Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Конспект лекций спецкурса:

О ГИПОТЕЗЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Косов Егор Дмитриевич

Москва, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.

Будем говорить, что выпуклое тело K центрировано, если $\displaystyle\int_K x\,dx = 0$.

Гипотеза гиперплоскости утверждает следующее: существует такое число $c > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого центрированного выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$ объема 1 найдется гиперплосколсть H, для которой $\lambda_{n-1}(K \cap H) \geq c$.

Будем говорить, что выпуклое тело K объема 1 находится в изотропной позиции, если оно центрировано и $\displaystyle\int_K x_i x_j\,dx = L_K^2 \delta_{i,j}$.

Гипотеза о константе изотропности утверждает следующее: существует такое число $C > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ в изотропной позиции справедлива оценка $L_K \leq C$.

Оказывается, что эти гипотезы равносильны друг другу и первой нашей задачей будет это доказать.

Впервые подобные вопросы возникли в работе Ж. Бургейна [3] и были популяризированы в обзорной работе [6]. По этой тематики есть несколько монографий, включая [4] и [1], на которых мы и будем основывать изложение.

Основные результаты, которые хотелось бы затронуть — это первая нетривиальная оценка константы изотропности Ж. Бургейна $L_K \leq C\sqrt[4]{n}\log n$, неравенство Г. Паориса о больших уклонениях для выпуклого тела K в изотропной позиции:

$$\lambda_n(x \in K\colon |x| \geq ct\sqrt{n}L_K) \leq e^{-t\sqrt{n}} \quad \forall t \geq 1$$

и теорему Б. Клартага о том, что для каждого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ и для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется центрированной выпуклое тело T и сдвиг $x \in \mathbb{R}^n$, для которых

$$\frac{1}{1+\varepsilon}T \subset K + x \subset (1+\varepsilon)T$$

и

$$L_T \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Теорема Клартага, в частности, влечет оценку $L_K \leq C\sqrt[4]{n}$ для каждого выпуклого тела K в изотропной позиции.

2. Изотропные случайные векторы и меры. Гипотеза о константе изотропности.

Определение 2.1. *Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^n$. Вектор $a_X := (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)$ — называется* **вектором средних** *(или, просто, средним) случайного вектора X. Матрица $C_X = (c_{k,j})$ с компонентами*

$$c_{k,j} := \mathbb{E}[(X_j - \mathbb{E}X_j)(X_k - \mathbb{E}X_k)]$$

называется **матрицей ковариаций** *вектора X.*

Замечание 2.2. Матрица ковариаций C_X всегда симметрична и неотрицательно определена.

Упражнение 2.3. Вектор a — вектор средних случайного вектора X тогда и только тогда, когда для каждого $u \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\mathbb{E}[\langle u, X\rangle] = \langle u, a\rangle.$$

Аналогично симметричная неотрицательно определенная матрица C будет матрицей ковариаций случайного вектора X тогда и только тогда, когда

$$\langle Cu, v\rangle = \mathbb{E}[\langle u, X - a\rangle\langle v, X - a\rangle] \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 2.4. *Случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ называется* **изотропным**, *если*

$$\mathbb{E}[\langle u, X\rangle] = 0, \quad \mathbb{E}[\langle u, X\rangle\langle v, X\rangle] = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. у вектора X нулевое среднее и единичная матрица ковариаций.

Определение 2.5. *Вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется изотропной, если она совпадает с распределением некоторого изотропного случайного вектора, т.е.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle u, x\rangle \, \mu(dx) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, x\rangle\langle v, x\rangle \, \mu(dx) = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 2.6. *Пусть X — случайный вектор с абсолютно непрерывным распределением. Тогда существует такое невырожденное линейное отображение T и вектор $a \in \mathbb{R}^n$, что $T^{-1}(X - a)$ — изотропный случайный вектор.*

Доказательство. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_j = \mathbb{E}X_j$. Пусть C_X — матрица ковариаций вектора X, т.е.

$$\langle C_X u, v\rangle = \mathbb{E}[\langle u, X - a\rangle\langle v, X - a\rangle].$$

Матрица C_X — симметрична и положмительно определена (иначе распределение не было бы абсолютно непрерывным). Пусть $T := \sqrt{C_X}$. Тогда вектор $T^{-1}(X - a)$ — имеет нулевое среднее и

$$\mathbb{E}[\langle u, T^{-1}(X - a)\rangle\langle v, T^{-1}(X - a)\rangle] = \mathbb{E}[\langle T^{-1}u, X - a\rangle\langle T^{-1}v, X - a\rangle] = \\ = \langle C_X T^{-1}u, T^{-1}v\rangle = \langle T^{-1}C_X T^{-1}u, v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Утверждение доказано. □

Определение 2.7. *Пусть X — случайный вектор в $\mathbb{R}^n$ с распределением μ и ограниченной плотностью ϱ.* **Константой изотропности** *случайного вектора X, меры μ, плотности ϱ называется число*

$$L_X = L_\mu = L_\varrho := \|\varrho\|_\infty^{1/n}[\det C_X]^{1/2n}.$$

Предложение 2.8. *Константа изотропности инвариантна относительно невырожденных линейных преобразований, т.е. для каждой невырожденной матрицы T и вектора a выполнено равенство $L_{T^{-1}(X-a)} = L_X$.*

Доказательство. Заметим, что $C_{T^{-1}(X-a)} = T^{-1}C_X(T^{-1})^*$ и

$$\det C_{T^{-1}(X-a)} = (\det T^{-1})^2 \det C_X.$$

Посмотрим теперь на плотность $\varrho_{T,a}$ вектора $T^{-1}(X - a)$:

$$\int_A \varrho_{T,a}(y)\, dy = P(T^{-1}(X - a) \in A) = \int_{\{x\colon T^{-1}(x-a)\in A\}} \varrho(x)\, dx = \det T \int_A \varrho(Ty + a)\, dx,$$

где ϱ — плотность вектора X и где в последнем равенстве была сделана замена в интеграле $x = Ty + a$. Таким образом, $\varrho_{T,a}(y) = \det T \cdot \varrho(Ty + a)$, откуда

$$L_{T^{-1}(X-a)} = [\det T \cdot \mathrm{essup}\, \varrho(Ty + a)]^{1/n}\big((\det T^{-1})^2 \det C_X\big)^{1/2n} = L_X.$$

Что и требовалось доказать. □

Замечание 2.9. В случае, когда X — изотропный случайный вектор с ограниченной плотностью ϱ константа изотропности $L_X = L_\varrho$ совпадает с $\|\varrho\|_\infty^{1/n}$.

Определение 2.10. *Пусть K — борелевское подмножество в $\mathbb{R}^n$ положительной меры Лебега. Символом X_K будем обозначать случайный вектор, равномерно распределенный на множестве K.*

Определение 2.11. *Меру Лебега на $\mathbb{R}^n$ будем обозначать λ_n или просто λ, если размерность фиксирована.*

Определение 2.12. *Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым телом, если для всех $x, y \in K$ и $t \in [0,1]$ точка $tx + (1-t)y$ принадлежит множеству K и множество внутренних точек K непусто.*

Гипотеза о константе изотропности: существует такое число $C > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$ выполнено $L_K \le C$, где $L_K := L_{X_K}$.

Определение 2.13. *Введем величину*

$$L_b(n) := \sup\{L_K \colon K - \text{ выпуклое тело в } \mathbb{R}^n\}.$$

Определение 2.14. *Будем говорить, что выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^n$ находится в* **изотропной позиции***, если $\lambda_n(K) = 1$,*

$$\int_K \langle u, x\rangle\, dx = 0, \quad \int_K \langle u, x\rangle \langle v, x\rangle\, dx = \alpha^2 \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. матрица ковариаций вектора X_K — скалярная.

Предложение 2.15. *Для каждого выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$ существуют такие невырожденное линейное преобразование T и вектор $a \in \mathbb{R}^n$, что выпуклое тело*

$$T^{-1}(K-a) := \{T^{-1}(x-a) \colon x \in K\}$$

находится в изотропной позиции.

Доказательство. Пусть X_K — случайный вектор, равномерно распределенный на K. Как уже было доказано ранее, существуют такие невырожденное линейное преобразование T_0 и вектор $a \in \mathbb{R}^n$, что случайный вектор $T_0^{-1}(X_K - a) = X_{T_0^{-1}(K-a)}$ — изотропный. Это значит, что для нового выпуклого тела $K_0 := T_0^{-1}(K-a)$ выполнено

$$\frac{1}{\lambda_n(K_0)} \int_{K_0} \langle u, x\rangle\, dx = 0, \quad \frac{1}{\lambda_n(K_0)} \int_{K_0} \langle u, x\rangle \langle v, x\rangle\, dx = \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть теперь число $t > 0$ выбрано так, что $\lambda_n(t \cdot K_0) = 1$, т.е. $t = [\lambda_n(K_0)]^{-1/n}$. Тогда тело $t \cdot K_0$ находится в изотропной позиции и является аффинным образом K. $\square$

Замечание 2.16. Отметим, что для выпуклого тела K в изотропной позиции, L_K — это такая константа, что $C_{X_K} = L_K^2 \cdot id$, т.е.

$$\int_K \langle u, x\rangle \langle v, x\rangle\, dx = L_K^2 \langle u, v\rangle.$$

Теорема 2.17 (Простейшая оценка константы изотропности выпуклого тела)**.** *Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, тогда $L_K \le c\sqrt{n}$, где c — численная постоянная (т.е. $L_b(n) \le c\sqrt{n}$).*

Доказательство. В силу аффинной инвариантности константы изотропности, не ограничивая общности, можно считать, что K находится в изотропной позиции. Рассмотрим выражение

$$S_2^2(K) := \int_{K^n} \big[\lambda_n\big(\mathrm{conv}\{0, x^1, \dots, x^n\}\big)\big]^2\, dx^1 \dots dx^n, \quad x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^n.$$

С одной стороны, $S_2^2(K) \le [\lambda_n(K)]^{n+2} = 1$. С другой стороны,

$$S_2^2(K) = \frac{1}{(n!)^2}\int_{K^n} |\det(x^1,\dots,x^n)|^2\,dx^1\dots dx^n =$$

$$= \frac{1}{(n!)^2}\int_{K^n}\Big|\sum_\sigma (-1)^{|\sigma|}\prod_{j=1}^n x^j_{\sigma(j)}\Big|^2\,dx^1\dots dx^n =$$

$$= \frac{1}{(n!)^2}\int_{K^n}\sum_{\sigma,\tau}(-1)^{|\sigma|}(-1)^{|\tau|}\prod_{j=1}^n x^j_{\sigma(j)}x^j_{\tau(j)}\,dx^1\dots dx^n.$$

В силу того, что $\displaystyle\int_K x_m x_k\,dx = L_K^2\delta_{mk}$, ненулевыми слагаемыми в предыдущем выражении останутся только те, где $\sigma(j) = \tau(j)$, т.е.

$$S_2^2(K) = \frac{1}{(n!)^2}\int_{K^n}\sum_\sigma\prod_{j=1}^n (x^j_{\sigma(j)})^2\,dx^1\dots dx^n = \frac{1}{n!}L_K^{2n}.$$

Таким образом, $L_K \le \sqrt[2n]{n! S_2^2(K)} \le \sqrt[2n]{n!} \le c\sqrt{n}$ для некоторого числа $c > 0$. $\square$

Предложение 2.18. *Для произвольного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ выполнена оценка*

$$L_K \ge L_{B_2^n} \ge c > 0.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что K находится в изотропной позиции. Пусть $r_n := [\lambda_n(B_2^n)]^{-1/n}$. Тогда $\lambda_n(r_n B_2^n) = 1$ и выпуклое тело $r_n B_2^n$ находится в изотропной позиции. Тогда

$$nL_K^2 := \int_K |x|^2\,dx = \int_{K\cap r_nB_2^n}|x|^2\,dx + \int_{K\setminus r_nB_2^n}|x|^2\,dx \ge \int_{K\cap r_nB_2^n}|x|^2\,dx + r_n^2\cdot\lambda_n(K\setminus r_nB_2^n) =$$

$$= \int_{K\cap r_nB_2^n}|x|^2\,dx + r_n^2\cdot\lambda_n(r_nB_2^n\setminus K) \ge \int_{K\cap r_nB_2^n}|x|^2\,dx + \int_{r_nB_2^n\setminus K}|x|^2\,dx = nL^2_{r_nB_2^n} = nL^2_{B_2^n}.$$

Наконец заметим, что

$$L^2_{B_2^n} = L^2_{r_nB_2^n} = \frac{1}{n}\int_{r_nB_2^n}|x|^2\,dx = \frac{1}{n}\frac{n[\lambda_n(B_2^n)]}{n+2}r_n^{n+2} = \frac{[\lambda_n(B_2^n)]^{-2/n}}{n+2} \ge c^2,$$

т.к. $[\lambda_n(B_2^n)]^{-1} \asymp \sqrt{n}$. $\square$

3. Неравенства Прекопы–Леиндлера и Брунна–Минковского.

Определение 3.1. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$, тогда*

$$A + B := \{a + b\colon a \in A, b \in B\},\quad A - B := \{a - b\colon a \in A, b \in B\},\quad tA := \{t\cdot a\colon a \in A\}.$$

Для краткости будем писать $A + b$ вместо $A + \{b\}$.

Теорема 3.2 (Неравенство Брунна–Минковского)**.** *Пусть A и B — непустые борелевские подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$[\lambda_n(A+B)]^{1/n} \ge [\lambda_n(A)]^{1/n} + [\lambda_n(B)]^{1/n}.$$

Часто это неравенство удобно переписать в виде

$$[\lambda_n(tA + (1-t)B)]^{1/n} \ge t[\lambda_n(A)]^{1/n} + (1-t)[\lambda_n(B)]^{1/n}\quad \forall t\in[0,1].$$

Доказательство. Сначала докажем это неравенство при $n = 1$. Пусть $K_A \subset A$, $K_B \subset B$ произвольные компакты. Покажем, что

$$\lambda_1(A + B) \geq \lambda_1(K_A + K_B) \geq \lambda_1(K_A) + \lambda_1(K_B).$$

Т.к. мера Лебега инвариантна относительно сдвигов, можно считать, что

$$\sup K_A = \inf K_B = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1(K_A) + \lambda_1(K_B) = \lambda_1(K_A \cup K_B) \leq \lambda_1(K_A + K_B) \leq \lambda_1(A + B).$$

В силу произвольности компактов K_A и K_B получаем неравенство Брунна–Минковского в размерности $n = 1$. Неравенство Брунна–Минковского при $n > 1$ будет следовать из следующей более общей теоремы. □

Теорема 3.3 (Неравенство Прекопы–Леиндлера)**.** *Пусть u, v, w — неотрицательные интегрируемые на $\mathbb{R}^n$ функции, причем для некоторого $t \in [0, 1]$ выполнено соотношение*

$$w(tx + (1 - t)y) \geq [u(x)]^t [v(y)]^{1-t} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)\,dx \geq \Bigl(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx\Bigr)^t \Bigl(\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\,dx\Bigr)^{1-t}.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение при $n = 1$. Не ограничивая общности, можно считать, что u и v — ограниченные функции (переходя к функциям $\min\{u, N\}$ и $\min\{v, N\}$ и затем переходя к пределу при $N \to +\infty$). Кроме того, из-за однородности условия и вывода теоремы можно считать, что $\|u\|_\infty = \|v\|_\infty = 1$. Для каждого $s \in [0, 1]$ рассмотрим множества

$$U(s) := \{x \colon u(x) \geq s\}, \quad V(s) := \{x \colon v(x) \geq s\}, \quad W(s) := \{x \colon w(x) \geq s\}.$$

По условию

$$tU(s) + (1 - t)V(s) \subset W(s),$$

а по одномерному неравенству Брунна–Минковского

$$t\lambda_1(U(s)) + (1 - t)\lambda_1(V(s)) \leq \lambda_1(W(s)).$$

По теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)\,dx = \int_0^1 \lambda_1(W(s))\,ds \geq t \int_0^1 \lambda_1(U(s))\,ds + (1 - t) \int_0^1 \lambda_1(V(s))\,ds =$$
$$= t \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx + (1 - t) \int_{\mathbb{R}^n} v(x)\,dx \geq \Bigl(\int_{\mathbb{R}} u(x)\,dx\Bigr)^t \Bigl(\int_{\mathbb{R}} v(x)\,dx\Bigr)^{1-t},$$

где в последнем переходе мы использовали выпуклость фцнкции $z \mapsto e^z$. Теорема доказана при $n = 1$.

