1 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $X^2 \doteqdot X \times X = \{(x,y) \mid x,y \in X\}$ обозначает прямое произведение множества X.

Определение. Неотрицательная функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* в множестве X, если выполняются следующие свойства:

a) *симметричность*: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ при всех $x,y \in X$;

b) *неравенство треугольника*: $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ при всех $x,y,z \in X$;

c) *невырожденность*: $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Пара (X,ρ) называется *метрическим пространством*. Если выполнены (a) и (b), то ρ называется *полуметрикой*, а (X,ρ) *полуметрическим пространством*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши́* в метрическом пространстве (X,ρ), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$ при всех $n,m \geqslant N$.

Последовательность $\{x_n\}$ в (X,ρ) называется *сходящейся* $x_n \to x$ к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x,x_n) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

Если в (X,ρ) всякая последовательность Коши́ является сходящейся к некоторой точке $x \in X$, то метрическое пространство (X,ρ) называется *полным*.

Всюду далее через $\boldsymbol{E}$ будем обозначать *линейное пространство* над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел.

Определение. Неотрицательная функция $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$ на линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *нормой*, если выполняются следующие свойства:

a) однородность $\boldsymbol{p}(\lambda x) = |\lambda| \boldsymbol{p}(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \boldsymbol{E}$;

b) неравенство треугольника $\boldsymbol{p}(x+y) \leqslant \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{p}(y)$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$;

c) невырожденность $\boldsymbol{p}(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Норма обозначается через $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$ и пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ называется *нормированным пространством*. Если выполнены (a) и (b), то $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$ называется *полунормой*, а пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ *полунормированным пространством*. Метрика или полуметрика в этих пространствах определяются по формуле $\rho(x,y) \doteqdot \|x-y\|$. Полное нормированное пространство называется *ба́наховым пространством*.

Пример 1. Нормированное пространство $\mathbb{F}^n \doteqdot \{x = (x_1,\dots,x_n) \mid x_k \in \mathbb{F}, k = 1,\dots,n\}$ с стандартной нормой $\|x\| \doteqdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ называется *евклидовым пространством*. В этом пространстве обычно вводится скалярное произведение $\langle x,y \rangle \doteqdot \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$, через которое выражается евклидова норма $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$.

Пример 2. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *ограниченной* на множестве X, если существует число $c > 0$, т.ч. $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in X$. Нормированное пространство $\boldsymbol{B}(X) \doteqdot \{f \mid f : X \to \mathbb{F}$ ограничена$\}$, состоящее из ограниченных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством ограниченных функций*.

Пример 3. Функция $f: X \to \mathbb{F}$ называется *непрерывной* в (X,ρ), если для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$.

Нормированное пространство $\boldsymbol{C}(X) \doteqdot \{f \mid f: X \to \mathbb{F}$ непрерывна и ограничена$\}$, состоящее из ограниченных и непрерывных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством непрерывных функций*.

Лемма. *Пространства $\boldsymbol{B}(X)$ и $\boldsymbol{C}(X)$ являются ба́наховыми.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\boldsymbol{B}(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и при всех $n,m \geqslant N$. По критерию Коши равномерной сходимости она сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и $n \geqslant N$. Отсюда $\|f_n - f\| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Так как $\|f\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_n\|$, то $f \in \boldsymbol{B}(X)$. Таким образом, пространство ограниченных функций $\boldsymbol{B}(X)$ является ба́наховым.

Поскольку равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, то $\boldsymbol{C}(X)$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{B}(X)$ и, следовательно, также будет ба́наховым пространством. □

Открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве обозначаются через $\boldsymbol{U}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) < r\}$ и $\boldsymbol{S}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) \leqslant r\}$; $\boldsymbol{U}_r \doteqdot \boldsymbol{U}_r(0)$ и $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \boldsymbol{S}_r(0)$. Для множества $A \subset X$ в метрическом пространстве (X,ρ) введем обозначения.

$\mathring{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \subset A\}$ — множество *внутренних* точек;

$\acute{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A = \infty\}$ — множество *предельных* точек;

$\tilde{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A = x\}$ — множество *изолированных* точек;

$\overline{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$ — множество точек *прикосновения*.

Множества $\mathring{A}$ называются *внутренностью*, а $\overline{A}$ *замыканием*, множества A.

Если $\mathring{A} = A$, то множество A называется *открытым*.
Если $\overline{A} = A$, то множество A называется *замкнутым*.
Если $B \subset \overline{A}$, то говорят, что множество A *плотно* в B.
Если $\overline{A} = X$, то множество A называется *всюду плотным*.
Если $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, то множество A называется *нигде не плотным*.

Метрическое пространство (X,ρ) называется *сепара́бельным*, если существует счетное и всюду плотное подмножество $A \subset X$.

Рассмотрим свойства операции замыкания в метрическом пространстве (X,ρ).

1. $\overline{A} = \{x \in X \mid \exists x_n \in A,\ \textit{т.ч.}\ x_n \to x\}$.

Действительно, $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $\exists x_n \in A$, т.ч. $x_n \in A \cap \boldsymbol{U}_{1/n}(x)$, что равносильно неравенству $\rho(x,x_n) < 1/n$. Отсюда следует, что $x_n \to x$.

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Если $x \in \overline{A \cup B}$, то существуют точки $x_n \in A \cup B$, т.ч. $x_n \to x$. Тогда существует подпоследовательность точек x_{n_k}, принадлежащая A либо B, т.ч. $x_{n_k} \to x$. Поэтому справедливо включение $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Обратное включение очевидно.

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Ясно, что $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Пусть $x \in \overline{\overline{A}}$, тогда найдется последовательность точек $x_n \in \overline{A}$, т.ч. $x_n \to x$. Кроме того, для каждого n найдется последовательность точек $x_{nm} \in A$, т.ч. $x_{nm} \to x_n$. Выберем подпоследовательность m_n, т.ч. $\rho(x_{nm_n}, x_n) < 1/n$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x_{nm_n}, x) \leqslant \rho(x_{nm_n}, x_n) + \rho(x_n, x) \to 0$, т.е. $x_{nm_n} \to x \in \overline{A}$.

Замкнутые множества в метрическом пространстве (X, ρ) обладают следующими свойствами: пустое множество $\emptyset$ и пространство X являются замкнутыми; любое пересечение замкнутых множеств является замкнутым; объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым.

Открытые множества в метрическом пространстве (X, ρ) обладают следующими свойствами: пустое множество $\emptyset$ и пространство X являются открытыми; любое объединение открытых множеств является открытым; пересечение конечного числа открытых множеств является открытым.

Множество называется *типа* G_δ, если оно представляется в виде счетного пересечения открытых множеств. Множество называется *типа* F_σ, если оно представляется в виде счетного объединения замкнутых множеств.

Например, замкнутые множества в метрическом пространстве имеют тип G_δ, а открытые имеют тип F_σ. Действительно, пусть множество A замкнуто. Тогда множество $B_n \doteqdot \bigcup_{x \in A} \boldsymbol{U}_{1/n}(x)$ открыто и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, т.е. A типа G_δ. Отсюда, переходя к дополнениям, получаем, что открытые множества имеют тип F_σ.

Пример 4. *Множество Кантора* K по определению состоит из точек $x \in [0,1]$, которые имеют троичное разложение $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ с цифрами $x_i \neq 1$, т. е. либо $x_i = 0$ либо $x_i = 2$. Множество Кантора является замкнутым и нигде не плотным.

Легко проверить, что множество $K \subset [0,1]$ получается в результате удаления из отрезка $[0,1]$ дополнительных интервалов. Сперва удаляем интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, потом два интервала $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, затем четыре интервала

$$(\tfrac{1}{27}, \tfrac{2}{27}) \cup (\tfrac{7}{27}, \tfrac{8}{27}) \cup (\tfrac{19}{27}, \tfrac{20}{27}) \cup (\tfrac{25}{27}, \tfrac{26}{27}), \ldots$$

На n-м шаге мы удаляем 2^{n-1} интервалов длины $1/3^n$. Таким образом, их общая линейная мера равна $\mu([0,1] \setminus K) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$. Отсюда линейная мера множества Кантора равна $\mu(K) = 0$ нулю и, следовательно, множество Кантора не содержит ни одного отрезка, т.е. является нигде не плотным в $\mathbb{R}$. Так как дополнительное множество $[0,1] \setminus K$ является открытым, то множество K замкнуто.

Определение. Отображение $F: X \to Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называется *непрерывным*, если для любого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(F(x), F(y)) < \varepsilon$ выполняется для всех $y \in X$, $\rho_X(x, y) < \delta$.

Отображение $F : X \to Y$ называется *изометричным*, если $\rho_Y(F(x), F(y)) = \rho_X(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Если, кроме того, образ $F(X) = Y$, то отображение называется *изометрией*, а пространства X и Y называются *изометричными*.

Теорема (о пополнении). *Для каждого метрического пространства (X, ρ_X) существует такое полное метрическое пространство (Y, ρ_Y) и изометричное отображение $F : X \to Y$, что образ $F(X) \subset Y$ является всюду плотным. При этом любые два таких полных пространств являются изометричными.*

Доказательство. Пусть $f_x(y) \doteqdot \rho_X(x, y) - \rho_X(x_0, y)$, где точка $x_0 \in X$ фиксирована. Тогда $|f_x(y) - f_x(y_0)| \leqslant 2\rho_X(y, y_0)$ для всех $y, y_0 \in X$ и $|f_x(y)| \leqslant \rho_X(x, x_0)$ для всех $y \in X$. Таким образом, $f_x \in \boldsymbol{C}(X)$ при всех $x \in X$. Определим отображение $F : X \to \boldsymbol{C}(X)$ по формуле $F(x) \doteqdot f_x$ и положим $Y \doteqdot \overline{F(X)}$. Так как имеют место равенства

$$\rho_Y(F(x_1), F(x_2)) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = \sup_{y \in X} |\rho_X(x_1, y) - \rho_X(x_2, y)| = \rho_X(x_1, x_2),$$

то отображение F является изометричным. Пусть существуют два отображения $F : X \to Y$ и $G : X \to Z$, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда для каждого $y \in Y$ найдется последовательность $x_n \in X$, т.ч. $F(x_n) \to y$. Отсюда $G(x_n) \to z \in Z$. Определим отображение $J : Y \to Z$ по формуле $J(y) \doteqdot z$. Тогда при всех $y, y' \in Y$

$$\rho_Y(y, y') = \lim_{n \to \infty} \rho_Y(F(x_n), F(x'_n)) = \lim_{n \to \infty} \rho_X(x_n, x'_n) = \lim_{n \to \infty} \rho_Z(G(x_n), G(x'_n)) = \rho_Z(z, z').$$

Первое и последнее равенство вытекает из непрерывности метрики, как функции двух переменных. Таким образом, отображение J является изометрией. □

Определение. Отображение $F : X \to X$ метрического пространства (X, ρ) в себя называется *сжимающим*, если для некоторого $0 < \lambda < 1$ выполняется неравенство $\rho(F(x), F(y)) \leqslant \lambda \rho(x, y)$ при всех $x, y \in X$.

Каждое сжимающее отображение, очевидно, является непрерывным.

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Для всякого сжимающего отображения $F : X \to X$ полного метрического пространства (X, ρ) в себя существует единственная неподвижная точка $x \in X$, т.ч. $F(x) = x$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $x_1 \doteqdot F(x_0), x_2 \doteqdot F(x_1), \ldots$, т.е. $x_n = F^n(x_0)$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим при $n < m$ и $0 < \lambda < 1$

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{m-1} \rho(F^k(x_0), F^k(x_1)) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k \rho(x_0, x_1) \leqslant \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \rho(x_0, x_1).$$

Поэтому $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Так как $F(x_{n-1}) = x_n$, то, переходя к пределу и используя непрерывность отображения F, получим $F(x) = x$. Если существует еще одна точка $y \in X$, т.ч. $F(y) = y$, то из неравенства $\rho(x, y) = \rho(F(x), F(y)) \leqslant \lambda \rho(x, y)$ следует, что $\rho(x, y) = 0$, т.е. имеет место равенство $x = y$. □

Лемма (о вложенных шарах)**.** *Если в полном метрическом пространстве* (X,ρ) *задана последовательность замкнутых вложенных шаров* $\boldsymbol{S}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$ *и предел* $\lim r_n = 0$*, то пересечение* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$ *состоит из одной точки.*

Доказательство. Поскольку по условию $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $n < m$ и $\lim r_n = 0$, то $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $m \to \infty$, получим $\rho(x_n,x) \leqslant r_n$. Следовательно, эта точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$. Если существует еще одна точка $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$, то $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) \leqslant 2r_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как по условию $\lim r_n = 0$, то $\rho(x,y) = 0$, т.е. $x = y$. □

Теорема (Бэ́ра)**.** *В любом полном метрическом пространстве* (X,ρ) *счетное пересечение* $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ *открытых и всюду плотных множеств* $B_n \subset X$ *является всюду плотным множеством.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный шар $\boldsymbol{S}_r(x)$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in X$. Так как множество B_1 открыто и плотно в $\boldsymbol{S}_r(x)$, то найдется некоторый шар $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \subset \boldsymbol{S}_r(x)$ радиуса $r_1 < 1$, содержащийся в B_1. Точно так же найдется шар $\boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \subset \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1)$ радиуса $r_2 < 1/2$, содержащийся в B_2. Этот процесс продолжается неограниченно. Таким образом, мы построим бесконечную последовательность вложенных шаров $\boldsymbol{S}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$ с радиусами $r_n < 1/n$. По лемме существует $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}$. Поскольку $y \in \boldsymbol{S}_r(x) \cap B_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то пересечение $\boldsymbol{S}_r(x) \cap B \neq \emptyset$ непусто. Следовательно, множество B всюду плотно в X. □

Определение. Множество $A \subset X$ в метрическом пространстве (X,ρ) называется множеством *первой категории*, если является счетным объединением $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ нигде не плотных множеств $A_n \subset X$. Множество $A \subset X$ называется множеством *второй категории*, если оно не является множеством первой категории.

Следствие. *Полное метрическое пространство* (X,ρ) *не является множеством первой категории, т.е. имеет вторую категорию.*

Предположим обратное. Тогда $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, где замкнутые множества $\overline{A_n} \subset X$ нигде не плотны. Поэтому множества $B_n \doteqdot X \setminus \overline{A_n}$ открыты и всюду плотны. Так как пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \emptyset$ пусто, то по теореме одно из множеств B_n не является всюду плотным. Таким образом, мы получили противоречие.

Пример 5. Множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел является множеством первой категории, т.к. состоит из счетного объединения точек. Если множество иррациональных чисел $\mathbb{J} \subset \mathbb{R}$ было множеством первой категории, то объединение $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ множеств первой категории было бы множеством первой категории, что невозможно по следствию теоремы Бэ́ра, Значит множество $\mathbb{J}$ второй категории.

2 ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathbf{2}^X$ обозначает множество всех подмножеств множества X, включая пустое множество $\emptyset$. *Системой множеств* в X называется непустое подмножество $\sigma \subset \mathbf{2}^X$.

Определение. *Топологией* в множестве X называется такая система множеств $\tau \subset \mathbf{2}^X$, что выполняются следующие свойства: $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$, пересечение любых двух множеств $A, B \in \tau$ принадлежит $A \cap B \in \tau$, а также объединение произвольной подсистемы $\sigma \subset \tau$ принадлежит $\bigcup_{A \in \sigma} A \in \tau$.

Топологическим пространством (X, τ) называется множество X, в котором задана *топология* $\tau \subset \mathbf{2}^X$. В топологическом пространстве множества $A \in \tau$ называются *открытыми*, а их дополнения $A' \doteqdot X \setminus A$ *замкнутыми*.

В каждом подмножестве $Y \subset X$ топологического пространства (X, τ) вводится индуцированная топология $\tau_Y \doteqdot \tau \cap Y$, состоящая из множеств $A = B \cap Y$, где $B \in \tau$. Топологическое пространство (Y, τ_Y) называется подпространством в (X, τ).

Открытое множество $O(x)$, содержащее точку $x \in X$, называется *окрестностью* этой точки x. Топологическое пространство (X, τ) называется *хаусдововым* или *отделимым*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$, $x \neq y$, существуют непересекающиеся окрестности $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Система множеств $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии* τ, если любое множество $A \in \tau$ является объединением $A = \bigcup_{B \in \sigma} B$ некоторой подсистемы $\sigma \subset \beta$. Система окрестностей $\beta(x)$ точки $x \in X$ называется *локальной базой* в точке x, если любая окрестность $O(x)$ содержит некоторую окрестность из $\beta(x)$. Ясно, что объединение $\beta = \bigcup_{x \in X} \beta(x)$ всех локальных баз $\beta(x)$ является базой топологии τ.

Пример 1. В метрическом пространстве (X, ρ) система $\tau \subset \mathbf{2}^X$ всех открытых множеств является топологией. Открытые шары $\boldsymbol{U}_r(x)$, $r > 0$, этого пространства образуют локальную базу топологии τ в точке x.

В самом деле, если $x \in A \cap B$, где $A, B \in \tau$, то существуют шары $\boldsymbol{U}_{r_1}(x) \subset A$ и $\boldsymbol{U}_{r_2}(x) \subset B$. Пусть $r \doteqdot \min\{r_1, r_2\}$, тогда $\boldsymbol{U}_r(x) \subset A \cap B$. Если $x \in \bigcup_{A \in \sigma} A$, где $\sigma \subset \tau$, то $x \in A$ для некоторого $A \in \sigma$ и значит существует шар $\boldsymbol{U}_r(x) \subset A \subset \bigcup_{A \in \sigma} A$. Ясно, что система всех открытых шаров $\boldsymbol{U}_r(x)$, $r > 0$, задают локальную базу в точке x.

Лемма. *Система множеств $\beta \subset \mathbf{2}^X$ является базой некоторой топологии в X, тогда и только тогда, когда каждая точка $x \in X$ принадлежит некоторому $A \in \beta$ и для любых $A, B \in \beta$ и $x \in A \cap B$ существует $C \in \beta$, т.ч. $x \in C \subset A \cap B$.*

Доказательство. Необходимость этих условий очевидна. Докажем достаточность. Покажем, что система $\tau \subset \mathbf{2}^X$ всех множеств, которые образуются объединением некоторых элементов системы β, является топологией в X. Очевидно, что $\emptyset \in \tau$. В силу первого условия $X \in \tau$. Очевидно также, что объединение любой системы множеств из τ принадлежит τ. Если $A = \bigcup_{A \in \sigma_1} A$ и $B = \bigcup_{B \in \sigma_2} B$, где $\sigma_1, \sigma_2 \subset \beta$, то $A \cap B = \bigcup_{A \in \sigma_1, B \in \sigma_2} A \cap B$ также принадлежит τ, т.к. из второго условия следует, что пересечение $A \cap B$ будет объединением некоторых элементов β, т.е. $A \cap B \in \tau$. $\square$

Топология произведения $Z \doteqdot X \times Y$ топологических пространств (X, τ_X) и (Y, τ_Y) определяется ее базой $\beta_Z = \tau_X \times \tau_Y$, состоящей из всех множеств вида $C = A \times B$, где множества $A \in \tau_X$ и $B \in \tau_Y$. По лемме такая топология существует. Топология произведения $Z \doteqdot X \times Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) определяется при помощи метрики $\rho_Z(z_1, z_2) \doteqdot \max\{\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\}$, где $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств (X, τ_X) и (X, τ_Y) называется *непрерывным*, если для любого открытого множества $A \in \tau_Y$ его прообраз $f^{-1}(A) \in \tau_X$ является открытым множеством.

Отображение $f : X \to Y$ называется *открытым*, если для любого открытого множества $A \in \tau_X$ его образ $f(A) \in \tau_Y$ является открытым множеством.

Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно является биективным, непрерывным и открытым отображением.

Теорема. *Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) являются метрическими пространствами. Тогда следующие условия непрерывности $f : X \to Y$ эквивалентны:*

a) *для всякого открытого множества $A \in \tau_Y$ пространства Y его прообраз $f^{-1}(A) \in \tau_X$ является открытым множеством пространстве X.*

b) *для каждого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho_X(x, y) < \delta$;*

c) *для любой сходящейся последовательности $x_n \to x$ в X ее образ является сходящейся последовательностью $f(x_n) \to f(x)$ в Y.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (a) и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $x \in X$ существует шар $\boldsymbol{U}_\delta(x) \subset f^{-1}(\boldsymbol{U}_\varepsilon(f(x)))$, что равносильно (b). Пусть выполнено (b) и последовательность сходится $x_n \to x$ в X, т.е. для заданного $\delta > 0$ существует N, т.ч. $\rho_X(x, x_n) < \delta$ для всех $n \geqslant N$. В силу (b) выполняется $\rho_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Отсюда $f(x_n) \to f(x)$, т.е. выполнено (c). Пусть $A \subset Y$ замкнутое множество. Если $x_n \in f^{-1}(A)$ и $x_n \to x$, то по условию (c) получим $f(x_n) \to f(x)$, а из замкнутости $f(x) \in A$, т.е. $x \in f^{-1}(A)$. Поэтому прообраз замкнутого множества замкнут. Это равносильно тому, что прообраз открытого множества открыт. □

Определение. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) являются метрическими пространствами. Отображение $f : X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x, y \in X$, $\rho_X(x, y) < \delta$.

Система G отображений $g : X \to Y$ называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(g(x), g(y)) < \varepsilon$ для всех $g \in G$ и для всех $x, y \in X$, $\rho_X(x, y) < \delta$.

Пример 2. Метрика $\rho(x, y)$ в метрическом пространств (X, ρ) является равномерно непрерывной функцией, т.к. если $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in X \times X$ и выполняется неравенство $\rho_{X \times X}(z_1, z_2) = \max\{\rho(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2)\} < \varepsilon$, тогда $|\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_2)| \leqslant |\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_1)| + |\rho(x_2, y_1) - \rho(x_2, y_2)| \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2) < 2\varepsilon$.

Теорема (принцип продолжения по непрерывности). *Пусть задано равномерно непрерывное отображение $f : A \to Y$, определенное на всюду плотном подмножестве $A \subset X$ метрического пространства (X, ρ_X), со значениями в полном метрическом пространстве (Y, ρ_Y). Тогда существует единственное равномерно непрерывное отображение $g : X \to Y$, т.ч. $g(x) = f(x)$ при всех $x \in A$.*

Доказательство. В силу равномерной непрерывности отображения f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x, y \in A$: $\rho_X(x, y) < \delta$. Так как A всюду плотно в X, то для каждого $x \in X$ существуют $x_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$.

Выберем число N, т.ч. $\rho_X(x_n, x_m) < \delta$ при всех $n, m \geqslant N$. Тогда $\rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Поэтому $\{f(x_n)\}$ последовательность Коши и значит существует предел $g(x) \doteqdot \lim f(x_n)$. Если взять другую сходящуюся последовательность $y_n \to x$, то, полагая $z_n \doteqdot x_k$ при $n = 2k - 1$ и $z_n \doteqdot y_k$ при $n = 2k$, мы получим, что $z_n \to x$. Тогда $g(x) = \lim f(z_n) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n)$. Поэтому значение $g(x)$ не зависит от выбора сходящейся последовательности и определение отображения g корректно.

Пусть $x, y \in X$ и $\rho_X(x, y) < \delta$. Выберем последовательности точек $x_n, y_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Тогда существует N, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < \delta$ при всех $n \geqslant N$. В силу равномерной непрерывности отображения f имеем неравенство $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $\rho_Y(g(x), g(y)) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, отображение $g : X \to Y$ равномерно непрерывно. □

Определение. *Топологическим линейным пространством* $(\boldsymbol{E}, \tau)$ называется топологическое и линейное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором операции сложения $f(x, y) = x + y$ и умножения на число $g(\lambda, x) = \lambda x$ непрерывны в заданной топологии τ.

Поскольку в топологическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \tau)$ операция сложения непрерывна, то отображение $y \to x + y$ является гомеоморфизмом пространства $\boldsymbol{E}$. Отсюда топология τ полностью определяется локальной базой $\beta(0)$ окрестностей нуля. Действительно, пусть $x \in \boldsymbol{E}$ и $O \in \beta(0)$ окрестность нуля. Тогда сдвиг этой окрестности $O(x) = x + O \doteqdot \{x + y \mid y \in O\}$ определяет окрестность точки x, т.е. при сдвиге локальная база $\beta(0)$ переходит в локальную базу $\beta(x) = x + \beta(0)$ в точке x. Отсюда система множеств $\beta = \bigcup_{x \in \boldsymbol{E}} \beta(x)$ является базой заданной топологии τ.

Определение. *Метрическим линейным пространством* $(\boldsymbol{E}, \rho)$ называется метрическое и линейное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором заданная метрика инвариантна $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ и операция умножения на число $g(\lambda, x) = \lambda x$ непрерывна.

Полное метрическое линейное пространство называется *пространством Фреше*.

В метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$ функция $\|x\| \doteqdot \rho(x, 0)$ называется *квазинормой* и метрика выражается через квазинорму по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Квазинорма удовлетворяет неравенству треугольника $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, является симметричной $\|-x\| = \|x\|$ и невырожденной. Однако свойство однородности $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ может не выполняться. Например, в поле $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел квазинорма $\|x\| = \sqrt{|x|}$ не является нормой.

В силу инвариантности метрики операция сложения является непрерывной, т.к. $\|x+y-x_0-y_0\| \leqslant \|x-x_0\|+\|y-y_0\| < \varepsilon$, если $\|x-x_0\| < \varepsilon/2$ и $\|y-y_0\| < \varepsilon/2$. Поэтому метрическое линейное пространство является топологическим линейным пространством. В нормированном или полунормированном пространстве метрика $\rho(x,y) = \|x-y\|$ инвариантна и операция умножения на число непрерывна, т.е. нормированное пространство является метрическим линейным пространством, а банахово пространство является пространством Фреше.

Для доказательства непрерывности операции умножения на число в полунормированном пространстве применяем неравенство треугольника и однородность полунормы, тогда имеем $\|\lambda x-\lambda_0 x_0\| \leqslant |\lambda-\lambda_0|\,\|x-x_0\|+|\lambda-\lambda_0|\,\|x_0\|+|\lambda_0|\,\|x-x_0\| < \varepsilon$, если $|\lambda_0| < a$, $\|x_0\| < b$, $\|x-x_0\| < \varepsilon/3a$, $|\lambda-\lambda_0| < \varepsilon/3b < a$.

Определение. Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ называется *ограниченным*, если система отображений $f_x(\lambda) \doteqdot \lambda x$, $x \in A$, является равностепенно непрерывной в нуле, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|\lambda x\| < \varepsilon$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $x \in A$.

1. *Ограниченное множество $A \subset \boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ содержится в некотором шаре $\boldsymbol{U}_r$. В нормированном пространстве это условие ограниченности множества необходимо и достаточно.*

В самом деле, по определению ограниченности множества A для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x/n\| < \varepsilon$ при всех $x \in A$. Поскольку $\|x\| \leqslant n\|x/n\| < n\varepsilon$ при всех $x \in A$, то множество A содержится в шаре $\boldsymbol{U}_{n\varepsilon}$. Обратно предположим, что в нормированном пространстве множество A содержится в шаре $\boldsymbol{U}_r$. Тогда получим $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| < \varepsilon$, если $|\lambda| < \varepsilon/r$ и $x \in A$. Поэтому множество A ограничено.

2. *Всякая сходящаяся последовательность $x_n \to x$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ является ограниченной.*

Так как $x_n \to x$ и операции умножения непрерывна в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda(x_n-x)\| < \varepsilon/2$ при всех $n > m$ и $|\lambda| < \delta$. В силу непрерывности в нуле операции умножения по переменной λ можно выбрать $\delta > 0$ настолько малым, чтобы $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ и $\|\lambda(x_n-x)\| < \varepsilon/2$ при $n \leqslant m$ и $|\lambda| < \delta$. Отсюда получим $\|\lambda x_n\| \leqslant \|\lambda x\|+\|\lambda(x_n-x)\| < \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $|\lambda| < \delta$.

