура минимального кольца, порождённого полукольцом. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо с сохранением σ -аддитивности.
13. Свойства меры на кольце (монотонность, полуаддитивность, σ -полуаддитивность, непрерывность). Счетная аддитивность меры Лебега--Стилтьеса.
14. Внешняя мера Лебега. Свойства внешней меры на $R(S)$. σ -полуаддитивность внешней меры.
15. Измеримые множества относительно заданной внешней меры. Теорема об измеримых по Лебегу множествах (без доказательства).
16. Измеримые функции. Свойства измеримых функций (сумма, произведение, верхний и нижний предел последовательности).
17. Сходимость измеримых функций почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере. Связь между сходимостью почти всюду и по мере.
18. Интеграл Лебега для простых функций и его основные свойства.
19. Определение интеграла Лебега для произвольной измеримой функции и его свойства.
20. Теоремы о счетной аддитивности и абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Неравенство Чебышёва.
21. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
22. Теорема Б. Леви и теорема Фату.

23. Произведение пространств и мер. σ -аддитивность произведения мер. Теорема Фубини (без доказательства).
24. Мера Лебега на $\mathbb{R}$. Критерий измеримости множеств в $\mathbb{R}$.
25. Неравенства Гёльдера и Минковского. Нормы в пространстве $L_p(\Omega, \mu)$ и l_p .
26. Полнота пространств $L_1(\Omega, \mu)$.
27. Абсолютно непрерывные функции и функции ограниченной вариации и их свойства. Абсолютная непрерывность неопределенного интеграла Лебега. Представление функции ограниченной вариации в виде разности двух монотонных. Примеры.
28. Линейные операторы и функционалы. Норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Непрерывные операторы. Эквивалентность ограниченности и непрерывности для линейных операторов.
29. Полнота пространства ограниченных линейных операторов. Сопряжённое пространство X^* и его полнота.
30. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в пространствах l_p при $1 \leq p < \infty$. Полнота пространств l_p при $1 < p \leq \infty$.
31. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в пространствах c_0 и $L_p(\Omega, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$, только достаточность). Полнота пространств $L_p(\Omega, \mu)$ при $1 < p \leq \infty$ и l_1 .

6 семестр

1. Теорема Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве.
2. Теорема Хана-Банаха: вещественное пространство.
3. Теорема Хана-Банаха для комплексного пространства. Следствия из теоремы Хана-Банаха.
4. Общий вид функционала в $C[a, b]$.

5. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабая сходимость. Слабо ограниченные множества.
6. Слабая компактность. Теорема о слабой компактности единичного шара в сепарабельном гильбертовом пространстве.
7. Сопряженный оператор. Самосопряженные операторы. Равенство норм оператора и его сопряженного.
8. Компактные операторы. Свойства компактных операторов (сумма, композиция с ограниченным, предельный переход).
9. Теорема о действии компактного оператора на слабо сходящуюся последовательность в нормированном пространстве.
10. Компактность интегральных операторов в пространствах $C[a;b]$ и $L_2[a;b]$.
11. Теорема о связи компактности оператора с компактностью сопряженного оператора (в гильбертовом пространстве).
12. Обратный оператор. Теорема Банаха (без доказательства). Обратимость оператора близкого к обратимому. Представление резольвенты в виде ряда Лорана.
13. Спектр и резольвентное множество ограниченного оператора. Свойства спектра (замкнутость, ограниченность, непустота).
14. Классификация спектра. Спектр сопряженного оператора (в гильбертовом пространстве).
15. Свойства спектра самосопряженного оператора. Квадратичная форма самосопряженного оператора.
16. Теорема Гильберта-Шмидта.
17. Спектральный радиус оператора. Формула для вычисления спектрального радиуса (без доказательства). Спектральный радиус самосопряженного оператора.
18. Замкнутость образа оператора $I-A$, где A - компактный оператор. Первая теорема Фредгольма.
19. Вторая теорема Фредгольма.
20. Третья теорема Фредгольма.