Применим теперь индукцию по размерности n. База уже проверена, проверяем индуктивный переход. Пусть утверждение теоремы справедливо во всех размерностях от 1 до $n - 1$. Покажем, что она верна и в размерности n. Пусть $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$, рассмотрим функции $w_s(x) := w(x, s)$, $u_s(x) := u(x, s)$, $v_s(x) := v(x, s)$ и

$$\widehat{w}(s) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} w(x, s)\,dx, \quad \widehat{u}(s) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x, s)\,dx, \quad \widehat{v}(s) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x, s)\,dx.$$

Заматим, что для произвольных фиксированных $a, b \in \mathbb{R}$ и для произвольных $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ выполнено соотношение

$$w_{ta+(1-t)b}(tx+(1-t)y) = w(tx+(1-t)y, ta+(1-t)b) \geq [u(x, a)]^t [v(y, b)]^{1-t} = [u_a(x)]^t [v_b(y)]^{1-t}.$$

Поэтому, по предположению индукции, для функций $w_{ta+(1-t)b}(\cdot)$, $u_a(\cdot)$, $v_b(\cdot)$ выполнена оценка

$$\widehat{w}(ta+(1-t)b) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_{ta+(1-t)b}(x)\,dx \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_a(x)\,dx\Big)^t \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_b(b)\,dx\Big)^{1-t} = [\widehat{u}(a)]^t[\widehat{v}(b)]^{1-t}.$$

Таким образом, для функций $\widehat{w}$, $\widehat{u}$, $\widehat{v}$ на $\mathbb{R}$ также выполняется условие теоремы и теперь применение базы индукции влечет утверждение теоремы и в размерности n. □

Вернемся теперь к обсуждению неравенства Брунна–Минковского в размерности $n > 1$.

Завершение доказательства неравенства Брунна–Минковского:

Для произвольных непустых борелевских множеств A, B с $\lambda_n(A) > 0$, $\lambda_n(B) > 0$ (достаточно рассматривать такие) рассмотрим множества $A_0 := [\lambda_n(A)]^{-1/n}A$, $B_0 := [\lambda_n(B)]^{-1/n}B$ и число

$$t := \frac{[\lambda_n(A)]^{1/n}}{[\lambda_n(A)]^{1/n} + [\lambda_n(B)]^{1/n}}.$$

Пусть $w := I_{tA_0+(1-t)B_0}$, $u := I_{A_0}$, $v := I_{B_0}$. Тогда

$$w(tx + (1-t)y) \geq [u(x)]^t[v(y)]^{1-t},$$

По неравенству Прекопы–Леиндлера получаем, что

$$\frac{[\lambda_n(A+B)]^{1/n}}{[\lambda_n(A)]^{1/n} + [\lambda_n(B)]^{1/n}} = [\lambda_n(tA_0 + (1-t)B_0)]^{1/n} \geq [\lambda_n(A_0)]^t[\lambda_n(B_0)]^{1-t} = 1.$$

□

4. Изопериметрическое неравенство.

Определение 4.1. *Пусть A — борлевское подмножество $\mathbb{R}^n$. (Нижней) площадью поверхности множнства A (по Минковскому) называется величина*

$$\lambda_n^+(A) := \liminf_{\varepsilon\to+0} \frac{\lambda_n(A+\varepsilon B_2^n) - \lambda_n(A)}{\varepsilon},$$

где B_2^n — евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1 с центром в нуле, $A + \varepsilon B_2^n$ — ε-окрестность множества A.

Теорема 4.2 (см. теорему на стр. 394 в [6])**.** *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $F \in C^2(U)$, $t \in \mathbb{R}$, $K = \{x \in U : F(x) \leq t\}$. Если множество K — компактно и $\nabla F \neq 0$ на ∂K, то площадь (мера Хаусдорфа) ∂K совпадает с площадью в смысле Минковского, т.е.*

$$H^{n-1}(\partial K) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\lambda_n(K+\varepsilon B_2) - \lambda_n(K)}{\varepsilon}$$

Теорема 4.3 (Изопериметрическое неравенство)**.** *Для произвольного борелевского множества A выполнено неравенство*

$$\lambda_n^+(A) \geq \lambda_n^+(RB_2^n),$$

где $R = \big[\frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(B_2^n)}\big]^{1/n}$, т.е. RB_2^n — евклидов шар такого радиуса R, что $\lambda_n(RB_2^n) = \lambda_n(A)$.

Доказательство. По неравенству Брунна–Минковского

$$\frac{\lambda_n(A+\varepsilon B_2) - \lambda_n(A)}{\varepsilon} \geq \frac{(R+\varepsilon)^n - R^n}{\varepsilon}\ \lambda_n(B_2^n),$$

откуда

$$\lambda_n^+(A) \geq nR^{n-1}\lambda_n(B_2^n) = \lambda_n^+(RB_2^n).$$

Теорема доказана. □

5. Неравенство Роджерса–Шепарда.

Определение 5.1. *Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, причем 0 — внутренняя точка K. Определим функционал Минковского p_K множества K следующим образом:*

$$p_K(x) := \inf\{t > 0 \colon t^{-1}x \in K\}.$$

Упражнение 5.2. Функция p_K — выпуклая и положительно однородная. Если K — центрально симметричное, то p_K — норма, которую мы иногда будем обозначать $\|\cdot\|_K$. Кроме того $K = \{x \colon p_K(x) \le 1\}$.

В качестве применения неравенства Брунна–Минковского докажем следующее неравенство Роджерса–Шепарда.

Теорема 5.3 (Неравенство Роджерса–Шепарда)**.** *Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\lambda_n(K - K) \le C_{2n}^n \lambda_n(K).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) := [\lambda_n(K \cap (K + x))]^{1/n}.$$

Заметим, что $f(x) \ne 0$ только при $x \in K - K$. Кроме того, при $t \in [0,1]$ для произвольных выпуклых множеств A, B имеет место включение

$$t(A \cap (B + x)) + (1-t)(A \cap (B + y)) \subset A \cap (B + tx + (1-t)y).$$

Из неравенства Брунна–Минковского и этого включения (при $A = B = K$) следует, что функция f — вогнутая.

Зададим теперь функцию $g \colon K - K \to [0, +\infty)$ равенством

$$g(x) := f(0)(1 - \|x\|_{K-K}).$$

Пусть $\theta \in S^{n-1}$ — произвольный вектор единичной (евклидовой) длины. Тогда функция $g_\theta(r) := g(r\theta)$ линейна на $[0, \|\theta\|_{K-K}^{-1}]$, причем $g_\theta(0) = f(0)$, $g_\theta(\|\theta\|_{K-K}^{-1}) = 0$ В силу вогнутости функции f для каждой точки $x \in K - K$ имеет место неравенство $f(x) \ge g(x)$. осталось лишь произвести вычисления. С одной стороны

$$\int_{K-K} \lambda_n(K \cap (K+x))\,dx = \int_{K-K} [f(x)]^n\,dx \ge \int_{K-K} [g(x)]^n\,dx = [f(0)]^n \int_{K-K} \bigl(1 - \|x\|_{K-K}\bigr)^n\,dx.$$

Перейдем в последнем интеграле к полярным координатам $x = r\theta$, $\theta \in S^{n-1}$, $r \in [0, +\infty)$:

$$\int_{K-K} \bigl(1 - \|x\|_{K-K}\bigr)^n\,dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\|\theta\|_{K-K}^{-1}} r^{n-1}\bigl(1 - r\|\theta\|_{K-K}\bigr)^n\,dr\,\sigma_{n-1}(d\theta) =$$

$$= \Bigl(\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^n\,dt\Bigr) \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_{K-K}^{-n}\,\sigma_{n-1}(d\theta) = B(n, n+1) n \int_{S^{n-1}} \int_0^{\|\theta\|_{K-K}^{-1}} r^{n-1}\,dr\,\sigma_{n-1}(d\theta) =$$

$$= \frac{n\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} \lambda_n(K - K) = \frac{1}{C_{2n}^n} \lambda_n(K - K).$$

С другой стороны

$$\lambda_n(K \cap (K + x)) = \int_{\mathbb{R}^n} I_K(y) I_{-K}(x - y)\,dy = I_K * I_{-K}(x).$$

Поэтому

$$\int_{K-K} \lambda_n(K \cap (K + x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_n(K \cap (K + x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} I_K * I_{-K}(x)\,dx = \lambda_n(K) \cdot \lambda_n(-K).$$

Таким образом,

$$[\lambda_n(K)]^2 \ge \frac{[f(0)]^n \lambda_n(K - K)}{C_{2n}^n}$$

Остается лишь заметить, что $[f(0)]^n = \lambda_n(K)$, что завершает доказательство. $\square$

Следствие 5.4. *Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$2[\lambda_n(K)]^{1/n} \leq [\lambda_n(K-K)]^{1/n} \leq 4[\lambda_n(K)]^{1/n}$$

Доказательство. Первое неравенство следует из неравенства Брунна–Минковского, а второе из предыдущей теоремы и того факта, что $\sqrt[n]{C_{2n}^n} \leq 4$. $\square$

6. Логарифмически вогнутые функции, меры и случайные векторы.

Определение 6.1. *Функция $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ называется логарифмически вогнутой, если $-\log\varrho\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ — выпуклая функция.*

Абсолютно непрерывная вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется логарифмически вогнутой, если ее плотность — логарифмически вогнутая функция.

Случайный n-мерный вектор X называется логарифмически вогнутым, если его распределение — логарифмически вогнутая мера.

Предложение 6.2. *Для произвольных борелевских множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$, для произвольного $t \in (0,1)$ и для произвольной логарифмически вогнутой меры μ выполнено неравенство*

$$\mu(tA + (1-t)B) \geq [\mu(A)]^t[\mu(B)]^{1-t}.$$

Доказательство. Пусть ϱ — плотность меры μ. Рассмотрим функции $w = I_{tA+(1-t)B}\varrho$, $u = I_A\varrho$, $v = I_B\varrho$. Тогда $w(tx+(1-t)y) \geq [u(x)]^t[v(y)]^{1-t}$, откуда по неравенству Прекопы–Леиндлера получается заявленная оценка. $\square$

Теорема 6.3 (C. Borell, см. [2]). *Пусть для вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^n$ для всех борелевских множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ и для каждого $t \in (0,1)$ выполнено неравенство*

$$\mu(tA + (1-t)B) \geq [\mu(A)]^t[\mu(B)]^{1-t}.$$

Тогда существует такое аффинное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$, что мера μ задана плотностью ϱ относительно меры Лебега на L и $-\log\varrho$ — выпуклая функция на L.

Предложение 6.4. *Пусть ϱ — логарифмически вогнутая плотность на $\mathbb{R}^{k+m}$. Тогда функция*

$$\widehat{\varrho}(x) := \int_{\mathbb{R}^m} \varrho(x,y)\,dy$$

также логарифмически вогнутая плотность на $\mathbb{R}^k$.

Доказательство. Пусть $t \in (0,1)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k$. Рассмотрим функции

$$w(y) := \varrho(tx_1 + (1-t)x_2, y), \quad u(y) := \varrho(x_1, y), \quad v(y) := \varrho(x_2, y).$$

Тогда из-за логарифмической вогнутости функции ϱ выполнено соотношение

$$w(ty_1 + (1-t)y_2) \geq [u(y_1)]^t[v(y_2)]^{1-t},$$

откуда по неравенству Прекопы–Леиндлера получаем логарифмическую вогнутость $\widehat{\varrho}$. $\square$

Следствие 6.5. *Пусть $k < n$, T — линейное преобразование $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathrm{rk}T = k$. Тогда для произвольного логарифмически вогнутого случайного вектора X случайный вектор TX также будет логарифмически вогнутым. В частности, если X и Y — независимые логарифмически вогнутые случайные векторы, то случайный вектор $aX + bY$ также логарифмически вогнутый.*

Доказательство. Пусть $P_{(\mathrm{Ker}T)^\perp}$ — ортогональная проекция на ортогональное дополнение $(\mathrm{Ker}T)^\perp$ до ядра $\mathrm{Ker}T$. Тогда $TX = T(P_{(\mathrm{Ker}T)^\perp}X)$, причем T — линейная биекция между $(\mathrm{Ker}T)^\perp$ и $\mathbb{R}^k$, а случайный вектор $P_{(\mathrm{Ker}T)^\perp}X$ — логарифмически вогнутый по предыдущему утверждению. Ясно, что при линейной биекции логарифмически вогнутый вектор останется логарифмически вогнутым. □

Упражнение 6.6. Пусть ϱ — логарифмически вогнутая вероятностная плотность на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что можно найти такие числа $A, B > 0$, что

$$\varrho(x) \le Ae^{-B|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 6.7 (C. Borell)**.** *Пусть μ — логарифмически вогнутая мера на $\mathbb{R}^n$ и пусть A — центрально симметричное выпуклое множество μ-меры $\alpha \in (0,1)$. Тогда при каждом $t > 1$ выполнена оценка*

$$1 - \mu(tA) \le \alpha\Bigl(\frac{1-\alpha}{\alpha}\Bigr)^{\frac{t+1}{2}} \le \bigl(\alpha^{-1} - 1\bigr)^{\frac{t-1}{2}}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus (tA)) + \frac{t-1}{t+1}A \subset \mathbb{R}^n \setminus A.$$

Т.к. мера μ логарифмически вогнутая, получаем, что

$$[1 - \mu(tA)]^{\frac{2}{t+1}}[\mu(A)]^{\frac{t-1}{t+1}} \le 1 - \mu(A),$$

что равносильно объявленной оценке. □

Следствие 6.8. *Пусть μ — логарифмически вогнутая мера на $\mathbb{R}^n$ и пусть g — полунорма на $\mathbb{R}^n$. Тогда g интегрируема в каждой степени $p \ge 1$ по мере μ. Кроме того, существует такое число $C > 0$, что для каждой логарифмически вогнутой меры μ и для каждой полунормы g на $\mathbb{R}^n$ при $p > 1$ справедлива оценка*

$$\|g\|_{L^p(\mu)} \le Cp\|g\|_{L^1(\mu)}.$$

Доказательство. Существует такое число $R > 0$, что $\mu(x\colon g(x) < R) \ge \frac{1}{1+e^{-1}}$. Тогда при каждом $t > R$

$$\mu(x\colon g(x) \ge t) = 1 - \mu\Bigl(\frac{t}{R}\{x\colon g(x) < R\}\Bigr) \le 2e^{-\frac{t}{2R}}.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(4R)^{-1}g(x)}\mu(dx) = \int_0^{+\infty} \mu(g(x) \ge 4R\ln t)\,dt \le e^{1/4} + \int_{e^{1/4}}^{+\infty} \frac{2}{t^2}\,dt = c < \infty.$$

В частности, т.к. для $n \in \mathbb{N}$ выполнена оценка $(\frac{g}{4R})^n \le n!e^{(4R)^{-1}g}$, то, взяв $n = [p] + 1$, при каждом $p > 1$ получаем оценку

$$\|g\|_{L^p(\mu)} \le \|g\|_{L^n(\mu)} \le c^{1/n}(n!)^{1/n}4R \le c_1pR.$$

Остается заметить, что

$$\mu\bigl(g < (1+e)\|g\|_{L^1(\mu)}\bigr) \ge 1 - \frac{1}{1+e} = \frac{1}{1+e^{-1}},$$

поэтому можно взять $R = (1+e)\|g\|_{L^1(\mu)}$. □

Упражнение 6.9. Докажите, что существует такое число $C > 0$, что для каждой логарифмически вогнутой меры μ и для каждой полунормы g на $\mathbb{R}^n$ при $p > q \ge 1$ справедлива оценка

$$\|g\|_{L^p(\mu)} \le C\frac{p}{q}\|g\|_{L^q(\mu)}.$$

Предложение 6.10 (M. Fradelizi). *Пусть $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ — центрированная логарифмически вогнутая плотность. Тогда*

$$\varrho(0) \le \|\varrho\|_\infty \le e^n \varrho(0).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varrho > 0$ всюду и непрерывно дифференцируема (если X — случайный вектор с плотностью ϱ, то можно рассмотреть случайные векторы $X + \varepsilon Z$, где Z — стандартный нормальный вектор, а затем устремить $\varepsilon \to 0$). Из-за выпуклости $-\log \varrho$ имеем

$$-\log \varrho(x) \ge -\log \varrho(y) + \langle x - y, \nabla(-\log \varrho(y))\rangle.$$

Проинтегрируем обе части неравенства по $\varrho(y)\,dy$:

$$-\log \varrho(x) \ge -\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y) \log \varrho(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - y, \nabla(-\log \varrho(y))\rangle \varrho(y)\,dy =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y) \log \varrho(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - y, \nabla \varrho(y)\rangle\,dy = -\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y) \log \varrho(y)\,dy - n.$$

По неравенству Йенсена для выпуклой функции $-\log \varrho$ получаем оценку

$$-\log \varrho(0) = -\log \varrho\Big(\int_{\mathbb{R}^n} y \varrho(y)\,dy\Big) \le \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y)[-\log \varrho(y)]\,dy.$$

Отсюда

$$-\log \varrho(x) \ge -\log \varrho(0) - n,$$

что равносильно объявленной оценке. □

7. Связь гипотезы гиперплоскости с гипотезой о константе изотропности.

Определение 7.1. *Будем говорить, что выпуклое тело центрирвано, если $\mathbb{E}X_K = 0$.*

Гипотеза гиперплоскости: Существует такое число $c > 0$, что для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ и для каждого центрированного выпуклого тела K объема 1 в $\mathbb{R}^n$ существует такая гиперплоскость H, что $\lambda_{n-1}(H \cap K) \ge c$.