Определение. Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ метрических линейных пространств $(\boldsymbol{E},\rho_E)$ и $(\boldsymbol{F},\rho_F)$ называется *ограниченным*, если образ $B = f(A)$ каждого ограниченного множества $A \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством в $\boldsymbol{F}$.

Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *линейным*, если $f(x+y) = f(x)+f(y)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Теорема. *Для любого линейного отображения $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ метрических линейных пространств следующие условия эквивалентны: отображение непрерывно в нуле; отображение равномерно непрерывно; отображение ограничено.*

Доказательство. Если f непрерывно в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| < \varepsilon$ при $\|x-y\| < \delta$, т.е. f равномерно непрерывно.

Если $A \subset \boldsymbol{E}$ ограничено, то для любого $r > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < r$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $x \in A$. По непрерывности f в нуле для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r > 0$, т.ч. $\|\lambda f(x)\| = \|f(\lambda x)\| < \varepsilon$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $x \in A$, т.е образ $f(A)$ ограничен.

Пусть последовательность $x_n \to 0$. Выберем индексы n_k, т.ч. $\|x_n\| < 1/k^2$ при всех $n \geqslant n_k$, а затем положим $\lambda_n \doteqdot k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Тогда имеем $\lambda_n \to \infty$ и $\lambda_n x_n \to 0$, так как $\|\lambda_n x_n\| \leqslant \lambda_n \|x_n\| < 1/k$. Поскольку последовательность $\{\lambda_n x_n\}$ ограничена, то по условию образ $\{f(\lambda_n x_n)\}$ ограничен. Значит по определению ограниченного множества $f(x_n) = f(\lambda_n x_n)/\lambda_n \to 0$, т.е. отображение f непрерывно в нуле. □

Теорема (принцип равностепенной непрерывности)**.** *Пусть задана система G непрерывных линейных отображений $g : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ пространства Фреше́ $(\boldsymbol{E}, \rho_E)$ в метрическое линейное пространство $(\boldsymbol{F}, \rho_F)$ и для любого $x \in \boldsymbol{E}$ множества $M_x \doteqdot \{y = g(x) \mid g \in G\}$ являются ограниченными в пространстве $\boldsymbol{F}$. Тогда эта система G является равностепенно непрерывной в нуле.*

Доказательство. Для каждого заданного $\varepsilon > 0$ введем следующие множества:

$$B_n \doteqdot \bigcap_{g \in G} \left\{ x \in \boldsymbol{E} \,\middle|\, \left\| \frac{g(x)}{n} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как все отображения $g(x)$ непрерывны и квазинорма является непрерывной функцией, то все множества в этом пересечении являются замкнутыми. Отсюда пересечение B_n замкнутых множеств будет также замкнутым множеством. В силу условия ограниченности множества M_x для любого $x \in \boldsymbol{E}$ существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|g(x)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $g \in G$. Поэтому имеет место равенство $\boldsymbol{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

По следствию из теоремы Бэ́ра одно из множеств B_n не является нигде не плотным. Следовательно, существуют $\delta > 0$ и $y \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{U}_\delta(y) \subset B_n$. Поскольку $\boldsymbol{U}_\delta(y) = \boldsymbol{U}_\delta + y$, то имеет место неравенство $\|g(x+y)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $x \in \boldsymbol{U}_\delta$ и $g \in G$. Применяя линейность отображений и неравенство треугольника, получим

$$\left\| \frac{g(x)}{n} \right\| \leqslant \left\| \frac{g(x+y)}{n} \right\| + \left\| \frac{g(y)}{n} \right\| \leqslant \varepsilon \text{ при всех } x \in \boldsymbol{U}_\delta \text{ и } g \in G.$$

Если $x \in \boldsymbol{U}_{\delta_n}$, где $\delta_n \doteqdot \delta/n$, то по неравенству треугольника $\|nx\| \leqslant n\|x\| < \delta$, т.е. $nx \in \boldsymbol{U}_\delta$. Поэтому получаем $\|g(x)\| = \|g(nx)/n\| \leqslant \varepsilon$ при всех $x \in \boldsymbol{U}_{\delta_n}$ и $i \in I$. Таким образом, система отображений G равностепенно непрерывна в нуле. □

Следствие 1 (принцип равномерной ограниченности)**.** *В предположениях этой теоремы для каждого ограниченного множества $A \subset \boldsymbol{E}$ существует такое ограниченное множество $B \subset \boldsymbol{F}$, что образ $g(A) \subset B$ при всех $g \in G$.*

В самом деле, т.к. в силу доказанной теоремы система линейных отображений G равностепенно непрерывна в нуле, то объединение $B = \bigcup_{g \in G} g(A)$ всех образов ограниченного множества $A \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством в $\boldsymbol{F}$.

3 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение. Множество $K \subset X$ в топологическом пространстве (X, τ) называется *компактным*, если для всякого открытого покрытия $K \subset \bigcup_{A \in \sigma} A$, где $\sigma \subset \tau$, существует конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in \sigma$.

Компактное топологическое пространство будем называть коротко *компактом*. Множество в топологическом пространстве называется *предкомпактным*, если его замыкание компактно. Рассмотрим свойства компактных множеств.

1. *Каждое замкнутое подмножество $K \subset X$ компактного топологического пространства (X, τ) является компактным.*

Действительно, пусть $K \subset \bigcup_{A \in \sigma} A$, где $\sigma \subset \tau$. Тогда, добавив к этому покрытию открытое множество $B = X \setminus K$, мы получим открытое покрытие всего X. Взяв конечное подпокрытие X и удаляя из него B, получим конечное подпокрытие K.

2. *Каждое компактное множество $K \subset X$ в ха́усдорфовом топологическом пространстве (X, τ) является замкнутым.*

В самом деле, пусть $y \notin K$. Поскольку топология ха́усдорфова, то для каждой точки $x \in K$ существуют непересекающиеся окрестности $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Рассматривая покрытие K этими окрестностями $O(x)$, выделим конечное подпокрытие, тогда $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} O(x_k)$, где $x_k \in K$. Взяв пересечение $O(y) = \bigcap_{k=1}^{n} O_k(y)$ соответствующих окрестностей точки y, получим такую окрестность $O(y)$, которая не пересекается с множеством K. Следовательно, множество K является замкнутым.

3. *Если $f : X \to Y$ непрерывное отображение топологических пространств, то образ $f(K) \subset Y$ компактного множества $K \subset X$ является компактным.*

Действительно, пусть $f(K) \subset \bigcup_{A \in \sigma} A$, где $\sigma \in \tau_Y$. Тогда имеем $K \subset \bigcup_{A \in \sigma} f^{-1}(A)$, где $f^{-1}(A) \in \tau_X$ в силу непрерывности отображения f. По условию компактности существует конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(A_k)$. Отсюда $f(K) \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

4 (теорема Александрова). *Биективное и непрерывное отображение $f : X \to Y$ компакта X в ха́усдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

В самом деле, любое замкнутое подмножество $M \subset X$ по свойству 1 является компактным. В силу свойства 3 его образ $f(M) \subset Y$ будет компактным и значит замкнут по свойству 2. Отсюда образ всякого замкнутого множества является замкнутым. Поэтому образ всякого открытого множества является открытым.

Определение. Пусть (X, ρ) метрическое пространство и задано $\varepsilon > 0$. Множество $C \subset X$ называется *ε-сетью* множества $M \subset X$, если для любого $x \in M$ существует $y \in C$, т.ч. $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$, т.е. выполняется включение $M \subset \bigcup_{x \in C} S_\varepsilon(x)$.

Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $C = \{x_k\}_{k=1}^{n}$ множества M.

Свойства вполне ограниченных множеств в метрическом пространстве (X,ρ).

1. *Вполне ограниченное множество $M \subset X$ содержится в некотором шаре.*

Пусть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ 1-сеть множества M и $r_1 \doteqdot \max_{2\leqslant k\leqslant n}\rho(x_1,x_k)+1$. По условию 1-сети для любого $x\in M$ найдется x_k, т.ч. $\rho(x_k,x)\leqslant 1$. Из неравенства треугольника $\rho(x_1,x)\leqslant\rho(x_1,x_k)+\rho(x_k,x)\leqslant r_1$. Поэтому имеет место включение $M\subset \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1)$.

2. *Если множество $M \subset X$ является вполне ограниченным, то замыкание $\overline{M}$ также будет вполне ограниченным.*

Пусть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ образует ε-сеть для множества M. Поскольку множество M содержится в замкнутом множестве $\bigcup_{k=1}^n \boldsymbol{S}_\varepsilon(x)$, то его замыкание $\overline{M}\subset\bigcup_{k=1}^n \boldsymbol{S}_\varepsilon(x)$. Следовательно, C является конечной ε-сетью для множества $\overline{M}$.

3. *Вполне ограниченное множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в любом метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ является ограниченным.*

В силу непрерывности операции умножения для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, т.ч. $\|\lambda x\|<\varepsilon/2$ при всех $|\lambda|<\delta$ и $\|x\|\leqslant\delta$. Пусть $C=\{x_k\}_{k=1}^n$ будет δ-сетью M. Выберем $0<r<\delta$, т.ч. $\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|\lambda x_k\|<\varepsilon/2$ при всех $|\lambda|<r$. Тогда для всякого $x\in M$ существует k, т.ч. $\|\lambda x\|\leqslant\|\lambda x_k\|+\|\lambda(x-x_k)\|<\varepsilon$ при всех $|\lambda|<r$.

4. *Ограниченное множество $M\subset\mathbb{R}^n$ в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ является вполне ограниченным.*

Ограниченное множество содержится в кубе $K=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|\leqslant r\}$ при некотором $r>0$. Разобьем куб на кубики с ребром $r_k\doteqdot r/k$. Тогда вершины этих кубиков $\{x_j\}_{j=1}^m$, где $m\doteqdot(k+1)^n$, образуют конечную ε-сеть M, где $\varepsilon\doteqdot r\sqrt{n}/2k$. Это число ε равно половине диагонали кубика и стремится к нулю при $k\to\infty$.

Теорема. *В метрическом пространстве (X,ρ) следующие условия, которым удовлетворяет множество $K\subset X$, являются эквивалентными:*

a) **компактность**: *для всякого открытого покрытия $K\subset\bigcup_{A\in\sigma}A$ существует конечное подпокрытие $K\subset\bigcup_{k=1}^n A_k$, где $A_k\in\sigma$;*

b) **счетная компактность**: *для всякого бесконечного подмножества $A\subset K$ существует предельная точка $x\in \acute{A}$, т.ч. $x\in K$;*

c) **секвенциальная компактность**: *для каждой последовательности $\{x_n\}\subset K$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k}\to x$, т.ч. $x\in K$.*

d) **критерий компактности Ха́усдорфа**: *множество $K\subset X$ является вполне ограниченным и полным.*

Доказательство. $a)\Rightarrow b)$. Пусть $A\subset K$ бесконечное множество. Если K не имеет предельных точек множества A, то для любой точки $x\in K$ найдется $r>0$, т.ч. $\boldsymbol{U}_r(x)\cap A$ является конечным множеством. Поскольку шары $\boldsymbol{U}_r(x)$ покрывают K, то, выбирая конечное подпокрытие, получим, что A конечно. Противоречие.

$b) \Rightarrow c)$. Предположим, что последовательность $A = \{x_n\} \subset K$ имеет конечное число равных точек. По условию b) существует предельная точка $x \in \acute{A}$, т.ч. $x \in K$. Тогда найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k} \in \boldsymbol{U}_{1/k}(x)$. Отсюда $x_{n_k} \to x$.

$c) \Rightarrow d)$. Полнота K вытекает из свойства c). Докажем вполне ограниченность. Пусть $\varepsilon > 0$ и точка $x_0 \in K$. Тогда существует точка $x_1 \in K$, т.ч. $\rho(x_1, x_0) > \varepsilon$, иначе точка $\{x_0\}$ образует ε-сеть K. Аналогично, существует точка $x_2 \in K$, т.ч. $\rho(x_2, x_0) > \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$, иначе $\{x_0, x_1\}$ образуют ε-сеть K, и т.д. По индукции существует $x_n \in K$, т.ч. $\rho(x_n, x_k) > \varepsilon$ при $k = 1, \ldots, n-1$. Если процесс выбора точек оборвется на некотором шаге n, то $\{x_k\}_{k=1}^n$ конечная ε-сеть K. В противном случае последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

$d) \Rightarrow c)$. Пусть $\{x_n\} \subset K$. В силу условия вполне ограниченности K существует конечное покрытие K шарами $\boldsymbol{S}_{r_1}(y)$ радиуса $r_1 = 1$. Поэтому найдется шар $\boldsymbol{S}_{r_1}(y_1)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$. Аналогично существует конечное покрытие шарами радиуса $r_2 = 1/2$ и найдется шар $\boldsymbol{S}_{r_2}(y_2)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$ и т.д. По индукции существует подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$, которая содержится в некотором шаре $\boldsymbol{S}_{r_k}(y_k)$ радиуса $r_k = 1/k$. Обозначим через $z_n \doteqdot x_n^{(n)}$ диагональную подпоследовательность. Так как $\rho(z_n, z_m) \leqslant \rho(z_n, y_n) + \rho(y_n, z_m) \leqslant 2r_n$ при всех $m > n$, то $\{z_n\}$ последовательность Коши. В силу полноты K она имеет предел в K.

$d) \Rightarrow a)$. Пусть задано открытое покрытие $K \subset \bigcup_{A \in \sigma} A$. Вначале покажем, что при некотором $\varepsilon > 0$ всякий шар $\boldsymbol{S}_\varepsilon(x)$ с центром в точке $x \in K$ содержится в некотором $A \in \sigma$. Иначе для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся точки $x_n \in K$, т.ч. $\boldsymbol{S}_{r_n}(x_n) \not\subset A$ при всех $A \in \sigma$, где $r_n = 1/n$. По условию существует подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K$. Так как x содержится в некотором $A \in \sigma$, то найдется шар $\boldsymbol{S}_{2r}(x) \subset A$. Выберем n_k, т.ч. $r_{n_k} < r$ и $\rho(x_{n_k}, x) < r$. Тогда $\boldsymbol{S}_{r_{n_k}}(x_{n_k}) \subset \boldsymbol{S}_r(x_{n_k}) \subset \boldsymbol{S}_{2r}(x) \subset A$, что невозможно.

Пусть теперь $\{y_k\}_{k=1}^m$ конечная ε-сеть K. Тогда в силу доказанного найдется $A_k \in \sigma$, т.ч. $\boldsymbol{S}_\varepsilon(y_k) \subset A_k$. Поэтому получаем $K \subset \bigcup_{k=1}^m \boldsymbol{S}_\varepsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^m A_k$. □

Лемма. *Непрерывное отображение $f : X \to Y$ метрического компакта (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) является равномерно непрерывным.*

Предположим обратное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < 1/n$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$ при всех n. В силу компактности X найдутся сходящиеся подпоследовательности $x_{n_k} \to x$ и $y_{n_k} \to y$. Так как по условию $\rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$, то $x = y$. В силу непрерывности отображения f существует n_k, т.ч. $\rho_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leqslant \rho_Y(f(x_{n_k}), f(x))) + \rho_Y(f(y), f(y_{n_k})) < \varepsilon$. Получили противоречие.

Теорема (Арце́ла–Аско́ли). *Множество $M \subset \boldsymbol{C}(X)$ в пространстве непрерывных функций, заданных на компакте (X, ρ), тогда и только тогда является предкомпактным, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. По критерию Ха́усдорфа M вполне ограничено и значит является ограниченным. Докажем равностепенную непрерывность M.

В силу вполне ограниченности для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\varepsilon/3$-сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$ в M. Следовательно, для любого $f \in M$ найдется k, т.ч. $|f(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in X$. Поскольку f_k равномерно непрерывны, то существует $\delta_k > 0$, т.ч. $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$ при всех $\rho(x,y) < \delta_k$. Обозначим через $\delta \doteqdot \min_{1\leqslant k\leqslant n} \delta_k$, тогда

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

при всех $x, y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$. Таким образом, M равностепенно непрерывно.

Достаточность. По условию равностепенной непрерывности M для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ для всех $f \in M$ и $\rho(x,y) \leqslant \delta$. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ является δ-сетью компакта X и отображение $F : M \to \mathbb{F}^m$, т.ч. $F(f) \doteqdot \{f(x_j)\}_{j=1}^m$. Поскольку множество M ограничено, то $F(M) \subset \mathbb{F}^m$ ограничено и значит будет вполне ограниченным. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset M$ элементы прообраза $\varepsilon/3$-сети в $F(M)$. Для любого $x \in X$ выберем индекс j, т.ч. $\rho(x, x_j) \leqslant \delta$, а для любого $f \in M$ выберем индекс k, т.ч. $\|F(f) - F(f_k)\|_{\mathbb{F}^m} \leqslant \varepsilon/3$. Отсюда при всех $x \in X$ получим

$$|f(x) - f_k(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_k(x_j)| + |f_k(x_j) - f_k(x)| < \varepsilon$$

Таким образом, $\{f_k\}_{k=1}^n$ образует ε-сеть множества M. Поэтому M является вполне ограниченным и, следовательно, будет предкомпактным. □

Пример. Рассмотрим пространство ℓ_p, состоящее из всех последовательностей $x = \{x_n\}$ действительных или комплексных чисел $x_n \in \mathbb{F}$, т.ч. $\|x\|_{\ell_p} < \infty$, где

$$\|x\|_{\ell_p} \doteqdot \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p, & \text{если } 0 < p < 1 \text{ (квазинорма)};\\ \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty \text{ (норма)};\\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, & \text{если } p = \infty \text{ (норма)}.\end{cases}$$

В случаях $p = 1, \infty$ неравенство треугольника очевидно. Докажем неравенство треугольника в двух не тривиальных случаях $0 < p < 1$ и $1 < p < \infty$.

Заметим, что имеет место неравенство $(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^q)^{1/q} \leqslant (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$ при всех $0 < p < q$. В силу однородности достаточно доказать его, когда $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p = 1$. Тогда $|x_n| \leqslant 1$ и значит $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^q \leqslant \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p = 1$. В частности, $\ell_p \subset \ell_q$ при всех $p < q$.

Из доказанного вытекает элементарное *неравенство Люрóта* $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$, где $0 < p < 1$ и $a, b \in \mathbb{R}_+$. Отсюда получаем неравенство треугольника

$$\|x+y\|_{\ell_p} = \sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p \leqslant \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p + \sum_{n=1}^\infty |y_n|^p = \|x\|_{\ell_p} + \|y\|_{\ell_p}.$$

Для доказательства неравенства треугольника в случае $1 < p < \infty$ используем элементарное *неравенство Ю́нга* $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$, где $1/p + 1/q = 1$ и $a, b \in \mathbb{R}_+$. Действительно, функция $\varphi^{-1}(t) = t^{q-1}$ является обратной к функции $\varphi(t) = t^{p-1}$ на полуоси $\mathbb{R}_+$, т.к. $1/(p-1) = q-1$. Поэтому площадь прямоугольника $[0,a] \times [0,b]$ оценивается сверху суммой двух интегралов

$$ab \leqslant \int_0^a t^{p-1}\,dt + \int_0^b t^{q-1}\,dt = a^p/p + b^q/q.$$

Если $A = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$ не равны нулю, то, полагая в неравенстве Ю́нга $a_n \doteqdot |x_n|/A^{1/p}$ и $b_n \doteqdot |y_n|/B^{1/q}$, а затем суммируя эти неравенства, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leqslant \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{A} + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^q}{B} = 1/p + 1/q = 1\,,$$

из которого вытекает *неравенство Гёльдера* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \|x\|_{\ell_p} \|y\|_{\ell_q}$. В случае $p = 2$ это неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \|x\|_{\ell_2} \|y\|_{\ell_2}$ называется *неравенством Коши́.*

Если $C = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p$ не равно нулю, то в силу неравенства Гёльдера имеем

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\, |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|\, |x_n + y_n|^{p-1} \leqslant A^{1/p} C^{1/q} + B^{1/p} C^{1/q}.$$

т.к. $(p-1)q = p$. Поделив на $C^{1/q}$, получим неравенство треугольника.

Докажем полноту ℓ_p. Пусть $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}$ является последовательностью Коши, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_{\ell_p} < \varepsilon$ при всех $k, l \geqslant N$. Тогда $|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| < \varepsilon$ при всех $k, l \geqslant N$ и $n \geqslant 1$, т.е. $\{x_n^{(k)}\} \subset \mathbb{F}$ последовательность Коши для каждого $n \geqslant 1$ и в силу полноты поля $\mathbb{F}$ существует предел $\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n$. Полагая $x = \{x_n\}$ и переходя к пределу в неравенстве выше, получим $\|x^{(k)} - x\|_{\ell_p} \leqslant \varepsilon$ при всех $k \geqslant N$. Поскольку $\|x\|_{\ell_p} \leqslant \|x^{(k)}\|_{\ell_p} + \|x^{(k)} - x\|_{\ell_p} \leqslant \|x^{(k)}\|_{\ell_p} + \varepsilon$ при $k \geqslant N$, то $x^{(k)} \to x$ сходится к элементу $x \in \ell_p$. Таким образом, ℓ_p при $0 < p < 1$ является пространством Фреше́, а при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ба́наховым пространством.

Для каждого $x = \{x_n\}$ обозначим через $y = s_m(x)$ финитную последовательность $y = \{y_n\}$, т.ч. $y_n = x_n$ при $n \leqslant m$ и $y_n = 0$ при $n > m$. Тогда $s_m(x) \to x$ сходится в метрике ℓ_p при $0 < p < \infty$ и $m \to \infty$, т.к. $\|x - s_m(x)\|_{\ell_p} \to 0$. Поэтому множество всех финитных последовательностей всюду плотно в пространстве ℓ_p при всех $0 < p < \infty$, а поскольку в подпространстве финитных последовательностей всюду плотно множество финитных последовательностей с рациональными координатами, то пространство ℓ_p является сепарабельным при всех $0 < p < \infty$.

Теорема (Ри́сса)**.** *Множество $M \subset \ell_p$ тогда и только тогда предкомпактно в пространстве ℓ_p при $0 < p < \infty$, когда M ограничено в ℓ_p и для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x - s_m(x)\|_{\ell_p} < \varepsilon$ при всех $x \in M$.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность M вытекает из вполне ограниченности по свойству 3. Для доказательства второго условия предположим, что $C = \{x^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ является $\varepsilon/3$-сетью множества M. Для каждого k выберем число $m_k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x^{(k)} - s_{m_k}(x^{(k)})\|_{\ell_p} < \varepsilon/3$, и обозначим через $m = \max_{1\leqslant k\leqslant n} m_k$. Так как C образует $\varepsilon/3$-сеть множества M, то для каждого $x \in M$ существует k, т.ч. $\|x - x^{(k)}\| \leqslant \varepsilon/3$. Поэтому, применяя неравенство треугольника, получим

$$\|x - s_m(x)\|_{\ell_p} \leqslant \|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} + \|x^{(k)} - s_m(x^{(k)})\|_{\ell_p} + \|s_m(x^{(k)}) - s_m(x)\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

при всех $x \in M$, т.е. выполнено второе условие.

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ и $M_m \doteqdot \{y = s_m(x) \mid x \in M\}$, где m взято из второго условия при $\varepsilon/3$. Поскольку M_m содержится в конечномерном подпространстве и является ограниченным в ℓ_p, то оно вполне ограничено в ℓ_p. В действительном случае это доказывается также как в свойстве 4, используя простое неравенство

$$\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}|x_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant m}|x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{m}|x_n|^p\right)^{1/p} \text{ при } 0 < p < \infty.$$

Комплексный случай сводится к действительному. Для заданного $\varepsilon > 0$ обозначим через $C = \{y^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ некоторую $\varepsilon/3$-сеть множества M_m, а через $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ элементы прообраза $y^{(k)} = s_m(x^{(k)})$ этой сети. Тогда для любого $x \in M$ существует k, т.ч. $\|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\| \leqslant \varepsilon/3$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} \leqslant \|x - s_m(x)\|_{\ell_p} + \|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\|_{\ell_p} + \|s_m(x^{(k)}) - x^{(k)}\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

при всех $x \in M$. Таким образом, $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ образует ε-сеть множества M. Поэтому M вполне ограничено и значит является предкомпактным в пространстве ℓ_p. $\square$

4 МЕРА МНОЖЕСТВ

Пусть X является множеством, а $\mathfrak{S} \subset \mathbf{2}^X$ некоторая система множеств в X.

Определения. Система множеств $\mathfrak{S}$ называется *кольцом*, если для всех $A, B \in \mathfrak{S}$ эта система содержит объединение $A \cup B \in \mathfrak{S}$ и разность $A \setminus B \in \mathfrak{S}$ множеств.

Система множеств $\mathfrak{S}$ называется *полукольцом*, если для всех $A, B \in \mathfrak{S}$ система содержит пересечение $A \cap B \in \mathfrak{S}$, а разность представляется в виде $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$ дизъюнктного объединения конечного числа множеств $B_i \in \mathfrak{S}$.

Если $X \doteq \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$, то X называется *единицей* системы $\mathfrak{S}$. Кольцо (полукольцо) $\mathfrak{S}$, содержащее единицу $X \in \mathfrak{S}$, называется *алгеброй* (*полуалгеброй*).

Кольцо (алгебра) $\mathfrak{S}$ называется *σ-кольцом* (*σ-алгеброй*), если для всех $A_n \in \mathfrak{S}$ содержит счетное объединение $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{S}$, и называется *$\delta$-кольцом* (*$\delta$-алгеброй*), если для всех $A_n \in \mathfrak{S}$ содержит счетное пересечение $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{S}$.

Так как разность $A \setminus A = \emptyset$ является пустым множеством, то любая из систем, указанных в определении, содержит пустое множество $\emptyset$. Кроме того, легко проверить, что кольцо, δ-кольцо и σ-кольцо являются также полукольцами, а алгебра, δ-алгебра и σ-алгебра являются также полуалгебрами. Заметим еще, что алгебра будет δ-алгеброй в том и только в том случае, когда является σ-алгеброй. Для доказательства достаточно применить следующие *формулы двойственности*:

$$X \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \bigcap_{n=1}^\infty \Big(X \setminus A_n\Big), \quad X \setminus \Big(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^\infty \Big(X \setminus A_n\Big).$$

Для каждой системы множеств $\mathfrak{S}$ можно определить *минимальное кольцо* $\mathscr{R}(\mathfrak{S})$ *минимальное σ-кольцо* $\mathscr{R}_\sigma(\mathfrak{S})$, *минимальную алгебру* $\mathscr{A}(\mathfrak{S})$ и *минимальную σ-алгебру* $\mathscr{A}_\sigma(\mathfrak{S})$, содержащие систему множеств $\mathfrak{S}$. Эти минимальные системы получаются в результате пересечения соответственно всех колец, всех алгебр, всех σ-колец и всех σ-алгебр, содержащих систему $\mathfrak{S}$. Очевидно, что пересечение колец является кольцом, пересечение алгебр является алгеброй, пересечение σ-колец является σ-кольцом, пересечение σ-алгебр является σ-алгеброй.

Минимальная σ-алгебра $\mathscr{A}_\sigma(\tau)$, содержащая систему τ всех открытых множеств топологического пространства (X, τ), называется *борелевской σ-алгеброй* и обозначается через $\mathscr{B}(X) \doteq \mathscr{A}_\sigma(\tau)$, а ее элементы $A \in \mathscr{B}(X)$ называются *борелевскими множествами* в пространстве X. Далее через $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначается борелевская σ-алгебра в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

1. *Система $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда будет кольцом, когда для всех $A, B \in \mathfrak{S}$ она содержит пересечение $A \cap B \in \mathfrak{S}$ и симметрическую разность $A \triangle B \in \mathfrak{S}$.*

Если $\mathfrak{S}$ кольцо, то $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{S}$ и $A \triangle B \doteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathfrak{S}$. Обратное следует из формул $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$ и $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$, т.к. симметрическая разность дизъюнктных множеств является их объединением, а симметрическая разность вложенных множеств является их разностью.

