Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций и функционального анализа

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____________/Кашин Б. С. /
«___» ________________20 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

Действительный анализ

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Направление подготовки (специальность):

01.03.01 «Математика»

Направленность (профиль) ОПОП:

Общий

Форма обучения:
очно-заочная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена

на заседании кафедры теории функций и функционального анализа

(протокол № __, «___»__________ 20__ года)

Москва 201_

На обратной стороне титула:

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по специальности «Математика» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение_________

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО: относится к базовой части ОПОП ВО.
2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть):
освоение дисциплин «математический анализ».
3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников (коды)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с компетенциями**
ПК-1	Знать: основные понятия действительного анализа, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки основных утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.
ОПК-2	Уметь: решать задачи на вычисление и задачи теоретического характера в области действительного анализа
УК-1, ОПК-3	Владеть: математическим аппаратом действительного анализа, методами решения задач и способами доказательства утверждений в этой области.

4. Формат обучения ____очный___________________ *(отметить, если дисциплина или часть ее реализуется с использованием электронного обучения и (или) дистанционных образовательных технологий)*

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 4 з.е., в том числе 68 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 34 часа лекций, 34 часа семинаров), 76 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий

№	Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе			
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы			Самостоятельная работа обучающегося, часы *(виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр. – указываются при необходимости)*
			Лек	Сем	Всего	
1.	<u>Системы множеств. Полукольца, кольца, алгебры и сигма-алгебры множеств.</u> Кольцо, порожденное полукольцом. Борелевская сигма-алгебра. Свойства множеств на прямой, используемые при изучении функций действительного переменного (плотные и нигде не плотные множества, множества типов F_σ и G_δ и т.п.).	18	2	5	7	11
2.	<u>Меры на системах множеств.</u> Продолжение меры с полукольца на порожденное кольцо. Свойства мер. Необходимые и достаточные условия счетной аддитивности меры. Счетная аддитивность классической меры на полукольце промежутков в R^n	10	2	2	4	6
3.	<u>Продолжение меры по Лебегу.</u> Внешняя мера Лебега. Измеримое множество. Мера Лебега. Доказательство того, что измеримые множества образуют сигма-алгебру, а мера Лебега счетно-аддитивна на ней. Продолжение по Лебегу сигма-конечных мер. Существование неизмеримого по Лебегу подмножества в произвольном множестве положительной классической меры.	12	4	3	7	5

4.	<u>Измеримые функции. Виды сходимости измеримых функций.</u> Понятие измеримой функции, эквивалентные определения. Свойства измеримых функций. Сходимость равномерная, поточечная, почти всюду. Сходимость по мере*. Взаимосвязь этих сходимостей. Теорема Рисса*. Теорема Егорова. С-свойство Лузина*.	17	4	4	8	9
5.	<u>Интеграл Лебега.</u> Простая функция. Интеграл Лебега от простой функции и его свойства. Определение интеграла Лебега в общем случае. Свойства интеграла Лебега. Счетная аддитивность интеграла Лебега как функции множества, его абсолютная непрерывность. Неравенство Чебышёва. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры.* Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. Связь интеграла Лебега по классической мере с интегралом Римана.	21	6	4	10	11
6.	<u>Произведение мер.</u> Произведение полуколец. Произведение мер, его счетная аддитивность в случае счетной аддитивности перемножаемых мер. Прямое произведение мер. Теорема Фубини*. Достаточное условие существования кратного интеграла для неотрицательных функций.	8	2	2	4	4
7.	<u>Пространства интегрируемых функций</u>. Неравенства Гёльдера и Минковского. Определение пространств L_p. Доказательство полноты и сепарабельности этих пространств. Их взаимное расположение в зависимости от свойств меры.	16	4	4	8	8
8.	Заряды. Положительное и отрицательное множество. Разложение Хана. Разложение Жордана. Заряд, абсолютно непрерывный относительно меры. Теорема Радона- Никодима*.	10	2	2	4	6

9.	Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции*. Теорема Витали о покрытии*. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду*. Абсолютно непрерывные функции*. Теорема о производной неопределенного интеграла Лебега*. Теорема о восстановлении абсолютно непрерывной функции по ее производной*. Интегрирование по частям и замена переменного в интеграле Лебега*.	28	8	8	16	12
	Промежуточная аттестация: экзамен	4				4
	Всего часов	**144**	**34**	**34**	**68**	**76**

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)
7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару (например, из задачника: П.Л.Ульянов и др., Действительный анализ в задачах, М., Физматлит, 2005). На семинарах разбираются решения всех домашних задач.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Примерный список экзаменационных вопросов:

1. Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, σ-алгебры и т.д.).
Примеры. Теорема о минимальном кольце, порожденном полукольцом.