Теорема 7.2. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1,+\infty)$, для каждого центрированного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ объема 1 и для каждого $\theta \in \mathbb{R}^n, |\theta| = 1$, выполнены неравенства*

$$\frac{1}{4e(p+1)^{1/p}} \cdot \frac{1}{\lambda_{n-1}(K \cap \langle\theta\rangle^\perp)} \le \Big(\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p\,dx\Big)^{1/p} \le \frac{[\Gamma(p+1)]^{1/p}}{\lambda_{n-1}(K \cap \langle\theta\rangle^\perp)}.$$

Доказательство будет следовать из нескольких лемм.

Лемма 7.3. *Пусть ξ — случайная величина с ограниченной плотностью ϱ_ξ. Тогда при каждом $p \ge 1$ справедлива оценка*

$$\|\varrho_\xi\|_\infty \big(\mathbb{E}|\xi|^p\big)^{1/p} \ge \frac{1}{4(p+1)^{1/p}}.$$

Доказательство. Пусть сначала ξ имеет симметричное распределение. Пусть

$$G(x) = \int_0^x \varrho_\xi(t)\,dt, \quad x \ge 0.$$

Тогда $G(0) = 0$, $G(+\infty) = 1/2$, $G(x) \le x\|\varrho_\xi\|_\infty$. Таким образом,

$$2^{-p} = 2[G(+\infty)]^{p+1} = 2\int_0^{+\infty} \big([G(x)]^{p+1}\big)'\,dx = 2(p+1)\int_0^{+\infty} \varrho_\xi(x)[G(x)]^p\,dx \le$$
$$\le (p+1)\|\varrho_\xi\|_\infty^p 2\int_0^{+\infty} x^p \varrho_\xi(x)\,dx = (p+1)\|\varrho_\xi\|_\infty^p \mathbb{E}|\xi|^p.$$

Таким образом, для случайных величин ξ с симметричным распределением
$$\|\varrho_\xi\|_\infty \bigl(\mathbb{E}|\xi|^p\bigr)^{1/p} \ge \frac{1}{2(p+1)^{1/p}}.$$
Для общей случайной величины ξ достаточно взять ее независимую копию ξ' и рассмотреть случайную величину $\xi - \xi'$ с симметричным распределением. По доказанному
$$\|\varrho_{\xi-\xi'}\|_\infty \bigl(\mathbb{E}|\xi-\xi'|^p\bigr)^{1/p} \ge \frac{1}{2(p+1)^{1/p}},$$
где $\varrho_{\xi-\xi'}$ — плотность случайной величины $\xi-\xi'$. Теперь остается лишь заметить, что $\bigl(\mathbb{E}|\xi-\xi'|^p\bigr)^{1/p} \le 2\bigl(\mathbb{E}|\xi|^p\bigr)^{1/p}$ и что $\varrho_{\xi-\xi'} = \varrho_\xi * \varrho_{-\xi} \le \|\varrho\|_\infty$. $\square$

Упражнение 7.4. Докажите, что и для несимметричной случайной величины справедлива оценка
$$\|\varrho\|_\infty \bigl(\mathbb{E}|\xi|^p\bigr)^{1/p} \ge \frac{1}{2(p+1)^{1/p}},$$
причем эта оценка точная (т.е. существует случайная величина, для которой в этой оценке достигается равенство).

Доказательство левой оценки в теореме 7.2.

Рассмотрим случайную величину $\xi = \langle X_K, \theta\rangle$. Тогда $\varrho_\xi(t) = \lambda_{n-1}\bigl(K \cap (\langle\theta\rangle^\perp + t\theta)\bigr)$ и, в частности, $\varrho_\xi(0) = \lambda_{n-1}(K\cap\langle\theta\rangle^\perp)$. Кроме того, случайный вектор X_K — центрированный, логарифмически вогнутый, поэтому и случайная величина ξ — логарифмически вогнутая и центрированная. По уже доказанному свойству логарифмически вогнутых распределений получаем, что $\|\varrho_\xi\|_\infty \le e\varrho_\xi(0)$. Таким образом, по предыдущей лемме получаем
$$\lambda_{n-1}(K\cap\langle\theta\rangle^\perp)\cdot\Bigl(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p\,dx\Bigr)^{1/p} = \varrho_\xi(0)\bigl(\mathbb{E}|\xi|^p\bigr)^{1/p} \ge e^{-1}\|\varrho_\xi\|_\infty\bigl(\mathbb{E}|\xi|^p\bigr)^{1/p} \ge \frac{1}{4e(p+1)^{1/p}}.$$
Левое неравенство в теореме 7.2 доказано. $\square$

Следующая лемма нужна для доказательства правой оценки в теореме 7.2.

Лемма 7.5. *Пусть* $\varrho\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *— логарифмически вогнутая функция, причем* $\varrho(0)>0$. *Тогда функция*
$$G(p) := \Bigl(\frac{1}{\varrho(0)\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} x^{p-1}\varrho(x)\,dx\Bigr)^{1/p}$$
не возрастает по p *на промежутке* $(0,+\infty)$.

Доказательство. Переходя к функции $\frac{\varrho(x)}{\varrho(0)}$, считаем, что $\varrho(0)=1$. Заметим, что при $c>0$ выполнено равенство
$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-cx}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{c^p}.$$
Подставиви в это равенство $c_p := \frac{1}{G(p)}$, получаем, что
$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-c_px}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{p-1}\varrho(x)\,dx.$$
В частности, не может быть такого, что при каждом $x\in(0,+\infty)$ выполнено неравенство $e^{-c_px}<\varrho(x)$. Пусть тогда
$$x_0 := \inf\{x>0\colon e^{-c_px}\ge\varrho(x)\}\in[0,+\infty).$$
Тогда при $x\in(0,x_0)$ имеет место оценка $e^{-c_px}<\varrho(x)$, что влечет следующее соотношение
$$\int_0^x t^{p-1}e^{-c_pt}\,dt \le \int_0^x t^{p-1}\varrho(t)\,dt$$

при $x \le x_0$. Отсюда получаем, что при $x \le x_0$

$$\int_x^{+\infty} t^{p-1} e^{-c_p t}\, dt \ge \int_x^{+\infty} t^{p-1} \varrho(t)\, dt$$

При $x > x_0$ найдется $y \in [x_0, x)$, для которого $e^{-c_p y} \ge \varrho(y)$. Из-за логарифмической вогнутости последнее, в частности, означает, что

$$e^{-c_p y} \ge \varrho(y) \ge \varrho(x)^{y/x} \varrho(0)^{1-y/x} = \varrho(x)^{y/x},$$

т.е. $\varrho(x) \le e^{-c_p x}$ при $x > x_0$, что опять же дает оценку

$$\int_x^{+\infty} t^{p-1} e^{-c_p t}\, dt \ge \int_x^{+\infty} t^{p-1} \varrho(t)\, dt$$

уже при $x > x_0$.

Пусть теперь $q > p$, тогда

$$\int_0^{+\infty} x^{q-1} \varrho(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \Big((q-p) \int_0^x t^{q-p-1}\, dt \Big) x^{p-1} \varrho(x)\, dx =$$
$$= (q-p) \int_0^{+\infty} \int_0^x t^{q-p-1} x^{p-1} \varrho(x)\, dt\, dx = (q-p) \int_0^{+\infty} t^{q-p-1} \int_t^{+\infty} x^{p-1} \varrho(x)\, dx\, dt \le$$
$$\le (q-p) \int_0^{+\infty} t^{q-p-1} \int_t^{+\infty} x^{p-1} e^{-c_p x}\, dx\, dt = \int_0^{+\infty} x^{q-1} e^{-c_p x}\, dx = \frac{\Gamma(q)}{c_p^q}.$$

Т.к. $c_p = \frac{1}{G(p)}$, мы получили оценку $G(q) \le G(p)$. □

Доказательство правой оценки в теореме 7.2.

Пусть, как и раньше, $\xi = \langle X_K, \theta \rangle$ и $\varrho_\xi(t) = \lambda_{n-1}\big(K \cap (\langle\theta\rangle^\perp + t\theta)\big)$. По предыдущему утверждению получаем, что

$$\Big(\frac{1}{\varrho_\xi(0)\Gamma(p+1)} \int_0^{+\infty} t^p \varrho_\xi(t)\, dt \Big)^{1/(p+1)} \le \frac{1}{\varrho_\xi(0)} \int_0^{+\infty} \varrho_\xi(t)\, dt$$

и, аналогично,

$$\Big(\frac{1}{\varrho_\xi(0)\Gamma(p+1)} \int_{-\infty}^0 t^p \varrho_\xi(t)\, dt \Big)^{1/(p+1)} \le \frac{1}{\varrho_\xi(0)} \int_{-\infty}^0 \varrho_\xi(t)\, dt.$$

Складывая эти оценки, получаем, что

$$\frac{1}{\varrho_\xi(0)} \ge \Big(\frac{1}{\varrho_\xi(0)\Gamma(p+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \varrho_\xi(t)\, dt \Big)^{1/(p+1)},$$

где была использована оценка $(a+b)^s \le a^s + b^s$ при $a, b > 0$, $s \in (0,1)$. Отсюда

$$\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p\, dx \le \frac{\Gamma(p+1)}{[\varrho_\xi(0)]^p}.$$

Правая оценка в теореме 7.2 доказана. □

Следствие 7.6. *Существуют такие числа $c_1, c_2 > 0$, что для каждого выпуклого тела K в изотропной позиции и для каждого $\theta \in \mathbb{R}^n, |\theta| = 1$, выполнене следующее неравенство*

$$\frac{c_1}{L_K} \le \lambda_{n-1}(K \cap \langle\theta\rangle^\perp) \le \frac{c_2}{L_K}.$$

Доказательство. Достаточно взять $p = 2$ в теореме 7.2. □

Теперь покажем эквивалентность гипотезы о константе изотропности и гипотезы гиперплоскости. Если верна гипотеза гиперплоскости, то по правой оценке в предыдущем следствии получаем, что для выпуклого тела K в изотропной позиции $L_K \le \frac{c_2}{c}$. Для доказательства обратной импликации нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 7.7. *Пусть K — центрированное выпуклое тело объема 1. Пусть*

$$\mathcal{E}(K) := \{y\colon \|y\|_{\mathcal{E}(K)} \le 1\}, \quad \|y\|^2_{\mathcal{E}(K)} := \int_K \langle y, x\rangle^2\, dx = \langle C_{X_K} y, y\rangle.$$

Тогда

$$\lambda_n(\mathcal{E}(K)) = \omega_n L_K^{-n},$$

где $\omega_n := \lambda_n(B_2^n)$.

Доказательство. Как мы уже знаем, найдутся невырожденное линейное преобразование S и вектор a, для которых выпуклое тело $S(K-a)$ находится в изотропной позиции. Т.к. K уже было центрированным, то $a = 0$. Т.к. $\lambda_n(K) = 1$ и т.к. $1 = \lambda_n(SK) = (\det S)\cdot\lambda_n(K)$, получаем, что $\det S = 1$. Напомним, что $C_{SK} = SC_K S^*$, поэтому

$$\det C_{SK} = \det(SC_K S^*) = (\det S)\cdot(\det C_K)\cdot(\det S^*) = \det C_K.$$

Остается заметить, что $\mathcal{E}(K) = (\sqrt{C_K})^{-1} B_2^n$, откуда

$$\lambda_n(\mathcal{E}(K)) = \omega_n (\det C_K)^{-1/2} = \omega_n (\det C_{SK})^{-1/2} = \omega_n L_K^{-n}.$$

Утверждение доказано. $\square$

Следствие 7.8. *Пусть K — центрированной выпуклое тело объема* 1*. Тогда найдется такой вектор $\theta \in \mathbb{R}^n$, $|\theta| = 1$, что*

$$\int_K |\langle x, \theta\rangle|^2\, dx \le L_K^2.$$

Доказательство. Заметим, что

$$L_K^{-n} = \omega_n^{-1}\lambda_n(\mathcal{E}(K)) = \frac{1}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}} \|\theta\|^{-n}_{\mathcal{E}(K)}\, \sigma_{n-1}(d\theta).$$

Отсюда получаем, что $\min\limits_{\theta\in S^{n-1}} \|\theta\|_{\mathcal{E}(K)} \le L_K$, что влечет наличие искомого θ. $\square$

Предположим теперь, что справедлива гипотеза о константе изотропности. Тогда для вектора θ из предыдущего следствия по теореме 7.2 получаем, что

$$\frac{1}{4e\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\lambda_{n-1}(K\cap\langle\theta\rangle^\perp)} \le \Big(\int_K |\langle x, \theta\rangle|^2\, dx\Big)^{1/2} \le L_K \le C.$$

8. Выпуклые тела ассоциированные с логарифмически вогнутыми функциями.

Для того, чтобы понять, как взаимосвязаны константы изотропности логарифмически вогнутых случайных векторов с константами изотропности выпуклых тел посмотрим, как можно представить моменты случаных векторов в виде моментов равномерных распределений.

Предложение 8.1. *Пусть $\varrho \ge 0$ и пусть $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно однородная функция порядка $p > -n$, т.е. $Q(rx) = r^p Q(x)$ для всех $r > 0$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(x)\varrho(x)\, dx = \int_{C_p(\varrho)} Q(y)\, dy,$$

где

$$C_p(\varrho) := \Big\{x\colon \int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(rx)\, dr \ge \frac{1}{p+n}\Big\}.$$

Доказательство. Перейдем в интеграле к сферическим координатам $x = r\theta$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} Q(x)\varrho(x)\,dx &= \int_{S^{n-1}}\int_0^{+\infty} r^{n-1}Q(r\theta)\varrho(r\theta)\,dr\,\sigma_{n-1}(d\theta) = \\
&= \int_{S^{n-1}} Q(\theta)\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(r\theta)\,dr\,\sigma_{n-1}(d\theta) = \\
&= \int_{S^{n-1}} Q(\theta)\int\limits_0^{\left((p+n)\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(r\theta)\,dr\right)^{\frac{1}{p+n}}} t^{p+n-1}\,dt\,\sigma_{n-1}(d\theta) = \int_{C_p(\varrho)} Q(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
C_p(\varrho) &:= \Big\{x\colon |x| \le \Big((p+n)\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(r|x|^{-1}x)\,dr\Big)^{\frac{1}{p+n}}\Big\} = \\
&= \Big\{x\colon 1 \le \Big((p+n)|x|^{-p-n}\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(r|x|^{-1}x)\,dr\Big)^{\frac{1}{p+n}}\Big\} = \\
&= \Big\{x\colon 1 \le (p+n)\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(rx)\,dr\Big\}.
\end{aligned}
$$

Предложение доказано. □

Теорема 8.2 (K. Ball). *Пусть ϱ — логарифмически вогнутая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда $C_p(\varrho)$ — выпуклое множество при каждом $p > -n$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in C_p(\varrho)$, т.е.

$$
\int_0^{+\infty} \varrho(t^{-1}x)\,t^{-n-p-1}\,dt = \int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(rx)\,dr \ge \frac{1}{n+p},
$$

$$
\int_0^{+\infty} \varrho(t^{-1}y)\,t^{-n-p-1}\,dt = \int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(ry)\,dr \ge \frac{1}{n+p},
$$

Хотим проверить, что для каждого $\alpha \in (0,1)$ выполнено

$$
\int_0^{+\infty} \varrho\big(t^{-1}(\alpha x + (1-\alpha)y)\big)\,t^{-n-p-1}\,dt \ge \frac{1}{n+p}.
$$

Пусть

$$
u(t) := \varrho(t^{-1}x), \quad v(t) := \varrho(t^{-1}y), \quad w(t) := \varrho\big(t^{-1}(\alpha x + (1-\alpha)y)\big).
$$

Из-за логарифмической вогнутости ϱ получаем, что

$$
\begin{aligned}
w(\alpha t + (1-\alpha)s) &= \varrho\big((\alpha t + (1-\alpha)s)^{-1}(\alpha x + (1-\alpha)y)\big) = \\
&= \varrho\Big(\frac{\alpha t}{\alpha t + (1-\alpha)s}t^{-1}x + \frac{(1-\alpha)s}{\alpha t + (1-\alpha)s}s^{-1}y\Big) \ge [\varrho(t^{-1}x)]^{\frac{\alpha t}{\alpha t+(1-\alpha)s}}[\varrho(s^{-1}y)]^{\frac{(1-\alpha)s}{\alpha t+(1-\alpha)s}} = \\
&= [u(t)]^{\frac{\alpha t}{\alpha t+(1-\alpha)s}}[v(s)]^{\frac{(1-\alpha)s}{\alpha t+(1-\alpha)s}}.
\end{aligned}
$$

Пусть теперь

$$
U_a(t) := u(at)\,t^{-n-p-1}, \quad V_b(t) := v(bt)\,t^{-n-p-1}, \quad W_c(t) := w(ct)\,t^{-n-p-1}.
$$