2. *Если система множеств $\mathfrak{S}$ является полукольцом, то для любых $A, B_i \in \mathfrak{S}$ следует, что $A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigsqcup_{j=1}^{m} C_j$, где $C_j \in \mathfrak{S}$.*

Заметим, что при $n = 1$ это свойство следует из определения. Предположим по индукции, что утверждение верно для n. Тогда получим

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \setminus B_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^{m} C_j \setminus B_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^{m} \bigsqcup_{i=1}^{m_j} C_{ij}\,, \text{ где } C_{ij} \in \mathfrak{S}\,.$$

Таким образом, утверждение верно для $n+1$.

Лемма. *Минимальное кольцо $\mathscr{R}(\mathfrak{S})$ полукольца $\mathfrak{S}$ состоит из всех конечных дизъюнктных объединений $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ элементов полукольца $A_i \in \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Обозначим через R систему всех множеств вида $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in \mathfrak{S}$. Очевидно, что $\mathfrak{S} \subset R \subset \mathscr{R}(\mathfrak{S})$. Докажем, что R является кольцом. Пусть $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ и $B = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$, где $A_i, B_j \in \mathfrak{S}$. Тогда по свойству 2 получим

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \left(A_i \setminus B\right) = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} C_{ij}\,, \text{ где } C_{ij} \in \mathfrak{S}\,.$$

Кроме того, $A \cup B = \left(A \setminus B\right) \sqcup B$. Поэтому R будет кольцом и значит $R = \mathscr{R}(\mathfrak{S})$. □

Определения. Функция $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathbb{F}$, заданная на системе множеств $\mathfrak{S}$, называется *конечно-аддитивной* (аддитивной), если для всех n (при $n = 2$)

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \text{ для всех } A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\,, \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ и } A, A_i \in \mathfrak{S}\,.$$

Функция φ называется σ*-аддитивной* (т.е. счетно-аддитивной), если

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \text{ для всех } A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\,, \text{ где } A, A_n \in \mathfrak{S}\,.$$

Неотрицательная функция $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}_+$ называется *конечно-аддитивной мерой*, если $\mathfrak{S}$ полукольцо и она является конечно-аддитивной. Конечно-аддитивная мера называется σ*-аддитивной мерой*, если она является σ-аддитивной функцией на полукольце. Для краткости σ-аддитивную меру будем называть просто мерой.

Мера $\mu : \mathfrak{S}_\mu \to \mathbb{R}_+$ называется *продолжением* меры $\mathfrak{m} : \mathfrak{S}_\mathfrak{m} \to \mathbb{R}_+$, если имеет место включение $\mathfrak{S}_\mathfrak{m} \subset \mathfrak{S}_\mu$ и выполняется равенство $\mu|_{\mathfrak{S}_\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$, т.е. $\mu(A) = \mathfrak{m}(A)$ для всех $A \in \mathfrak{S}_\mathfrak{m}$. При этом предполагается, что продолжением σ-аддитивной меры является σ-аддитивная мера и соответственно продолжением конечно-аддитивной меры является конечно-аддитивная мера.

Теорема. *Для всякой меры $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}_+$ существует единственное продолжение $\mu : \mathscr{R}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}_+$ на минимальное кольцо $\mathscr{R}(\mathfrak{S})$.*

Доказательство. Применяя лемму, мы можем определить меру $\mu : \mathscr{R}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}_+$ по формуле $\mu(A) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k)$ для всех множеств $A \in \mathscr{R}(\mathfrak{S})$, которые представляются конечным дизъюнктным объединением $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ элементов $A_k \in \mathfrak{S}$ полукольца. Если множество $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$ имеет два представления, то

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j\,, \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{m}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}(B_j)\,,$$

т.е. определение меры μ не зависит от представления множества $A \in \mathscr{R}(\mathfrak{S})$.

Так как из σ-аддитивности меры следует конечная аддитивность, то достаточно доказать σ-аддитивность этой функции μ. Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in \mathscr{R}(\mathfrak{S})$. По лемме $A = \bigsqcup_{i=1}^{m} B_i$ и $A_n = \bigsqcup_{j=1}^{m_n} B_{nj}$, где $B_i, B_{nj} \in \mathfrak{S}$. Тогда получим

$$B_i = B_i \cap A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_i \cap A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} B_i \cap B_{nj}\,,\ A_n = A \cap A_n = \bigsqcup_{i=1}^{m} B_i \cap A_n = \bigsqcup_{i=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} B_i \cap B_{nj}\,.$$

В силу σ-аддитивности меры $\mathfrak{m}$ получим

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{m}(B_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_n} \mathfrak{m}(B_i \cap B_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_n} \mathfrak{m}(B_i \cap B_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Единственность продолжения меры $\mathfrak{m}$ на минимальное кольцо $\mathscr{R}(\mathfrak{S})$ очевидна. □

Поскольку продолжение любой меры $\mathfrak{m}$ на минимальное кольцо $\mathscr{R}(\mathfrak{S})$ является единственным, то далее мы будем обозначать это продолжение также через $\mathfrak{m}$. Рассмотрим свойства меры, заданной на полукольце $\mathfrak{S}$.

1. *Мера пустого множества* $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$, *т.к.* $\mathfrak{m}(\emptyset) = \mathfrak{m}(\emptyset \sqcup \emptyset) = 2\mathfrak{m}(\emptyset)$.

2. Монотонность: *если* $A \supset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *где* $A, A_n \in \mathfrak{S}$, *то* $\mathfrak{m}(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$.

Пусть $A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$, где $B_j \in \mathfrak{S}$. Тогда $A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} B_j\right)$ и

$$\mathfrak{m}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{m}(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}(B_j) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{m}(A_i) \to \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_i) \text{ при } n \to \infty\,.$$

При доказательстве мы использовали только конечную аддитивность меры $\mathfrak{m}$.

3. Полуаддитивность: *если* $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *где* $A, A_n \in \mathfrak{S}$, *то* $\mathfrak{m}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$. *Соответственно конечно-аддитивная мера является конечно-полуаддитивной.*

Представим множество A в виде дизъюнктного объединения элементов $\mathscr{R}(\mathfrak{S})$

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\,, \text{ где } B_1 \doteqdot A_1 \cap A \text{ и } B_n \doteqdot (A_n \cap A) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A\right) \text{ при } n > 1\,.$$

Так как мера $\mathfrak{m}$ σ-аддитивна и $B_n \subset A_n$, то $\mathfrak{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$.

4. Непрерывность снизу: *если $A_n \nearrow A$, где $A_n, A \in \mathfrak{S}$, то $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n) = \mathfrak{m}(A)$. Если конечно-аддитивная мера непрерывна снизу, то она σ-аддитивна.*

По условию $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $A_0 \doteqdot \emptyset$ и $B_n \doteqdot A_n \setminus A_{n-1}$. Тогда

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\,, \quad \mathfrak{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mathfrak{m}(A_n) - \mathfrak{m}(A_{n-1})\big) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n)\,.$$

Пусть $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A, A_i \in \mathfrak{S}$. Положим $B_n \doteqdot \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, тогда $B_n \nearrow A$ и

$$\mathfrak{m}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{m}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_i)\,.$$

5. Непрерывность сверху: *если $A_n \searrow A$, где $A_n, A \in \mathfrak{S}$, то $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n) = \mathfrak{m}(A)$. Если конечно-аддитивная мера непрерывна сверху, то она σ-аддитивна.*

По условию $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $B \doteqdot A_1 \setminus A$ и $B_n \doteqdot A_1 \setminus A_n$. Тогда

$$B_n \nearrow B \;\text{ и }\; \mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(A_1) - \mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n)$$

Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in \mathfrak{S}$. Положим $B_n \doteqdot A \setminus \big(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\big)$. Тогда имеем

$$B_n \searrow \emptyset \;\text{ и }\; \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = 0\,, \;\text{ т.е. }\; \mathfrak{m}(A) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{m}(A_i) = 0\,.$$

Определение. Конечно-аддитивная мера $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}_+$, заданная на полукольце $\mathfrak{S}$ множеств метрического пространства (X, ρ), называется *регулярной*, если для всех $E \in \mathfrak{S}$ и $\varepsilon > 0$ существуют $A, B \in \mathfrak{S}$, т.ч. множество A предкомпактно, имеют место включения $\overline{A} \subset E \subset \mathring{B}$ и выполняется неравенство $\mathfrak{m}(B \setminus A) < \varepsilon$.

Теорема. *Каждая регулярная мера $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}_+$, заданная на полукольце $\mathfrak{S}$ множеств метрического пространства (X, ρ), является σ-аддитивной.*

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E, E_n \in \mathfrak{S}$. В силу свойства монотонности меры имеем неравенство $\mathfrak{m}(E) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E_n)$. Докажем обратное неравенство.

По условию регулярности меры для любого $\varepsilon > 0$ существуют $A, B, A_n, B_n \in \mathfrak{S}$, т.ч. A и A_n предкомпактны, имеют место включения $\overline{A} \subset E \subset \mathring{B}$, $\overline{A_n} \subset E_n \subset \mathring{B}_n$ и выполняются неравенства $\mathfrak{m}(B \setminus A) < \varepsilon/2$, $\mathfrak{m}(B_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Так как замыкание множества $\overline{A} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{B}_k$, то в силу компактности $\overline{A}$ существует конечное подпокрытие $\overline{A} \subset \bigcup_{n=1}^{m} \mathring{B}_n$. Из свойства конечной полуаддитивности конечно-аддитивной меры следует, что $\mathfrak{m}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \mathfrak{m}(B_n)$. Отсюда получим неравенства

$$\mathfrak{m}(E) \leqslant \mathfrak{m}(B) < \mathfrak{m}(A) + \varepsilon/2 \leqslant \sum_{n=1}^{m} \mathfrak{m}(B_n) + \varepsilon/2 < \sum_{n=1}^{m} \mathfrak{m}(A_n) + \varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E_n) + \varepsilon\,,$$

Поскольку число $\varepsilon > 0$ произвольно, то будет выполняться обратное неравенство $\mathfrak{m}(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E_n)$. Поэтому имеет место равенство $\mathfrak{m}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E_n)$. $\square$

Пример 1. *Стандартная мера на евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим полукольцо $\mathfrak{S}_n$ полуинтервалов вида $[a,b) = [a_1,b_1) \times \ldots \times [a_n,b_n)$, где $a = \{a_k\}_{k=1}^n$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, и определим на нем функцию полуинтервала $\mathfrak{m}_n([a,b)) \doteqdot \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$. Как известно, объем этого полуинтервала $[a,b)$ является конечно-аддитивной функцией. Поэтому $\mathfrak{m}_n$ является конечно-аддитивной мерой и обладает свойством регулярности. В силу доказанной теоремы стандартная мера $\mathfrak{m}_n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ является σ-аддитивной.

Пример 2. *Стандартная мера Сти́лтьеса на евклидовой прямой* $\mathbb{R}$.

Пусть $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является неубывающей функцией на прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим на полукольце $\mathfrak{S}_1$ полуинтервалов $[a,b)$, где $a,b \in \mathbb{R}$, и определим на нем функцию полуинтервала $\mathfrak{m}_\alpha([a,b)) \doteqdot \alpha(b) - \alpha(a)$. Она является конечно-аддитивной мерой, т.к. если $[a,b) = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k)$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то

$$\mathfrak{m}_\alpha([a,b)) = \alpha(b) - \alpha(a) = \sum_{k=1}^n \big(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^n \mathfrak{m}_\alpha([x_{k-1}, x_k)).$$

Теорема. *Стандартная мера Сти́лтьеса* $\mathfrak{m}_\alpha$ *тогда и только тогда является* σ*-аддитивной, когда функция* $\alpha(x)$ *непрерывна слева.*

Доказательство. Если мера $\mathfrak{m}_\alpha$ σ-аддитивна, то она будет непрерывной сверху. Пусть $x_n \nearrow x$, т.е. $[x_n, x) \searrow \emptyset$. Тогда $\lim \alpha(x_n) = \alpha(x) - \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}_\alpha([x_n, x)) = \alpha(x)$.

Обратно, докажем регулярность меры $\mathfrak{m}_\alpha$. Для каждого $[a,b)$ и для любого $\delta > 0$ имеем $[a, b-\delta] \subset [a,b) \subset (a-\delta, b)$. В силу непрерывности слева функции $\alpha(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\alpha(a) - \alpha(a-\delta) < \varepsilon/2$ и $\alpha(b) - \alpha(b-\delta) < \varepsilon/2$. Отсюда $\mathfrak{m}_\alpha([a-\delta, b) \setminus [a, b-\delta)) = \alpha(a) - \alpha(a-\delta) + \alpha(b) - \alpha(b-\delta) < \varepsilon$. Поэтому мера $\mathfrak{m}_\alpha$ является регулярной и значит по теореме будет σ-аддитивной. □

При исследовании различных вопросов измеримости множеств и продолжения мер на евклидовой прямой очень полезной оказывается следующая лемма.

Лемма. *Всякое открытое множество на евклидовой прямой представляется в виде дизъюнктного объединения не более, чем счетного числа интервалов.*

Доказательство. В каждом открытом множестве $G \subset \mathbb{R}$ можно ввести отношение эквивалентности, считая точки эквивалентными $x \sim y$, если существует интервал (a,b), т.ч. $x, y \in (a,b) \subset G$. По известной теореме множество G разбивается на попарно непересекающиеся классы эквивалентности. Докажем, что каждый класс эквивалентности C является интервалом (a,b), где $a \doteqdot \inf C$ и $b \doteqdot \sup C$. Включение $C \subset (a,b)$ очевидно. С другой стороны, если $x, y \in C$, то по определению класса эквивалентности интервал $(x,y) \subset C$. Так как в любой окрестности точки a и в любой окрестности точки b имеются точки класса C, то (a,b) содержит любой интервал (x,y), концы которого $x, y \in (a,b)$. Следовательно, $C = (a,b)$. При этом система таких непересекающихся интервалов не более, чем счетна, т.к. в каждом из них содержится рациональная точка. □

5 ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Понятие меры на множестве X, которая принимает только конечные значения на полукольце $\mathfrak{S}$, оказывается слишком узким. Рассмотрим меры $\mathfrak{m}: \mathfrak{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, которые могут принимать бесконечные значения ∞ и заданы на полуалгебре $\mathfrak{S}$, т.е. $X \in \mathfrak{S}$. Для этого введем в расширенном множестве неотрицательных чисел $\overline{\mathbb{R}}_+ \doteqdot \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$ отношение порядка и алгебраические операции: если $a \in \mathbb{R}_+$, то $a < \infty$, $a + \infty = \infty + a \doteqdot \infty$, $a \cdot \infty = \infty \cdot a \doteqdot \infty$ при $a \neq 0$, $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 \doteqdot 0$, $\infty + \infty \doteqdot \infty$, $\infty \cdot \infty \doteqdot \infty$. Понятие предела в бесконечности ∞ вводится обычным образом.

Множество $A \in \mathfrak{S}$ имеет конечную меру, если $\mathfrak{m}(A) < \infty$. Говорят, что множество $A \in \mathfrak{S}$ имеет σ-конечную меру, если найдутся $A_n \in \mathfrak{S}$, т.ч. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\mathfrak{m}(A_n) < \infty$. Мера $\mathfrak{m}$ называется *конечной*, если все множества из $\mathfrak{S}$ имеют конечную меру. Мера $\mathfrak{m}$ называется *σ-конечной*, если все множества из $\mathfrak{S}$ имеют σ-конечную меру. Мера $\mathfrak{m}$ называется *полной*, если для всех $A \in \mathfrak{S}$ меры нуль $\mathfrak{m}(A) = 0$ любое подмножество $B \subset A$ принадлежит $B \in \mathfrak{S}$ и имеет меру нуль $\mathfrak{m}(B) = 0$.

Определение. Неотрицательная функция $\lambda : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *внешней мерой на множестве X*, если выполняются следующие свойства:

a) *невырожденность*: $\lambda(\emptyset) = 0$;

b) *монотонность*: $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$ при всех $A \subset B$;

c) *полуаддитивность*: $\lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ при всех $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Множество $E \subset X$ называется *измеримым* относительно внешней меры λ, если $\lambda(A) = \lambda(A \cap E) + \lambda(A \setminus E)$ при всех $A \subset X$. Совокупность всех измеримых множеств относительно заданной внешней меры λ обозначается через $\Sigma \doteqdot \Sigma_\lambda$.

Пример 1. Пусть задана точка $x_0 \in X$. Рассмотрим меру, определенную на системе всех подмножеств X по правилу: $\mu_{x_0}(A) = 1$, если $x_0 \in A$, и $\mu_{x_0}(A) = 0$, если $x_0 \notin A$. Она является одновременно внешней мерой и называется *мерой Дира́ка*.

Для краткости обозначим пересечение множеств через $AB \doteqdot A \cap B$, дополнение множеств через $A' \doteqdot X \setminus A$ и определим внешнюю меру по формуле $\lambda_A(B) \doteqdot \lambda(AB)$, где λ некоторая исходная внешняя мера на множестве X. В этом случае понятие измеримости для множества $E \subset X$ равносильно равенству $\lambda_A(X) = \lambda_A(E) + \lambda_A(E')$ при всех $A \subset X$. Заметим, что измеримость множества E вытекает из неравенства $\lambda_A(X) \geqslant \lambda_A(E) + \lambda_A(E')$ при всех $A \subset X$, т.к. обратное к этому неравенству следует из полуаддитивности. Рассмотрим свойства измеримых множеств.

1. *$\emptyset, X \in \Sigma$. Если $\lambda(E) = 0$, то $E \in \Sigma$.*

В силу монотонности $\lambda_A(E) = 0$ и $\lambda_A(X) \geqslant \lambda_A(E') = \lambda_A(E) + \lambda_A(E')$.

2. *Если $E \in \Sigma$, то $E' \in \Sigma$.*

Из равенства $E'' = E$ следует $\lambda_A(X) = \lambda_A(E) + \lambda_A(E') = \lambda_A(E') + \lambda_A(E'')$.

3. *Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то $E = E_1 E_2 \in \Sigma$.*

Из равенств $E_1 E_2' = E_1 E'$ и $E_1' = E_1' E'$ получим, что $\lambda_A(X) = \lambda_A(E_1) + \lambda_A(E_1') = \lambda_A(E_1 E_2) + \lambda_A(E_1 E_2') + \lambda_A(E_1') = \lambda_A(E) + \lambda_A(E_1 E') + \lambda_A(E_1' E') = \lambda_A(E) + \lambda_A(E')$.

4. *Система измеримых множеств Σ является алгеброй.*

Так как $E_1 \setminus E_2 = E_1 E_2'$ и $E_1 \cup E_2 = (E_1' E_2')'$, то $E_1 \setminus E_2, E_1 \cup E_2 \in \Sigma$, если $E_1, E_2 \in \Sigma$. Отсюда система Σ является кольцом и, следовательно, будет алгеброй.

5. *Функция $\lambda_A : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ определяет конечно-аддитивную меру на системе Σ.*

Если $E = E_1 \sqcup E_2$, где $E_1, E_2 \in \Sigma$, то $\lambda_A(E) = \lambda_A(EE_1) + \lambda_A(EE_1') = \lambda_A(E_1) + \lambda_A(E_2)$. Так как Σ является алгеброй, из аддитивности следует конечная аддитивность.

Теорема (Каратеодо́ри)**.** *Если $\lambda : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ внешняя мера на множестве X, то система Σ всех измеримых множеств является σ-алгеброй и функция $\mu \doteqdot \lambda|_\Sigma$ на этой σ-алгебре является полной σ-аддитивной мерой.*

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup_{n=1}^\infty E_n$ и $E_n \in \Sigma$. Положим $F_n \doteqdot \bigsqcup_{i=1}^n E_i$, тогда $F_n \in \Sigma$. Применяя конечную аддитивность и монотонность меры λ_A, получим при $n \to \infty$

$$\lambda_A(X) = \lambda_A(F_n) + \lambda_A(F_n') \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_A(E_i) + \lambda_A(E') \to \sum_{i=1}^\infty \lambda_A(E_i) + \lambda_A(E') \geqslant \lambda_A(E) + \lambda_A(E').$$

Отсюда $E \in \Sigma$ и выполняется равенство $\lambda_A(X) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_A(E_i) + \lambda_A(E')$. Заменяя в последнем равенстве A на E, имеем $\mu(E) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i)$ свойство σ-аддитивности. Наконец, полнота меры μ, очевидно, вытекает из свойства 1. □

Определение. Пусть σ-конечная мера $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ определена на полуалгебре $\mathfrak{S}$. *Внешней мерой Лебе́га* $\mathfrak{m}^* : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется функция множества $A \subset X$

$$\mathfrak{m}^*(A) \doteqdot \inf\Big\{ \sum_{n=1}^\infty \mathfrak{m}(A_n) \,\Big|\, A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n,\ A_n \in \mathfrak{S} \Big\}.$$

Покажем, что функция $\mathfrak{m}^*$ обладает свойствами внешней меры на множестве X.

1. $\mathfrak{m}^*(\emptyset) = 0$.

2. *Если $A \subset B$, то $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(B)$.*

3. *Если $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, то $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mathfrak{m}^*(A_n)$.*

Первые два свойства вытекают из определения $\mathfrak{m}^*$. Докажем свойство 3. Если $\mathfrak{m}^*(A_n) = \infty$ при некотором n, то утверждение верно. Пусть $\mathfrak{m}^*(A_n) < \infty$ при всех n. По определению внешней меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ существуют $B_{ni} \in \mathfrak{S}$, т.ч. $A_n \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_{ni}$ и $\sum_{i=1}^\infty \mathfrak{m}(B_{ni}) < \mathfrak{m}^*(A_n) + \varepsilon/2^n$. Тогда

$$A \subset \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty B_{ni}, \quad \mathfrak{m}^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty \mathfrak{m}(B_{ni}) < \sum_{n=1}^\infty \mathfrak{m}^*(A_n) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то выполняется свойство полуаддитивности.

Теорема (о лебеговом продолжении меры). *Пусть $\mathfrak{m}:\mathfrak{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ σ-конечная мера, заданная на полуалгебре $\mathfrak{S}$. Тогда мера $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_\Sigma$, определенная на σ-алгебре Σ измеримых множеств внешней меры $\mathfrak{m}^*$, является продолжением меры $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. В силу полуаддитивности для всех $A, A_n \in \mathfrak{S}$, т.ч. $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, получим $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}(A) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mathfrak{m}(A_n)$. Отсюда $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(A)$ при всех $A \in \mathfrak{S}$. Поэтому на основании теоремы Каратеодóри осталось доказать, что $\mathfrak{S} \subset \Sigma$.

Пусть $E \in \mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{m}^*(A) = \infty$, то равенство $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(A\cap E) + \mathfrak{m}^*(A\setminus E)$ верно. Если $\mathfrak{m}^*(A) < \infty$, то по определению внешней меры Лебега $\mathfrak{m}^*$ для любого $\varepsilon > 0$ существуют $B_n \in \mathfrak{S}$, т.ч. $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ и $\sum_{n=1}^\infty \mathfrak{m}(B_n) < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$. Отсюда, применяя полуаддитивность внешней меры $\mathfrak{m}^*$ и аддитивность меры $\mathfrak{m}$, получим

$$\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(A\cap E) + \mathfrak{m}^*(A\setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \big(\mathfrak{m}(B_n\cap E) + \mathfrak{m}(B_n\setminus E)\big) = \sum_{n=1}^\infty \mathfrak{m}(B_n) < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(A\cap E) + \mathfrak{m}^*(A\setminus E)$, т.е. $E \in \Sigma$. □

Замечание. Поскольку система измеримых множеств Σ является σ-алгеброй, содержащей полуалгебру $\mathfrak{S}$, то она содержит наименьшую σ-алгебру, содержащую полуалгебру $\mathfrak{S}$, т.е. имеет место включение $\mathscr{A}_\sigma(\mathfrak{S}) \subset \Sigma$.

Теорема (единственности продолжения). *Всякая σ-конечная мера $\mathfrak{m}:\mathfrak{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$, заданная на полуалгебре $\mathfrak{S}$, имеет единственное продолжение на σ-алгебру Σ измеримых множеств внешней меры $\mathfrak{m}^*$.*

Доказательство. Пусть меры $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_\Sigma$ и ν является продолжением меры $\mathfrak{m}$ на σ-алгебру Σ. Покажем, что $\nu(E) = \mu(E)$ для всех $E \in \Sigma$. Предположим вначале, что мера $\mathfrak{m}(X) < \infty$ конечна. Используя полуаддитивность меры ν, для всех покрытий множества $E \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ элементами $A_n \in \mathfrak{S}$ получим

$$\nu(E) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathfrak{m}(A_n) \;\text{ т.е. }\; \nu(E) \leqslant \mathfrak{m}^*(E).$$

Следовательно, $\nu(E) \leqslant \mu(E)$ и аналогично $\nu(E') \leqslant \mu(E')$. Поскольку имеет место равенство $\nu(E) + \nu(E') = \mathfrak{m}(X) = \mu(E) + \mu(E')$, то $\nu(E) = \mu(E)$. В общем случае в силу σ-конечности $X = \bigcup_{n=1} A_n$, где $A_n \in \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{m}(A_n) < \infty$. Представим множество X в виде дизъюнктного объединения множеств конечной меры

$$X = \bigsqcup_{n=1}^\infty B_n\,, \text{ где } B_1 \doteqdot A_1 \text{ и } B_n \doteqdot A_n \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \text{ при всех } n > 1\,.$$

По доказанному $\nu(E\cap B_n) = \mu(E\cap B_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, имеем

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^\infty \nu(E\cap B_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E\cap B_n) = \mu(E)\,.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано. □

Определение. Тройка (X,Σ,μ) называется *измеримым пространством* меры $\mathfrak{m}$, где мера $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_\Sigma$ является ограничением внешней меры $\mathfrak{m}^*$ на σ-алгебру Σ всех измеримых множеств внешней меры $\mathfrak{m}^*$.

Лемма (об измеримой оболочке). *Для каждого множества $E \subset X$ существует измеримая оболочка $A \in \mathscr{A}_\sigma(\mathfrak{S})$, т.ч. $E \subset A$ и $\mu(A) = \mathfrak{m}^*(E)$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{m}^*(E) = \infty$, то $A = X$. Если $\mathfrak{m}^*(E) < \infty$, то по определению внешней меры Лебега для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $B_{ni} \in \mathfrak{S}$, т.ч.

$$E \subset B_n \doteqdot \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{ni}, \quad \mu(B_n) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{ni}) < \mathfrak{m}^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Положим $A \doteqdot \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $E \subset A$ и $\mu(A) \leqslant \mu(B_n) < \mathfrak{m}^*(E) + 1/n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\mu(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(E)$. Обратное неравенство $\mu(A) = \mathfrak{m}^*(A) \geqslant \mathfrak{m}^*(E)$ очевидно. □

Теорема (критерий измеримости Валле́-Пуссе́на). *Пусть $\mathfrak{m} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}_+$ конечная мера, заданная на полуалгебре $\mathfrak{S}$. Множество $E \subset X$ тогда и только тогда измеримо, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathscr{A}(\mathfrak{S})$, т.ч. $\mathfrak{m}^*(E \triangle B) < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры Лебега существуют $A_i \in \mathfrak{S}$, т.ч. $E \subset A \doteqdot \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ и выполняются неравенства

$$\mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_i) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.е. } \mu(A \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_i) < \varepsilon/2$, и положим $B_n \doteqdot \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}(\mathfrak{S})$. Так как $E, B_n \subset A$, то применяя монотонность и полуаддитивность меры μ, получим

$$\mu(E \triangle B_n) \leqslant \mu(A \setminus B_n) + \mu(A \setminus E) \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Достаточность. Так как множество $E \subset B \cup (E \triangle B)$ и дополнение $E' \subset B' \cup (E \triangle B)$, то по условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathscr{A}(\mathfrak{S})$, т.ч.

$$|\mathfrak{m}^*(E) - \mu(B)| \leqslant \mathfrak{m}^*(E \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\mathfrak{m}^*(E') - \mu(B')| \leqslant \mathfrak{m}^*(E \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $\mu(X) = \mu(B) + \mu(B')$, то складывая эти два неравенства, получим $|\mu(X) - \mathfrak{m}^*(E) - \mathfrak{m}^*(E')| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mu(X) = \mathfrak{m}^*(E) + \mathfrak{m}^*(E')$. По лемме существуют измеримые оболочки $A, B \in \mathscr{A}_\sigma(\mathfrak{S})$ множеств E и E', т.ч.

$$E \subset A, \ E' \subset B, \ \mu(A) = \mathfrak{m}^*(E), \ \mu(B) = \mathfrak{m}^*(E').$$

Тогда объединение $A \cup B = X$ и значит выполняется равенство

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B) = \mathfrak{m}^*(E) + \mathfrak{m}^*(E') - \mu(X) = 0.$$

Поскольку $A \setminus E \subset A \cap B$, то $\mu(A \setminus E) = 0$. Поэтому множество $A \setminus E \in \Sigma$ измеримо. Следовательно, множество $E = A \setminus (A \setminus E) \in \Sigma$ является также измеримым. □

Определение. Мера $\mu_n \doteqdot \mathfrak{m}_n^*|_{\Sigma_n}$, которая получается в результате продолжения стандартной меры $\mathfrak{m}_n : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}_+$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ с полукольца полуинтервалов на σ-алгебру Σ_n измеримых множеств, называется *мерой Лебéга* в $\mathbb{R}^n$.