21. Спектр компактного оператора.
22. Основные пространства D и S пробных функций. Сходимость в этих пространствах. Пространства обобщенных функций D' и S' .
23. Плотность D в S , $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$.
24. Сингулярные и регулярные обобщенные функции. Сингулярность δ -функции.
25. Действия над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных.
26. Решение простейших дифференциальных уравнения в пространстве обобщённых функций.
27. Существование первообразной в D' . Предельный переход в D' .
28. Предельный переход в D' . Понятие δ -образной последовательности. Примеры.
29. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его свойства. Инъективность преобразования Фурье (без доказательства).
30. Теорема о связи гладкости интегрируемой функции со скоростью убывания её преобразования Фурье. Теорема о связи скорости убывания интегрируемой функции с гладкостью преобразования Фурье.
31. Преобразование Фурье в S и его непрерывность. Равенство Парсеваля для интегралов Фурье. Формула обращения.
32. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, теорема Планшереля.
33. Теорема об отображении спектра для многочлена от оператора.
34. Унитарные операторы. Спектр унитарных операторов. Спектр оператора преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.
35. Полнота системы функций Чебышёва-Эрмита в $L_2(\mathbb{R})$.
36. Преобразование Фурье в S' .

37. Свёртка функций из $L_1(\mathbb{R})$. Свойства свёртки (линейность, ассоциативность, дифференцируемость, связь с преобразованием Фурье).
38. Свёртка обычной и обобщенной функций. Использование преобразования Фурье и свёртки для решения уравнения теплопроводности.
39. Подобные операторы в банаховых пространствах. Теорема о спектрах подобных операторов.
40. Последовательность Вейля. Спектр оператора умножения на ограниченную функцию в $L_2(\mathbb{R})$.
41. Оператор свёртки с интегрируемой функцией в $L_2(\mathbb{R})$. Спектр оператора свёртки.
42. Теорема Хеллингера-Теплица. Область определения сопряжённого оператора. Неограниченные самосопряжённые и симметрические операторы.
43. График оператора. Теорема о графике сопряжённого оператора. Замкнутые операторы.
44. Критерий самосопряжённости симметрического оператора.
45. Спектр гармонического осциллятора.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка	2	3	4	5
РО и соответствующие виды оценочных средств				
Знания (виды оценочных средств: устные и письменные опросы и контрольные работы, тесты, и т.п.)	Отсутствие знаний по функциональному анализу	Фрагментарные знания по функциональному анализу	Общие, но не структурированные знания по функциональному анализу	Сформированные систематические знания по функциональному анализу
Умения (виды оценочных средств: практические контрольные задания, написание и защита рефератов на заданную тему и т.п.)	Отсутствие умений решать задачи по функциональному анализу	В целом успешное, но не систематическое умение решать задачи по функциональному анализу	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение решать задачи по функциональному анализу (неточности не принципиального характера)	Успешное и систематическое умение решать задачи по функциональному анализу
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)	Отсутствие навыков владения математическим аппаратом функционального анализа	Наличие отдельных навыков владения математическим аппаратом функционального анализа (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки владения математическим аппаратом функционального анализа, но используемые не в активной форме	Сформированные навыки владения математическим аппаратом функционального анализа, применяемые при решении задач

8. Ресурсное обеспечение:

а) основная литература:

1. Богачёв В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. РХД, 2009.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.:Наука, 1979.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1988.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2006.
5. Федоров В.М. Курс функционального анализа. – М-СП:Лань, 2005.
6. П.А.Бородин, А.М.Савчук, И.А.Шейпак Задачи по функциональному анализу, Часть I. Часть II. Издательство "Попечительский совет механико-математического факультета" МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 2010.

б) дополнительная литература:

1. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Канторович Л.В., Акилов Т.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.1 Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.2 Гармонический анализ. Самосопряженность. – М.: Мир, 1978.
5. Рисс Ф., Надь Б.С. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979.
6. Шилев Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Издательство Московского университета, 1984.
7. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы: сайт кафедры <http://www.math.msu.ru/tffa/index.html> , на котором ежегодно публикуется программа экзамена по курсу.

Материально-техническое обеспечение дисциплины:

А. Помещения:

- аудитория

Б. Оборудование:

- доска в аудитории для лекций и семинаров; мел

9. Язык преподавания. Русский.

10. Преподаватель (преподаватели): Потапов М.К., Скворцов В.А., Смолянов О.Г., Степин А.М., Хелемский А.Я., Шкаликов А.А., Белошапка В.К., Дьяченко М.И., Сорокин В.Н., Парамонов П.В., Рыжиков В.В., Богачев В.И., Шейпак И.А., Бородин П.А, Бахвалов А.Н., Фёдоров В.М., Вячеславов Н.С., Куприков Ю.Е., Домрин А.В., Савчук А.М., Пальвелев Р.В., Лобанов М.С., Косов Е.Д.

11. Автор (авторы) программы профессор Шейпак И.А.