Тогда, применив неравенство Юнга, получаем, что

$$
\begin{aligned}
&[U_a(t)]^{\frac{\alpha at}{\alpha at+(1-\alpha)bs}}[V_b(s)]^{\frac{(1-\alpha)bs}{\alpha at+(1-\alpha)bs}} = \\
&\qquad = [u(at)]^{\frac{\alpha at}{\alpha at+(1-\alpha)bs}}[v(bs)]^{\frac{(1-\alpha)bs}{\alpha at+(1-\alpha)bs}}\Big([t^{-1}]^{\frac{\alpha at}{\alpha at+(1-\alpha)bs}}[s^{-1}]^{\frac{(1-\alpha)bs}{\alpha at+(1-\alpha)bs}}\Big)^{n+p+1} \le \\
&\qquad \le w(\alpha at+(1-\alpha)bs)\Big(\frac{\alpha a}{\alpha at+(1-\alpha)bs}+\frac{(1-\alpha)b}{\alpha at+(1-\alpha)bs}\Big)^{n+p+1} = \\
&\qquad\qquad = W_{(\alpha a+(1-\alpha)b)}\Big(\frac{\alpha a}{\alpha a+(1-\alpha)b}t+\frac{(1-\alpha)b}{\alpha a+(1-\alpha)b}s\Big).
\end{aligned}
$$

Пусть теперь числа a и b подобраны так, чтобы $\|U_a\|_\infty = \|V_b\|_\infty = 1$. Тогда для каждого $\tau \in (0,1)$ выполнено включение

$$
\frac{\alpha a}{\alpha a+(1-\alpha)b}\{t\colon U_a(t)\ge\tau\}+\frac{(1-\alpha)b}{\alpha a+(1-\alpha)b}\{t\colon V_b(t)\ge\tau\}\subset\{t\colon W_{(\alpha a+(1-\alpha)b)}(t)\ge\tau\},
$$

откуда по теореме Фубини и одномерному неравенству Брунна–Минковского получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} W_{(\alpha a+(1-\alpha)b)}(t)\,dt \ge \int_0^1 \lambda\{t\colon W_{(\alpha a+(1-\alpha)b)}(t)\ge\tau\}\,d\tau \ge \\
&\quad \ge \frac{\alpha a}{\alpha a+(1-\alpha)b}\int_0^1 \lambda\{t\colon U_a(t)\ge\tau\}\,d\tau+\frac{(1-\alpha)b}{\alpha a+(1-\alpha)b}\int_0^1 \lambda\{t\colon V_b(t)\ge\tau\}\,d\tau = \\
&\qquad = \frac{\alpha a}{\alpha a+(1-\alpha)b}\int_0^{+\infty} U_a(t)\,dt+\frac{(1-\alpha)b}{\alpha a+(1-\alpha)b}\int_0^{+\infty} V_b(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
\int_0^{+\infty} U_a(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \varrho((at)^{-1}x)\,t^{-n-p-1}\,dt = a^{n+p}\int_0^{+\infty} \varrho(s^{-1}x)\,s^{-n-p-1}\,ds \ge \frac{a^{n+p}}{n+p}.
$$

и, аналогично,

$$
\int_0^{+\infty} V_b(t)\,dt = b^{n+p}\int_0^{+\infty} \varrho(s^{-1}x)\,s^{-n-p-1}\,ds \ge \frac{b^{n+p}}{n+p},
$$

$$
\int_0^{+\infty} W_{(\alpha a+(1-\alpha)b)}(t)\,dt = \big(\alpha a+(1-\alpha)b\big)^{n+p}\int_0^{+\infty} \varrho(s^{-1}(\alpha x+(1-\alpha)y)\,s^{-n-p-1}\,ds.
$$

Таким образом,

$$
\int_0^{+\infty} \varrho(s^{-1}(\alpha x+(1-\alpha)y)\,s^{-n-p-1}\,ds \ge \frac{\alpha a^{n+p+1}+(1-\alpha)b^{n+p+1}}{(\alpha a+(1-\alpha)b)^{n+p+1}}\frac{1}{n+p}.
$$

Остается заметить, что функция $s\mapsto s^{n+p+1}$ выпуклая, откуда следует, что

$$
\alpha a^{n+p+1}+(1-\alpha)b^{n+p+1}\ge(\alpha a+(1-\alpha)b)^{n+p+1},
$$

что завершает доказательство теоремы. □

Следствие 8.3. *Если ϱ — четная логарифмически вогнутая плотность, то при каждом $q>0$ функция*

$$
\|x\| = \begin{cases} \Big(q\int_0^{+\infty} r^{q-1}\varrho(rx)\,dr\Big)^{-1/q},\ x\ne 0\\ 0,\ x=0\end{cases}
$$

задает норму на $\mathbb{R}^n$.

Лемма 8.4. *Пусть $\varrho\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — функция, и пусть M такое число, что $\varrho \le M$. Тогда функция*

$$F(p) := \Bigl(\frac{p}{M}\int_0^{+\infty} t^{p-1}\varrho(t)\,dt\Bigr)^{1/p}$$

не убывает по p на промежутке $(0,+\infty)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $M = 1$. Тогда при $q > p > 0$ для каждого $s > 0$ выполнено соотношение

$$\frac{[F(q)]^q}{q} = \int_0^{+\infty} t^{q-1}\varrho(t)\,dt = \int_0^{s} t^{q-1}\varrho(t)\,dt + \int_s^{+\infty} t^{q-1}\varrho(t)\,dt \ge$$
$$\ge \int_0^{s} t^{q-1}\varrho(t)\,dt + s^{q-p}\int_s^{+\infty} t^{p-1}\varrho(t)\,dt = s^{q-p}\frac{[F(p)]^p}{p} + \int_0^{s} t^{q-1}\varrho(t)\,dt - s^{q-p}\int_0^{s} t^{p-1}\varrho(t)\,dt =$$
$$= s^{q-p}\frac{[F(p)]^p}{p} + s^q\int_0^1 r^{q-1}\varrho(sr)\,dr - s^q\int_0^1 r^{p-1}\varrho(sr)\,dr =$$
$$= s^{q-p}\frac{[F(p)]^p}{p} - s^q\int_0^1 (r^{p-1}-r^{q-1})\varrho(sr)\,dr \ge s^{q-p}\frac{[F(p)]^p}{p} - s^q\int_0^1 r^{p-1}-r^{q-1}\,dr =$$
$$= s^{q-p}\frac{[F(p)]^p}{p} - s^q(p^{-1}-q^{-1}).$$

Подставляя $s = F(p)$, получаем оценку $\frac{[F(q)]^q}{q} \ge \frac{[F(p)]^q}{q}$, что и означает требуемую монотонность. $\square$

Предложение 8.5. *Пусть ϱ — центрированная логарифмически вогнутая плотность в $\mathbb{R}^n$. Тогда при $q > p > -n$ имеет место включение*

$$[\varrho(0)]^{\frac{1}{p+n}-\frac{1}{q+n}}\frac{\Gamma(p+n+1)^{\frac{1}{p+n}}}{\Gamma(q+n+1)^{\frac{1}{q+n}}}\cdot C_q(\varrho) \subset C_p(\varrho) \subset [e^n\varrho(0)]^{\frac{1}{p+n}-\frac{1}{q+n}}\cdot C_q(\varrho).$$

Доказательство. Напомним, что $\|\varrho\|_\infty \le e^n\varrho(0)$. По доказанному в предыдущей лемме при $q > p > -n$, получаем, что

$$\Bigl(\frac{q+n}{e^n\varrho(0)}\int_0^{+\infty} r^{q+n-1}\varrho(rx)\,dr\Bigr)^{\frac{1}{q+n}} \ge \Bigl(\frac{p+n}{e^n\varrho(0)}\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(rx)\,dr\Bigr)^{\frac{1}{p+n}}.$$

Поэтому для точки $x \in C_p(\varrho)$ получаем, что

$$\Bigl(\frac{q+n}{e^n\varrho(0)}\int_0^{+\infty} r^{q+n-1}\varrho(rx)\,dr\Bigr)^{\frac{1}{q+n}} \ge [e^n\varrho(0)]^{-\frac{1}{p+n}},$$

что можно переписать в виде

$$\Bigl((q+n)\int_0^{+\infty} r^{q+n-1}\varrho(rx)\,dr\Bigr)^{-\frac{1}{q+n}} \le [e^n\varrho(0)]^{\frac{1}{p+n}-\frac{1}{q+n}}.$$

Т.е. $x \in [e^n\varrho(0)]^{\frac{1}{p+n}-\frac{1}{q+n}}\cdot C_q(\varrho)$.

С другой стороны, как было показано ранее, при $q > p > -n$ выполнено неравенство

$$\Bigl(\frac{1}{\varrho(0)\Gamma(p+n)}\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(rx)\,dx\Bigr)^{\frac{1}{p+n}} \ge \Bigl(\frac{1}{\varrho(0)\Gamma(q+n)}\int_0^{+\infty} r^{q+n-1}\varrho(rx)\,dx\Bigr)^{\frac{1}{q+n}}.$$

Если $x \in C_q(\varrho)$, то

$$\Bigl(\frac{1}{\varrho(0)\Gamma(p+n)}\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(rx)\,dx\Bigr)^{\frac{1}{p+n}} \ge \Bigl(\frac{1}{\varrho(0)(q+n)\Gamma(q+n)}\Bigr)^{\frac{1}{q+n}}$$

что можно переписать в виде

$$\Big((p+n)\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(rx)\,dx\Big)^{-\frac{1}{p+n}} \le \big(\varrho(0)\Gamma(p+n+1)\big)^{-\frac{1}{p+n}}\big(\varrho(0)\Gamma(q+n+1)\big)^{\frac{1}{q+n}}.$$

Т.е. $x \in [\varrho(0)]^{\frac{1}{q+n}-\frac{1}{p+n}} \frac{\Gamma(q+n+1)^{\frac{1}{q+n}}}{\Gamma(p+n+1)^{\frac{1}{p+n}}} \cdot C_p(\varrho)$ □

Следствие 8.6. *Пусть ϱ — центрированная вероятностная логарифмически вогнутая плотность в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$e^{-\frac{n}{n+1}}[\varrho(0)]^{-\frac{1}{n+1}} \le \lambda_n(C_1(\varrho)) \le 6^{\frac{n}{n+1}}[\varrho(0)]^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Доказательство. Подставляя в предыдущем включении $p=0$, $q=1$, получаем, что

$$[\varrho(0)]^{\frac{1}{n(n+1)}}\frac{\Gamma(n+1)^{\frac{1}{n}}}{\Gamma(n+2)^{\frac{1}{n+1}}}\cdot C_1(\varrho) \subset C_0(\varrho) \subset [\varrho(0)]^{\frac{1}{n(n+1)}} e^{\frac{1}{n+1}}\cdot C_1(\varrho).$$

Заметим, что

$$\lambda_n(C_0(\varrho)) = \int_{\mathbb{R}^n}\varrho(x)\,dx = 1.$$

Таким образом,

$$e^{-\frac{n}{n+1}}[\varrho(0)]^{-\frac{1}{n+1}} \le \lambda_n(C_1(\varrho)) \le \frac{\Gamma(n+2)^{\frac{n}{n+1}}}{\Gamma(n+1)}[\varrho(0)]^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Т.к.

$$\frac{\Gamma(n+2)^{\frac{n}{n+1}}}{\Gamma(n+1)} = \Big[\frac{(n+1)n!}{[n!]^{\frac{n+1}{n}}}\Big]^{\frac{n}{n+1}} = \Big[\frac{n+1}{[n!]^{\frac{1}{n}}}\Big]^{\frac{n}{n+1}} \le \Big[\frac{n+1}{n/3}\Big]^{\frac{n}{n+1}} \le 6^{\frac{n}{n+1}},$$

то следствие доказано. □

Теорема 8.7. *Существуют такие числа $b>a>0$, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ и для каждой центрированной вероятностной логарифмически вогнутой плотности ϱ выполнено*

$$aL_{C_1(\varrho)} \le L_\varrho \le bL_{C_1(\varrho)},$$

причем $C_1(\varrho)$ — центрированное выпуклое тело.

Доказательство. В силу своего определения и теоремы К. Болла $C_1(\varrho)$ — центрированное выпуклое тело. Напомним, что

$$L_{C_1(\varrho)} = L_{X_{C_1(\varrho)}} = \Big(\frac{1}{\lambda_n(C_1(\varrho))}\Big)^{\frac{1}{n}}\big(\det C_{X_{C_1(\varrho)}}\big)^{\frac{1}{2n}},$$

где $X_{C_1(\varrho)}$ — случайный вектор, равномерно распределенный на $C_1(\varrho)$ и где $C_{X_{C_1(\varrho)}}$ — матрица ковариаций этого вектора.

Далее выражение $A\simeq B$ означает, что существуют такие два независящих ни от чего числа $c_1>c_1>0$, что $c_1A\le B\le c_2A$.

Из-за эквивалентности всех моментов у логарифмически вогнутых распределений получаем, что

$$\sqrt{\langle C_{X_{C_1(\varrho)}}y,y\rangle} = \Big(\frac{1}{\lambda_n(C_1(\varrho))}\int_{C_1(\varrho)}|\langle x,y\rangle|^2\,dx\Big)^{1/2} \simeq \frac{1}{\lambda_n(C_1(\varrho))}\int_{C_1(\varrho)}|\langle x,y\rangle|\,dx =$$
$$\frac{1}{\lambda_n(C_1(\varrho))}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x,y\rangle|\varrho(x)\,dx \simeq \frac{1}{\lambda_n(C_1(\varrho))}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x,y\rangle|^2\varrho(x)\,dx\Big)^{1/2} = \frac{1}{\lambda_n(C_1(\varrho))}\sqrt{\langle C_\varrho y,y\rangle}.$$

Таким образом,

$$c_1C_{X_{C_1(\varrho)}} \le \big[\lambda_n(C_1(\varrho))\big]^{-2}C_\varrho \le c_2C_{X_{C_1(\varrho)}},$$

откуда получаем, что

$$c_1^n \det C_{X_{C_1(\varrho)}} \le \big[\lambda_n(C_1(\varrho))\big]^{-2n} \det C_\varrho \le c_2^n \det C_{X_{C_1(\varrho)}},$$

т.е.

$$\big(\det C_{X_{C_1(\varrho)}}\big)^{\frac{1}{2n}} \simeq \big[\lambda_n(C_1(\varrho))\big]^{-1}\big(\det C_\varrho\big)^{\frac{1}{2n}}.$$

Кроме того, в предыдущем следствии было установлено, что

$$e^{-1}[\varrho(0)]^{-\frac{1}{n}} \le \big[\lambda_n(C_1(\varrho))\big]^{\frac{n+1}{n}} \le 6[\varrho(0)]^{-\frac{1}{n}}.$$

В итоге мы получаем, что

$$L_{C_1(\varrho)} = \Big(\frac{1}{\lambda_n(C_1(\varrho))}\Big)^{\frac{1}{n}}\big(\det C_{X_{C_1(\varrho)}}\big)^{\frac{1}{2n}} \simeq \big[\lambda_n(C_1(\varrho))\big]^{-\frac{n+1}{n}}\big(\det C_\varrho\big)^{\frac{1}{2n}} \simeq [\varrho(0)]^{\frac{1}{n}}\big(\det C_\varrho\big)^{\frac{1}{2n}} \simeq L_\varrho,$$

где мы воспользовались тем, что $[\varrho(0)]^{\frac{1}{n}} \simeq \|\varrho\|_\infty^{\frac{1}{n}}$. □

Следствие 8.8. *Существуют такие числа $b > a > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждой центрированной вероятностной логарифмически вогнутой плотности ϱ найдется центрально симметричное выпуклое тело T, для которого выполнено*

$$aL_T \le L_\varrho \le bL_T.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение только для индикатора центрированного выпуклого тела объема 1. Пусть K — такое выпуклое тело, X — случайный вектор, равномерно распределенный на K. Пусть X' — независимая копия вектора X и пусть ϱ_0 – плотность случайного вектора $X - X'$. Тогда ϱ_0 — симметричная относительно точки 0 плотность, причем $\varrho_0(x) \le \|\varrho\|_\infty = 1 = \varrho_0(0)$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\langle C_{X-X'}u, u\rangle = \mathbb{E}[\langle X - X', u\rangle\langle X - X', u\rangle] = \mathbb{D}[\langle X, u\rangle - \langle X', u\rangle] = \\ = \mathbb{D}[\langle X, u\rangle] + \mathbb{D}[\langle X', u\rangle]. = 2\langle C_X u, u\rangle,\end{aligned}$$

т.е. $C_{X-X'} = 2C_X$ Тем самым, $L_{\varrho_0} = \sqrt{2}L_K$. По предыдущей теореме $L_{C_1(\varrho_0)} \simeq L_{\varrho_0}$ и кроме того, $C_1(\varrho_0)$ — центрально симметричное, т.к. функция ϱ_0 — четная. □

Предложение 8.9. *Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ и 0 — внутренняя точка K. Тогда для $\varrho = I_K$ выполнено $C_p(\varrho) = K$.*

Доказательство. Пусть p_K — функционал Минковского, построенный по телу K. Тогда $K = \{x\colon p_K(x) \le 1\}$. Теперь заметим, что

$$\int_0^{+\infty} r^{p+n-1}\varrho(rx)\,dr = \int_{p_K(rx)\le 1} r^{p+n-1}\,dr = \int_0^{[p_K(x)]^{-1}} r^{p+n-1}\,dr = \frac{1}{n+p}[p_K(x)]^{-n-p}.$$

Таким образом,

$$C_p(\varrho) = \Big\{x\colon \frac{1}{n+p}[p_K(x)]^{-n-p} \ge \frac{1}{n+p}\Big\} = \{x\colon p_K(x) \le 1\} = K.$$

□

9. Оценка константы изотропности безусловного логарифмически вогнутого распределения.