Мера $\mu_\alpha \doteqdot \mathfrak{m}_\alpha^*|_{\Sigma_\alpha}$, которая является продолжением стандартной меры Стúлтьеса $\mathfrak{m}_\alpha : \mathfrak{S}_1 \to \mathbb{R}_+$ с полукольца полуинтервалов на σ-алгебру Σ_α измеримых множеств, называется *мерой Лебéга–Стúлтьеса* в $\mathbb{R}$.

Лемма. *Мера Лебéга μ_n в пространстве $\mathbb{R}^n$ является регулярной на каждом измеримом множестве $E \in \Sigma_n$ конечной меры $\mu_n(E) < \infty$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению внешней меры Лебéга в $\mathbb{R}^n$ существуют такие n-мерные интервалы $B_i = (a_i, b_i), C_i = (c_i, d_i) \subset \mathbb{R}^n$, что

$$E \subset B \doteqdot \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\,,\ \mu_n(B \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2};\ \ E' \subset C \doteqdot \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\,,\ \mu_n(C \setminus E') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для того, чтобы получить последнее неравенство, можно считать, что множество E содержится в достаточно большом кубе $[-m,m]^n$ в силу конечности меры $\mu_n(E)$. Тогда множество $A \doteqdot C' \subset E$ будет компактным в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Так как $B \setminus A \subset (B \setminus E) \cup (C \setminus E')$, то $\mu_n(B \setminus A) \leqslant \mu_n(B \setminus E) + \mu(C \setminus E') < \varepsilon$. Таким образом, множества A компактно, B открыто, $A \subset E \subset B$ и $\mu_n(B \setminus A) < \varepsilon$. □

Пример 2. Докажем, что в каждом измеримом множестве $E \in \Sigma_n$ положительной меры $\mu_n(E) > 0$ существует неизмеримое подмножество.

Если множество имеет положительную меру Лебéга в $\mathbb{R}^n$, то его часть, лежащая в некотором единичном кубе, имеет положительную меру. Поскольку мера Лебега инвариантна относительно сдвига, то мы можем считать, что $E \subset [0,1]^n$.

Введем отношение эквивалентности точек $x, y \in E$, полагая, что $x \sim y$, если точка $x - y \in \mathbb{Q}^n$ имеет рациональные координаты. Тогда множество $E = \bigsqcup K_i$ распадается на непересекающиеся классы K_i эквивалентных точек. В каждом таком классе K_i мы выберем по одной точке $x_i \in K_i$. В результате получится некоторое множество $M \doteqdot \{x_i\}$, состоящее из неэквивалентных точек.

Пусть $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \doteqdot [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ обозначают все рациональные точки куба $[-1,1]^n$. Заметим, что множества $M_k \doteqdot M + r_k$ не пересекаются, т.к. если $x \in M_k \cap M_l$, то имеем $x = x_i + r_k = x_j + r_l$, где $x_i, x_j \in M$, и, следовательно, точки $x_i \sim x_j$ являются эквивалентными, что невозможно по построению множества M.

Заметим еще, что каждая точка $x \in E$ принадлежит дизъюнктному объединению $x \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Действительно, по построению любая точка множества E принадлежит некоторому классу эквивалентности $x \in K_i$ и, следовательно, эквивалентна $x \sim x_i$ точке $x_i \in M$. Так как $x - x_i \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$, то $x \in M_k$ при некотором k.

Если множество $M \in \Sigma_n$ измеримо, то все множества $M_k \in \Sigma_n$ также измеримы и их меры будут совпадать $\mu_n(M_k) = \mu_n(M)$ в силу инвариантности меры Лебéга относительно сдвига. Так как имеют место включения $E \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} M_k \subset [-1,2]^n$, то

$0 < \mu_n(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(M_k) \leqslant 3^n$, что невозможно, поскольку все множества M_k имеют одну и ту же меру. Таким образом, множество $M \notin \Sigma_n$ неизмеримо.

6 ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть (X, Σ, μ) измеримое пространство с σ-конечной мерой μ, определенной на σ-алгебре Σ измеримых множеств в X. Далее всюду предполагается, что мера является *полной*, т.е. каждое подмножество $A \subset B$ измеримого множества $B \in \Sigma$ меры нуль $\mu(B) = 0$ является измеримым $A \in \Sigma$ и имеет меру нуль $\mu(A) = 0$.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *измеримой* на множестве $E \in \Sigma$, если прообразы $f^{-1}(-\infty, c) = \{x \in E \mid f(x) < c\} \doteqdot E(f < c)$ являются измеримыми множествами при всех $c \in \mathbb{R}$, т.е. $E(f < c) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$.

Две функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ называются *эквивалентными* $f \sim g$, если существует множество $N \in \Sigma$ меры нуль $\mu(N) = 0$, т.ч. $f(x) = g(x)$ при всех $x \in E \setminus N$.

Поскольку совокупность всех измеримых множеств Σ образует σ-алгебру, то из определения измеримости функции f вытекает измеримость следующих множеств:

$E(f \geqslant c) = E \setminus E(f < c) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$;

$E(f \leqslant c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < c + \frac{1}{n}) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$;

$E(f > c) = E \setminus E(f \leqslant c) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$;

$E(a \leqslant f < b) = E(f < b) \setminus E(f < a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leqslant a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

$E(a < f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f \leqslant a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

$E(a \leqslant f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f < a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$.

Следовательно, функция является измеримой в том и только в том случае, когда прообразы любых промежутков (отрезков $[a, b]$, интервалов (a, b), полуинтервалов $[a, b)$ и $(a, b]$) являются измеримыми множествами.

Теорема. *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(A)$ любого борелевского множества $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ является измеримым.*

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна, т.к. каждый интервал является борелевским множеством. Докажем необходимость. Обозначим через $\mathscr{A}$ систему множеств $A \subset \mathbb{R}$, т.ч. $f^{-1}(A) \in \Sigma$. Тогда $(a, b) \in \mathscr{A}$. Поскольку открытое множество $A \subset \mathbb{R}$ является объединением $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ не более, чем счетного числа интервалов, то $f^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(a_n, b_n) \in \Sigma$. Значит открытые множества $A \in \mathscr{A}$. Так как операция прообраза сохраняет операции с множествами, т.е.

$$f^{-1}(A * B) = f^{-1}(A) * f^{-1}(B), \text{ где } * = \cup, \cap, \setminus, \quad f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n),$$

то система $\mathscr{A}$ является σ-алгеброй, содержащей все открытые множества. Поэтому в силу минимальности борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ получим $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$. Таким образом, прообраз любого борелевского множества является измеримым. $\square$

Лемма. *Пусть функции $f_1,\ldots,f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримы, а функция n-переменных $g(y)$ непрерывна на открытом множестве $Y \subset \mathbb{R}^n$ и $f(x) = \{f_1(x),\ldots,f_n(x)\} \in Y$ при всех $x \in E$. Тогда функция $F(x) \doteqdot g(f(x))$ измерима на множестве E.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $g(y)$ множество $Y(g<c) \subset \mathbb{R}^n$ является открытым. Поскольку любое открытое множество является объединением $Y(g<c) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ не более, чем счетного числа n-мерных интервалов (a_n,b_n) с рациональными концами $a_n = \{a_{ni}\}_{i=1}^{n}, b_n = \{b_{ni}\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{Q}^n$, то множество

$$E(F<c) = E(f \in Y(g<c)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\big(f \in (a_n,b_n)\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{n} E(a_{ni} < f_i < b_{ni})$$

будет измеримым, т.к. система измеримых множеств Σ является σ-алгеброй. □

В качестве следствия получается следующие свойства измеримых функций.

1. *Пусть $f,g : E \to \mathbb{R}$ измеримые функции. Тогда сумма $f+g$ и произведение fg также измеримы. Если $g(x) \neq 0$ при всех $x \in E$, то частное f/g измеримо. Если $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) > 0$ при всех $x \in E$, то степень f^g измерима.*

2. *Если $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримые функции и $\inf f_n(x)$, $\sup f_n(x)$, $\overline{\lim} f_n(x)$, $\underline{\lim} f_n(x)$ принимают конечные значения на E, то они будут измеримыми функциями.*

3. *Если $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримые функции и предел $f(x) = \lim f_n(x)$ существует на множестве E, то f является измеримой функцией.*

4. *Если функции $f,g : E \to \mathbb{R}$ эквивалентны $f \sim g$ и одна из них является измеримой, то другая также будет измеримой.*

Измеримость нижней $\inf f_n(x)$ и верхней $\sup f_n(x)$ граней для последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций доказывается при помощи следующих соотношений:

$$E(\inf f_n < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < c) \in \Sigma\,, \quad E(\sup f_n > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c) \in \Sigma\,.$$

Поскольку при всех $x \in E$ справедливы равенства

$$\overline{\lim}\, f_n(x) = \inf_{m \geqslant 1} \{\sup_{n \geqslant m} f_n(x)\}, \quad \underline{\lim}\, f_n(x) = \sup_{m \geqslant 1} \{\inf_{n \geqslant m} f_n(x)\},$$

то верхний и нижний пределы будут измеримыми. Отсюда предел $f(x) = \lim f_n(x)$ будет измеримым, т.к. имеет место равенство $f(x) = \overline{\lim}\, f_n(x) = \underline{\lim}\, f_n(x)$. Последнее свойство вытекает из того факта, что если добавить или вычесть из измеримого множества множество меры нуль, то оно останется измеримым.

Рассмотрим измеримое пространство Лебе́га $(\mathbb{R}^n, \Sigma_n, \mu_n)$, где μ_n мера Лебе́га в $\mathbb{R}^n$, определенная на σ-алгебре Σ_n измеримых множеств. Как нам известно, все борелевские множества $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ (в том числе открытые и замкнутые множества) измеримы и мера Лебега μ_n является регулярной.

Определение. Функция $f: E \to \mathbb{R}$, заданная на измеримом множестве $E \in \Sigma_n$, обладает *обладает C-свойством*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset E$, т.ч. $\mu_n(E \setminus K) < \varepsilon$ и сужение $g = f|_K \in \boldsymbol{C}(K)$ является непрерывной функцией.

Теорема (критерий измеримости Лу́зина)**.** *Функция $f: E \to \mathbb{R}$, определенная на измеримом множестве $E \in \Sigma_n$ конечной меры $\mu_n(E) < \infty$, тогда и только тогда является измеримой, когда она обладает C-свойством.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $I_i \doteqdot (a_i, b_i)$ система всех интервалов в $\mathbb{R}$ с рациональными концами $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ и $I_0 = \mathbb{R}$. В силу регулярности меры μ_n для любого $\varepsilon > 0$ найдутся компактные $A_i \subset \mathbb{R}^n$ и открытые $B_i \subset \mathbb{R}^n$ множества, т.ч. $A_i \subset f^{-1}(I_i) \subset B_i$ и $\mu_n(B_i \setminus A_i) < \varepsilon/2^{i+1}$. Поэтому множество $B \doteqdot \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i \setminus A_i$ является открытым. Отсюда множество $K \doteqdot E \setminus B = A_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A_i$, как разность компактного и открытого, будет компактным и мера дополнения $\mu_n(E \setminus K) = \mu_n(B) < \varepsilon$. Так как

$$B_i \cap K = B_i \setminus B = \bigcap_{j=0}^{\infty} B_i \setminus (B_j \setminus A_j) = A_i \cap \bigcap_{j=0}^{\infty} B_i \setminus (B_j \setminus A_j) = A_i \setminus B = A_i \cap K,$$

то $A_i \cap K = g^{-1}(I_i) \doteqdot f^{-1}(I_i) \cap K = B_i \cap K$, где функция $g \doteqdot f|_K$ является сужением f на K. Отсюда прообраз $g^{-1}(I_i)$ является открытым множеством в K. Поскольку открытые множества $\mathbb{R}$ является объединением некоторой подсистемы интервалов I_i, то прообраз $g^{-1}(A)$ каждого открытого множества $A \subset \mathbb{R}$ является открытым.

Достаточность. По условию C-свойства для любого $i \in \mathbb{N}$ найдется компактное множество $K_i \subset E$, т.ч. $\mu_n(E \setminus K_i) < 1/i$ и сужение $g_i \doteqdot f|_{K_i}$ непрерывно. Так как прообраз $g_i^{-1}(I)$ интервала открыт в K_i, то существуют открытые множества B_i, т.ч. $g_i^{-1}(I) = f^{-1}(I) \cap K_i = B_i \cap K_i$. Пусть $N \doteqdot \bigcap_{i=1}^{\infty} E \setminus K_i$, тогда множество

$$f^{-1}(I) \setminus N = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(I) \setminus (E \setminus K_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(I) \cap K_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \cap K_i \in \Sigma_n$$

является измеримым. Поскольку мера $\mu_n(N) = 0$ равна нулю, то множество $N \in \Sigma_n$ будет измеримым. Поэтому прообраз $f^{-1}(I)$ является измеримым множеством для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ и, следовательно, функция f будет измеримой. □

Обозначения. Обозначим $f \leqslant g$ на E, если $f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in E$; $f_n \to f$ на E, если $f(x) = \lim f_n(x)$ при $x \in E$; $f_n \nearrow f$ на E, если $f_n \to f$ и $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ на E; $f_n \searrow f$ на E, если $f_n \to f$ и $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$ на E; $f_n \rightrightarrows f$ на E, если $f_n \to f$ равномерно на E.

Функция $h: E \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она принимает конечное число значений, т.е. является линейной комбинацией характеристических функций

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \chi_{H_i}(x) \text{ при всех } x \in E = \bigsqcup_{i=1}^{n} H_i,$$

где $h(x) = h_i$, если $x \in H_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Характеристическая функция определяется по формуле $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$. Простая функция $h_n(x)$ измерима тогда и только тогда, когда множества $H_i \in \Sigma$ измеримы при $i = 1, \ldots, n$.

Теорема. *Для всякой измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}$ существуют простые измеримые функции $h_n : E \to \mathbb{R}$, т.ч. $|h_n| \leqslant |f|$ на E и $h_n \to f$ на E. При этом, если функция неотрицательна, то сходимость монотонная $h_n \nearrow f$ на E, а если функция ограничена, то сходимость равномерная $h_n \rightrightarrows f$ на E.*

Доказательство. Пусть функция $f(x) \geqslant 0$ неотрицательна при всех $x \in E$. Тогда определим последовательность простых функций по формуле

$$h_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{H_{nk}}(x) + 2^n \chi_{H_n}(x), \quad x \in E = H_n \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{2^{2n}} H_{nk},$$

где $H_{nk} \doteqdot E(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n})$ и $H_n \doteqdot E(f \geqslant 2^n)$. Тогда имеем $H_{nk} = H_{n+1,2k-1} \sqcup H_{n+1,2k}$. Поскольку выполняются неравенства $h_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant h_{n+1}(x)$ при $x \in H_{nk}$ и $f(x) - h_n(x) < 1/2^n$ при всех $x \in E(f < 2^n)$, то $h_n \nearrow f$ сходится на E. Кроме того, для каждого $c > 0$ на множестве $E(f < c)$ предел будет равномерным.

Так как функция $f : E \to \mathbb{R}$, принимающая действительные значения, является разностью $f = f_+ - f_-$ неотрицательных функций $f_\pm \doteqdot \max\{\pm f, 0\}$, то по доказанному она будет пределом простых функций $h_n \doteqdot h_{n+} - h_{n-}$. Поскольку множества $E(f_+ > 0)$ и $E(f_- > 0)$ дизъюнктны и $h_{n\pm} \nearrow f_\pm$ на E, то $|h_n| \leqslant |f|$ на E. □

Рассмотрим понятия сходимости для последовательности $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримых функций. Их пределы определяются с точностью до эквивалентности.

Определения. Последовательность *сходится почти всюду* $f_n \to f$ п.в. на E, если существует $N \in \Sigma$ меры нуль $\mu(N) = 0$, т.ч. $f_n \to f$ сходится на $E \setminus N$.

Последовательность *сходится почти равномерно* $f_n \to f$ п.р. на E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $A \in \Sigma$ с мерой $\mu(A) < \varepsilon$, т.ч. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus A$.

Теорема (Его́рова)**.** *Если $\mu(E) < \infty$ и последовательность сходится $f_n \to f$ п.в. на E, то она сходится $f_n \to f$ п.р. на E. Обратно, если последовательность сходится $f_n \to f$ п.р. на E, то она сходится $f_n \to f$ п.в. на E.*

Доказательство. По условию $f_n \to f$ всюду на множестве $E \setminus N$, где мера $\mu(N) = 0$. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующие множества:

$$B_n \doteqdot \bigcap_{i=n}^{\infty} E\left(|f_i - f| < \frac{1}{k}\right), \text{ тогда } B_1 \subset B_2 \subset \dots \text{ и } B_n \setminus N \nearrow E \setminus N.$$

В силу непрерывности меры снизу $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$. Полагая $A_n \doteqdot E \setminus B_n$, имеем $\lim \mu(A_n) = 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\mu(A_{n_k}) < \varepsilon/2^k$. Пусть $A \doteqdot \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$, тогда $A \in \Sigma$ и $\mu(A) < \varepsilon$. Если $x \in E \setminus A$, то $x \in B_{n_k}$ при всех n_k, и значит выполняется неравенство $|f_i(x) - f(x)| < 1/k$ при всех $x \in E \setminus A$ и $i \geqslant n_k$. Таким образом, последовательность $f_n \rightrightarrows f$ сходится равномерно на $E \setminus A$.

Обратно, в силу определения п.р. сходимости существуют такие $A_k \in \Sigma$ с мерой $\mu(A_k) < 1/k$, что $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus A_k$. Тогда, полагая $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, получаем $\mu(A) = 0$ и последовательность $f_n \to f$ сходится на $E \setminus A$. □

Определения. Последовательность *сходится по мере* $f_n \to f\,(\mu)$ на E, если для любого $\varepsilon > 0$ предел $\lim_{n\to\infty} \mu\big(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)\big) = 0$ равен нулю.

Последовательность *фундаментальна по мере* $f_n \to *\,(\mu)$ на E, если для любого $\varepsilon > 0$ двойной предел $\lim_{n,m\to\infty} \mu\big(E(|f_n - f_m| \geqslant \varepsilon)\big) = 0$ равен нулю.

Теорема (Ри́сса). *Если $f_n \to *\,(\mu)$ фундаментальна по мере на E, то найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, т.ч. $f_{n_k} \to f$ п.в. на E. Обратно, если $\mu(E) < \infty$ и последовательность $f_n \to f$ п.в. на E, то $f_n \to f\,(\mu)$ сходится по мере на E.*

Доказательство. По условию существует подпоследовательность индексов $n_k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\mu\big(E(|f_n - f_m| \geqslant 1/2^{k+1})\big) < 1/2^{k+1}$ при всех $n, m \geqslant n_k$. Рассмотрим множества

$$A_k \doteqdot \bigcup_{i=k}^{\infty} E\Big(|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \geqslant \frac{1}{2^{i+1}}\Big), \quad \mu(A_k) < \frac{1}{2^k}; \quad A \doteqdot \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \mu(A) = 0.$$

Пусть $x \in E \setminus A$, то $x \in E \setminus A_k$ при некотором k. Поэтому $|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| < 1/2^{i+1}$ при всех $i \geqslant k$. Отсюда $|f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x)| \leqslant \sum_{s=i}^{j-1} |f_{n_{s+1}}(x) - f_{n_s}(x)| < 1/2^i \leqslant 1/2^k$ при $j > i \geqslant k$, т.е. $\{f_{n_k}(x)\}$ является последовательностью Коши при всех $x \in E \setminus A$. Поэтому она сходится к измеримой функции $f(x)$ на множестве $E \setminus A$.

Обратно, если $f_n \to f$ п.в. на E и мера $\mu(E) < \infty$, то по теореме Его́рова для любого $\varepsilon > 0$ существует m, т.ч. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in E \setminus A$ и $n \geqslant m$, где $A \in \Sigma$ и $\mu(A) < \varepsilon$. Таким образом, получаем, что $\mu\big(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)\big) \leqslant \mu(A) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant m$, т.е. последовательность $f_n \to f\,(\mu)$ сходится по мере на E. $\square$

Пример (Ри́сса). Построим пример последовательности функций $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, которая сходится по мере, однако не сходится ни в одной точке отрезка $[0,1]$.

Определим функции $f_n(x) \doteqdot \chi_{A_n}(x)$, где $A_n \doteqdot [m/2^k, (m+1)/2^k]$ при $n = 2^k + m$ и $m = 0, \ldots, 2^k - 1$. Тогда имеем $\mu_1(E(f_n \geqslant \varepsilon)) \leqslant 1/2^k$ при $\varepsilon > 0$. Поэтому $f_n \to 0\,(\mu)$ сходится по мере на $[0,1]$. Однако $\overline{\lim} f_n(x) = 1$ и $\underline{\lim} f_n(x) = 0$ при всех $x \in [0,1]$, т.е. последовательность $\{f_n\}$ не сходится ни в одной точке отрезка $[0,1]$.

Рассмотрим в измеримом пространстве (X, Σ, μ) множество $E \in \Sigma$ конечной меры $\mu(E) < \infty$. Обозначим через $\boldsymbol{L}_0(E,\mu)$ пространство всех классов эквивалентности измеримых функций $f : E \to \mathbb{R}$, в котором метрика определена по формуле

$$\rho(f,g) \doteqdot \inf\{\varepsilon > 0 \mid \mu\big(E(|f-g| \geqslant \varepsilon)\big) < \varepsilon\}.$$

Докажем неравенство треугольника. Пусть $\rho(f,h) < \alpha$ и $\rho(h,g) < \beta$ и $\varepsilon = \alpha + \beta$. Так как имеет место включение $E(|f-g| \geqslant \varepsilon) \subset E(|f-h| \geqslant \alpha) \cup E(|h-g| \geqslant \beta)$, то

$$\mu\big(E(|f-g| \geqslant \varepsilon)\big) \leqslant \mu\big(E(|f-h| \geqslant \alpha)\big) + \mu\big(E(|h-g| \geqslant \beta)\big) < \alpha + \beta = \varepsilon.$$

Следовательно, по определению метрики $\rho(f,g) \leqslant \inf\alpha + \inf\beta = \rho(f,h) + \rho(h,g)$. Ясно, что $\rho(f,g) = \rho(g,f)$. Если $\rho(f,g) = 0$, то $\mu\big(E(|f-g| \geqslant 1/n)\big) < 1/n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $E(|f-g| \geqslant 1/n) \nearrow E(|f-g| > 0)$, то по свойству непрерывности меры снизу $\mu\big(E(|f-g| > 0)\big) = 0$, т.е $f \sim g$. Итак, $\boldsymbol{L}_0(E,\mu)$ метрическое пространство.

Заметим, что сходимость в пространстве $\boldsymbol{L}_0(E,\mu)$ совпадает со сходимостью по мере. В силу теоремы Ри́сса пространство $\boldsymbol{L}_0(E,\mu)$ полно относительно сходимости по мере и значит оно будет полным как метрическое пространство. Кроме того, из теоремы Ри́сса вытекает, что операции сложения и умножения измеримых функций являются непрерывными. Таким образом, $\boldsymbol{L}_0(E,\mu)$ является полным метрическим линейным пространством, т.е. образует пространство Фреше́.

Докажем, например, что операция произведения функций непрерывна. Для этого рассмотрим замкнутое множество $A\subset \boldsymbol{L}_0(E,\mu)$ и покажем, что его прообраз $F^{-1}(A)$ при отображении $F(f,g)=fg$ является замкнутым в $\boldsymbol{L}_0(E,\mu)\times \boldsymbol{L}_0(E,\mu)$.

Пусть $f_n\to f\,(\mu)$ и $g_n\to g\,(\mu)$ сходятся по мере и $f_ng_n\in A$. По теореме Ри́сса существуют подпоследовательности, т.ч. $f_{n_k}\to f$ п.в. на E и $g_{n_k}\to g$ п.в. на E. Тогда $f_{n_k}g_{n_k}\to fg$ п.в. на E и, следовательно, $f_{n_k}g_{n_k}\to fg\,(\mu)$ сходится по мере, т.к. мера $\mu(E)<\infty$ конечна. Отсюда в силу замкнутости множества A получим $fg\in A$, а значит $(f,g)\in F^{-1}(A)$. Таким образом, множество $F^{-1}(A)$ замкнуто.

7 ИНТЕГРАЛ ЛЕБÉГА

Пусть (X,Σ,μ) измеримое пространство с полной и σ-конечной мерой μ, заданной на σ-алгебре Σ измеримых множеств пространства X. Рассмотрим измеримое разбиение $\tau=\{e_i\}_{i=1}^n$ измеримого множества $E\in\Sigma$, т.е. $E=\bigsqcup_{i=1}^n e_i$ и $e_i\in\Sigma$. Для неотрицательной функции $f:E\to\mathbb{R}_+$ введем *нижние суммы* Дарбý–Лебéга

$$\underline{D}_\tau(f)\doteqdot\sum_{i=1}^n \underline{d}_i(f)\mu(e_i)\,,\ \text{ где }\ \underline{d}_i(f)\doteqdot\inf_{x\in e_i}f(x)\,.$$

Определение. *Интегралом Лебéга от неотрицательной измеримой функции* называется верхняя грань нижних сумм по всем измеримым разбиениям

$$\int_E f\,d\mu\doteqdot\sup_\tau \underline{D}_\tau(f)=\sup_\tau\sum_{i=1}^n \underline{d}_i(f)\mu(e_i).$$

Интегралом Лебéга от измеримой функции $f:E\to\mathbb{R}$ называется разность интегралов от соответствующих неотрицательных измеримых функций

$$\int_E f\,d\mu\doteqdot\int_E f_+\,d\mu-\int_E f_-\,d\mu,\ \text{ где }\ f_\pm(x)\doteqdot\max\{\pm f(x),0\}.$$

Предполагается, что один из интегралов от $f_\pm$ является конечным, иначе интеграл не имеет смысла. Измеримая функция называется *интегрируемой*, т.е. $f\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, если интегралы от неотрицательных функций $f_\pm$ являются конечными.

Замечание. Определение интеграла Лебéга можно распространить на функции $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$, принимающие бесконечные значения $\pm\infty$. Так как для интегрируемой функции мера множеств $E(f_\pm=\infty)$ равна нулю, то она эквивалентна функции, принимающей только конечные значения. Кроме того, из определения следует, что эквивалентные функции имеют равные интегралы Лебéга.