2. Меры на полукольцах и на кольцах. Примеры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Свойства мер. Полнота мер.

3. Связь σ-аддитивности и непрерывности меры. Стандартная мера на полукольце промежутков и ее σ-аддитивность.

4. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества. Алгебра измеримых множеств.

5. Мера Лебега и корректность ее определения. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счётная аддитивность меры Лебега.

6. σ-конечные меры и их продолжение по Лебегу.

7. Теорема о структуре измеримых множеств.

8. Измеримые функции. Элементарные свойства измеримых функций.

9. Измеримость предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Критерий сходимости почти всюду на множестве конечной меры.

10. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.
Теорема Егорова. Теорема Лузина (без док-ва).

11. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.

12. Определение интеграла Лебега в общем случае. Базовые свойства интеграла Лебега.

13. Свойства интеграла Лебега как функции множества. Неравенство Чебышёва.

14. Теорема Лебега о предельном переходе.

15. Теорема Б. Леви о предельном переходе. Теорема Фату.

16. Прямые произведения мер.

17. Теорема о выражении меры множества через меры сечений. Теорема Фубини.

18. Заряды. Разложения Хана и Жордана.

19. Абсолютно непрерывные заряды. Теорема Радона --- Никодима.

20. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства L_p.

21. Полнота пространств L_p.

22. Теорема Витали о покрытии.

23. Дифференцируемость монотонных функций почти всюду.

24. Функции ограниченной вариации и их свойства. Непрерывность вариации с переменным верхним пределом для непрерывной функции.

25. Связь интеграла Римана --- Стилтьеса с интегралом Лебега по мере Стилтьеса. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.

26. Абсолютно непрерывные функции. Теорема об абсолютно непрерывной функции
с производной, равной нулю почти всюду.

27. Производная неопределенного интеграла Лебега. Критерий представимости функции в виде неопределенного интеграла Лебега от своей производной. Интегрирование по частям в интеграле Лебега.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
Знания *(виды оценочных средств: устные и письменные опросы и контрольные работы, тесты, и т.п.)*	Отсутствие знаний по действительному анализу	Фрагментарные знания по действительному анализу	Общие, но не структурированные знания по действительному анализу	Сформированные систематические знания по действительному анализу
Умения *(виды оценочных средств: практические контрольные задания, написание и защита рефератов на заданную тему и т.п.)*	Отсутствие умений решать задачи по действительному анализу	В целом успешное, но не систематическое умение решать задачи по действительному анализу	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение решать задачи по действительному анализу (неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение решать задачи по действительному анализу
Навыки (владения, опыт деятельности) *(виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)*	Отсутствие навыков владения математическим аппаратом действительного анализа	Наличие отдельных навыков владения математическим аппаратом действительного анализа (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки владения математическим аппаратом действительного анализа, но используемые не в активной форме	Сформированные навыки владения математическим аппаратом действительного анализа, применяемые при решении задач

8. Ресурсное обеспечение:

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1981, 1989.
2. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998, 2002
3. Богачев В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва-Ижевск, РХД, 2009.
4. Ульянов П.Л. и др., Действительный анализ в задачах, М., Физматлит, 2005.

б) дополнительная литература:

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1979; СПб., Лань, 2008.
2. Богачев В.И., Основы теории меры, Т.1. Москва-Ижевск, РХД, 2003, 2006.
3. Гелбаум Б., Олмстед Дж., Контрпримеры в анализе. М., ЛКИ, 2007.
4. Халмош П., Теория меры. М., ИЛ, 1953.
5. Окстоби Дж., Мера и категория. М., ЛКИ, 2008.

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы: сайт кафедры http://www.math.msu.su/tffa/index.html , на котором ежегодно публикуется программа экзамена по курсу.

Материально-техническое обеспечение дисциплины:

А. Помещения:

- аудитория

Б. Оборудование:

- доска в аудитории для лекций и семинаров; мел

9. Язык преподавания. Русский.

10. Преподаватель (преподаватели): Потапов М.К., Скворцов В.А., Смолянов О.Г., Степин А.М., Хелемский А.Я., Шкаликов А.А., Белошапка В.К., Дьяченко М.И., Сорокин В.Н., Парамонов П.В., Рыжиков В.В., Богачев В.И., Шейпак И.А., Бородин П.А, Бахвалов А.Н., Фёдоров В.М., Вячеславов Н.С., Куприков Ю.Е., Домрин А.В., Савчук А.М., Пальвелев Р.В., Лобанов М.С., Косов Е.Д.

11. Автор (авторы) программы профессор Дьяченко М.И., профессор Бахвалов А.Н.