Теорема 9.1 (Обобщенное неравенство Лумиса-Уитни)**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Рассмотрим функции $f_k \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $f_k \ge 0$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{k=1}^n [f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)]^{\frac{1}{n-1}}\,dx_1 \dots dx_n \le \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Доказательство. Для краткости пусть $\pi_k^n(x) := (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Докажем оценку индукцией по n. База ($n = 2$) тривиально следует из теоремы Фубини. Докажем индуктивный переход, т.е. предполагаем, что оценка верна в размерности $n-1$. По неравенству Гельдера

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n [f_k(\pi_k^n(x))]^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\prod_{k=1}^{n-1} [f_k(\pi_k^n(x))]^{\frac{1}{n-1}} \Big) [f_n(\pi_n^n(x))]^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1} \Big)\, dx_n \le$$

$$\le \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} [f_k(\pi_k^n(x))]^{\frac{1}{n-2}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1} \Big)^{\frac{n-2}{n-1}}\, dx_n =$$

$$= \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} [f_k(\pi_k^{n-1}(y), x_n)]^{\frac{1}{n-2}}\, dy_1 \ldots dy_{n-1} \Big)^{\frac{n-2}{n-1}}\, dx_n$$

По предположению индукции последнее выражение оценивается сверху через

$$\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n-1} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-2}} f_k(z, x_n)\, dz \Big)^{\frac{1}{n-1}}\, dx_n \le$$

$$\le \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \Big(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} f_k(z, x_n)\, dz\, dx_n \Big)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}},$$

где предпоследний переход получен с помощью обобщенного неравенства Гельдера. ☐

Следствие 9.2. *Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ фиксирована и пусть*

$$f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) := \sup_{t \in \mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Тогда

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \le \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n}}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$[f(x_1, \ldots, x_n)]^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{k=1}^n [f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)]^{\frac{1}{n-1}}$$

и применить обобщенное неравенство Лумиса–Уитни. ☐

Следствие 9.3 (Неравенство Лумиса–Уитни)**.** *Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ и пусть P_k — оператор ортогональной проекции на гиперплоскость $\{x_k = 0\}$. Тогда*

$$[\lambda_n(K)]^{n-1} \le \prod_{k=1}^n \lambda_{n-1}(P_k(K)).$$

Доказательство. Достаточно в предыдущем следствии взять $f = I_K$, тогда

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n) = I_{P_k(K)}$$

и получается заявленное неравенство. ☐

Следствие 9.4 (Неравенство Гальярдо–Ниренберга-Соболева)**.** *Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n \|\partial_k f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}, \quad \partial_k f := \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$f(x_1,\dots,x_{k-1},t,x_{k+1},\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{t}\partial_k f(x_1,\dots,x_{k-1},s,x_{k+1},\dots,x_n)\,ds$$

и также

$$f(x_1,\dots,x_{k-1},t,x_{k+1},\dots,x_n)=-\int_{t}^{+\infty}\partial_k f(x_1,\dots,x_{k-1},s,x_{k+1},\dots,x_n)\,ds.$$

Поэтому

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(x_1,\dots,x_{k-1},t,x_{k+1},\dots,x_n)|\le\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x_1,\dots,x_{k-1},s,x_{k+1},\dots,x_n)|\,ds,$$

откуда и следует объявленная оценка. □

Определение 9.5. *Говорят, что для выпуклого тела $K\subset\mathbb{R}^n$ существует безусловный ортонормированный базис $\{e_1,\dots,e_n\}$, если $x_1e_1+\ldots+x_ne_n\in K\Rightarrow\varepsilon_1x_1e_1+\ldots+\varepsilon_nx_ne_n\in K$ для каждого выбора знаков $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$. Выпуклое тело $K\subset\mathbb{R}^n$ со стандартным безусловным базисом $\{(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$ будем называется просто безусловным.*

Говорят, что случайный вектор $X=(X_1,\dots,X_n)$ имеет безусловное распределение, если для каждого выбора знаков $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$ распределение случайного вектора $(\varepsilon_1X_1,\dots,\varepsilon_nX_n)$ совпадает с распределением исходного вектора X.

Упражнение 9.6. Проверьте, что выпуклое телое $K\subset\mathbb{R}^n$ будет безусловным тогда и только тогда, когда случайный вектор X_K равномерно распределенный на K имеет безусловное распределение.

Теорема 9.7 (С. Бобков, Ф. Назаров)**.** *Существует такое число $C>0$, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ и для каждого безусловного выпуклого тела K в изотропной позиции выполнена оценка*

$$L_K\le C.$$

Доказательство. В силу симметричности выпуклого тела K относительно гиперплоскостей $H_k:=\{x\colon x_k=0\}$ получаем, что

$$K\cap H_k=P_k(K),$$

где P_k — оператор ортогональной проекции на гиперплоскость H_k. По неравенству Лумиса–Уитни найдется k_0, для которого $\lambda_{n-1}(K\cap H_{k_0})\ge 1$. Мы знаем, что для каждого вектора θ единичной длины выполнено соотношение:

$$\frac{1}{4e\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\lambda_{n-1}(K\cap\langle\theta\rangle^{\perp})}\le\Bigl(\int_K|\langle x,\theta\rangle|^2\,dx\Bigr)^{1/2}\le\frac{\sqrt{2}}{\lambda_{n-1}(K\cap\langle\theta\rangle^{\perp})},$$

причем

$$L_K=\Bigl(\int_K|\langle x,\theta\rangle|^2\,dx\Bigr)^{1/2}$$

для выпуклого тела K в изотропной позиции. Теорема доказана. □

Следствие 9.8. *Существует такое число $c>0$, что для каждого $n\in\mathbb{N}$, для каждого безусловного выпуклого тела K в изотропной позиции и для каждого вектора θ единичной длины выполнена оценка*

$$\lambda_{n-1}(K\cap\langle\theta\rangle^{\perp})\ge c.$$

Упражнение 9.9. Проверьте, что существует такая константа $C>0$, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ и для каждого безусловного изотропного логарифмически вогнутого случайного вектора X со значениями в $\mathbb{R}^n$ выполнена оценка $L_X\le C$.

10. Теорема Б. Клартага.

Определение 10.1. *Пусть K — выпуклое, центрально симметричное тело в $\mathbb{R}^n$. Полярой (или полярным телом) называется выпуклое тело*

$$K^\circ := \bigl\{x\colon \sup_{y\in K}\langle x,y\rangle \le 1\bigr\}.$$

Для центрально симметричного выпуклого тела K введем также следующую величину

$$s(K) := \lambda_n(K)\cdot\lambda_n(K^\circ),$$

которая называется объемом Малера выпуклого тела K.

Упражнение 10.2. Проверьте, что величина $s(K)$ инвариантна относительно невырожденных линейных преобразований.

Теорема 10.3 (Б. Клартаг)**.** *Существует такое число $C>0$, что для каждого выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$ и для каждого $\varepsilon\in(0,1)$ найдется такое центрированное выпуклое тело T и такой вектор x_0, что*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot T\subset K+x_0\subset(1+\varepsilon)\cdot T$$

и

$$L_T\le\frac{C}{\sqrt{\varepsilon n[s(K-K)]^{1/n}}}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что K — центрированное выпуклое тело, а $\lambda_n(K-K)=1$ ($s(K-K)$ и L_T — инвариантны относительно невырожденных аффинных преобразований).

1) Пусть X — случайный вектор, равномерно распределенный на K, пусть μ_y — вероятностная мера с плотностью $\varrho_y(x)=c_y e^{\langle y,x\rangle}I_K(x)$, где $\dfrac{1}{c_y}=\displaystyle\int_K e^{\langle y,x\rangle}\,dx$, и пусть

$$\Lambda_X(y):=\ln\bigl(\mathbb{E}\bigl[e^{\langle y,X\rangle}\bigr]\bigr).$$

Функция Λ_X называется логарифмическим преобразованием Лапласа случайного вектора X. Заметим, что

$$\nabla\Lambda_X(y)=\frac{\mathbb{E}\bigl[Xe^{\langle y,X\rangle}\bigr]}{\mathbb{E}\bigl[e^{\langle y,X\rangle}\bigr]}=\int_{\mathbb{R}^n}x\,\mu_y(dx)\in K,$$

т.к. μ_y — мера на выпуклом теле K. Кроме того,

$$\frac{\partial^2\Lambda_X(y)}{\partial y_j\partial y_k}=\frac{\mathbb{E}\bigl[X_jX_ke^{\langle y,X\rangle}\bigr]}{\mathbb{E}\bigl[e^{\langle y,X\rangle}\bigr]}-\frac{\mathbb{E}\bigl[X_je^{\langle y,X\rangle}\bigr]\mathbb{E}\bigl[X_ke^{\langle y,X\rangle}\bigr]}{\bigl(\mathbb{E}\bigl[e^{\langle y,X\rangle}\bigr]\bigr)^2}=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}x_jx_k\,\mu_y(dx)-\Bigl(\int_{\mathbb{R}^n}x_j\,\mu_y(dx)\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}^n}x_k\,\mu_y(dx)\Bigr)=(C_{\mu_y})_{j,k}.$$

В частности, по формуле замены переменной

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\nabla\Lambda_X(y))\det C_{\mu_y}\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\nabla\Lambda_X(y))\det D^2\Lambda_X(y)\,dy=\int_{\nabla\Lambda_X(\mathbb{R}^n)}\varphi(z)\,dz\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Подставим $\varphi\equiv1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\det C_{\mu_y}\,dy=\int_{\nabla\Lambda_X(\mathbb{R}^n)}1\,dz=\lambda_n(\nabla\Lambda_X(\mathbb{R}^n))\le\lambda_n(K),$$

т.к. $\nabla\Lambda_X(\mathbb{R}^n) \subset K$. Кроме того, т.к. $0 \in K$, то $K \subset K - K$. Таким образом, получаем, что $\lambda_n(K) \le \lambda_n(K-K) = 1$. В частности,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \det C_{\mu_y}\, dy \le 1.$$

2) Теперь заметим, что

$$\lambda_n(\varepsilon n(K-K)^\circ) \min_{y\in\varepsilon n(K-K)^\circ} \det C_{\mu_y} \le \int_{\varepsilon n(K-K)^\circ} \det C_{\mu_y}\, dy \le \int_{\mathbb{R}^n} \det C_{\mu_y}\, dy \le 1.$$

Значит для некоторого $y \in \varepsilon n(K-K)^\circ$ выполнено, что

$$\det C_{\mu_y} \le \big[\lambda_n(\varepsilon n(K-K)^\circ)\big]^{-1} = \big[\varepsilon n[s(K-K)]^{1/n}\big]^{-n},$$

т.к. $\lambda_n(K-K) = 1$. Оценим теперь константу изотропности L_{μ_y} логарифмически вогнутой меры μ_y для данного $y \in \varepsilon n(K-K)^\circ$:

$$L_{\mu_y} = \Big(\frac{\sup_{x\in K} e^{\langle y,x\rangle}}{\int_K e^{\langle y,x\rangle}\, dx}\Big)^{\frac{1}{n}} \cdot \big[\det C_{\mu_y}\big]^{\frac{1}{2n}}.$$

Мы знаем, что $\langle y, x\rangle \le \varepsilon n$ для каждого $x \in K - K$. Т.к. $0 \in K$, то для каждого вектора $x \in K$ векторы x и $-x$ принадлежат множеству $K - K$. Поэтому $|\langle y, x\rangle| \le \varepsilon n$ для каждого $x \in K$. В частности, $\sup_{x\in K} e^{\langle y,x\rangle} \le e^{\varepsilon n}$. Кроме того, по неравенствоу Йенсена:

$$\mathbb{E}\big[e^{\langle y,X\rangle}\big] \ge \exp\big(\mathbb{E}\langle y, X\rangle\big) = 1,$$

т.к. вектор X — центрированный. Поэтому, применяя неравенство Роджерса–Шепарда, получаем, что

$$\int_K e^{\langle y,x\rangle}\, dx \ge \lambda_n(K) \ge 4^{-n}\lambda_n(K-K) = 4^{-n}.$$

Таким образом,

$$L_{\mu_y} \le \frac{4e^{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon n[s(K-K)]^{1/n}}}.$$

3) Осталось по мере μ_y построить искомое выпуклое тело T. Заметим, что

$$c_y e^{-\varepsilon n} I_K(x) \le \varrho_y(x) = c_y e^{\langle y,x\rangle} I_K(x) \le c_y e^{\varepsilon n} I_K(x).$$

Напомним, что для логарифмически вогнутой функции ϱ на $\mathbb{R}^n$ ранее было оперделено выпуклое тело

$$C_1(\varrho) := \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon (n+1)\int_0^{+\infty} r^n \varrho(rx)\, dr \ge 1\Big\}$$

и для центрированной вероятностной логарифмически вогнутой функции ϱ было показано, что $L_{C_1(\varrho)} \simeq L_\varrho$ и что $C_1(\varrho)$ — центрированное. Из определения множества $C_1(\varrho)$ ясно, что $C_1(\alpha\varrho) = \alpha^{\frac{1}{n+1}} C_1(\varrho)$ $\forall\alpha > 0$ и $C_1(\varrho) \subset C_1(\widetilde{\varrho})$, если $\varrho(x) \le \widetilde{\varrho}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $x_0 = \int_{\mathbb{R}^n} x\varrho_y(x)\, dx$ и пусть $\varrho(x) := \varrho_y(x + x_0)$. Тогда ϱ — центрированная логарифмически вогнутая плотность и

$$c_y e^{-\varepsilon(n+1)} I_{K-x_0}(x) \le \varrho(x) \le c_y e^{\varepsilon(n+1)} I_{K-x_0}(x).$$

Тогда, т.к. $C_1(I_{K-x_0}) = K - x_0$, получаем, что

$$c_y^{\frac{1}{n+1}} e^{-\varepsilon} \cdot (K - x_0) \subset C_1(\varrho) \subset c_y^{\frac{1}{n+1}} e^{\varepsilon} \cdot (K - x_0).$$

Возьмем $T := c_y^{-\frac{1}{n+1}} \cdot C_1(\varrho_y)$, Тогда T — центрированное выпуклое тело,

$$L_T = L_{C_1(\varrho)} \simeq L_\varrho = L_{\varrho_y} = L_{\mu_y} \le \frac{4e^{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon n[s(K-K)]^{1/n}}}$$

и

$$e^{-\varepsilon} \cdot T \subset K - x_0 \subset e^{\varepsilon} \cdot T.$$

Теорема доказана. $\square$

11. Обратное неравенство Сантало.

Теорема 11.1 (неравенство Бляшке–Сантало)**.** *Пусть K — симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, тогда $s(K) \le s(B_2^n) = [\lambda_n(B_2^n)]^2$.*

Гипотеза Малера: Для симметричного выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$ выполнена оценка $s(K) \ge s(B_\infty^n) = \frac{4^n}{n!}$.

Теорема 11.2 (Ж. Бургейн, В. Мильман)**.** *Существует такое число $c > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого симметричного выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$ выполнена оценка $s(K) \ge c^n \cdot s(B_2^n)$. В частности, для некоторого числа $c_1 > 0$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнена оценка $[s(K)]^{1/n} \ge c_1 n^{-1}$.*

Определение 11.3. *Пусть (F, d) — метрическое пространство, $A \subset F$. Пусть*

$$N_t(A, d) := \min\Big\{ N \in \mathbb{N} \colon \exists x_1, \ldots, x_N \in F \colon A \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, t) \Big\},$$

где $B(x, t) := \{y \in F \colon d(x, y) < \varepsilon\}$. Функция $\log N_t(A, d)$ называется функцией метрической энтропии множества A.

Замечание 11.4. Если (F, d) — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$ и единичным шаром B по этой норме, то мы будем ипользовать обозначение $N_t(A, B)$ вместо $N_t(A, d)$. В этом случае

$$N_t(A, B) = \min\Big\{ N \in \mathbb{N} \colon \exists x_1, \ldots, x_N \in F \colon A \subset \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + t \cdot B) \Big\}.$$

Кроме того, ясно, что $N_1(A, B) = N_1(A, t \cdot B)$. Величина $N(A, B) := N_1(A, B)$ называется покрытийным числом (covering number) множества A множеством B и может рассматриваться уже без каких-либо предположений о выпуклости или симметричности B. Ясно, что для биективных линейных преобразований T выполняется равенство $N_t(A, B) = N_t\big(T(A), T(B)\big)$.

Лемма 11.5. *Пусть B — центрально симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, A — компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$t^{-n} \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(B)} \le N_t(A, B) \le \frac{\lambda_n(A + \frac{t}{2} B)}{\lambda_n(B)} \frac{2^n}{t^n}.$$

Доказательство. Пусть $N = N_t(A, B)$. С одной стороны $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} (x_j + t \cdot B)$, откуда

$$\lambda_n(A) \le N \cdot \lambda_n(t \cdot B),$$

что влечет первую оценку.