1. *Интеграл неотрицательной функции $f\geqslant 0$ равен нулю $\int_E f\,d\mu=0$ тогда и только тогда, когда функция $f\sim 0$ эквивалентна нулю на E.*

Если $\int_E f\,d\mu=0$, то по определению нижние суммы Дарбý–Лебéга $\underline{D}_\tau(f)=0$. Поскольку $E_n\doteqdot E(f\geqslant 1/n)\nearrow E(f>0)$ и $\mu(E_n)=0$ при всех $n\in\mathbb{N}$, то по свойству непрерывности меры снизу $\mu(E(f>0))=\lim\mu(E_n)=0$. Обратно, из $\mu(E(f>0))=0$ следует, что $\underline{D}_\tau(f)=0$ для любого разбиения τ. Поэтому интеграл $\int_E f\,d\mu=0$.

2. *Если для измеримых функций выполняется $f\leqslant g$ п.в. на E, то их интегралы (если они имеют смысл) удовлетворяют неравенству $\int_E f\,d\mu\leqslant\int_E g\,d\mu$.*

Если для двух неотрицательных измеримых функций выполняется неравенство $0\leqslant f\leqslant g$ п.в. на E, то $\underline{D}_\tau(f)\leqslant\underline{D}_\tau(g)$. Следовательно, $\int_E f\,d\mu\leqslant\int_E g\,d\mu$, при этом интегрируемость функций здесь не предполагается, т.е. интегралы могут иметь бесконечные значения. В общем случае, т.к. $f_+\leqslant g_+$ и $f_-\geqslant g_-$ п.в. на E, то

$$\int_E f_+\,d\mu\leqslant\int_E g_+\,d\mu\ \text{ и }\ \int_E f_-\,d\mu\geqslant\int_E g_-\,d\mu\,,\ \text{ а значит }\ \int_E f\,d\mu\leqslant\int_E g\,d\mu\,.$$

3. *Если измеримая функция $f : E \to \mathbb{R}$ ограничена $|f(x)| \leqslant c$ на множестве конечной меры $\mu(E) < \infty$, то она интегрируема $f \in \boldsymbol{L}(E, \mu)$.*

В самом деле, из ограниченности функции вытекает, что $f_{\pm} \leqslant c$ на E. Поэтому коэффициенты $\underline{d}_i(f_{\pm}) \leqslant c$ ограничены и значит $\underline{D}_\tau(f_{\pm}) = \sum_{i=1}^n \underline{d}_i(f_{\pm})\mu(e_i) \leqslant c\mu(E)$.

Лемма. *Интеграл простой измеримой функции h (если он имеет смысл) равен*

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{j=1}^m h_j\,\mu(H_j)\,, \text{ где } h(x) = \sum_{j=1}^m h_j \chi_{H_j}(x) \text{ и } E = \bigsqcup_{j=1}^m H_j\,.$$

Интеграл неотрицательной измеримой функции равен $\int_E f\,d\mu = \sup_{0 \leqslant h \leqslant f} \int_E h\,d\mu$ верхней грани интегралов от простых измеримых функций, т.ч. $0 \leqslant h \leqslant f$.

Доказательство. Первое утверждение достаточно доказать для неотрицательных простых функций. Пусть $\tau = \{e_i\}_{i=1}^n$ разбиение множества E и $H_{ij} \doteqdot e_i \cap H_j$. Тогда имеем $e_i = \bigsqcup_{j=1}^m H_{ij}$ и $H_j = \bigsqcup_{i=1}^n H_{ij}$. Поскольку $\underline{d}_i(h) \leqslant h_j$, если $H_{ij} \neq \emptyset$, то

$$\underline{D}_\tau(h) = \sum_{i=1}^n \underline{d}_i(h)\mu(e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underline{d}_i(h)\mu(H_{ij}) \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_j\mu(H_{ij}) = \sum_{j=1}^m h_j\mu(H_j)\,.$$

В частном случае, когда разбиение $\tau = \{H_j\}_{j=1}^m$, это неравенство будет равенством. Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что выполняется неравенство $\int_E h\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu$ для всех $0 \leqslant h \leqslant f$ и всякая нижняя сумма $\underline{D}_\tau(f)$ является интегралом от простой измеримой функции h, т.ч. $0 \leqslant h \leqslant f$. □

Теорема (о счетной аддитивности). *Интеграл неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ является σ-аддитивным, т.е. имеет место равенство*

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f\,d\mu\,, \quad \text{где } E = \bigsqcup_{n=1}^\infty E_n \text{ и } E_n \in \Sigma\,.$$

Доказательство. Для простой неотрицательной измеримой функции утверждение следует из формулы ее интеграла и σ-аддитивности меры. В общем случае, так как для всякой простой измеримой функции h, т.ч. $0 \leqslant h \leqslant f$, имеем

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} h\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f\,d\mu\,, \text{ то по лемме } I \doteqdot \int_E f\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f\,d\mu\,.$$

Поэтому, если $I = \infty$, то утверждение верно. Докажем обратное неравенство для I в случае $I < \infty$. В силу леммы для каждого $\varepsilon > 0$ существуют простые измеримые функции h_n, равные нулю вне E_n, т.ч. $0 \leqslant h_n \leqslant f$ и выполняются неравенства

$$\int_{E_n} h_n\,d\mu > \int_{E_n} f\,d\mu - \frac{\varepsilon}{2^n}\,, \quad \text{где } n = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Тогда, полагая $F_m \doteqdot \bigsqcup_{n=1}^m E_n$ и $h(x) \doteqdot \sum_{n=1}^m h_n(x)$ на множестве F_m, получим

$$I = \int_E f\,d\mu \geqslant \int_{F_m} f\,d\mu \geqslant \int_{F_m} h\,d\mu = \sum_{n=1}^m \int_{E_n} h_n\,d\mu > \sum_{n=1}^m \int_{E_n} f\,d\mu - \varepsilon\,.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ и $m \to \infty$, получаем обратное неравенство. □

Следствие. *Если функция $f \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ интегрируема на X, то неопределенный интеграл $\varphi(E) \doteqdot \int_E f\,d\mu$ является конечной σ-аддитивной функцией, заданной на σ-алгебре измеримых множеств $E \in \Sigma$.*

Теорема (Лебéга о монотонной сходимости)**.** *Если последовательность неотрицательных измеримых функций $f_n : E \to \mathbb{R}_+$ монотонно сходится $f_n \nearrow f$ п.в. на E, то предел интегралов (конечный или бесконечный) $\lim \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$.*

Доказательство. По свойству 2 существует конечный или бесконечный предел $I \doteqdot \lim \int_E f_n\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu$. Если $I = \infty$, то утверждение верно. Докажем обратное неравенство $\int_E f\,d\mu \leqslant I$ в случае $I < \infty$. Пусть h простая измеримая функция, т.ч. $0 \leqslant h \leqslant f$, и $0 < \varepsilon < 1$. Определим множества $E_n \doteqdot E(\varepsilon h \leqslant f_n)$, тогда

$$\varepsilon \int_{E_n} h\,d\mu = \int_{E_n} \varepsilon h\,d\mu \leqslant \int_{E_n} f_n\,d\mu \leqslant \int_E f_n\,d\mu \leqslant I.$$

Так как $f_n \nearrow f$ п.в. на E, то $E_n \setminus N \nearrow E \setminus N$, где $\mu(N) = 0$. В силу свойства непрерывности снизу неопределенного интеграла $\int_{E_n} h\,d\mu \nearrow \int_E h\,d\mu$. Поэтому $\varepsilon \int_E h\,d\mu \leqslant I$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 1$, имеем $\int_E h\,d\mu \leqslant I$ и значит по лемме 7 $\int_E f\,d\mu \leqslant I$. □

Следствие. *Если в теореме интегралы ограничены $\int_E f_n\,d\mu \leqslant c$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то предельная функция принимает конечные значения $f(x) < \infty$ п.в. на E.*

Так как $\int_E f\,d\mu \leqslant \sup_n \int_E f_n\,d\mu \leqslant c$, то по определению интеграла функция f не может принимать бесконечное значение ∞ на множестве положительной меры.

4. Линейность интеграла. *Если $f, g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda f, f+g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и*

$$\int_E \lambda f\,d\mu = \lambda \int_E f\,d\mu\,, \quad \int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu\,.$$

Первое равенство выводится из определений. Докажем второе. Для простых функций это следует из формулы интеграла от простой функции. Пусть f и g неотрицательные измеримые функции. Тогда найдутся монотонные последовательности простых неотрицательных измеримых функций, т.ч. $f_n \nearrow f$ и $g_n \nearrow g$. Так как $f_n + g_n \nearrow f + g$, то по теореме о монотонной сходимости

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E (f_n+g_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

В общем случае, из равенства $(f+g)_+ - (f+g)_- = f + g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-)$ следует, что $(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$. Почленно интегрируя последнее равенство, а затем группируя его слагаемые, получим требуемый результат

$$\int_E (f+g)_+ d\mu - \int_E (f+g)_- d\mu = \int f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu + \int_E g_+ d\mu - \int g_- d\mu\,.$$

5. Модуль интеграла. *Если $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, то $|f| \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $|\int_E f\,d\mu| \leqslant \int_E |f|\,d\mu$.*

Интегрируемость модуля $|f| = f_+ + f_-$ получается из определения интеграла и свойства 4, а неравенство следует из свойства 2, поскольку $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$.

Лемма (Фату́). *Если $f_n : E \to \mathbb{R}_+$ неотрицательные измеримые функции на E и $f = \underline{\lim} f_n$ п.в. на E их нижний предел, то $\int_E f\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E f_n\,d\mu$.*

Доказательство. Исключая множество меры нуль, можно считать, что $f = \underline{\lim} f_n$ всюду на E. Пусть $g_m \doteqdot \inf_{n \geqslant m} f_n$, тогда $g_m \nearrow f$ и $\int_E g_m\,d\mu \leqslant \int_E f_n\,d\mu$ при всех $n \geqslant m$. Отсюда $\int_E g_m\,d\mu \leqslant \inf_{n \geqslant m} \int_E f_n\,d\mu$ и по теореме о монотонной сходимости имеем

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_E g_m\,d\mu \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf_{n\geqslant m} \int_E f_n\,d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Таким образом, неравенство доказано. □

Теорема (Лебéга о мажорируемой сходимости). *Если $f = \lim f_n$ п.в. является пределом измеримых функций $f_n : E \to \mathbb{R}$ и существует мажоранта $g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, т.ч. $|f_n| \leqslant g$ п.в. на E, то $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\int_E f\,d\mu = \lim \int_E f_n\,d\mu$.*

Доказательство. Поскольку $f_{n\pm}, f_\pm \leqslant g$ п.в. на E, то по свойству 2 $f_n, f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$. Так как $g \pm f_n \geqslant 0$ п.в. на E и $g \pm f_n \to g \pm f$ п.в. на E, то по лемме Фату́

$$\int_E (g+f)\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g+f_n)\,d\mu, \quad \int_E (g-f)\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g-f_n)\,d\mu.$$

По свойству 4, сокращая интеграл $\int_E g\,d\mu$ в этих неравенствах, мы получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Так как нижний предел не превосходит верхний, то эти неравенства являются равенствами, т.е. предел $\lim \int_E f_n\,d\mu$ существует и равен интегралу $\int_E f\,d\mu$. □

Замечание. Теоремы Лебéга о монотонной и мажорируемой сходимости остаются справедливыми, если вместо сходимости п.в. потребовать сходимость по мере.

В самом деле, в обоих теоремах мы можем сразу предполагать, что функции f_n и f интегрируемы. Если последовательность интегралов не сходится к $\int_E f\,d\mu$, то существует $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность f_{n_k}, т.ч. $|\int_E f\,d\mu - \int_E f_{n_k} d\mu| > \varepsilon$. Однако она сходится по мере $f_{n_k} \to f(\mu)$ и, следовательно, по теореме Ри́сса содержит подпоследовательность $f_{n_{k_i}}$, сходящуюся $f_{n_{k_i}} \to f$ п.в. на E. Тогда по доказанным теоремам сходятся интегралы $\int_E f_{n_{k_i}} d\mu \to \int_E f\,d\mu$, что невозможно.

На множестве конечной меры простым достаточным условием для предельного перехода под знаком интеграла является равномерная сходимость последовательности функций. На множестве бесконечной меры дело обстоит иначе.

Пример 1. Рассмотрим измеримое пространство $(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$, где $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел, Σ σ-алгебра всех его подмножеств и мера $\mu(E)$ равна числу элементов множества E. Последовательность функций $f_n(k) = 1/n$ при $1 \leqslant k \leqslant n$ и

$f_n(k)=0$ при $k>n$, показывает, что $f_n \rightrightarrows 0$ равномерно сходится к нулю, однако интегралы $\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = 1$ не стремятся к нулю. Другая последовательность функций $f_n(k)=1/k$ при $1\leqslant k\leqslant n$ и $f_n(k)=0$ при $k>n$, показывает, что интегрируемые функции равномерно сходятся к неинтегрируемой функции.

Неравенство Чебышёва: если функция $f:E\to\mathbb{R}_+$ неотрицательна и измерима, то при всех $\varepsilon>0$ выполняется неравенство

$$\mu\big(E(f\geqslant\varepsilon)\big)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_E f\,d\mu\,.$$

В самом деле, $\int_E f\,d\mu \geqslant \int_{E(f\geqslant\varepsilon)} f\,d\mu \geqslant \varepsilon\mu(E(f\geqslant\varepsilon))$ и неравенство доказано.

В частности, из этого неравенства имеем достаточное условие сходимости по мере $f_n\to f\,(\mu)$, если $\int_E |f_n-f|\,d\mu\to 0$, т.к. $\mu(E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon))\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_E|f_n-f|\,d\mu\to 0$.

Определение. *Функцией распределения* неотрицательной измеримой функции $f:E\to\mathbb{R}_+$ называется функция $F(t)\doteqdot\mu(E_t)$, где множество $E_t\doteqdot E(f\geqslant t)$.

Функция распределения $F(t)$ может принимать бесконечные значения $F(t)=\infty$ на некотором отрезке $[0,t_0]$ и обладает следующими свойствами при всех $t>t_0$: 1) $F(t)\geqslant 0$ неотрицательна; 2) $F(t)\downarrow$ не возрастает; 3) $F(t-0)=F(t)$ непрерывна слева; 4) если мера $\mu(E(f=t))>0$, то t является точкой разрыва функции $F(t)$.

Если $f\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, то из неравенства Чебышёва получим $F(t)<\infty$ при всех $t>0$. Так как $E_t\searrow\emptyset$ при $t\to\infty$, то по свойству непрерывности сверху неопределенного интеграла $t\mu(E_t)\leqslant\int_{E_t} f\,d\mu\to 0$, т.е. выполняется 5) $F(t)=o(1/t)$ при $t\to\infty$.

Неотрицательные измеримые функции называются *равноизмеримыми*, если их функции распределения совпадают. Заметим, что интеграл Лебéга неотрицательной измеримой функции равен мере подграфика $\Gamma_f\doteqdot\{(x,t)\mid x\in E,\,0\leqslant t\leqslant f(x)\}$ относительно произведения мер $d\nu\doteqdot d\mu\otimes dt$ меры $d\mu$ и меры Лебéга dt, которое будет определено в следующей лекции. Поэтому, меняя порядок интегрирования по теореме Фуби́ни о повторных интегралах, получим

$$\int_E f\,d\mu=\int_E\Big(\int_0^{f(x)}dt\Big)\,d\mu=\int_0^\infty\Big(\int_{E_t}d\mu\Big)\,dt=\int_0^\infty\mu(E_t)\,dt=\int_0^\infty F(t)\,dt\,.$$

Следовательно, равноизмеримые функции имеют равные интегралы Лебéга.

Пример 2. Рассмотрим измеримое пространство Лебéга $(\mathbb{R}^n,\Sigma,\mu_n)$. Докажем, что функция $f_\alpha(x)\doteqdot\frac{1}{\|x\|^\alpha}$, где $\|x\|=\big(\sum_{i=1}^n x_i^2\big)^{1/2}$ евклидова норма $x\in\mathbb{R}^n$, является интегрируемой $f_\alpha\in\boldsymbol{L}(K)$ на кубе $K=[-1,1]^n$ тогда и только тогда, когда $\alpha<n$.

В случае $\alpha\leqslant 0$ функция непрерывна и ограничена, а значит интегрируема на K. В случае $\alpha>0$ положим $\Delta_k\doteqdot\big[-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\big]^n$. Так как $\frac{1}{k+1}<\|x\|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{k}$ при $x\in\Delta_k\setminus\Delta_{k+1}$, то

$$2^n\Big(\frac{k}{\sqrt{n}}\Big)^\alpha\Big(\frac{1}{k^n}-\frac{1}{(k+1)^n}\Big)\leqslant\int_{\Delta_k\setminus\Delta_{k+1}}\frac{d\mu_n}{\|x\|^\alpha}<2^n(k+1)^\alpha\Big(\frac{1}{k^n}-\frac{1}{(k+1)^n}\Big)\,.$$

Поскольку $K \setminus 0 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \setminus \Delta_{k+1}$, то, суммируя эти неравенства, получим оценку интеграла функции f_α по кубу K, в которой слева и справа стоят ряды с общим членом порядка $\frac{1}{k^{n+1-\alpha}}$. Эти ряды сходятся, когда $\alpha < n$, и расходятся, когда $\alpha \geqslant n$. С помощью аналогичных выкладок нетрудно убедится в том, что $f_\alpha \in \boldsymbol{L}(\mathbb{R}^n \setminus K)$ интегрируема на внешности куба $\mathbb{R}^n \setminus K$ тогда и только тогда, когда $\alpha > n$.

8 ТЕОРЕМА ФУБИ́НИ

Пусть $(X,\mathfrak{M},\mu)$ и $(Y,\mathfrak{N},\nu)$ измеримые пространства с полными и σ-конечными мерами, заданными на σ-алгебрах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Обозначим через $\mathfrak{m}(A\times B)\doteqdot\mu(A)\nu(B)$ функцию $\mathfrak{m}:\mathfrak{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$, определенную на прямом произведении этих σ-алгебр

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\doteqdot\{A\times B\mid A\in\mathfrak{M},B\in\mathfrak{N}\}\,.$$

Она называется *прямым произведением мер* и обозначается через $\mathfrak{m}\doteqdot\mu\times\nu$.

Заметим, что выполняются следующие простые свойства прямого произведения множеств. Если множество $A\times B=\emptyset$ является пустым, то одно из множеств $A=\emptyset$ или $B=\emptyset$ пусто. Для включения $A\times B\subset A_1\times B_1$ необходимо и достаточно, чтобы $A\subset A_1$ и $B\subset B_1$. Если множество $A\times B=A_1\times B_1$ не пусто, то $A=A_1$ и $B=B_1$.

Лемма. *Прямое произведение двух мер $\mathfrak{m}\doteqdot\mu\times\nu$ является σ-конечной мерой, определенной на полуалгебре множеств $\mathfrak{S}=\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Докажем, что система $\mathfrak{S}$ образует полукольцо. Если множества $A\times B,A_1\times B_1\in\mathfrak{S}$, то их пересечение $(A\times B)\cap(A_1\times B_1)=(A\cap A_1)\times(B\cap B_1)\in\mathfrak{S}$. Поскольку разность этих множеств представляется в виде

$$(A\times B)\setminus(A_1\times B_1)=\big((A\setminus A_1)\times B\big)\sqcup\big((A\cap A_1)\times(B\setminus B_1)\big)$$

и множества $A\setminus A_1$ и $B\setminus B_1$ являются элементами σ-алгебр $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно, то разность $(A\times B)\setminus(A_1\times B_1)$ представляется в виде дизъюнктного объединения элементов $\mathfrak{S}$. Поэтому $\mathfrak{S}$ образует полукольцо и значит будет полуалгеброй.

Докажем, что функция $\mathfrak{m}=\mu\times\nu$ σ-аддитивна. Пусть $A\times B=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n\times B_n$, где $A,A_n\in\mathfrak{M}$ и $B,B_n\in\mathfrak{N}$. Для любого $x\in A$ имеем $B=\bigsqcup_{n:x\in A_n}B_n$, т.е. множество B является дизъюнктным объединением тех множеств B_n, для которых индекс n удовлетворяет условию $x\in A_n$. Вводя функцию по формуле $f_n(x)\doteqdot\nu(B_n)\,\chi_{A_n}(x)$, в силу σ-аддитивности меры ν получим $\nu(B)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ при всех $x\in A$. Поскольку функции $f_n\geqslant 0$ неотрицательны, то частичные суммы ряда монотонно сходятся на множестве A. Применяя теорему о монотонной сходимости, заключаем

$$\mathfrak{m}(A\times B)=\int_A\nu(B)\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\nu(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}(A_n\times B_n)\,.$$

Итак, $\mathfrak{m}=\mu\times\nu$ является мерой, заданной на полуалгебре $\mathfrak{S}$ с единицей $Z=X\times Y$. Для доказательства σ-конечности представим $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ и $Y=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$ в виде счетного объединения множеств конечной меры. Тогда $Z=X\times Y=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}A_i\times B_j$ также будет счетным объединением множеств конечной меры. □

Определение. Лебе́гово продолжение $\lambda\doteqdot\mathfrak{m}^*\,|_\Sigma$ меры $\mathfrak{m}\doteqdot\mu\times\nu$ на σ-алгебру Σ измеримых множеств называется (тензорным) *произведением мер*. Эту меру обозначают через $\lambda\doteqdot\mu\otimes\nu$, а σ-алгебру измеримых множеств через $\Sigma\doteqdot\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$.

Измеримым пространством (Z,Σ,λ) произведения мер $\mu:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}_+$ и $\nu:\mathfrak{N}\to\mathbb{R}_+$ называется множество $Z \doteqdot X\times Y$ и мера $\lambda=\mu\otimes\nu$, определенная на σ-алгебре $\Sigma=\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$ измеримых множеств внешней меры $\mathfrak{m}^*$.

Замечание. Аналогичным образом определяется произведение трех и более мер. Нетрудно проверить, что если заданы три измеримых пространства с полными и σ-конечными мерами $(X,\mathfrak{M},\mu,$ $(Y,\mathfrak{N},\nu)$, $(Z,\mathfrak{G},\gamma)$, то прямое произведение мер $\mathfrak{m}\doteqdot\mu\times\nu\times\gamma$, определенное на полуалгебре $\mathfrak{S}\doteqdot\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\times\mathfrak{G}$, является ассоциатиным, т.е. $\mathfrak{m}=(\mu\times\nu)\times\gamma=\mu\times(\nu\times\gamma)$ и $\mathfrak{S}=(\mathfrak{M}\times\mathfrak{N})\times\mathfrak{G}=\mathfrak{M}\times(\mathfrak{N}\times\mathfrak{G})$. Следовательно, (тензорное) произведение мер ассоциативно, т.е. $\mu\otimes\nu\otimes\gamma=(\mu\otimes\nu)\otimes\gamma=\mu\otimes(\nu\otimes\gamma)$.

Определение. Для каждого множества $E\subset Z=X\times Y$ следующие множества

$$E_x\doteqdot\{y\in Y\mid z=(x,y)\in E\}\subset Y\,,\quad E_y\doteqdot\{x\in X\mid z=(x,y)\in E\}\subset X\,,$$

называются *сечениями множества* E по переменным x и y. Если задана функция $f:E\to\mathbb{R}$, то функции $f_x:E_x\to\mathbb{R}$, где $f_x(y)\doteqdot f(x,y)$, и $f_y:E_y\to\mathbb{R}$, где $f_y(x)\doteqdot f(x,y)$, называются *сечениями функции* $f(x,y)$ по переменным x и y.

Заметим, что если множество $E\in\mathscr{A}_\sigma(\mathfrak{S})$ принадлежит минимальной σ-алгебре, то его сечения измеримы, т.е. $E_x\in\mathfrak{N}$ при $x\in X$ и $E_y\in\mathfrak{M}$ при $y\in Y$. Действительно, система всех множеств $E\subset Z$, у которых сечения измеримы, является σ-алгеброй, содержащей $\mathfrak{S}$, и, следовательно, содержит минимальную σ-алгебру $\mathscr{A}_\sigma(\mathfrak{S})$.

Теорема (о вычислении меры с помощью сечений)**.** *Пусть* (Z,Σ,λ) *измеримое пространство произведения мер. Тогда для каждого множества* $E\in\Sigma$ *сечение* $E_x\in\mathfrak{N}$ *(*$E_y\in\mathfrak{M}$*) измеримо при п.в.* $x\in X$ *(*$y\in Y$*), функция* $\nu(E_x)$ *(*$\mu(E_y)$*) измерима на множестве* X *(*Y*) и выполняются равенства*

$$\lambda(E)=\int_X \nu(E_x)\,d\mu=\int_Y \mu(E_y)\,d\nu\,,$$

Доказательство. Достаточно доказать первое равенство. Используя σ-конечность мер, доказательство можно свести к случаю множества конечной меры $\lambda(E)<\infty$.

Если $E=A\times B\in\mathfrak{S}$, то $E_x=B$ при $x\in A$ и $E_x=\emptyset$ при $x\notin A$. Поэтому имеем

$$\lambda(E)=\mu(A)\nu(B)=\int_A \nu(B)\,d\mu=\int_X \nu(E_x)\,d\mu\,.$$

Если $E\in\mathscr{A}(\mathfrak{S})$, т.е. представляется дизъюнктным объединением элементов $\mathfrak{S}$, то утверждение вытекает из аддитивности мер и линейности интеграла.

Если $E\in\Sigma$ множество конечной меры, то рассмотрим измеримую оболочку F множества E, определенную ранее по формуле $F\doteqdot\bigcap_{i=1}^\infty F_i$, где $E\subset F_i\doteqdot\bigcup_{j=1}^\infty F_{ij}$, $F_{ij}\in\mathfrak{S}$ и $\lambda(F_i)<\lambda(E)+1/i$. При этом имеет место равенство $\lambda(E)=\lambda(F)$.

Пусть $G_n\doteqdot\bigcap_{i=1}^n F_i$ и $G_{nm}\doteqdot\bigcap_{i=1}^n\bigcup_{j=1}^m F_{ij}\in\mathscr{A}(\mathfrak{S})$. Так как $G_n\searrow F$ и $G_{nm}\nearrow G_n$, то соответствующие сечения $G_{nx}\searrow F_x$ и $G_{nmx}\nearrow G_{nx}$ монотонно сходятся при всех $x\in X$. Применяя свойства непрерывности сверху и снизу для соответствующих мер

λ и ν, а также теорему о монотонной сходимости интеграла по мере μ, получим утверждение теоремы для измеримой оболочки F

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda(G_n) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \lambda(G_{nm}) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \int_X \nu(G_{nmx})\,d\mu = \int_X \nu(F_x)\,d\mu\,.$$

Нам осталось доказать теорему для множества $N = F \setminus E$ меры нуль. Для этого, также как в предыдущем случае, построим измеримую оболочку M множества N. Тогда получим $N \subset M$ и $\lambda(N) = \lambda(M) = \int_X \nu(M_x)\,d\mu = 0$. Так как $\nu(M_x) = 0$ п.в. и $N_x \subset M_x$, то $\nu(N_x) = 0$ п.в. Поэтому $\lambda(N) = \int_X \nu(N_x)\,d\mu = 0$. Следовательно, в силу аддитивности мер и интеграла выполняется равенство $\lambda(E) = \int_X \nu(E_x)\,d\mu$. □

Пример 1. Пусть на отрезке $[0,1]$ определены мера Лебе́га μ_1 и точечная мера ν, которая равна $\nu(A)$ количеству точек множества A, если A конечное множество, и равна $\nu(A) = \infty$, если A бесконечное множество. Рассмотрим диагональ квадрата $E = \{(x,x) \in [0,1]^2 \mid x \in [0,1]\}$. Поскольку E замкнутое множество, то оно является борелевским и значит измеримо относительно произведения мер $\lambda = \mu_1 \otimes \nu$. Его мера равна $\lambda(E) = \infty$. Множество E не имеет σ-конечной меры и любое его сечение состоит из одной точки. Следовательно, $\int_0^1 \nu(E_x)\,d\mu_1 = 1$ и $\int_0^1 \mu_1(E_y)\,d\nu = 0$, т.к. $\nu(E_x) = 1$ и $\mu(E_y) = 0$. Эти равенства нам показывают, что утверждение теоремы неверно, если меры не являются σ-конечными.

Лемма. *Пусть $\lambda \doteqdot \mu \otimes \mu_1$ мера в $X \times \mathbb{R}_+$, где μ является σ-конечной мерой в X, а μ_1 задает мера Лебе́га в $\mathbb{R}_+$. Тогда неотрицательная функция $f : E \to \mathbb{R}_+$ измерима на множестве $E \subset X$ в том и только в том случае, когда подграфик $\Gamma_f \doteqdot \{(x,t) \mid x \in E,\, 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ является измеримым множеством в $X \times \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. В силу σ-конечности меры μ достаточно рассмотреть случай множества конечной меры $\mu(E) < \infty$. Определим следующие функции:

$$h_n(x) \doteqdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^n}\chi_{H_{ni}}(x)\,, \text{ где } H_{ni} \doteqdot E\Big(\frac{i-1}{2^n} \leqslant f < \frac{i}{2^n}\Big)\,.$$

Поскольку все множества H_{ni} измеримы, то подграфик Γ_{h_n} функции h_n измерим, а так как $h_n \searrow f$ на E, то $\Gamma_{h_n} \searrow \Gamma_f$ и значит подграфик $\Gamma_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_{h_n}$ измерим. Обратно, если подграфик измерим, то по теореме его сечения $\Gamma_{ft} = E(f \geqslant t)$ будут измеримы при п.в. $t \in \mathbb{R}_+$ и значит функция f будет измеримой. □

Вычислим меру подграфика Γ_f неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ при помощи сечений. Пусть мера $\lambda \doteqdot \mu \otimes \mu_1$ та же, что в лемме, тогда получим

$$\lambda(\Gamma_f) = \int_E \mu_1(\Gamma_{fx})\,d\mu = \int_E f(x)\,d\mu = \int_0^{\infty} \mu(\Gamma_{ft})\,d\mu_1 = \int_0^{\infty} F(t)\,dt\,,$$

где $f(x) = \mu_1([0, f(x)])$ мера сечения Γ_{fx}, а $F(t) = \mu(E(f \geqslant t))$ мера сечения Γ_{ft}.

Теорема (Фуби́ни)**.** *Пусть (Z, Σ, λ) измеримое пространство произведения мер. Тогда если функция $f \in \boldsymbol{L}(E, \mu)$ интегрируема на $E \in \Sigma$, то функция $f_x\,(f_y)$*

интегрируема на $E_x\,(E_y)$ *при п.в.* $x\in X\,(y\in Y)$ *и выполняются равенства*

$$\int_E f\,d\mu=\int_X\Big(\int_{E_x} f_x\,d\nu\Big)\,d\mu=\int_Y\Big(\int_{E_y} f_y\,d\mu\Big)\,d\nu\,.$$

Доказательство. Мы докажем первое равенство, второе доказывается аналогично. Представляя $f=f_+-f_-$ разностью неотрицательных функций $f_\pm\geqslant 0$, мы сведем доказательство к случаю, когда $f\geqslant 0$. Пусть $\gamma\doteqdot\lambda\otimes\mu_1=\mu\otimes\nu\otimes\mu_1=\mu\otimes\nu_1$ мера в $Z\times\mathbb{R}_+$, а $\nu_1\doteqdot\nu\otimes\mu_1$ определяет меру в $Y\times\mathbb{R}_+$. Вычисляя меру подграфика $\Gamma_f\doteqdot\{(z,t)\mid z\in E,\,0\leqslant t\leqslant f(z)\}$ при помощи сечений по z и по x, получим

$$\lambda(\Gamma_f)=\int_E\mu_1(\Gamma_{fz})\,d\lambda=\int_E f(z)\,d\lambda=\int_X\nu_1(\Gamma_{fx})\,d\mu=\int_X\Big(\int_{E_x} f_x\,d\nu\Big)\,d\mu\,,$$

где $\mu_1(\Gamma_{fz})=f(z)$ при всех $z\in Z$ и $\nu_1(\Gamma_{fx})=\int_{E_x}f_x\,d\nu$ при п.в. $x\in X$. □

Пример 2 (Серпи́нского)**.** Пусть $\mu_2=\mu_1\otimes\mu_1$ мера Лебе́га на квадрате $[0,1]^2$. Рассмотрим множество $E\subset[0,1]^2$, т.ч. все сечения E_x не более, чем счетные, а все сечения E_y имеют не более, чем счетные дополнения. Если $f(x,y)\doteqdot\chi_E(x,y)$, то

$$\int_0^1\Big(\int_{E_x}f_x\,d\mu_1\Big)\,d\mu_1=\int_0^1\mu_1(E_x)\,d\mu_1=0;\ \int_0^1\Big(\int_{E_y}f_y\,d\mu_1\Big)\,d\mu_1=\int_0^1\mu_1(E_y)\,d\mu_1=1\,,$$

повторные интегралы не совпадают. Поэтому по теореме Фуби́ни функция $f(x,y)$ и множество E не измеримы по Лебе́гу, если, конечно, такое множество существует.

Рассмотрим ограниченную функцию $f:I\to\mathbb{R}$, заданную на отрезке $I=[a,b]$, где $[a,b]\doteqdot[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ отрезок в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через

$$\underline{f}(x)\doteqdot\varliminf_{y\to x}f(y)=\lim_{r\to 0}\inf_{y\in I\cap\boldsymbol{S}_r(x)}f(y)\,,\quad \overline{f}(x)\doteqdot\varlimsup_{y\to x}f(y)=\lim_{r\to 0}\sup_{y\in I\cap\boldsymbol{S}_r(x)}f(y)$$

нижнюю и *верхнюю* функции Бэ́ра функции f. Тогда имеем $\underline{f}(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{f}(x)$ при всех $x\in[a,b]$. При этом равенство $\underline{f}(x)=f(x)=\overline{f}(x)$ выполняется тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке $x\in I$. Поэтому $N_f\doteqdot\{x\in I\mid \underline{f}(x)\neq\overline{f}(x)\}$ образует множество точек разрыва. Так как $\{x\in I|\underline{f}(x)>c\}$ и $\{x\in I|\overline{f}(x)<c\}$ будут открытыми множествами на отрезке I, то функции Бэ́ра $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ являются измеримыми по Лебе́гу в $\mathbb{R}^n$. Отсюда множество N_f измеримо в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\boldsymbol{R}(I)$ и $\boldsymbol{L}(I)$ пространства функций $f:I\to\mathbb{R}$, соответственно интегрируемых по Ри́ману и по Лебе́гу на отрезке I. Нашей задачей является выяснение связи между интегралами Ри́мана и Лебе́га. Пусть задано разбиение τ отрезка $I=[a,b]$ на отрезки $I_i=[p_i,q_i]$, т.ч. $[a,b]=\bigcup_{i=1}^m[p_i,q_i]$ и $(p_i,q_i)\cap(p_j,q_j)=\emptyset$ при $i\neq j$. Определим нижние и верхние суммы Дарбу́ по формулам

$$\underline{D}_\tau(f)\doteqdot\sum_{i=1}^m\underline{d}_i\,\mu_n(I_i),\ \text{где }\underline{d}_i\doteqdot\inf_{x\in I_i}f(x);\quad \overline{D}_\tau(f)\doteqdot\sum_{i=1}^m\overline{d}_i\,\mu_n(I_i),\ \text{где }\overline{d}_i\doteqdot\sup_{x\in I_i}f(x).$$

Из курса анализа известно, что для существования интеграла Ри́мана необходимо и достаточно, чтобы нижний и верхний интегралы Дарбу́ совпадали, т.е.

$$\underline{\int_I} f(x)\,dx \doteqdot \sup_\tau \underline{D}_\tau(f) = \inf_\tau \overline{D}_\tau(f) \doteqdot \overline{\int_I} f(x)\,dx\,,$$

Интеграл Ри́мана равен общему значению нижнего и верхнего интегралов Дарбу́.

Теорема (критерий Лебе́га интегрируемости по Ри́ману). *Функция $f : I \to \mathbb{R}$, где $I = [a,b] \subset \mathbb{R}^n$, интегрируема по Ри́ману $f \in \boldsymbol{R}(I)$ тогда и только тогда, когда она ограничена и множество $N_f \subset I$ ее точек разрыва имеет меру $\mu_n(N_f) = 0$. При этом, если функция $f \in \boldsymbol{R}(I)$, то $f \in \boldsymbol{L}(I)$ и интегралы совпадает.*

Доказательство. Ограниченность функции f на отрезке I является необходимым условием интегрируемости функции по Ри́ману, т.к. если функция f не является ограниченной на этом отрезке, то по определению нижних и верхних сумм Дарбу́ они могут принимать бесконечные значения $\pm\infty$.

Докажем, что нижний и верхний интегралы Дарбу́ от ограниченной функции f равны соответственно интегралам Лебе́га от нижней $\underline{f}$ и верхней $\overline{f}$ функций Бэ́ра. Построим последовательность разбиений $\tau_k = \{I_{ki}\}_{i=1}^{m_k}$ на отрезке I, т.ч. диаметры разбиений $d(\tau_k) \to 0$, разбиение τ_{k+1} является продолжением разбиения τ_k и предел нижних сумм Дарбу́ $\underline{D}_{\tau_k}(f)$ равен нижнему интегралу Дарбу́, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \underline{D}_{\tau_k}(f) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \underline{d}_{ki}\,\mu_n(I_{ki}) = \underline{\int_I} f(x)\,dx\,.$$

Рассмотрим функции $h_k(x) \doteqdot \sum_{i=1}^{m_k} \underline{d}_{ki}\,\chi_{I_{ki}}(x)$. Так как $h_k(x) \nearrow \underline{f}(x)$, если $x \notin \partial I_{ki}$ при всех k и i, то $h_k \nearrow \underline{f}$ п.в. на I. По теореме Лебе́га о монотонной сходимости

$$\int_I \underline{f}\,d\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int_I h_k\,d\mu_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \underline{d}_{ki}\,\mu_n(I_{ki}) = \underline{\int_I} f(x)\,dx\,.$$

Аналогично доказывается второе равенство. В силу интегрируемости функции по Ри́ману нижний и верхний интегралы Дарбу́ совпадают. Отсюда $\int_I (\overline{f} - \underline{f})\,d\mu_n = 0$. Поскольку $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) \geqslant 0$, то $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$ п.в. на I. Поэтому первое утверждение доказано. Для доказательства второго утверждения заметим, что $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ п.в. на I. Поэтому интегралы Лебе́га этих функций совпадают. Следовательно, интеграл Лебе́га функции f равен нижнему и верхнему интегралам Дарбу́. □

Пример 3. Построим на отрезке $[0,1]$ функцию, которая интегрируема по Лебе́гу, однако всякая ей эквивалентная функция не интегрируема по Ри́ману.

Перенумеруем рациональные точки $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ отрезка $[0,1]$ и рассмотрим множество $A \doteqdot \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \varepsilon_n, r_n + \varepsilon_n) \cap [0,1]$, где $\varepsilon_n \doteqdot \varepsilon/2^{n+1}$ и $0 < \varepsilon < 1$. Поскольку мера Лебе́га $0 < \mu_1(A) < \varepsilon$, то $B \doteqdot [0,1] \setminus A$ имеет меру Лебе́га $0 < \mu_1(B) < 1$.

Множество B является замкнутым и состоит только из иррациональных чисел. Следовательно, оно является нигде не плотным. Поэтому множеством точек разрыва функции $f(x) \doteqdot \chi_B(x)$ является множество B. Так как множество B имеет положительную меру, меньшую 1, то при изменении функции $f(x)$ на множестве меры нуль множество точек разрыва опять будет иметь положительную меру, а значит множество точек разрыва любой эквивалентной ей функции $g \sim f$ также имеет положительную меру. Поэтому функция g не интегрируема по Ри́ману.

9 АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть (X,Σ,μ) измеримое пространство с полной и σ-конечной мерой μ.

Определение. Функция $\varphi:\Sigma\to\mathbb{R}$ называется *зарядом* (знакопеременной мерой) на множестве X, если она является σ-аддитивной функцией на σ-алгебре Σ.

Множество $A\in\Sigma$ называется *положительным* (*отрицательным*) по отношению к заряду φ, если $\varphi(B)\geqslant 0$ ($\varphi(B)\leqslant 0$) для всех множеств $B\subset A$, т.ч. $B\in\Sigma$.

Заряд φ называют *абсолютно непрерывным* относительно меры μ и обозначают $\varphi\ll\mu$, если $\varphi(A)=0$ для любого множества $A\in\Sigma$ меры нуль $\mu(A)=0$.

1. Разложение Ха́на. *Для каждого заряда φ существует такое разложение $X=X_+\sqcup X_-$, что X_+ является положительным, а X_- отрицательным.*

Пусть $a=\inf\varphi(A)$ нижняя грань по всем отрицательным множествам $A\in\Sigma$. Тогда найдутся отрицательные множества $A_n\in\Sigma$, т.ч. $A_n\nearrow A$, $\varphi(A_n)\searrow a$. Ясно, что $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n\setminus A_{n-1}$ отрицательное множество. Пусть $X_-\doteqdot A$. Покажем, что $X_+\doteqdot X\setminus X_-$ положительное множество. Если это не так, то существует $B\subset X_+$, т.ч. $\varphi(B)<0$. При этом B не является отрицательным, т.к. иначе $\varphi(A\sqcup B)<a$.

Выберем наименьшее число $n_1\in\mathbb{N}$, т.ч. $\varphi(B_1)\geqslant 1/n_1$ для некоторого $B_1\subset B$. Так как $\varphi(B\setminus B_1)<0$, то множество $B\setminus B_1$ не пусто и не является отрицательным. Выберем наименьшее число $n_2>n_1$, т.ч. $\varphi(B_2)\geqslant 1/n_2$ для некоторого $B_2\subset B\setminus B_1$, и т.д. В результате этого выбора мы получим множество $C\doteqdot B\setminus\bigsqcup_{k=1}^{\infty}B_k$, которое является отрицательным, что невозможно, т.к. $\varphi(C)<0$ и значит $\varphi(A\sqcup C)<a$.

В качестве следствия из разложения Ха́на получаем **разложение Жорда́на** для любого заряда по формуле $\varphi=\varphi_+-\varphi_-$, где $\varphi_\pm(A)\doteqdot\pm\varphi(X_\pm\cap A)$ образуют меры на σ-алгебре Σ, которые называются *положительной* и *отрицательной* вариацией заряда φ. Функция $|\varphi|\doteqdot\varphi_++\varphi_-$ называется *полной* вариацией заряда. Если заряд φ абсолютно непрерывен, то его вариации абсолютно непрерывны.

2. *Заряд абсолютно непрерывен $\varphi\ll\mu$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $|\varphi(A)|<\varepsilon$ при всех $A\in\Sigma$ с мерой $\mu(A)<\delta$.*

Достаточность этого условия очевидна. Докажем необходимость для вариации $|\varphi|$. Предположим, что существуют $\varepsilon>0$ и $A_n\in\Sigma$, т.ч. $\mu(A_n)<1/2^n$ и $|\varphi|(A_n)\geqslant\varepsilon$. Если $A\doteqdot\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, то $\mu(A)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k)<1/2^{n-1}$ при всех n, т.е. $\mu(A)=0$. По свойству непрерывности сверху $|\varphi|(A)=\lim_{n\to\infty}|\varphi|\big(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\big)\geqslant\varepsilon$, что невозможно, поскольку заряд $|\varphi|$ является абсолютно непрерывным.

3. *Если $f\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$ интегрируема по Лебе́гу, то заряд $\varphi(A)\doteqdot\int_A f\,d\mu$ является абсолютно непрерывным $\varphi\ll\mu$, а его вариации равны следующим интегралам:*

$$|\varphi|(A)=\int_A|f|\,d\mu\,,\ \ \varphi_\pm(A)=\int_A f_\pm\,d\mu\,,\ \ \text{где}\ \ f_\pm(x)=\max\{\pm f(x),0\}\,.$$

В силу свойства интеграла Лебéга заряд $\varphi(A) \doteqdot \int_A f\,d\mu$ является абсолютно непрерывным, а его вариации равны соответствующим интегралам, т.к. множества $X_+ \doteqdot \{x \in X \mid f(x) \geqslant 0\}$ и $X_- \doteqdot \{x \in X \mid f(x) < 0\}$ образуют разложение Xáна.

Теорема (Радóна–Никоди́ма). *Если заряд $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывен $\varphi \ll \mu$, то существует функция $f \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ (единственная с точностью до эквивалентности), т.ч. $\varphi(A) = \int_A f\,d\mu$ при всех $A \in \Sigma$.*

Указанная функция $f \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ называется *производной Радóна–Никоди́ма* по мере μ и обозначается через $f \doteqdot d\varphi/d\mu$. Докажем ее единственность. Пусть две функции $f,g \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ удовлетворяют условию $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ при всех $A \in \Sigma$. Положим $A_n \doteqdot X(f-g \geqslant 1/n)$, тогда $\mu(A_n) \leqslant n\int_{A_n}(f-g)\,d\mu = 0$ и значит $\mu(A_n) = 0$. Отсюда $X(f-g>0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ имеет меру нуль. Аналогично $X(g-f>0)$ имеет меру нуль. Поэтому $f \sim g$. Доказательство этой теоремы будет дано позже.

Определение. Говорят, что функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$, если величина ее вариации $\boldsymbol{V}_a^b(F) < \infty$ конечна, т.е.

$$\boldsymbol{V}_a^b(F) \doteqdot \sup_{\tau} \sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| < \infty,$$

где верхняя грань суммы абсолютных приращений функции F берется по всем разбиениям $\tau \doteqdot \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ отрезка $[a,b]$.

В этом определении число n может быть конечным или бесконечным. Обозначим через $\boldsymbol{BV}[a,b]$ пространство всех функций ограниченной вариации с нормой

$$\|F\| \doteqdot |F(a)| + \boldsymbol{V}_a^b(F)\,,\ F \in \boldsymbol{BV}[a,b]\,.$$

1. *Если $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, то $F \in \boldsymbol{B}[a,b]$ и $\boldsymbol{V}_a^b(F) = \boldsymbol{V}_a^c(F) + \boldsymbol{V}_c^b(F)$ при $a < c < b$.*

Ограниченность функции $F(x)$ вытекает из неравенства $|F(x)| \leqslant |F(a)| + \boldsymbol{V}_a^b(F)$. Если разбиение τ содержит точку $c = x_k$, то $\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leqslant \boldsymbol{V}_a^c(F) + \boldsymbol{V}_c^b(F)$. Это неравенство сохраняется для всех разбиений, которые не содержат точки c. Отсюда $\boldsymbol{V}_a^b(F) \leqslant \boldsymbol{V}_a^c(F) + \boldsymbol{V}_c^b(F)$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем разбиение, т.ч.

$$\boldsymbol{V}_a^c(F) < \sum_{i=1}^{k} |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{V}_c^b(F) < \sum_{i=k+1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \varepsilon/2\,.$$

где $c = x_k$. Тогда, складывая эти два неравенства, мы получим $\boldsymbol{V}_a^c(F) + \boldsymbol{V}_c^b(F) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \varepsilon \leqslant \boldsymbol{V}_a^b(F) + \varepsilon$. Поэтому $\boldsymbol{V}_a^c(F) + \boldsymbol{V}_c^b(F) = \boldsymbol{V}_a^b(F)$.

2. *Если $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, то $\boldsymbol{V}(x) \doteqdot \boldsymbol{V}_a^x(F)$ неубывающая функция на отрезке $[a,b]$. При этом, если $F(x)$ непрерывна слева, то функция $\boldsymbol{V}(x)$ непрерывна слева.*

Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго выберем разбиение отрезка $[a,x]$, т.ч. $x_{n-1} = y < x_n = x$ и $\boldsymbol{V}_a^x(F) < \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \varepsilon/2$, при этом в силу непрерывности F слева можно считать, что $|F(y)-F(x)|<\varepsilon/2$ для всех $y\in(x-\delta,x)$, где $\delta>0$ и $\varepsilon>0$. Тогда при всех $y\in(x-\delta,x)$ получим

$$\boldsymbol{V}(x)-\boldsymbol{V}(y)\leqslant \boldsymbol{V}_a^x(F)-\sum_{i=1}^{n-1}|F(x_i)-F(x_{i-1})|<\boldsymbol{V}_a^x(F)-\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|+\varepsilon/2<\varepsilon\,.$$

Таким образом, функция $\boldsymbol{V}(x)$ непрерывна слева в точке $x\in(a,b]$.

3. Разложение Жорда́на. *Если функция $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$ имеет ограниченную вариацию, то существуют неубывающие функции α и β, т.ч.*

$$F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x)\,,\quad \boldsymbol{V}(x)=\alpha(x)+\beta(x)\,,\quad \alpha(a)=\beta(a)=0.$$

Эти неубывающие функции α и β вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha(x)\doteqdot\frac{1}{2}\Big\{\boldsymbol{V}(x)+F(x)-F(a)\Big\},\quad \beta(x)\doteqdot\frac{1}{2}\Big\{\boldsymbol{V}(x)-F(x)+F(a)\Big\}.$$

где $\boldsymbol{V}(x)=\boldsymbol{V}_a^x(F)$. Так как функция F имеет ограниченную вариацию на отрезке $[y,x]$, то $|F(x)-F(y)|\leqslant\boldsymbol{V}_y^x(F)$. Поэтому функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ неубывающие. При этом, если $F(x)$ непрерывна слева, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ также непрерывны слева.

Теорема (Лебе́га). *Всякая функция $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$ ограниченной вариации имеет производную $F'(x)$ п.в. на отрезке $[a,b]$* (без доказательства).

Определение. Интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса называется предел интегральных сумм Ри́мана–Сти́лтьеса $R_\tau(f,\xi,F)$, когда диаметр разбиения $d_\tau\to0$, т.е.

$$\int_a^b f\,dF\doteqdot\lim_{d_\tau\to0}R_\tau(f,\xi,F)\,,\ \text{где}\ R_\tau(f,\xi,F)\doteqdot\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(F(x_k)-F(x_{k-1}))\,.$$

где $d_\tau\doteqdot\max(x_k-x_{k-1})$, $\xi=\{\xi_k\}_{k=1}^n$ и $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$. Если $F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$ разложение Жорда́на, то этот интеграл равен разности интегралов

$$\int_a^b f\,dF=\int_a^b f\,d\alpha-\int_a^b f\,d\beta\,.$$

Определение. Пусть $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$ непрерывна слева и $F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$ разложение Жорда́на. Рассмотрим меры Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β, определенные по неубывающим функциям α и β на σ-алгебрах Σ_α и Σ_β. Функция $\varphi_F\doteqdot\mu_\alpha-\mu_\beta$ называется *зарядом Лебе́га–Сти́лтьеса*. Этот заряд определен на пересечении σ-алгебр $\Sigma_F\doteqdot\Sigma_\alpha\cap\Sigma_\beta$ измеримых множеств соответствующих мер μ_α и μ_β.

Интегралом Лебе́га–Сти́лтьеса называется разность интегралов по этим мерам

$$\int_a^b f\,d\varphi_F\doteqdot\int_a^b f\,d\mu_\alpha-\int_a^b f\,d\mu_\beta$$

Функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ называется интегрируемой по заряду φ_F, если интегрируема по мерам μ_α и μ_β, т.е. каждый из интегралов справа принимает конечное значение.

Заметим без доказательства, если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$, то для существования у ней интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса по функции $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$, непрерывной слева, необходимо и достаточно, чтобы меры $\mu_\alpha(N_f)=\mu_\beta(N_f)=0$ были равны нулю на множестве N_f точек разрыва функции f. Кроме того, из существования интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса вытекает существование интеграла Лебе́га–Сти́лтьеса и их равенство. Доказательство этих утверждений аналогично доказательству для интегралов Ри́мана и Лебе́га на предыдущей лекции.

Лемма. *Интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса по $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$ существует для всякой непрерывной функции $f\in\boldsymbol{C}[a,b]$ и равен интегралу Лебе́га–Сти́лтьеса. Он не зависит от изменения $F(x)$ на счетном множестве точек интервала (a,b).*

Доказательство. Суммы Ри́мана–Сти́лтьеса $R_\tau(f,\xi,F)$ совпадают с интегралами Лебе́га–Сти́лтьеса от простых функций $h_\tau(x)=f(\xi_k)$ при $x\in[x_{k-1},x_k)$ и $k=1,\ldots,n$. Поскольку функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, то $h_\tau\rightrightarrows f$ при $d_\tau\to 0$. По теореме Лебе́га о мажорируемой сходимости предел интегралов от простых функций существует и равен интегралу Лебе́га–Сти́лтьеса от f по заряду φ_F. $\square$

Определение. Функция $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. для всякой системы непересекающихся интервалов $\bigsqcup_{i=1}^n(a_i,b_i)\subset[a,b]$ с суммой их длин $\sum_{i=1}^n(b_k-a_k)<\delta$, выполняется неравенство $\sum_{i=1}^n|F(a_i)-F(b_i)|<\varepsilon$.

Последнее неравенство можно заменить на $|\sum_{i=1}^n F(a_i)-F(b_i)|<\varepsilon$, поскольку, разбивая сумму в этом неравенстве на две с положительными и отрицательными слагаемыми, мы получим, что $\sum_{i=1}^n|F(a_i)-F(b_i)|<2\varepsilon$. Кроме того, число n может быть конечным или бесконечным. При $n=1$ это условие равносильно определению равномерной непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$. Далее через $\boldsymbol{AC}[a,b]$ обозначается пространство всех абсолютно непрерывных функций с нормой

$$\|F\|\doteq|F(a)|+\int_a^b|F'(t)|\,dt\,,\ F\in\boldsymbol{AC}[a,b]\,.$$

1. *Если $F\in\mathrm{Lip}[a,b]$, т.е. при некотором $c>0$ выполняется условие Ли́пшица $|F(x)-F(y)|\leqslant c\,|x-y|$ при всех $x,y\in[a,b]$, то $F\in\boldsymbol{AC}[a,b]$.*

В самом деле, если $\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta<\varepsilon/c$, то $\sum_{i=1}^n|F(b_i)-F(a_i)|<c\delta<\varepsilon$.

2. *Если $F\in\boldsymbol{AC}[a,b]$, то $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$. Поэтому производная $F'(x)$ абсолютно непрерывной функции по теореме Лебега существует п.в. на $[a,b]$.*

Для заданного $\varepsilon=1$ выберем $\delta>0$ по определению абсолютной непрерывности. Если разбиение, т.ч. $x_i-x_{i-1}=\frac{(b-a)}{n}<\delta$, то $\boldsymbol{V}_a^b(F)=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{V}_{x_{i-1}}^{x_i}(F)\leqslant n$.

3. *Если $F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$ разложение Жорда́на абсолютно непрерывной функции $F\in\boldsymbol{AC}[a,b]$, то функции $\alpha,\beta\in\boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывны.*

Докажем, что $\boldsymbol{V}(x) \doteqdot \boldsymbol{V}_a^x(F) \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Для $\varepsilon/2$ выберем $\delta > 0$ по определению абсолютной непрерывности. Затем выберем разбиения $a_i = x_{i0} < x_{i1} < \ldots < x_{in_i} = b_i$ отрезков $[a_i, b_i]$ из этого определения, т.ч. $\boldsymbol{V}_{a_i}^{b_i}(F) < \sum_{j=1}^{n_i} |F(x_{ij}) - F(x_{ij-1})| + \varepsilon/2^{i+1}$. Тогда, если сумма длин этих отрезков $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, то

$$\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{V}(a_i) - \boldsymbol{V}(b_i)| = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{V}_{a_i}^{b_i}(F) < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} |F(x_{ij}) - F(x_{ij-1})| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Таком образом, функция $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ и значит функции $\alpha, \beta \in \boldsymbol{AC}[a,b]$.