Для доказательства второй оценки пусть $M(t)$ — максимальное количество точек в A с попарными расстояними не менее t и пусть $\{x_1, \ldots, x_{M(t)}\}$ — набор таких точек. Ясно, что множества $x_j + \frac{t}{2} \cdot B$ имеют попарно не пересекающиеся внутренности,

$$\bigcup_{j=1}^{M(t)} (x_j + \tfrac{t}{2} \cdot B) \subset A + \tfrac{t}{2} \cdot B$$

и
$$A \subset \bigcup_{j=1}^{M(t)} (x_j + t\cdot B).$$

Таким образом,
$$M(t)\cdot \lambda_n(\tfrac{t}{2}\cdot B) \le \lambda_n(A + \tfrac{t}{2}\cdot B)$$
и $N \le M(t) \le \frac{\lambda_n(A+\frac{t}{2}\cdot B)}{\lambda_n(\frac{t}{2}\cdot B)}$. □

Лемма 11.6. *Пусть выпуклое тело $K\subset\mathbb{R}^n$ находится в изотропной позиции. Тогда*
$$N(K, t\cdot B_2^n) \le 2\exp\Bigl(\frac{6n^{3/2}L_K}{t}\Bigr).$$

Доказательство. Пусть p_K — функционал Минковского множества K. Рассмотрим новую вероятностную меру
$$\mu(A) = \frac{1}{c_K}\int_A e^{-p_K(x)}\,dx,$$
где
$$c_K = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-p_K(x)}\,dx.$$
Пусть $M(t)$ — максимальное количество точек в K с попарными расстояними не менее t и пусть $\{x_1,\dots,x_{M(t)}\}$ — набор таких точек. Тогда множества $x_j + \frac{t}{2}\cdot B_2^n$ имеют попарно не пересекающиеся внутренности и $K\subset \bigcup_{j=1}^{M(t)}(x_j + t\cdot B_2^n)$, т.е. $N(K, t\cdot B_2^n)\le M(t)$.

Пусть $b>0$ выбрано так, что $\mu(b\cdot B_2^n)\ge 1/2$, и пусть $y_j = \frac{2b}{t}x_j$. Тогда
$$\mu(y_j + b\cdot B_2^n) = \frac{1}{c_K}\int_{b\cdot B_2^n} e^{-p_K(y_j+x)}\,dx \ge \frac{1}{c_K}\int_{b\cdot B_2^n} e^{-p_K(y_j)}e^{-p_K(x)}\,dx = e^{-\frac{2b}{t}p_K(x_j)}\mu(b\cdot B_2) \ge e^{-\frac{2b}{t}}\cdot\tfrac{1}{2}.$$
Таким образом,
$$M(t)\cdot e^{-\frac{2b}{t}}\cdot\tfrac12 \le \sum_{j=1}^{M(t)}\mu(y_j + b\cdot B_2^n) = \mu\Bigl(\bigcup_{j=1}^{M(t)}(y_j + b\cdot B_2^n)\Bigr) \le 1.$$
Т.е. $N(K, t\cdot B_2^n)\le 2e^{\frac{2b}{t}}$. Осталось подобрать b.

Заметим, что
$$c_K = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-p_K(x)}\,dx = \int_0^1 \lambda_n(x\in\mathbb{R}^n\colon e^{-p_K(x)}\ge r)\,dr =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-s}\cdot\lambda_n(x\in\mathbb{R}^n\colon p_K(x)\le s)\,ds = \int_0^{+\infty} e^{-s}\cdot\lambda_n(s\cdot K)\,ds = \int_0^{+\infty} s^n\cdot e^{-s}\,ds = n!.$$
С другой стороны,
$$J := \int_{\mathbb{R}^n}|x|\,\mu(dx) = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^n}|x|\int_0^{+\infty} e^{-s} I_{\{x\colon p_K(x)\le s\}}\,ds\,dx =$$
$$= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-s}\int_{\mathbb{R}^n}|x| I_{\{x\colon p_K(x)\le s\}}\,dx\,ds = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} s^{n+1}\cdot e^{-s}\int_{\mathbb{R}^n}|y| I_{\{x\colon p_K(y)\le 1\}}\,dy\,ds =$$
$$= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} s^{n+1}e^{-s}\,ds\int_K |y|\,dy = (n+1)\int_K|y|\,dy \le (n+1)\Bigl(\int_K |y|^2\,dy\Bigr)^{1/2} = (n+1)\sqrt{n}L_K.$$
По неравенству Чебышева $\mu(x\colon |x|\ge 2J)\le 1/2$, поэтому можно взять $b = 2(n+1)\sqrt{n}L_K$, что дает объявленную оценку. □

Следствие 11.7. *Пусть выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^n$ находится в изотропной позиции. Тогда*

$$N(K-K, t\cdot B_2^n) \le 4\exp\Big(\frac{24n^{3/2}L_K}{t}\Big).$$

Доказательство. Заметим, что

$$N(K-K, t\cdot B_2^n) = N(K-K, \tfrac{t}{2}\cdot B_2^n - \tfrac{t}{2}\cdot B_2^n) \le N(K, \tfrac{t}{2}\cdot B_2^n)^2,$$

откуда и следует указанная оценка. □

Лемма 11.8. *Пусть выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^n$ находится в изотропной позиции. Тогда $K \subset (n+1)L_K \cdot B_2^n$.*

Доказательство. Пусть $x \in K$ — фиксировано и пусть

$$h_x(\theta) := \max\{t \ge 0 \colon x + t\theta \in K\}.$$

Т.к. K в изотропной позиции, то

$$\begin{aligned}
L_K^2|x|^2 = \int_K \langle y, x\rangle^2\,dy = \int_{S^{n-1}}\int_0^{h_x(\theta)} r^{n-1}\langle x + r\theta, x\rangle^2\,dr\,\sigma_{n-1}(d\theta) = \\
= \int_{S^{n-1}}\int_0^{h_x(\theta)} r^{n-1}|x|^4 + 2r^n|x|^2\langle\theta,x\rangle + r^{n+1}\langle\theta,x\rangle^2\,dr\,\sigma_{n-1}(d\theta) = \\
= \int_{S^{n-1}} \frac{[h_x(\theta)]^n}{n}|x|^4 + 2\frac{[h_x(\theta)]^{n+1}}{n+1}|x|^2\langle\theta,x\rangle + \frac{[h_x(\theta)]^{n+2}}{n+2}\langle\theta,x\rangle^2\,\sigma_{n-1}(d\theta) = \\
= \int_{S^{n-1}} \frac{[h_x(\theta)]^n}{n}|x|^4 - \frac{[h_x(\theta)]^n(n+2)}{(n+1)^2}|x|^4 + [h_x(\theta)]^n\Big(\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}|x|^2 + \frac{h_x(\theta)}{\sqrt{n+2}}\langle\theta,x\rangle\Big)^2\,\sigma_{n-1}(d\theta) \ge \\
\ge \int_{S^{n-1}} \frac{[h_x(\theta)]^n}{n(n+1)^2}|x|^4\,\sigma_{n-1}(d\theta) = \frac{|x|^4}{(n+1)^2}\int_{S^{n-1}}\int_0^{h_x(\theta)} r^{n-1}\,dr\,\sigma_{n-1}(d\theta) = \\
= \frac{|x|^4}{(n+1)^2}\int_K 1\,dy = \frac{|x|^4}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $|x| \le (n+1)L_K$. Лемма доказана. □

Лемма 11.9. *Существует такое число $C > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$, для каждого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ в изотропной позиции выполнена оценка*

$$N(B_2^n, t\cdot(K-K)^\circ) \le \exp\Big(\frac{Cn^{3/2}L_K}{t}\Big).$$

Доказательство. Пусть $V := K - K$. Из предыдущего следствия

$$N(V, t\cdot B_2^n) \le 4\exp\Big(\frac{24n^{3/2}L_K}{t}\Big) \le \exp\Big(\frac{100n^{3/2}L_K}{t}\Big)$$

при $0 < t < 4nL_K < \frac{76}{\ln 4}n^{3/2}L_K$. Кроме того, $V = K - K \subset 2(n+1)L_K\cdot B_2^n \subset 4nL_K \cdot B_2^n$, т.к. $K \subset (n+1)L_K\cdot B_2^n$. Т.е. $N(V, t\cdot B_2^n) = 1 \le \exp(\frac{100n^{3/2}L_K}{t})$ при $t \ge 4nL_K$ и

$$N(V, t\cdot B_2^n) \le \exp\Big(\frac{100n^{3/2}L_K}{t}\Big) \quad \forall t > 0.$$

При $t > 0$ пусть $A(t) := \ln N(V, t\cdot B_2^n)$, $B(t) := \ln N(B_2^n, t\cdot V^\circ)$. Заметим, что

$$(\tfrac{t}{2}V^\circ + \tfrac{2}{t}V)^\circ \subset (\tfrac{t}{2}V^\circ) \cap (\tfrac{2}{t}V) \subset B_2^n,$$

т.к. $(\frac{2}{t}V)^\circ \cup (\frac{t}{2}V^\circ)^\circ \subset \frac{t}{2}V^\circ + \frac{2}{t}V$ и т.к. $\langle \frac{2}{t}x, \frac{t}{2}x\rangle \le 1$ для $x \in (\frac{t}{2}V^\circ) \cap (\frac{2}{t}V)$. Таким образом, $B_2^n \subset \frac{t}{2}V^\circ + \frac{2}{t}V$ и

$$N(B_2^n, t\cdot V^\circ) \le N(\tfrac{t}{2}V^\circ + \tfrac{2}{t}V, t\cdot V^\circ) \le N(\tfrac{2}{t}V, \tfrac{t}{2}V^\circ) \le$$
$$\le N(\tfrac{2}{t}V, \tfrac{1}{4}B_2^n)N(\tfrac{1}{4}B_2^n, \tfrac{t}{2}V^\circ) = N(V, \tfrac{t}{8}B_2^n)N(B_2^n, 2tV^\circ).$$

Т.е.

$$B(t) \le A(\tfrac{2t}{16}) + B(2t).$$

Итерируя, получаем, что

$$B(t) \le B(2^m t) + \sum_{k=1}^{m} A(\tfrac{2^k t}{16}) \le B(2^m t) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1600 n^{3/2} L_K}{2^k t} \le B(2^m t) + \frac{1600 n^{3/2} L_K}{t}.$$

Остается заметить, что $B(2^m t) = 0$ для достаточно больших m. $\square$

Следствие 11.10. *Существует такое число $c > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ справедлива оценка*

$$\big[s(K-K)\big]^{1/n} \ge \frac{c}{nL_K}.$$

Доказательство. Т.к. $s(K-K)$ инвариантен относительно невырожденных аффинных преобразований, можно считать, что K находится в изотропной позиции. По предыдущей лемме

$$\Big(\frac{\lambda_n(B_2^n)}{\lambda_n\big(t(K-K)^\circ\big)}\Big)^{1/n} \le \big[N(B_2^n, t(K-K)^\circ)\big]^{1/n} \le \exp\Big(\frac{C\sqrt{n}L_k}{t}\Big).$$

Т.к. $[\lambda_n(B_2^n)]^{1/n} \ge \frac{c_1}{\sqrt{n}}$, то

$$\big[\lambda_n\big((K-K)^\circ\big)\big]^{1/n} \ge \frac{c_1}{t\sqrt{n}} \exp\Big(\frac{-C\sqrt{n}L_k}{t}\Big).$$

Взяв $t = \sqrt{n}L_k$, получаем, что

$$\big[\lambda_n\big((K-K)^\circ\big)\big]^{1/n} \ge \frac{c_2}{nL_K}.$$

Остается заметить, что $\lambda_n(K-K) \ge \lambda_n(K) = 1$. $\square$

Теорема 11.11 (обратное неравенство Сантало)**.** *Существует такое число $c > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого симметричного выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$ выполнена оценка $[s(K)]^{1/n} \ge c_1 n^{-1}$.*

Доказательство. По теорема Клартага с $\varepsilon = \frac{1}{2}$ существует такие центрированное выпуклое тело T и сдвиг $x_0 \in \mathbb{R}^n$, что $\frac{2}{3}\cdot T \subset K + x_0 \subset \frac{3}{2}\cdot T$ и $L_T \le \frac{c_1}{\sqrt{n[s(K)]^{1/n}}}$. По предыдущему следствию

$$n\big[s(T-T)\big]^{1/n} \ge \frac{c_2}{L_T} \ge c_3\sqrt{n[s(K)]^{1/n}}.$$

С другой стороны $\frac{2}{3}\cdot(T-T) \subset K-K = 2K = K-K \subset \frac{3}{2}(T-T)$, откуда $\frac{4}{3}\cdot(T-T)^\circ \subset K^\circ$. Тем самым,

$$n\big[s(K)\big]^{1/n} \ge \frac{4}{9}n\big[s(T-T)\big]^{1/n} \ge c_4\sqrt{n[s(K)]^{1/n}},$$

откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Следствие 11.12 (Б. Клартаг)**.** *Существует такое число $C > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$, для каждого выпуклого тела K в $\mathbb{R}^n$ и для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется такое центрированное выпуклое тело T и такой вектор x_0, что*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot T \subset K + x_0 \subset (1+\varepsilon)\cdot T \ \text{и}\ L_T \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

12. Неравенство Г. Паориса.

Теорема 12.1 (Г. Паорис). *Существует такое число $c > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждой вероятностной изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ при каждом $t \geq 1$ имеет место оценка*

$$\mu(x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \geq ct\sqrt{n}) \leq e^{-t\sqrt{n}}.$$

Замечание 12.2. Мы уже знаем, что для каждой полунормы g на $\mathbb{R}^n$ имеет место оценка $\|g\|_{L^p(\mu)} \leq Cp\|g\|_{L^1(\mu)}$, где C — некоторое число, не зависящее ни от чего. Если μ — изотропная догарифмически вогнутая мера, то L^1-норму функции $g(x) := \frac{1}{\sqrt{n}}|x|$ можно оценить следующим образом: $\|g\|_{L^1(\mu)} \leq \|g\|_{L^2}(\mu) = 1$. Таким образом,

$$\mu(x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \geq ct\sqrt{n}) = \mu(x \in \mathbb{R}^n\colon \exp(c^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{n}}|x|) \geq e^t) \leq e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(c^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{n}}|x|)\,\mu(dx) =$$
$$= e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^{-k}}{k!}\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^k\,\mu(dx) \leq e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Cc^{-1})^k k^k}{k!} \leq c_0 e^{-t}$$

при достаточно малом $c > 0$.

Следствие 12.3. *Существует такое число $C > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ имеет место оценка $L_K \leq C\sqrt[4]{n}$.*

Доказательство. По теореме Клартага для $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$ можно подобрать такие центрированное вынуклое тело T и сдвиг $x_0 \in \mathbb{R}^n$, что

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot T \subset K + x_0 \subset (1+\varepsilon)\cdot T \text{ и } L_T \leq C\sqrt[4]{n}.$$

Применяя к телам T и K соответствующее линейное преобразование, можно считать, что тело T находится в изотропной позиции. Пусть $K_1 := (1+\varepsilon)^{-1}(K + x_0)$. Тогда $K_1 \subset T$ и

$$\lambda_n(K_1) = (1+\varepsilon)^{-n}\lambda_n(K + x_0) \geq (1+\varepsilon)^{-2n}\lambda_n(T) \geq (1+\varepsilon)^{-2n} \geq e^{-2n\varepsilon} = e^{-2\sqrt{n}}.$$

Если X — равномерно распределенный на T случайный вектор, то $L_T^{-1}X$ — изотропный логарифмически вогнутый случайный вектор. По неравенству Паориса

$$\lambda_n(T \cap (\mathbb{R}^n \setminus ct\sqrt{n}L_T\cdot B_2^n)) = P(|X| \geq ct\sqrt{n}L_T) \leq e^{-t\sqrt{n}}.$$

Т.к. $K_1 \subset T$, то при $t \geq 2$ имеет место оценка

$$\lambda_n(K_1 \cap (\mathbb{R}^n \setminus ct\sqrt{n}L_T\cdot B_2^n)) \leq e^{-t\sqrt{n}} \leq e^{-(t-2)\sqrt{n}}\lambda_n(K_1) \leq e^{-(t-2)}\lambda_n(K_1).$$

Пусть Y — случайный вектор, равномерно распределенный на K_1. Тогда заметим, что

$$\mathbb{E}[|Y|^2] = \mathbb{E}[|Y|^2 I_{\{|Y|\leq ct\sqrt{n}L_T\}}] + \mathbb{E}[|Y|^2 I_{\{|Y|>ct\sqrt{n}L_T\}}] \leq$$
$$\leq (ct\sqrt{n}L_T)^2 + (\mathbb{E}[|Y|^4])^{1/2}\sqrt{P(|Y| > ct\sqrt{n}L_T)} \leq (ct\sqrt{n}L_T)^2 + C_1 e^{-t/2}\mathbb{E}[|Y|^2].$$

Выберем t так, чтобы $C_1 e^{-t/2} \leq \frac{1}{2}$, тогда

$$\mathbb{E}[|Y|^2] \leq 2(ct\sqrt{n}L_T)^2 = (C_2\sqrt{n}L_T)^2.$$

Остается заметить, что

$$L_K = L_{K_1} = \frac{1}{[\lambda_n(K_1)]^{1/n}}(\det C_Y)^{\frac{1}{2n}} \leq e^2(\tfrac{1}{n}\mathrm{tr}\, C_Y)^{1/2} = \frac{e^2}{\sqrt{n}}(\mathbb{D}Y_1 + \ldots + \mathbb{D}Y_n)^{1/2} \leq$$
$$\leq \frac{e^2}{\sqrt{n}}(\mathbb{E}Y_1^2 + \ldots + \mathbb{E}Y_n^2)^{1/2} = \frac{e^2}{\sqrt{n}}(\mathbb{E}[|Y|^2])^{1/2} \leq C_3 L_T \leq C_4\sqrt[4]{n}.$$

Следствие доказано. ∎

13. Доказателсьво теоремы Паориса.

Теорему Паориса получи как следствие следующей теоремы.

Теорема 13.1 (R.Adamczak, R.Latala, A.Litvak, K.Oleszkiewicz, A.Pajor, N.Tomczak–Jaegermann). *Существует такое число $C>0$, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ и для каждого логарифмически вогнутого случайного вектора X в $\mathbb{R}^n$ при каждом $q\geq 1$ имеет место оценка*

$$(\mathbb{E}|X|^q)^{1/q}\leq C\big(\mathbb{E}|X|+\max_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q}\big).$$

Выведем теорему Паориса из предыдущей теоремы:

Мы знаем, что

$$\big(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q\big)^{1/q}\leq Cq\big(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^2\big)^{1/2}.$$

Для изотропного логарифмически вогнутого вектора X по предыдущей теореме получаем, что при $q\geq 1$ имеет место неравенство

$$(\mathbb{E}|X|^q)^{1/q}\leq C_1\mathbb{E}|X|+C_2q\leq C_1\big(\mathbb{E}|X|^2\big)^{1/2}+C_2q=C_1\sqrt{n}+C_2q.$$

Пусть $q=t\sqrt{n}$, $t\geq 1$, тогда

$$(\mathbb{E}|X|^q)^{1/q}\leq C_3t\sqrt{n}$$

и

$$P(|X|\geq eC_3t\sqrt{n})\leq\Big(\frac{C_3t\sqrt{n}}{eC_3t\sqrt{n}}\Big)^q=e^{-q}=e^{-t\sqrt{n}}.$$

Нам понадобится следующее неравенство концентрации для гауссовской меры.

Теорема 13.2. *Пусть G — стандартный гауссовский (нормальный) случайный вектор на $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждой липшицевой функции f на $\mathbb{R}^n$ с константой Липшица b выполнена оценка*

$$P(|f(G)-\mathbb{E}[f(G)]|\geq t)\leq 2\exp(-\tfrac{2t^2}{\pi^2b^2})\quad\forall t>0.$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}$ — независимая от G копия G. Заметим, что для каждого $\alpha>0$ имеет место неравенство

$$P(|f(G)-\mathbb{E}[f(G)]|\geq t)\leq e^{-\alpha t}\mathbb{E}_G\big[\exp(\alpha|f(G)-\mathbb{E}_{\widetilde{G}}[f(\widetilde{G})]|)\big]\leq$$
$$\leq e^{-\alpha t}\mathbb{E}_G\big[\exp(\alpha\mathbb{E}_{\widetilde{G}}|f(G)-f(\widetilde{G})|)\big]\leq e^{-\alpha t}\mathbb{E}_G\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp(\alpha|f(G)-f(\widetilde{G})|)\big],$$

где в последнем переходе было применено неравенство Йенсена. Пусть сначала f — гладкая функция и пусть $G_s:=G\sin s+\widetilde{G}\cos s$ и пусть $G_s':=\partial_sG_s=G\cos s-\widetilde{G}\sin s$. Тогда

$$f(G)-f(\widetilde{G})=\int_0^{\pi/2}\partial_sf(G_s)\,ds=\int_0^{\pi/2}\langle\nabla f(G_s),G_s'\rangle\,ds.$$

Тогда для каждого $\alpha>0$ имеет место неравенство

$$\mathbb{E}_G\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp(\alpha|f(G)-f(\widetilde{G})|)\big]=$$
$$=\mathbb{E}_G\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\Big[\exp\Big(\alpha\Big|\int_0^{\pi/2}\langle\nabla f(G_s),G_s'\rangle\,ds\Big|\Big)\Big]\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathbb{E}_G\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp\big(\tfrac{\alpha\pi}{2}|\langle\nabla f(G_s),G_s'\rangle|\big)\big]\,ds,$$

где в последнем переходе было применено неравенство Йенсена. Заметим, что случайный вектор (G_s,G_s') имеет такое же распределение, что и вектор $(G,\widetilde{G})$, т.е.

$$\mathbb{E}_G\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp(\alpha|f(G)-f(\widetilde{G})|)\big]\leq\mathbb{E}_G\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp\big(\tfrac{\alpha\pi}{2}|\langle\nabla f(G),\widetilde{G}\rangle|\big)\big].$$

Рассмотрим теперь внутреннее ожидание:

$$\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp\big(\tfrac{\alpha\pi}{2}|\langle\nabla f(G),\widetilde{G}\rangle|\big)\big]=\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp\big(\tfrac{\alpha\pi}{2}|\nabla f(G)|\cdot|\langle\tfrac{\nabla f(G)}{|\nabla f(G)|},\widetilde{G}\rangle|\big)\big].$$

Случайная величина $\langle \frac{\nabla f(G)}{|\nabla f(G)|}, \widetilde{G}\rangle$ — стандартная гауссовская (при фиксированном G). Поэтому

$$\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp\big(\tfrac{\alpha\pi}{2}|\langle \nabla f(G), \widetilde{G}\rangle|\big)\big] = \mathbb{E}_g\big[\exp\big(\tfrac{\alpha\pi}{2}|\nabla f(G)|\cdot|g|\big)\big],$$

где $g \sim \mathcal{N}(0,1)$. Оцениваем ожидание:

$$\mathbb{E}_g\big[\exp\big(\tfrac{\alpha\pi}{2}|\nabla f(G)|\cdot|g|\big)\big] \le 2\mathbb{E}_g\big[\exp\big(\tfrac{\alpha\pi}{2}|\nabla f(G)|\cdot g\big)\big] =$$
$$= \tfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(\tfrac{\alpha\pi}{2}|\nabla f(G)|\cdot x - \tfrac{x^2}{2})\,dx = 2\exp(\tfrac{\alpha^2\pi^2}{8}|\nabla f(G)|^2) \le 2\exp(\tfrac{\alpha^2\pi^2}{8}b^2).$$

Таким образом,

$$e^{-\alpha t}\mathbb{E}_G\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp(\alpha|f(G)-f(\widetilde{G})|)\big] \le 2\exp(-\alpha t + \tfrac{\alpha^2\pi^2}{8}b^2).$$

Минимизируя по α, получаем при $\alpha = \frac{4t}{\pi^2 b^2}$ оценку

$$e^{-\alpha t}\mathbb{E}_G\mathbb{E}_{\widetilde{G}}\big[\exp(\alpha|f(G)-f(\widetilde{G})|)\big] \le 2\exp(-\tfrac{2t^2}{\pi^2 b^2}).$$

Случай общей липшицевой функции f получается с помощью аппроксимации свертками с дельтаобразной последовательностью гладких вероятностных плотностей. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 13.1.

1) Заметим сначала, что достаточно рассмотреть только симметричные векторы X. Действительно, предположим, что утверждение уже доказано для всех симметричных логарифмически вогнутых случайных векторов и пусть X — логарифмически вогнутый случайный вектор. Пусть X' — независимая с X копия X. Тогда для каждого $q \ge 1$ имеет место неравенство

$$(\mathbb{E}|X|^q)^{1/q} \le (\mathbb{E}_X|X-\mathbb{E}_{X'}X'|^q)^{1/q} + |\mathbb{E}X| \le \big(\mathbb{E}_X\big(\mathbb{E}_{X'}|X-X'|\big)^q\big)^{1/q} + |\mathbb{E}X| \le$$
$$\le (\mathbb{E}|X-X'|^q)^{1/q} + |\mathbb{E}X| \le C\big(\mathbb{E}|X-X'| + \max_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X-X',\theta\rangle|^q)^{1/q}\big) + |\mathbb{E}X| \le$$
$$\le 2C\big(\mathbb{E}|X| + \max_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q}\big) + \mathbb{E}|X|.$$

2) Пусть теперь X — симметричный логарифмически вогнутый случайный вектор. Рассмотрим норму на $\mathbb{R}^n$, задаваемую формулой $\|u\| := (\mathbb{E}|\langle X,u\rangle|^q)^{1/q}$. Это липшицева функция с константой Липшица

$$b = \max_{|\theta|=1}\|\theta\| = \max_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q}.$$

Пусть G — стандартный n-мерный гауссовский вектор независимый с X. По предыдущей теореме

$$P\big(\big|\|G\|-\mathbb{E}\|G\|\big| \ge t\big) \le 2\exp(-\tfrac{2t^2}{\pi^2 b^2}),$$

откуда

$$\mathbb{E}\big|\|G\|-\mathbb{E}\|G\|\big|^q = \int_0^{+\infty} qt^{q-1}P\big(\big|\|G\|-\mathbb{E}\|G\|\big| \ge t\big)\,dt \le 2\int_0^{+\infty} qt^{q-1}\exp(-\tfrac{2t^2}{\pi^2 b^2})\,dt =$$
$$= 2q(\tfrac{b\pi}{\sqrt{2}})^q\int_0^{+\infty} s^{q-1}\exp(-s^2)\,ds = q(\tfrac{b\pi}{\sqrt{2}})^q\int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{2}-1}\exp(-t)\,dt = 2(\tfrac{b\pi}{\sqrt{2}})^q\Gamma(\tfrac{q}{2}+1).$$

Таким образом,

$$\big(\mathbb{E}\|G\|^q\big)^{1/q} \le \big(\mathbb{E}\big|\|G\|-\mathbb{E}\|G\|\big|^q\big)^{1/q} + \mathbb{E}\|G\| \le c_1\sqrt{q}b + \mathbb{E}\|G\|.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E}_G\|G\|^q = \mathbb{E}_{G,X}|\langle X, G\rangle|^q = \mathbb{E}_X\big[|X|^q\mathbb{E}_G|\langle \tfrac{X}{|X|}, G\rangle|^q\big] = \big[\mathbb{E}|X|^q\big]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^q e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \big[\mathbb{E}|X|^q\big]\cdot\tfrac{(\sqrt{2})^{q+1}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty s^{\frac{q-1}{2}}e^{-s}\,ds = \big[\mathbb{E}|X|^q\big]\cdot\tfrac{(\sqrt{2})^{q+1}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\tfrac{q-1}{2}+1).$$

Т.к. $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{\pi})^{1/q}}(\Gamma(\frac{q-1}{2}+1))^{1/q} \simeq c_2\sqrt{q}$, то мы получаем оценку

$$\big(\mathbb{E}|X|^q\big)^{1/q} \le c_3\big(b + \tfrac{1}{\sqrt{q}}\mathbb{E}\|G\|\big) = c_3\big(\tfrac{1}{\sqrt{q}}\mathbb{E}\|G\| + \max_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q}\big).$$

4) Нам понадобится следующая теорема В. Мильмана, которую подробнее мы обсудим чуть позже.

Теорема 13.3. *(В. Мильман) Пусть $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{R}^n$ и пусть $b = \max_{|\theta|=1}\|\theta\|$. Тогда для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что для каждого целого числа $k \le c(\varepsilon)(\frac{\mathbb{E}\|G\|}{b})^2$ найдется подпространство размерности k, для которого*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}|x| \le \frac{\mathbb{E}|G|}{\mathbb{E}\|G\|}\cdot\|x\| \le (1+\varepsilon)|x| \quad \forall x \in E,$$

причем, если $\nu_{n,k}$ — инвариантная относительно ортогональных преобразований вероятностная мера на пространстве $G_{n,k}$ всех k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$, то для множества E всех k-мерных подпространств, для которых верна оценка выше, справедливо неравенство $\nu_{n,k}(E) \ge 1 - e^{-k}$.

5) Пусть $c_0 = 2^{-1}c(\frac{1}{2})$ из теоремы Мильмана. Если $q \ge c_0\big(\frac{\mathbb{E}\|G\|}{b}\big)^2$, то

$$\big(\mathbb{E}|X|^q\big)^{1/q} \le c_3\big(\tfrac{1}{\sqrt{q}}\mathbb{E}\|G\| + \max_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q}\big) \le c_4\max_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q}.$$

Рассмотрим теперь случай $q < c_0\big(\frac{\mathbb{E}\|G\|}{b}\big)^2$. В этом случае для $k \in [q, 2q)$ найдется подпространство E размерности k, для каждого x из которого

$$\tfrac{2}{3}|x| \le \frac{\mathbb{E}|G|}{\mathbb{E}\|G\|}\cdot\|x\| \le \tfrac{3}{2}|x|,$$

причем вероятность выбрать такое подпространство не менее $1 - e^{-k} \ge 1 - e^{-1} > \frac{1}{2}$. Таким образом, для каждого $x \in E$ выполнено

$$\mathbb{E}\|G\| \le \mathbb{E}|G|\cdot\tfrac{3}{2}\frac{\|x\|}{|x|} \le \tfrac{3}{2}\sqrt{n}\cdot\frac{\|x\|}{|x|},$$

т.е.

$$\mathbb{E}\|G\| \le \tfrac{3}{2}\sqrt{n}\min_{x\in E,|x|=1}\|x\| = \tfrac{3}{2}\sqrt{n}\min_{x\in E,|x|=1}(\mathbb{E}|\langle X,x\rangle|^q)^{1/q} = \tfrac{3}{2}\sqrt{n}\min_{x\in E,|x|=1}(\mathbb{E}|\langle P_E(X),x\rangle|^q)^{1/q},$$

где P_E — оператор ортогональной проекции на E.

6) Нам понадобится следующее утверждение, которое мы докажем позже.

Предложение 13.4. *Пусть X — симметричный логарифмически вогнутый случайный вектор в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\min_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q} \le 500\,\mathbb{E}|X| \quad \forall q \in (0,n].$$

Применим предыдущее утверждение к случайному вектору $P_E(X)$ и получим оценку

$$\mathbb{E}\|G\| \le \tfrac{3}{2}\sqrt{n}\min_{x\in E,|x|=1}(\mathbb{E}|\langle P_E(X),x\rangle|^q)^{1/q} \le \tfrac{3}{2}\sqrt{n}\,500\,\mathbb{E}|P_E(X)|.$$

Заметим, что для ортонормированного базиса $\{e_1,\dots,e_n\}$ выполнены следующие соотношения:

$$\int_{G_{n,k}} |P_E(x)|\,\nu_{n,k}(dE) \le \Bigl(\int_{G_{n,k}} |P_E(x)|^2\,\nu_{n,k}(dE)\Bigr)^2 = |x|\Bigl(\int_{G_{n,k}} |P_E(e_1)|^2\,\nu_{n,k}(dE)\Bigr)^2 =$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{n}}|x|\Bigl(\int_{G_{n,k}} |P_E(e_1)|^2+\ldots+|P_E(e_n)|^2\,\nu_{n,k}(dE)\Bigr)^2 = \tfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}|x|.$$

Упражнение 13.5. Проверьте, что $|P_E(e_1)|^2+\ldots+|P_E(e_n)|^2 = k$.