4. *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, то существует $f \in \boldsymbol{L}[a,b]$ (единственная с точностью до эквивалентности), т.ч. $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$.*

Рассмотрим разложение Жорда́на $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$, где $\alpha, \beta \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Тогда в силу определения абсолютной непрерывности и свойства заряда 2 меры Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α, μ_β и заряд $\varphi_F \doteqdot \mu_\alpha - \mu_\beta$ будут абсолютно непрерывны по мере Лебе́га μ_1. Поэтому по теореме Радо́на–Никоди́ма существуют $f_\alpha, f_\beta \in \boldsymbol{L}[a,b]$ (единственные с точностью до эквивалентности), т.ч. если $f \doteqdot f_\alpha - f_\beta$, то

$$F(x) - F(a) = \mu_\alpha([a,x)) - \mu_\beta([a,x)) = \int_a^x f_\alpha(t)\,dt - \int_a^x f_\beta(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Здесь и далее для сокращения записи интеграл пишется по мере $d\mu_1(t) = dt$.

Лемма. *Если $F(x)$ неубывающая функция на $[a,b]$, то $\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b) - F(a)$. Если $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то это неравенство является равенством.*

Доказательство. Пусть $F_n(t) \doteqdot n(F(t+1/n) - F(t))$, где $F(t) \doteqdot F(b)$ при $t \in [b, b+1]$. Так как предел $\lim F_n(t) = F'(t)$ существует п.в. на $[a,b]$, то по лемме Фату́

$$\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_a^b F_n(t)\,dt = \varliminf_{n\to\infty} \Big(n\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)\,dt - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)\,dt \Big) \leqslant F(b) - F(a).$$

Если $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то по условию Ли́пшица $|F_n(t)| \leqslant c$ при всех $t \in [a,b]$. Поэтому, применяя вместо леммы Фату́ теорему Лебе́га о мажорируемой сходимости, как и выше, мы получим вместо неравенства равенство $\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$. □

Теорема (формула Нью́тона–Ле́йбница для абсолютно непрерывных функций**).** *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, то $F'(x) \in \boldsymbol{L}[a,b]$ и $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$ при $x \in [a,b]$.*

Доказательство. Пусть $F(a) = 0$. В силу теоремы Радо́на-Никоди́ма существует функция $f \in \boldsymbol{L}[a,b]$, т.ч. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (см. свойство 4). Представляя функцию в виде разности $f = f_+ - f_-$ неотрицательных функций, мы сведем доказательство к случаю, когда функция $f(x) \geqslant 0$ неотрицательна, а функция $F(x)$ неубывающая. Нам осталось доказать, что имеет место равенство $F'(x) = f(x)$ п.в. на $[a,b]$.

Пусть $F_n(x) \doteqdot \int_a^x f_n(t)\,dt$, где $f_n(t) \doteqdot \min\{f(t), n\}$. Тогда $F_n \in \mathrm{Lip}[a,b]$ и по лемме мы получим $F_n(x) = \int_a^x F_n'(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$. В силу единственности производной

Радóна-Никоди́ма $F_n'(x) = f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$. Значит $F(x) - F_n(x) = \int_a^x f(t) - f_n(t)\,dt$. Так как здесь подынтегральная функция неотрицательна, то функция $F(x) - F_n(x)$ неубывающая и, следовательно, у нее существует неотрицательная производная $F'(x) - F_n'(x) \geqslant 0$ п.в. на $[a,b]$. Поэтому $F'(x) \geqslant F_n'(x) = f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$.

Переходя к пределу в этом неравенстве получим, что $F'(x) \geqslant f(x)$ п.в. на $[a,b]$. Отсюда интеграл $\int_a^b F'(t) - f(t)\,dt \geqslant 0$. С другой стороны, по лемме выполняется обратное неравенство, т.к. $\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$. Таким образом, интеграл равен нулю $\int_a^b F'(t) - f(t)\,dt = 0$. Поскольку подынтегральная функция является неотрицательной п.в. на отрезке $[a,b]$, то $F'(x) = f(x)$ п.в. на $[a,b]$. $\square$

Пример. Рассмотрим пример непрерывной и п.в. дифференцируемой функции на отрезке, которая не является абсолютно непрерывной.

Как известно, функция Ка́нтора $k : [0,1] \to [0,1]$ является на $[0,1]$ монотонной, непрерывной и отображает $[0,1]$ на $[0,1]$ (см. А. Н. Колмогóров, С. В. Фоми́н, “Элементы теории функций и функционального анализа”, 1989 г., стр. 74 и 391). Ее производная равна нулю $k'(x) = 0$ п.в. на отрезке $[0,1]$, поскольку на каждом дополнительном интервале к канторову множеству $K \subset [0,1]$ она равна константе, а канторово множество имеет меру нуль $\mu_1(K) = 0$. Отсюда получим

$$1 = k(1) - k(0) \neq \int_0^1 k'(t)\,dt = 0,$$

т.е. формула Ньютона–Ле́йбница не выполняется на отрезке $[0,1]$. Следовательно, $k \notin \boldsymbol{AC}[0,1]$ не является абсолютно непрерывной. В частности, $k \notin \mathrm{Lip}[0,1]$.

10 ПРОСТРАНСТВА $L_p(X,\mu)$, $0<p\leqslant\infty$

Пусть (X,Σ,μ) — измеримое пространство с полной и σ-конечной мерой μ, а $\mathbb{F}$ обозначает поле действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел.

Определение. *Комплекснозначная функция* $f: X\to\mathbb{C}$ называется *измеримой*, если $f=u+\boldsymbol{i}v$, где $u(x)\doteqdot\Re f(x)$ и $v(x)\doteqdot\Im f(x)$ являются измеримыми функциями. Функция называется *интегрируемой* $f\in \boldsymbol{L}(X,\mu)$, если $u,v\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$, при этом

$$\int_X f\,d\mu\doteqdot\int_X u\,d\mu+\boldsymbol{i}\int_X v\,d\mu\,.$$

1. *Если* $f,g\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$ *и* $\lambda\in\mathbb{F}$, *то* $\lambda f, f+g\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$ *и выполняются равенства*

$$\int_X\lambda f\,d\mu=\lambda\int_X f\,d\mu \;\text{ и }\; \int_X(f+g)\,d\mu=\int_X f\,d\mu+\int_X g\,d\mu\,.$$

Докажем, например, первое равенство. Пусть $\lambda=a+\boldsymbol{i}b$ и $f=u+\boldsymbol{i}v$, тогда имеем $\lambda f=(au-bv)+\boldsymbol{i}(av+bu)$. Отсюда по определению интеграла получим

$$\int_X\lambda f\,d\mu=\Big(a\int_X u\,d\mu-b\int_X v\,d\mu\Big)+\boldsymbol{i}\Big(a\int_X v\,d\mu+b\int_X u\,d\mu\Big)=\lambda\int_X f\,d\mu\,.$$

Таким образом, $\boldsymbol{L}(X,\mu)$ является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$.

2. *Если* $f\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$, *то модуль* $|f|\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$ *и* $|\int_X f\,d\mu|\leqslant\int_X|f|\,d\mu$.

Так как $|f|\leqslant|u|+|v|$, то $|f|\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$. Если $\int_X f\,d\mu=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}|\int_X f\,d\mu|$, то получаем

$$\Big|\int_X f\,d\mu\Big|=\Re\big(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}\int_X f\,d\mu\big)=\int_X\Re\big(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}f\big)\,d\mu\leqslant\int_X|f|\,d\mu\,.$$

3. *Если* $f_1\sim g_1$ *и* $f_2\sim g_2$, *то* $f_1+f_2\sim g_1+g_2$ *и* $\lambda f_1\sim\lambda g_1$.

По определению эквивалентности $f_1(x)=g_1(x)$ при всех $x\in X\setminus N_1$ и $f_2(x)=g_2(x)$ при всех $x\in X\setminus N_2$, где $\mu(N_1)=\mu(N_2)=0$. Тогда $f_1(x)+f_2(x)=g_1(x)+g_2(x)$ при всех $x\in X\setminus N$ и $\lambda f_1(x)=\lambda g_1(x)$ при всех $x\in X\setminus N_1$, где $N=N_1\cup N_2$ и $\mu(N)=0$.

Пространство классов эквивалентности измеримых функций является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$. При этом, если $f\sim g$ и $f\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$, то $g\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$ и интегралы равны. Следовательно, интеграл является линейным функционалом на факторпространстве пространства $\boldsymbol{L}(X,\mu)$ по подпространству функций $f\sim 0$.

Определение. Пространством *существенно ограниченных функций* называется множество классов эквивалентности ограниченных измеримых функций $f: X\to\mathbb{F}$ с нормой $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}\doteqdot\inf_{\mu(A)=0}\sup_{x\in X\setminus A}|f(x)|$ и обозначается через $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$.

По определению $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ есть факторпространство пространства ограниченных измеримых функций $\boldsymbol{B}(X,\mu)$ по подпространству функций, эквивалентных нулю. Мы будем обращаться с классами эквивалентности, как с обычными функциями. Так как пространство $\boldsymbol{B}(X,\mu)$ является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$, то его факторпространство $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ будет линейным пространством над полем $\mathbb{F}$.

Норма $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ называется *существенной верхней гранью* модуля функции $|f(x)|$. Покажем, что указанная в определении нормы нижняя грань достигается. Для каждого n выберем $A_n\subset X$, т.ч. $\mu(A_n)=0$ и $\sup_{x\in X\setminus A_n}|f(x)|\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}+1/n$. Тогда $\sup_{x\in X\setminus A_f}|f(x)|\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$, где $A_f\doteqdot\bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Поскольку $\mu(A_f)=0$, то существенная верхняя грань совпадает с верхней гранью, т.е. $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=\sup_{x\in X\setminus A_f}|f(x)|$.

Докажем свойства нормы. Если $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=\sup_{x\in X\setminus A_f}|f(x)|=0$, то функция $f\sim 0$. Однородность нормы $\|\lambda f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=|\lambda|\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$ очевидна. Пусть A_f и A_g такие множества меры нуль, что $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=\sup_{x\in X\setminus A_f}|f(x)|$ и $\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=\sup_{x\in X\setminus A_g}|g(x)|$. Тогда, полагая $A=A_f\cup A_g$, получим множество меры нуль, для которого

$$\|f+g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}\leqslant\sup_{x\in X\setminus A}|f(x)+g(x)|\leqslant\sup_{x\in X\setminus A}|f(x)|+\sup_{x\in X\setminus A}|g(x)|\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}+\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ является нормированным пространством.

Теорема. *Пространство $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ является ба́наховым пространством.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ последовательность Коши́ в пространстве $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$. Выберем множество $A_{nm}\subset X$ меры нуль, для которого выполняется равенство $\sup_{x\in X\setminus A_{nm}}|f_n(x)-f_m(x)|=\|f_n-f_m\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Тогда множество $A=\bigcup_{n,m=1}^\infty A_{nm}$ имеет меру нуль и $\|f_n-f_m\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=\sup_{x\in X\setminus A}|f_n(x)-f_m(x)|$ при всех n и m. Поэтому $\{f_n\}$ является последовательностью Коши́ в пространстве $\boldsymbol{B}(X\setminus A,\mu)$ ограниченных измеримых функций на множестве $X\setminus A$. В силу полноты $\boldsymbol{B}(X\setminus A,\mu)$ существует равномерный предел $f_n\rightrightarrows f$ на множестве $X\setminus A$. Полагая $f(x)=0$ при $x\in A$, получаем ограниченную измеримую функцию $f\in\boldsymbol{B}(X,\mu)$. При этом, из равномерной сходимости последовательности на множестве $X\setminus A$ следует, что $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=0$. □

Определение. Пространством *суммируемых функций в степени* $p>0$ называется множество всех классов эквивалентности измеримых функций $f:X\to\mathbb{F}$, т.ч. $|f|^p\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$, и обозначается через $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Квазинорма и норма в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при различных $0<p<\infty$ определяются следующими формулами:

$$\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}\doteqdot\int_X|f|^p d\mu\ \text{ при }\ 0<p<1;\quad \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}\doteqdot\Big(\int_X|f|^p d\mu\Big)^{1/p}\ \text{ при }\ 1\leqslant p<\infty.$$

По определению $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ факторпространство пространства всех измеримых функций, т.ч. $|f|^p\in\boldsymbol{L}(X,\mu)$, по подпространству функций, эквивалентных нулю. Мы будем обращаться с классами эквивалентности, как с обычными функциями. Если $f,g\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, то $|f+g|^p\leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p)$ и значит $f+g\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Кроме того, $\lambda f\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $\lambda\in\mathbb{F}$. Поэтому $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ линейное пространство над $\mathbb{F}$.

Неравенство Гёльдера. Если $f,g:X\to\mathbb{F}$ являются измеримыми функциями, то

$$\int_X|fg|\,d\mu\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}\|g\|_{Lq}\quad\text{при }\ 1\leqslant p,q\leqslant\infty\ \text{ и }\ 1/p+1/q=1.$$

В случае $p=1$ и $q=\infty$, полагая $\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=\sup_{x\in X\setminus A_g}|g(x)|$, где $\mu(A_g)=0$, получим

$$\int_X|fg|\,d\mu=\int_{X\setminus A_g}|fg|\,d\mu\leqslant\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}\int_{X\setminus A_g}|f|\,d\mu=\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}\|f\|_{\boldsymbol{L}_1}.$$

Пусть $1<p,q<\infty$. Если один из интегралов $A=\int_X |f|^p\,d\mu$ и $B=\int_X |g|^q\,d\mu$ равен нулю или бесконечности, то утверждение верно. Полагая $a \doteqdot |f|/A^{1/p}$ и $b \doteqdot |g|/B^{1/q}$ в *неравенстве Ю́нга* $ab\leqslant a^p/p+b^q/q$, а затем интегрируя его, получим

$$\int_X ab\,d\mu \leqslant \int_X a^p/p\,d\mu+\int_X b^q/q\,d\mu=\int_X |f|^p d\mu/pA+\int_X |g|^q d\mu/qB=1/p+1/q=1\,.$$

Отсюда вытекает неравенство Гёльдера в случае $1<p,q<\infty$ и $1/p+1/q=1$.

Неравенство Минко́вского. Если $f,g:X\to\mathbb{F}$ измеримые функции, то

$$\|f+g\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}+\|g\|_{\boldsymbol{L}_p}\quad \text{при } 0<p\leqslant\infty.$$

В случае $p=\infty$ неравенство было доказано выше. В случае $0<p\leqslant1$, применяя *неравенство Люро́та* $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$, где $a,b\in\mathbb{R}_+$, получим

$$\|f+g\|_{\boldsymbol{L}_p}=\int_X |f+g|^p\,d\mu\leqslant\int_X |f|^p\,d\mu+\int_X |g|^p\,d\mu=\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}+\|g\|_{\boldsymbol{L}_p}.$$

В случае $1<p<\infty$ обозначим через $A=\int_X |f|^p\,d\mu$, $B=\int_X |g|^p\,d\mu$, $C=\int_X |f+g|^p\,d\mu$. Применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что $(p-1)q=p$, имеем

$$C=\int_X |f+g|^p\,d\mu\leqslant\int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu+\int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu\leqslant A^{1/p}C^{1/q}+B^{1/p}C^{1/q}.$$

Поделив на множитель $C^{1/q}$, получим неравенство Минко́вского.

Обобщенное неравенство Минко́вского. Если функция $f:X\times Y\to\mathbb{F}$ измерима на произведении $X\times Y$ двух измеримых пространств $(X,\mathfrak{M},\mu)$ и $(Y,\mathfrak{N},\nu)$, то

$$\Big(\int_X\Big(\int_Y |f(x,y)|\,d\nu\Big)^p d\mu\Big)^{1/p}\leqslant\int_Y\Big(\int_X |f(x,y)|^p d\mu\Big)^{1/p} d\nu\quad\text{при } 1<p<\infty.$$

По теореме Фуби́ни функция $g(x)\doteqdot\int_Y |f_x|\,d\nu$ определена п.в. и измерима на X. Меняя порядок интегрирования и применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\int_X g^p d\mu=\int_Y\Big(\int_X |f_y|\,g^{p-1}d\mu\Big)d\nu\leqslant\int_Y\Big(\int_X |f_y|^p d\mu\Big)^{1/p}d\nu\,\Big(\int_X g^p d\mu\Big)^{1/q}.$$

т.к. $(p-1)q=p$. Осталось поделить обе части неравенства на последнюю скобку.

Теорема. *Пространство* $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ *суммируемых функций в степени* $1\leqslant p<\infty$ *является банаховым пространством, а при* $0<p<1$ *пространством Фреше́.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ последовательность Коши́ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Выберем $n_1<n_2<\ldots$, т.ч. $\|f_i-f_j\|_{\boldsymbol{L}_p}<1/2^k$ при всех $i,j\geqslant n_k$ и положим

$$g(x)\doteqdot|f_{n_1}(x)|+\sum_{i=1}^{\infty}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|\ \text{ и }\ s_m(x)=|f_{n_1}(x)|+\sum_{i=1}^{m}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|\,.$$

Так как частичные суммы ряда $s_m(x)$ сходятся монотонно $s_m(x)\nearrow g(x)$ и их нормы по неравенству Минко́вского $\|s_m\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant\|f_{n_1}\|_{\boldsymbol{L}_p}+1$, то в силу теоремы о монотонной сходимости $\|g\|_{\boldsymbol{L}_p}=\lim\limits_{m\to\infty}\|s_m\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant\|f_{n_1}\|_{\boldsymbol{L}_p}+1$. Отсюда функция $g\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Поэтому она принимает конечные значения $g(x)<\infty$ п.в. на множестве X.

По доказанному выше следующий ряд сходится абсолютно п.в. на множестве X

$$f(x) \doteq f_{n_1}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\big(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\big)=\lim_{n_k\to\infty}f_{n_k}(x)\,.$$

Из неравенства $|f(x)|\leqslant g(x)$ следует $f\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Так как п.в. на множестве X

$$|f(x)-f_{n_k}(x)|=\lim_{l\to\infty}\Big|\sum_{i=k}^{l}\big(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\big)\Big|\leqslant\lim_{l\to\infty}\sum_{i=k}^{l}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|\doteq\lim_{l\to\infty}s_{kl}(x)\,,$$

то, применяя лемму Фату́, а затем неравенство Минко́вского, получим

$$\|f-f_{n_k}\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant\lim_{l\to\infty}\|s_{kl}\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant\lim_{l\to\infty}\sum_{i=k}^{l}\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant 1/2^{k-1}\,.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant\lim\limits_{n_k\to\infty}\|f-f_{n_k}\|_{\boldsymbol{L}_p}+\lim\limits_{n_k>n\to\infty}\|f_{n_k}-f_n\|_{\boldsymbol{L}_p}=0$, то последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. □

Замечание. В частности, при доказательстве этой теоремы было показано, что если $\{f_n\}\subset\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ является последовательностью Коши́, то найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, т.ч. $f_{n_k}\to f$ сходится п.в. на множестве X.

Лемма. *Множество $\boldsymbol{H}(X,\mu)$ всех простых интегрируемых функций $h:X\to\mathbb{F}$ является всюду плотным в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$.*

Доказательство. Пусть $f=u+\boldsymbol{i}v$, где $u,v\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Тогда существуют простые измеримые функции $u_n,v_n\in\boldsymbol{H}(X,\mu)$, т.ч. $u_n\to u$, $|u_n|\leqslant|u|$, $v_n\to v$, $|v_n|\leqslant|v|$ на X. При этом, если эти функции $u,v\in\boldsymbol{L}_\infty(X.\mu)$ являются ограниченными, то сходимость будет равномерной на X. Тогда простые функции $h_n\doteq u_n+\boldsymbol{i}v_n\in\boldsymbol{H}(X,\mu)$ и по теореме о мажорируемой сходимости $\|f-h_n\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant\|u-u_n\|_{\boldsymbol{L}_p}+\|v-v_n\|_{\boldsymbol{L}_p}\to 0$. □

Напомним, что отображение $\alpha:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *линейным функционалом*, если выполняются следующие равенства: $\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)$ и $\alpha(\lambda x)=\lambda\alpha(x)$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda\in\mathbb{F}$. Линейный функционал α называется *ограниченным*, если он имеет конечную норму

$$\|\alpha\|\doteq\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\alpha(x)|=\sup_{x\neq 0}\frac{|\alpha(x)|}{\|x\|}<\infty\,.$$

Как было доказано ранее, линейный функционал является ограниченным тогда и только тогда, когда он непрерывен. Нормированное пространство $\boldsymbol{E}'$, состоящее из всех непрерывных линейных функционалов $\alpha:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$, называется *сопряженным пространством* к пространству $\boldsymbol{E}$.

Теорема (Ри́сса–Штейнга́уза о представлении)**.** *Пусть $1\leqslant p<\infty$ и $1/p+1/q=1$. Тогда для каждого ограниченного функционала $\alpha:\boldsymbol{L}_p(X,\mu)\to\mathbb{F}$ существует единственная функция $g\in\boldsymbol{L}_q(X,\mu)$, для которой норма $\|g\|_{\boldsymbol{L}_q}=\|\alpha\|$ и имеет место равенство $\alpha(f)=\int_X fg\,d\mu$ при всех $f\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию множества $\varphi(A)\doteqdot\alpha(\chi_A)$, определенную для всех измеримых множеств $A\in\Sigma$ конечной меры $\mu(A)<\infty$. В силу линейности функционала α эта функция является конечно-аддитивной

$$\varphi\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n}A_k\Big)=\alpha\Big(\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k}\Big)=\sum_{k=1}^{n}\alpha\big(\chi_{A_k}\big)=\sum_{k=1}^{n}\varphi(A_k)\,.$$

Если $A=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n$, где $A,A_n\in\Sigma$ измеримые множества конечной меры, то в силу σ-аддитивности меры $\|\chi_A-\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k}\|_{\boldsymbol{L}_p}=(\sum_{k>n}\mu(A_k))^{1/p}\to 0$. Следовательно, ряд $\chi_A=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}$ сходится по норме $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ и в силу непрерывности функционала $\varphi(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)$, т.е. функция φ σ-аддитивна на множествах конечной меры. Так как по определению нормы функционала $|\alpha(f)|\leqslant\|\alpha\|\,\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$ при всех $f\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, то $|\varphi(A)|\leqslant\|\alpha\|\,\big((\mu(A)\big)^{1/p}$. Значит функция $\varphi\ll\mu$ абсолютно непрерывна.

По определению σ-конечности меры множество $X=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, где $\mu(A_k)<\infty$. Так как на множестве $X_n\doteqdot\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ конечной меры функция φ является зарядом, то в силу теоремы Радо́на–Никоди́ма существует единственная функция $g_n\in\boldsymbol{L}_1(X_n,\mu)$, т.ч. $\varphi(A)=\int_A g_n\,d\mu$ для всех $A\subset X_n$, т.ч. $A\in\Sigma$. Если определить $g(x)\doteqdot g_n(x)$ при всех $x\in X_n$, то получим функцию, интегрируемую на множествах конечной меры, для которой имеет место представление $\alpha(h)=\int_X hg\,d\mu$ при всех $h\in\boldsymbol{H}(X,\mu)$.

Покажем, что $\|g\|_{\boldsymbol{L}_q}\leqslant\|\alpha\|$. Пусть $h\in\boldsymbol{H}(X,\mu)$, т.ч. $0\leqslant h\leqslant|g|$. Так как по лемме найдутся простые функции, т.ч. $h_n\to f\doteqdot h^{q-1}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\arg g}$ сходятся на множестве X, то, применяя теорему Лебе́га о мажорируемой сходимости, получим

$$\int_X h^q d\mu\leqslant\int_X h^{q-1}|g|\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X h_n g\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\alpha(h_n)\leqslant\|\alpha\|\,\Big(\int_X h^q d\mu\Big)^{1/p},$$

т.к. $|h_n|^p\leqslant|h|^{(q-1)p}=|h|^q$. Поделив это неравенство по последнюю скобку, имеем $\|h\|_{\boldsymbol{L}_q}\leqslant\|\alpha\|$. Отсюда следует $\|g\|_{\boldsymbol{L}_q}\leqslant\|\alpha\|$ по свойству интеграла Лебе́га.

В случае $q=\infty$ предположим, что множество $A\subset\{x\in X\mid|g(x)|\geqslant\|\alpha\|+\varepsilon\}$ имеет конечную и положительную меру при $\varepsilon>0$. Так как по лемме найдутся простые функции, т.ч. $h_n\to f\doteqdot\chi_A e^{-\boldsymbol{i}\arg g}/\mu(A)$ сходятся на X, то, применяя теорему Лебе́га о мажорируемой сходимости и неравенство $\|h_n\|_{\boldsymbol{L}_1}\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_1}=1$, получим

$$\|\alpha\|+\varepsilon\leqslant\int_X fg\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X h_n g\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\alpha(h_n)\leqslant\|\alpha\|,$$

что невозможно. Следовательно, имеет место неравенство $\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}\leqslant\|\alpha\|$.

Пусть $f\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. В силу леммы найдутся такие простые функции, что $h_n\to f$ сходятся по норме $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Поскольку функции $h_n g$ имеют мажоранту $|h_n g|\leqslant|fg|$, которая в силу неравенства Гёльдера интегрируема, то, применяя непрерывность функционала и теорему Лебе́га о мажорируемой сходимости, получим

$$\alpha(f)=\lim_{n\to\infty}\alpha(h_n)=\lim_{n\to\infty}\int_X h_n g\,d\mu=\int_X fg\,d\mu\,.$$

Так как в силу неравенства Гёльдера $|\alpha(f)|\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}\|g\|_{\boldsymbol{L}_q}$, то $\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=\|\alpha\|$. $\square$

Согласно этой теореме сопряженное пространство к пространству $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $1\leqslant p<\infty$ изометрически изоморфно пространству $\boldsymbol{L}_q(X,\mu)$, где $1/p+1/q=1$. При этом изоморфизм сопряженного пространства $\boldsymbol{L}'_p(X,\mu)$ пространству $\boldsymbol{L}_q(X,\mu)$ определяется по правилу: каждому $\alpha\in\boldsymbol{L}'_p(X,\mu)$ соответствует $g\in\boldsymbol{L}_q(x,\mu)$, т.ч. имеет место равенство $\alpha(f)=\int_X fg\,d\mu$ при всех $f\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$.

В частности, если $X=\mathbb{N}$ множество натуральных чисел и мера каждой точки равна $\mu(\{n\})=1$, то пространства $\boldsymbol{L}_p(\mathbb{N},\mu)=\boldsymbol{\ell}_p$ изометрически изоморфны при всех $0<p\leqslant\infty$. Следовательно, сопряженное пространство к пространству $\boldsymbol{\ell}_p$ при $1\leqslant p<\infty$ изометрически изоморфно пространству $\boldsymbol{\ell}_q$, где $1/p+1/q=1$. При этом изоморфизм сопряженного пространства $\boldsymbol{\ell}'_p$ пространству $\boldsymbol{\ell}_q$ устанавливается по правилу: каждому $\alpha\in\boldsymbol{\ell}'_p$ соответствует элемент $y=\{y_n\}\in\boldsymbol{\ell}_q$, т.ч. имеет место равенство $\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n$ при всех $x=\{x_n\}\in\boldsymbol{\ell}_p$.

10 НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Обозначим через $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ *нормированные пространства* над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел. Напомним, что $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *линейным отображением* (или линейным оператором) над полем $\mathbb{F}$, если

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2) \text{ при всех } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F} \text{ и } x_1,x_2\in\boldsymbol{E}.$$

Норма линейного отображения $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ вычисляется по следующим формулам:

$$\|f\| \doteqdot \sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|f(x)\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, \quad \text{где } \boldsymbol{S}\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid \|x\|\leqslant 1\}.$$

Линейное отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если каждое ограниченное множество $M\subset\boldsymbol{E}$ отображается в ограниченное множество $f(M)\subset\boldsymbol{F}$. Как было показано ранее, это равносильно непрерывности отображения f. Если линейное отображение f является биективным, то у него существует обратное отображение $f^{-1}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{E}$, которое также будет линейным и биективным.