Тогда

$$\int_{G_{n,k}} \mathbb{E}|P_E(X)|\,\nu_{n,k}(dE) \le \tfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}\mathbb{E}|X|$$

и

$$\nu_{n,k}(E\in G_{n,k}\colon \mathbb{E}|P_E(X)| \ge 2\tfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}\mathbb{E}|X|) \le \frac{1}{2}.$$

Значит есть такое подпространство $E\in G_{n,k}$, для которого

$$\mathbb{E}\|G\| \le \tfrac{3}{2}\sqrt{n}\,500\,\mathbb{E}|P_E(X)|$$

и

$$\mathbb{E}|P_E(X)| \le 2\tfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}\mathbb{E}|X|,$$

т.е.

$$\mathbb{E}\|G\| \le 3000\sqrt{q}\mathbb{E}|X|,$$

что завершает доказательство. □

Теперь докажем использованное ранее утверждение:

Предложение 13.6. *Пусть X — симметричный логарифмически вогнутый случайный вектор в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\min_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q} \le 500\,\mathbb{E}|X| \quad \forall q\in(0,n].$$

Для этого нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 13.7. *Пусть X — случайный n-мерный вектор и пусть $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\min_{|\theta|=1}(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q} \le \frac{\bigl(\mathbb{E}\|X\|^q\bigr)^{1/q}}{\mathbb{E}\|X\|}\mathbb{E}|X| \quad \forall q>0.$$

Доказательство. Пусть $\frac{1}{r} = \max\limits_{|x|=1}\|x\| = \|x_0\|$, $|x_0|=1$. По теореме Хана–Банаха существует $y_0\in\mathbb{R}^n$, для которого $\langle y_0,x_0\rangle = \|x_0\|$ и $\max\limits_{\|x\|=1}|\langle y_0,x\rangle| = 1$. Тогда

$$\|x_0\| = \langle y_0,x_0\rangle \le |y_0| = \max_{|x|=1}|\langle y_0,x\rangle| \le \max_{|x|=1}\|x\| = \|x_0\|,$$

т.е. $|y_0| = \|x_0\| = \frac{1}{r}$. Пусть $\theta = ry_0$, тогда $|\theta|=1$, $|\langle\theta,x\rangle| \le r\|x\| \le |x|$. Отсюда получаем, что

$$(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^q)^{1/q} \le r\bigl(\mathbb{E}\|X\|^q\bigr)^{1/q} \text{ и } r\mathbb{E}\|X\| \le \mathbb{E}|X|,$$

что влечет заявленное неравенство. □

Лемма 13.8. *Пусть X — симметричный логарифмически вогнутый случайный вектор в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует норма $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^n$, для которой*

$$\bigl(\mathbb{E}\|X\|^n\bigr)^{1/n} \le 500\mathbb{E}\|X\|.$$

Доказательство. Пусть ϱ_X — плотность вектора X. Т.к. ϱ_X — четная функция, то она достигает своего максимума в нуле. Рассмотрим симметричное выпуклое множество

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varrho_X(x) \geq 25^{-n} \varrho_X(0)\}.$$

Его можно считать единичным шаром по некоторой норме $\|\cdot\|$. Заметим, что

$$25^{-n}\varrho_X(0)\lambda_n(K) \leq \int_K \varrho_X(x)\,dx = P(X \in K) \leq 1$$

и

$$P(\|X\| \leq \tfrac{1}{50}) = \int_{\frac{1}{50}K} \varrho_X(x)\,dx \leq \varrho_X(0) 50^{-n}\lambda_n(K) \leq 2^{-n} \leq \tfrac{1}{2}.$$

Т.е.

$$\mathbb{E}\|X\| \geq \tfrac{1}{50} P(\|X\| > \tfrac{1}{50}) \geq \tfrac{1}{100}.$$

С другой стороны, в силу логарифмической вогнутости

$$\varrho_{2X}(x) = 2^{-n}\varrho_X(\tfrac{1}{2}x) \geq 2^{-n}\sqrt{\varrho_X(x)\varrho_X(0)}$$

и для $x \notin K$ имеет место оценка

$$\varrho_{2X}(x) \geq (\tfrac{5}{2})^n \varrho_X(x).$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbb{E}\|X\|^n \leq 1 + \mathbb{E}\big[\|X\|^n I_{\|X\|\geq 1}\big] = 1 + \int_{\mathbb{R}^n\setminus K} |x|^n \varrho_X(x)\,dx \leq 1 + (\tfrac{2}{5})^n \int_{\mathbb{R}^n\setminus K} |x|^n \varrho_{2X}(x)\,dx =$$
$$= 1 + (\tfrac{2}{5})^n \mathbb{E}\big[\|2X\|^n I_{\|X\|\geq 1}\big] \leq 1 + (\tfrac{4}{5})^n \mathbb{E}\|X\|^n.$$

Отсюда получаем, что $\big(\mathbb{E}\|X\|^n\big)^{1/n} \leq 5$, что завершает доказательство леммы. □

14. Доказательство теоремы Мильмана.

Теорема 14.1. *(В. Мильман) Пусть $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{R}^n$ и пусть $b = \max\limits_{|\theta|=1}\|\theta\|$. Тогда для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ существуют такие числа $c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon) > 0$, что для каждого целого числа $k \leq c_1(\varepsilon)(\frac{\mathbb{E}\|G\|}{b})^2$ найдется подпространство размерности k, для которого*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}|x| \leq \frac{\mathbb{E}|G|}{\mathbb{E}\|G\|}\cdot\|x\| \leq (1+\varepsilon)|x| \quad \forall x \in E,$$

причем, если $\nu_{n,k}$ — инвариантная относительно ортогональных преобразований вероятностная мера на пространстве $G_{n,k}$ всех k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$, то для множества Γ всех k-мерных подпространств, для которых верна оценка выше, справедливо неравенство $\nu_{n,k}(\Gamma) \geq 1 - e^{-c_2(\varepsilon)k}$.

Везде далее пусть $M := \frac{\mathbb{E}\|G\|}{\mathbb{E}|G|}$.

Упражнение 14.2. Проверьте, что

$$M = \int_{S^{n-1}} \|\theta\|\,\widetilde{\sigma}_{n-1}(d\theta),$$

где $\widetilde{\sigma}_{n-1}$ — нормированная мера Лебега на единичной сфере S^{n-1}.

Лемма 14.3. *Пусть $\|\cdot\|, |\cdot|$ — нормы на некотором пространстве X пусть $\delta \in (0,1)$ и пусть $\mathcal{N}$ — δ-сеть по норме $|\cdot|$ сферы $\{\theta \in X \colon |\theta| = 1\}$. Предположим, что для каждого $y \in \mathcal{N}$ имеет место оценка $c_1 \leq \|y\| \leq c_2$, тогда для каждого $x \in X$, $|x| = 1$, имеет место оценка*

$$c_1 - \frac{\delta}{1-\delta}c_2 \leq \|x\| \leq c_2\frac{1}{1-\delta}.$$

Доказательство. Пусть $|x| = 1$. Найдется такой $y_0 \in \mathcal{N}$, что $|x - y_0| = \delta_1 < \delta$. Тогда $|\frac{x-y_0}{\delta_1}| = 1$ и найдется такой $y_1 \in \mathcal{N}$, что $|\frac{x-y_0}{\delta_1} - y_1| = \delta_2 < \delta$, т.е. $|x - y_0 - \delta_1 y_1| = \delta_1\delta_2 < \delta^2$. Индуктивно строим такие $y_0, y_1, \ldots, y_k \in \mathcal{N}$, что

$$|x - \sum_{j=0}^{k} \delta_0 \cdot \ldots \cdot \delta_j \cdot y_j| < \delta^{k+1},$$

Причем $\delta_0 = 1$, $\delta_j < \delta$, т.е. $\delta_0 \cdot \ldots \cdot \delta_j < \delta^j$. Таким образом, $x = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \delta_0 \cdot \ldots \cdot \delta_j \cdot y_j$ и

$$\|x\| \le \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0 \cdot \ldots \cdot \delta_j \cdot \|y_j\| \le \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \cdot \|y_j\| \le c_2 \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j = \frac{c_2}{1-\delta},$$

$$\|x\| \ge \|y_0\| - \|x - y_0\| \ge c_1 - \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \|y_j\| \ge c_1 - c_2 \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j = c_1 - \frac{\delta c_2}{1-\delta}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 14.4. *Пусть $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{R}^n$, для которой $\|x\| \le b|x|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и пусть $\widetilde{\sigma}_{n-1}$ — стандартная нормированная мера Лебега на единичной сфере S^{n-1}. Тогда*

$$\widetilde{\sigma}_{n-1}\big(\theta \in S^{n-1} \colon |\|\theta\| - M| \ge bt\big) \le 4e^{-c_0 t^2 n} \quad \forall t > 0,$$

где c_0 — числовая константа.

Доказательство. Мы уже знаем, что для стандартного гауссовского случайного вектора G на $\mathbb{R}^n$ и для произвольной липшицевой функции f на $\mathbb{R}^n$ с константой Липшица B выполнена оценка

$$P(|f(G) - \mathbb{E}[f(G)]| \ge t) \le 2\exp(-\tfrac{2t^2}{\pi^2 B^2}) \quad \forall t > 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) := \|x\| - |x| \cdot M$. Тогда

$$|f(x) - f(y)| \le |\|x\| - \|y\|| + M \cdot |x - y| \le 2b|x - y|.$$

Упражнение 14.5. Докажите, что распределение случайного вектора $\frac{1}{|G|} \cdot G$ совпадает с мерой $\widetilde{\sigma}_{n-1}$.

По модулю сформулированного упражнения получаем, что

$$\widetilde{\sigma}_{n-1}\big(\theta \in S^{n-1} \colon |\|\theta\| - M| \ge bt\big) = P\big(\big|\tfrac{\|G\|}{|G|} - M\big| \ge bt\big) = P\big(\big|\|G\| - M|G|\big| \ge bt|G|\big) \le$$

$$\le P\big(\big|\|G\| - M|G|\big| \ge bt|G|, \big||G| - \mathbb{E}|G|\big| < \varepsilon\mathbb{E}|G|\big) + P\big(\big||G| - \mathbb{E}|G|\big| \ge \varepsilon\mathbb{E}|G|\big) \le$$

$$\le P\big(\big|\|G\| - M|G|\big| \ge bt(1-\varepsilon)\mathbb{E}|G|\big) + 2\exp\Big(-\frac{2\varepsilon^2(\mathbb{E}|G|)^2}{\pi^2}\Big) \le$$

$$\le 2\exp\Big(-\frac{t^2(1-\varepsilon)^2(\mathbb{E}|G|)^2}{2\pi^2}\Big) + 2\exp\Big(-\frac{2\varepsilon^2(\mathbb{E}|G|)^2}{\pi^2}\Big).$$

Т.к. $|\|\theta\| - M| \le 2b$, то утверждение леммы нетривиально только при $t \in (0, 2)$. Пусть $\varepsilon = \frac{t}{1+t}$, тогда $1 - \varepsilon = \frac{1}{1+t} \ge \frac{1}{3}$ и $\varepsilon \ge \frac{t}{3}$, что дает оценку

$$\widetilde{\sigma}_{n-1}\big(\theta \in S^{n-1} \colon |\|\theta\| - M| \ge bt\big) \le 4\exp\big(-c_1 t^2 (\mathbb{E}|G|)^2\big)$$

и остается заметить, что $(\mathbb{E}|G|)^2 \ge c_2 n$. □

Пусть ν_n — мера Хаара на группе ортогональных матриц $O(n)$, т.е. такая вероятностная мера на (борелевской σ-алгебре) $O(n)$, что $\nu_n \circ U_0^{-1} = \nu_n$, где $\nu_n \circ U_0^{-1}$ образ меры ν_n под действием отображения $U \mapsto U \circ U_0$, $U_0 \in U(n)$. (Она же будет инвариантна относительно умножения слева).

Лемма 14.6. *Пусть* $\|\cdot\|$ — *норма на* $\mathbb{R}^n$, *для которой* $\|x\| \le b|x|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. *Пусть* $y_1, \dots, y_m \in S^{n-1}$ *и пусть* $m \le \frac{1}{4}\exp(\frac{c_0}{2}t^2 n)$. *Тогда существует такое множество* $B \subset O(n)$, *что* $\nu_n(B) \ge 1 - \exp(-\frac{c_0}{2}t^2 n)$ *и*

$$M - bt \le \|Uy_j\| \le M + bt \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}, \forall U \in B.$$

Доказательство. 1) Заметим, что для каждого $\theta_0 \in S^{n-1}$ и для каждого $A \subset S^{n-1}$ выполнено равенство

$$\widetilde{\sigma}_{n-1}(A) = \int_{S^{n-1}} I_A(\theta)\,\widetilde{\sigma}_{n-1}(d\theta) =$$
$$= \int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} I_A(U\theta)\,\widetilde{\sigma}_{n-1}(d\theta)\,\nu_n(dU) = \int_{S^{n-1}} \int_{O(n)} I_A(U\theta)\,\nu_n(dU)\,\widetilde{\sigma}_{n-1}(d\theta).$$

Пусть U_0 переводит θ_0 в θ, тогда

$$\int_{O(n)} I_A(U \circ U_0\theta_0)\,\nu_n(dU) = \nu_n(U\colon U\theta_0 \in A)$$

и

$$\widetilde{\sigma}_{n-1}(A) = \nu_n(U\colon U\theta_0 \in A).$$

2) Пусть теперь

$$A = \{\theta \in S^{n-1}\colon M - bt \le \|\theta\| \le M + bt\}.$$

Из леммы о концентрации на сфере мы знаем, что $\widetilde{\sigma}_{n-1}(A) \ge 1 - 4e^{-c_0 t^2 n}$, откуда получаем, что $\nu_n(B_j) \ge 1 - 4e^{-c_0 t^2 n}$ для каждого из множеств

$$B_j := \{I \in O(n)\colon M - bt \le \|Uy_j\| \le M + bt\}.$$

Тогда для пересечения $B := \bigcap\limits_{j=1}^{m} B_J$ имеет место неравенство

$$\nu_n(B) \ge 1 - \sum_{j=1}^{m} \nu_n(O(n) \setminus B_j) \ge 1 - 4me^{-c_0 t^2 n},$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Доказательство теоремы Мильмана.

1) Пусть E_0 — некоторое k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Мы знаем, что на единичной сфере (относительно евклидовой нормы) этого пространства существует δ-сеть $y_1, \dots, y_m$ мощности $m \le (1 + \frac{2}{\delta})^k$ (доказывали, когда оценивали $N(A, t \cdot B)$). По предыдущей лемме, если $(1 + \frac{2}{\delta})^k \le \frac{1}{4}\exp(\frac{c_0}{2}t^2 n)$, то для найдется такое $B \subset O(n)$, что $\nu_n(B) \ge 1 - \exp(-\frac{c_0}{2}t^2 n)$ и

$$M - bt \le \|Uy_j\| \le M + bt \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}, \forall U \in B.$$

При этои, $Uy_1, \dots, Uy_m$ — δ-сеть на единичной сфере пространства UE_0.

2) Аналогично тому, что выше было показано для меры $\widetilde{\sigma}_{n-1} = \nu_{n,1}$ на сфере, для множества $\Gamma := \{UE_0\colon U \in B\}$ получаем,

$$\nu_{n,k}(\Gamma) = \nu_n(U\colon UE_0 \in \Gamma) \ge \nu_n(B) \ge 1 - \exp(-\tfrac{c_0}{2}t^2 n).$$

Таким образом, для каждого подпространства $E \in \Gamma := \{UE_0\colon U \in B\}$ есть такая δ-сеть $Uy_1, \dots, Uy_m$ на единичной сфере этого подпространства, что

$$M - bt \le \|y\| \le M + bt$$

для каждого y из этой δ-сети. Отсюда получаем, что для каждого x на единичной сфере пространства E справедлива оценка

$$(M - bt) - \frac{\delta}{1-\delta}(M + bt) \le \|x\| \le (M + bt)\frac{1}{1-\delta}.$$

3) Подберем t и δ так, чтобы

$$(M+bt)\frac{1}{1-\delta} \le (1+\varepsilon)M, \quad \frac{M}{1+\varepsilon} \le (M-bt) - \frac{\delta}{1-\delta}(M+bt).$$

Возьмем $t = \frac{M\delta}{b}$, тогда ясно, что можно взять $\delta = c_1\varepsilon$, где c_1 некоторое маленькое число (например, подойдет $c_1 = \frac{1}{6}$).

4) Осталось понять, для каких k выполнена оценка

$$(1+\frac{2}{c_1\varepsilon})^k \le \frac{1}{4}\exp\Big(\frac{c_0}{2}nc_1^2\varepsilon^2\Big(\frac{M}{b}\Big)^2\Big).$$

Ясно, что она справедлива при всех $k \le c(\varepsilon)(\frac{\mathbb{E}\|G\|}{b})^2 \cdot \frac{n}{(\mathbb{E}|G|)^2}$. Остается только заметить, что $\frac{\sqrt{n}}{\mathbb{E}|G|} \le c_2$. Теорема доказана. $\square$

Теоерма Мильмана позволяет доказать следующую теорему Дворецкого (см. [1]).

Теорема 14.7. *Для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ и для каждой нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^n$ существует такая евклидова норма $|\cdot|$, что найдется $k \ge c(\varepsilon)\log n$ и k-мерное подпространство E в $\mathbb{R}^n$, на котором*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}|x| \le \|x\| \le (1+\varepsilon)|x| \quad \forall x \in E.$$

Список литературы

[1] Artstein-Avidan, S., Giannopoulos, A., Milman, V. D. (2015). Asymptotic geometric analysis, Part I (Vol. 202). American Mathematical Soc.

[2] Borell, C. (1975). Convex set functions in d-space. Periodica Mathematica Hungarica, 6(2), 111–136.

[3] Bourgain, J. (1986). On high dimensional maximal functions associated to convex bodies. American Journal of Mathematics, 108(6), 1467–1476.

[4] Brazitikos, S., Giannopoulos, A., Valettas, P., Vritsiou, B. H. (2014). Geometry of isotropic convex bodies (Vol. 196). American Mathematical Soc.

[5] Milman, V. D. and Pajor, A. (1989). Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space. In Geometric aspects of functional analysis (pp. 64-104). Springer, Berlin, Heidelberg.

[6] Макаров, Б. М., Подкорытов А. Н. (2011). Лекции по вещественному анализу: учебник. БХВ-Петербург.