Относительно операций сложения $(f+g)(x)\doteqdot f(x)+g(x)$ и умножения на число $(\lambda f)(x)\doteqdot\lambda f(x)$ множество $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ непрерывных линейных отображений образует нормированное пространство над $\mathbb{F}$, т.к. выполняются следующие свойства: невырожденность нормы $\|f\|=0\Leftrightarrow f(x)=0$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$; однородность нормы $\|\lambda f\|=|\lambda|\,\|f\|$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$; неравенство треугольника при всех $f,g\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$

$$\|f+g\|=\sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|f(x)+g(x)\|\leqslant\sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|f(x)\|+\sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|g(x)\|=\|f\|+\|g\|.$$

В нормированном пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})\doteqdot\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$ определятся также операция *произведения* отображений по формуле $(f\cdot g)(x)\doteqdot f(g(x))$, при этом выполняется свойство *билинейности* этого произведения, т.к. для всех $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$

$$f\cdot(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)=\lambda_1(f\cdot g_1)+\lambda_2(f\cdot g_2),\quad (\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)\cdot g=\lambda_1(f_1\cdot g)+\lambda_2(f_2\cdot g).$$

Кроме того, в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ норма тождественного отображения $I(x)=x$ равна $\|I\|=1$, а норма произведения двух отображений удовлетворяет неравенству $\|f\cdot g\|\leqslant\|f\|\,\|g\|$, т.к. $\|f(g(x))\|\leqslant\|f\|\,\|g(x)\|\leqslant\|f\|\,\|g\|\,\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Поэтому говорят, что пространство $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является *нормированной алгеброй*.

Теорема. *Если $\boldsymbol{F}$ — банахово пространство, то пространство непрерывных линейных отображений $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ба́наховым пространством.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ последовательность Коши́ в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то для любого $\varepsilon>0$ существует N, т.ч. $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$. Тогда по определению нормы $\|f_n(x)-f_m(x)\|<\varepsilon\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Отсюда $\{f_n(x)\}$ последовательность Коши́ в пространстве $\boldsymbol{F}$. В силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $f(x)\doteqdot\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. Ясно, что $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ является линейным отображением и $\|f_n(x)-f(x)\|\leqslant\varepsilon\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $n\geqslant N$, т.е. $\|f_n-f\|\leqslant\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$. Поэтому $f_n\to f$ сходится по норме. При этом, т.к. $\|f\|\leqslant\|f_n\|+\|f_n-f\|$, то $f\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. $\square$

Через $\boldsymbol{E}' \doteqdot \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\mathbb{F})$ обозначается *сопряженное пространство* к пространству $\boldsymbol{E}$, состоящее из всех непрерывных линейных функционалов $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$, заданных на пространстве $\boldsymbol{E}$ с соответствующей нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|f(x)|$.

Следствие. *Сопряженное пространство $\boldsymbol{E}'$ к нормированному пространству $\boldsymbol{E}$ является банаховым пространством.*

Определение. Нормированные пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называются *изоморфными* и обозначаются $\boldsymbol{E}\simeq\boldsymbol{F}$, если существует такое биективное непрерывное линейное отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, что обратное отображение f^{-1} непрерывно.

Нормированные пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называются *изометрически изоморфными* (или просто изометричными) и обозначаются $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}$, если существует биективное линейное *изометричное* отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, т.е. для которого выполняется равенство $\|f(x)\|=\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.

Ясно, что изометричные пространства являются изоморфными. При этом, если нормированные пространства изоморфны и одно из них является банаховым или сепарабельным, то другое будет соответственно банаховым или сепарабельным. Из следующей теоремы вытекает, что нормированные пространства одной и той же конечной размерности являются изоморфными.

Теорема. *Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности $\dim\boldsymbol{E}=n$ над полем $\mathbb{F}$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{F}^n$.*

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ обозначает базис $\boldsymbol{E}$. Поэтому для каждого $x\in\boldsymbol{E}$ существует единственный элемент $\lambda\doteqdot\{\lambda_i\}_{i=1}^n\in\mathbb{F}^n$, т.ч. $x=\sum_{i=1}^n\lambda_i e_i$. Определим отображение $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}^n$ по формуле $f(x)\doteqdot\lambda$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Это отображение f является линейным и биективным. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda)\doteqdot\|x\|$. Применяя неравенство треугольника и неравенство Коши́, получим при всех $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}^n$

$$|\varphi(\lambda_1)-\varphi(\lambda_2)|\leqslant\|x_1-x_2\|\leqslant\sum_{i=1}^n|\lambda_{1i}-\lambda_{2i}|\,\|e_i\|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n|\lambda_{1i}-\lambda_{2i}|\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^n\|e_i\|^2\Big)^{1/2}.$$

Поэтому функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{F}^n$ величина нижней грани $a\doteqdot\inf_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1}\varphi(\lambda)>0$ положительна, а величина верхней грани $b\doteqdot\sup_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1}\varphi(\lambda)<\infty$ конечна. Следовательно, т.к. $\varphi(t\lambda)=t\varphi(\lambda)$ при $t\geqslant 0$, то получаем неравенство $a\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}\leqslant\|x\|\leqslant b\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda=f(x)$. Таким образом, отображения f и f^{-1} являются ограниченными и значит непрерывны. $\square$

Следствие 1. *В линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ конечной размерности любые две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны $\|x\|_1\sim\|x\|_2$, т.е. существует такие числа $c_1>0$ и $c_2>0$, что $c_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant c_2\|x\|_1$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.*

Из полноты пространства $\mathbb{F}^n$ и критерия компактности Хаусдо́рфа вытекает

Следствие 2. *Всякое нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности является банаховым пространством, а всякое его ограниченное и замкнутое подмножество $M\subset\boldsymbol{E}$ является компактным.*

Определение. Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства. Величина $\rho(x,L) \doteqdot \inf_{y\in L}\|x-y\|$ называется *наилучшим приближением* элемента $x \in \boldsymbol{E}$ подпространством L. Всякий элемент $y_0 \in L$, для которого $\rho(x,L) = \|x-y_0\|$, называется *элементом наилучшего приближения* подпространством L.

Теорема (о существовании наилучшего приближения)**.** *Если подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность* $\dim L < \infty$*, то для всякого $x \in \boldsymbol{E}$ существует элемент $y_0 \in L$ наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $x \in \boldsymbol{E}$, тогда имеем $\rho(x,L) \leqslant \|x\|$. Рассмотрим множество $K_x \doteqdot \{y \in L \mid \|x-y\| \leqslant \|x\|\}$. Поскольку K_x является замкнутым, ограниченным и содержится в конечномерном пространстве, то в силу следствия 2 оно компактно. Поэтому непрерывная функция $\varphi_x(y) \doteqdot \|x-y\|$ достигает своей нижней грани на компакте K_x. Следовательно, существует $y_0 \in K_x$, т.ч. $\varphi_x(y_0) = \inf_{y\in K_x}\varphi_x(y)$. □

Определение. Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *строго нормированным*, если из равенства $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ следует, что $x = \lambda y$, где $\lambda \geqslant 0$.

Примерами строго нормированных пространств является пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при всех $1 < p < \infty$. Пространства $\boldsymbol{B}(X)$, $\boldsymbol{C}(X)$, $\boldsymbol{L}_1(X,\mu), \boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ будут строго нормированными, если их размерность равна единице.

Теорема (о единственности наилучшего приближения)**.** *Если пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным, то элемент наилучшего приближения подпространством $L \subset \boldsymbol{E}$ является единственным.*

Доказательство. Пусть $\rho(x,L) = \|x-y_0\| = \|x-y_1\|$, где $y_0, y_1 \in L$. Тогда имеем

$$\rho(x,L) \leqslant \left\|x - \frac{y_0+y_1}{2}\right\| = \left\|\frac{x-y_0}{2} + \frac{x-y_1}{2}\right\| \leqslant \left\|\frac{x-y_0}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y_1}{2}\right\| = \rho(x,L).$$

Следовательно, вместо неравенств имеют место равенства. Поэтому в силу условия строгой нормированности $x - y_1 = \lambda(x-y_0)$ при некотором $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 1$, то $y_0 = y_1$. Если $\lambda \neq 1$, то $x = (y_1 - \lambda y_0)/(1-\lambda) \in L$ и значит $x = y_0 = y_1$. □

Ненулевой элемент $x \in \boldsymbol{E}$, $x \neq 0$, называют *перпендикуляром* к подпространству $L \subset \boldsymbol{E}$, если имеет место неравенство $\|x-y\| \geqslant \|x\|$ при всех $y \in L$, т.е. $\rho(x,L) = \|x\|$. По теореме существования наилучшего приближения для каждого конечномерного подпространства $L \subset \boldsymbol{E}$ существует перпендикуляр $x \in \boldsymbol{E}$ с нормой $\|x\| = 1$.

Лемма (Ф. Ри́сса о почти перпендикуляре)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым подпространством нормированного пространства. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|x\| = 1$ и $\|x-y\| > 1-\varepsilon$ при всех $y \in L$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \boldsymbol{E} \setminus L$, тогда $d \doteqdot \rho(x_0, L) > 0$. Выберем элемент $y_0 \in L$, т.ч. $\|x_0 - y_0\| < d/(1-\varepsilon)$. Тогда если $x \doteqdot (x_0-y_0)/\|x_0-y_0\|$, то при всех $y \in L$ имеем

$$\|x-y\| = \left\|\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|} - y\right\| = \frac{\|x_0-y_1\|}{\|x_0-y_0\|} \geqslant \frac{d}{\|x_0-y_0\|} > 1-\varepsilon\,,$$

где элемент $y_1 \doteqdot y_0 + \|x_0-y_0\|\, y \in L$. □

Теорема. *Замкнутый единичный шар* $\boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ *в нормированном пространстве* $\boldsymbol{E}$ *является компактным в том и только в том случае, когда пространство* $\boldsymbol{E}$ *имеет конечную размерность* $\dim \boldsymbol{E} < \infty$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\dim \boldsymbol{E} = \infty$. Если $x_1 \in \boldsymbol{S}$ и $L_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1\}$ обозначает линейную оболочку x_1, то по лемме существует $x_2 \in \boldsymbol{S} \setminus \boldsymbol{L}_1$, т.ч. $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Аналогично, если $L_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, x_2\}$ обозначает линейную оболочку x_1 и x_2, то существует $x_3 \in \boldsymbol{S} \setminus L_2$, т.ч. $\|x_3 - x_1\| > 1/2$, $\|x_3 - x_2\| > 1/2$ и т.д. По индукции имеем $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, \dots, x_n\}$ и существует $x_{n+1} \in \boldsymbol{S} \setminus L_n$, т.ч. $\|x_{n+1} - x_k\| > 1/2$ при всех $k = 1, \dots, n$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности и значит шар $\boldsymbol{S}$ не является компактным.

Достаточность. Если $n = \dim \boldsymbol{E}$, то существует изоморфизм $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$. Образ единичного шара $f(\boldsymbol{S}) \subset \mathbb{F}^n$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{F}^n$. Поэтому множество $f(\boldsymbol{S})$ компактно в $\mathbb{F}^n$ и, следовательно, единичный шар $\boldsymbol{S}$ компактен в силу непрерывности обратного отображения $f^{-1} : \mathbb{F}^n \to \boldsymbol{E}$. □

Определение. *Алгеброй* $\boldsymbol{A}$ называется линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ с определенной в ней операцией произведения элементов $x \cdot y \in \boldsymbol{A}$, которая является *ассоциативной*, т.е. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, и *билинейной*, т.е. при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \cdot y = \lambda_1 (x_1 \cdot y) + \lambda_2 (x_2 \cdot y), \quad x \cdot (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 (x \cdot y_1) + \lambda_2 (x \cdot y_2).$$

Нормированной алгеброй $\boldsymbol{A}$ называется нормированное пространство, которое является алгеброй с единицей $e \in \boldsymbol{E}$, т.е. $e \cdot x = x \cdot e = x$, и выполняются следующие свойства его нормы: $\|e\| = 1$ и $\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$. Полная нормированная алгебра называется *банаховой алгеброй*.

Примером банаховой алгебры является пространство $\boldsymbol{C}(X)$ всех непрерывных функций $f : X \to \mathbb{F}$ на компакте X с операцией обычного произведения функций и нормой $\|f\| \doteqdot \max_{x \in X} |f(x)|$. Обозначим далее через $\boldsymbol{C}_r(X)$ и $\boldsymbol{C}_c(X)$ пространства действительных и комплексных функций. Линейное подпространство $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{C}_r(X)$ называется *решёткой*, если для всех $f, g \in \boldsymbol{L}$ функции $f \vee g, f \wedge g \in \boldsymbol{L}$, где

$$f \vee g(x) \doteqdot \max\{f(x), g(x)\}, \quad f \wedge g(x) \doteqdot \min\{f(x), g(x)\}.$$

1. *Если алгебра* $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}_r(X)$ *содержит единицу, т.е. функцию равную* $e(x) = 1$ *при всех* $x \in X$, *то ее замыкание* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *является решёткой.*

Поскольку $f \vee g = (f + g + |f - g|)/2$ и $f \wedge g = (f + g - |f - g|)/2$, то достаточно показать, что модуль $|f| \in \overline{\boldsymbol{A}}$, если $f \in \overline{\boldsymbol{A}}$. Без ограничения общности, мы можем считать, что модуль $|f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in X$. По известной теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, что $|\sqrt{1-t} - P(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in [0, 1]$. Обозначая переменную через $t = 1 - f^2$, мы получим $|f| = \sqrt{1-t}$. Отсюда норма $\| \, |f| - P(1 - f^2)\| < \varepsilon$. Поскольку замыканием алгебры является алгебра, то $P(1 - f^2) \in \overline{\boldsymbol{A}}$, если $f \in \overline{\boldsymbol{A}}$. Следовательно, $|f| \in \overline{\boldsymbol{A}}$. Таким образом, подпространство $\overline{\boldsymbol{A}} \subset \boldsymbol{C}_r(X)$ является решёткой.

Говорят, что множество M функций $g : X \to \mathbb{F}$ *разделяет точки* множества X, если для любых различных точек $y, z \in X$, $y \neq z$, существует функция $g \in M$, т.ч. $g(y) \neq g(z)$. С помощью такой функции g можно построить функцию

$$g_{yz}(x) \doteqdot b + (a-b)\,\frac{g(x) - g(z)}{g(y) - g(z)}\,,$$

принимающую в точках y и z наперед заданные значения $a = g_{yz}(y)$ и $b = g_{yz}(z)$.

2. *Если решётка $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{C}_r(X)$ содержит единицу и разделяет точки компакта X, то ее замыкание $\overline{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{C}_r(X)$, т.е. $\boldsymbol{L}$ всюду плотно в $\boldsymbol{C}_r(X)$.*

Пусть $f \in \boldsymbol{C}_r(X)$. Тогда найдется функция $g_{yz} \in \boldsymbol{L}$, т.ч. $g_{yz}(y) = f(y)$ и $g_{yz}(z) = f(z)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества $G_{yz} \doteqdot \{x \in X \,|\, g_{yz}(x) < f(x) + \varepsilon\}$. Так как функции g_{yz} и f непрерывны, то множество G_{yz} является окрестностью точки $y \in X$. В силу компактности X существует конечное подпокрытие $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_{y_i z}$. Полагая $g_z \doteqdot g_{y_1 z} \wedge \ldots \wedge g_{y_n z}$, получим $g_z(x) < f(x) + \varepsilon$ при всех $x \in X$.

Для заданного $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества $G_z \doteqdot \{x \in X \,|\, g_z(x) > f(x) - \varepsilon\}$. Так как функции g_z и f непрерывны, то множество G_z является окрестностью точки $z \in X$. В силу компактности X существует конечное подпокрытие $X = \bigcup_{j=1}^{m} G_{z_j}$. Полагая $g \doteqdot g_{z_1} \vee \ldots \vee g_{z_m}$, получим $g(x) < f(x) + \varepsilon$ и $g(x) > f(x) - \varepsilon$ при всех $x \in X$. Таким образом, функция $g \in \boldsymbol{L}$ удовлетворяет неравенству $\|f - g\| < \varepsilon$.

Из доказанных свойств следует, что если алгебра $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}_r(X)$ содержит единицу и разделяет точки компакта X, то ее замыканием является пространство $\boldsymbol{C}_r(X)$. Это утверждение можно считать обобщением классической теоремы Вейерштрасса об аппроксимации алгебраическими многочленами. При доказательстве утверждения для комплексных функций алгебру $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}_c(X)$ будем называть *самосопряженной*, если сопряженная функция $\overline{f} = u - \boldsymbol{i}v \in \boldsymbol{A}$ при всех $f = u + \boldsymbol{i}v \in \boldsymbol{A}$.

Теорема (Стоуна об аппроксимации)**.** *Если алгебра $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}(X)$ содержит единицу, разделяет точки компакта X и является самосопряженной, то ее замыкание $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{C}(X)$, т.е. $\boldsymbol{A}$ является всюду плотным множеством в $\boldsymbol{C}(X)$.*

Доказательство. Если алгебра $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}_r(X)$ состоит из действительных функций, то $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{C}_r(X)$. Докажем теорему для комлексных функций. Пусть $f \in \boldsymbol{A}$. В силу самосопряженности мы имеем $u \doteqdot \Re f = (f + \overline{f})/2 \in \boldsymbol{A}$ и $v \doteqdot \Im f = (f - \overline{f})/2\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{A}$. Рассмотрим в $\boldsymbol{A}$ действительные подалгебры $\Re A$ и $\Im A$, состоящие соответственно из всех действительных функций $u = \Re f$ и $v = \Im f$, где $f \in \boldsymbol{A}$. Ясно, что $\Re \boldsymbol{A} = \Im \boldsymbol{A}$. По условию теоремы алгебра $\Re \boldsymbol{A}$ содержит единицу и разделяет точки. Поэтому в силу доказанных свойств $\overline{\Re \boldsymbol{A}} = \overline{\Im \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{C}_r(X)$. Поскольку справедливо равенство $\boldsymbol{A} = \Re \boldsymbol{A} + \boldsymbol{i}\Im \boldsymbol{A}$, то, переходя к замыканиям, получим $\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\Re \boldsymbol{A}} + \boldsymbol{i}\overline{\Im \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{C}_c(X)$. $\square$

Следствие. *Если $X \subset \mathbb{R}^n$ компакт в евклидовом пространстве, то множество алгебраических многочленов $P(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ от n переменных с коэффициентами $a_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{F}$ всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{C}(X)$.*

Пример. Множество многочленов $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ с коэффициентами $a_k \in \mathbb{C}$ не является всюду плотным множеством в пространстве $\boldsymbol{C}(X)$ непрерывных функций на окружности $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, т.к. непрерывную функцию $f(z) = \bar{z}$ нельзя равномерно аппроксимировать многочленами. В самом деле, имеем

$$\|f - P\| \geqslant \frac{1}{2\pi} \left| \oint_X \big(f(z) - P(z)\big)\, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_X f(z)\, dz \right| = 1\,,$$

т.к. интеграл от любого многочлена $P(z)$ равен нулю. Здесь алгебра многочленов в $\boldsymbol{C}(X)$ содержит единицу и разделяет точки, но не является самосопряженной.

11 ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Определение. Множество X называется *упорядоченным*, если в нем определено *отношение порядка* $x \leqslant y$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $x \leqslant x$; 2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$; 3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Множество $A \subset X$ называется *цепью*, если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ для всех пар $x, y \in A$. Элемент $y \in X$ называется *мажорантой* множества A, если $x \leqslant y$ при всех $x \in A$. Элемент $x \in X$ называется *максимальным* в X, если из $x \leqslant y$ следует $x = y$.

Лемма (Цóрна)**.** *Если любая цепь $A \subset X$ упорядоченного множества X имеет мажоранту, то в множестве X существует максимальный элемент.*

В аксиоматической теории множеств лемма Цóрна равносильна аксиоме выбора. Поэтому мы принимаем ее без доказательства, как аксиому в теории множеств. Например, в каждой системе множеств $\mathfrak{S}$ определяется отношение порядка, как *отношение включения*, т.е. $A \leqslant B$, если $A \subset B$. Если $\mathfrak{S}$ кольцо множеств и любая цепь в $\mathfrak{S}$ имеет мажоранту, то по лемме Цóрна $\mathfrak{S}$ имеет максимальный элемент, который будет единицей системы множеств $\mathfrak{S}$, т.е. $\mathfrak{S}$ является алгеброй.

Конечная система элементов $e = \{e_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *линейно независимой*, если $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ влечет $\lambda_i = 0$ при $i = 1, \cdots, n$. Бесконечная система элементов $e = \{e_i\}_{i \in I}$ называется *линейно независимой*, если каждая конечная подсистема линейно независима. Система элементов $e = \{e_i\}_{i \in I}$ называется *базисом Гáмеля* $\boldsymbol{E}$, если она линейно независима и линейная оболочка $\mathrm{sp}\{e\} = \boldsymbol{E}$, т.е. для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ найдется конечная система чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{F}$, т.ч. $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}$. *Размерностью* пространства $\boldsymbol{E}$ называется мощность базиса Гáмеля и обозначается через $\dim_{\mathbb{F}} \boldsymbol{E}$. Известно, что любые два базиса Гáмеля в $\boldsymbol{E}$ равномощны, т.е. существует биективное отображение одного базиса на другой.

Лемма. *Если $e = \{e_i\}_{i \in I}$ линейно независимая система элементов в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$, то существует базис Гáмеля $b = \{b_j\}_{j \in J}$ в $\boldsymbol{E}$, содержащий e.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{S}$ всех линейно независимых систем в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$, содержащих систему e и упорядоченное отношением включения. Так как каждая цепь в $\mathfrak{S}$ имеет мажоранту, равную объединению всех элементов цепи, то по лемме Цóрна $\mathfrak{S}$ содержит максимальный элемент $b \in \mathfrak{S}$, который будет максимальной линейно независимой системой и содержит систему e. В силу максимальности b его линейная оболочка совпадает с $\boldsymbol{E}$. $\square$

Обозначим через $\boldsymbol{E}^*$ пространство всех линейных функционалов, а через $\boldsymbol{E}'$ подпространство непрерывных функционалов на нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$. Покажем, что если $\dim_{\mathbb{F}} \boldsymbol{E} = \infty$, то включение $\boldsymbol{E}' \subset \boldsymbol{E}^*$ является строгим, т.е. существует разрывный функционал. Пусть $b = \{b_i\}_{i \in I}$ базис Гáмеля в $\boldsymbol{E}$. Выберем счетное подмножество $\{i_n\}_{n=1}^\infty \subset I$. Определим функцию $f(e_{i_n}) \doteqdot n\|e_{i_n}\|$ и $f(e_i) = 0$, если $i \neq i_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Затем продолжим ее по линейности на все $\boldsymbol{E}$. Если $x_n \doteqdot e_{i_n}/n\|e_{i_n}\|$, то $\|x_n\| = 1/n \to 0$. Однако $f(x_n) = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $f \notin \boldsymbol{E}'$.

Теорема (Ха́на–Ба́наха). *Пусть $f \in L^*$ линейный функционал, определенный на подпространстве L линейного пространства $\boldsymbol{E}$, и $|f(x)| \leqslant \boldsymbol{p}(x)$ при всех $x \in L$, где $\boldsymbol{p}(x)$ заданная полунорма в $\boldsymbol{E}$. Тогда существует такое его продолжение $g \in \boldsymbol{E}^*$ на все пространство $\boldsymbol{E}$, что $g|_L = f$ и $|g(x)| \leqslant \boldsymbol{p}(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Вначале мы рассмотрим действительный случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Пусть $e_1 \notin L$ и $M_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{e_1, L\}$ линейная оболочка e_1 и L. Поскольку при всех $x, y \in L$

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leqslant \boldsymbol{p}(x+y) \leqslant \boldsymbol{p}(x - e_1) + \boldsymbol{p}(y + e_1),$$

то $f(x) - \boldsymbol{p}(x - e_1) \leqslant \boldsymbol{p}(y + e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Поэтому существует $c_1 \in \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - \boldsymbol{p}(x - e_1) \leqslant c_1 \leqslant \boldsymbol{p}(y + e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Заменяя x и y на x/λ, а затем умножая на λ, получим $f(x) \pm \lambda c_1 \leqslant \boldsymbol{p}(x \pm \lambda e_1)$ при всех $\lambda > 0$ и $x \in L$.

Определим на подпространстве M_1 функционал по формуле $g_1(z) \doteqdot f(x) + \lambda c_1$, где $z = x + \lambda e_1$, $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $g_1(x) = f(x)$ при всех $x \in L$ и по доказанному $g_1(z) \leqslant \boldsymbol{p}(z)$ при всех $z \in M_1$. Так как $\boldsymbol{p}(-z) = \boldsymbol{p}(z)$, то $|g_1(z)| \leqslant \boldsymbol{p}(z)$ при всех $z \in M_1$. Таким образом, мы получили продолжение функционала f на подпространство M_1. Если существует элемент $e_2 \notin M_1$, то аналогично можно доказать существование продолжения g_2 функционала g_1 на подпространство $M_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{M_1, e_2\}$ и т.д.

Рассмотрим множество всех продолжений $g : M \to \mathbb{R}$ функционала $f : L \to \mathbb{R}$, для которых выполняются условия теоремы. Определим в этом множестве отношение порядка $\{g_1, M_1\} \leqslant \{g_2, M_2\}$, если $M_1 \subset M_2$ и $g_2|_{M_1} = g_1$. Тогда для каждой цепи этих продолжений $\{g_i, M_i\}_{i \in I}$ существует мажоранта $\{g, M\}$, где $M = \cup_{i \in I} M_i$ и $g|_{M_i} = g_i$. При этом будут выполнены условия теоремы, т.к. $|g(x)| = |g_i(x)| \leqslant \boldsymbol{p}(x)$ при всех $x \in M_i$ и $i \in I$. Следовательно, по лемме Цо́рна существует максимальный элемент. Поскольку по доказанному выше каждый функционал можно продолжить на более широкое подпространство, то максимальное продолжение определено на всем $\boldsymbol{E}$.

Переход от действительного к комплексному случаю производится следующим образом. Пусть $f(x) = u(x) + \boldsymbol{i}v(x)$, где $u(x) = \Re f(x)$ и $v(x) = \Im f(x)$. Так как в силу линейности $f(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}f(x)$, то $u(\boldsymbol{i}x) + \boldsymbol{i}v(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}u(x) - v(x)$. Поэтому $v(x) = -u(\boldsymbol{i}x)$ и $f(x) = u(x) - \boldsymbol{i}u(\boldsymbol{i}x)$. Пусть функционал h определяет продолжение функционала u в действительном случае. Тогда для функционала $g(x) \doteqdot h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)$ выполняется свойство линейности $g(\boldsymbol{i}x) = h(\boldsymbol{i}x) - \boldsymbol{i}h(-x) = \boldsymbol{i}(h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)) = \boldsymbol{i}g(x)$.

Следовательно, функционал g является линейным над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и задает продолжение функционала f. Докажем неравенство $|g(x)| \leqslant \boldsymbol{p}(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если $g(x) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}|g(x)|$, то $|g(x)| = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}g(x) = g(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = h(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) \leqslant \boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = \boldsymbol{p}(x)$. Таким образом, функционал g удовлетворяет условиям теоремы. $\square$

Следствие 1. *Если L линейное подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, то для каждого $f \in L'$ существует $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|$.*

Действительно, пусть $p(x) \doteqdot \|f\|\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. По теореме существует $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g|_L = f$ и $|g(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому имеем $\|g\| \leqslant \|f\|$, а поскольку $g|_L = f$, то $\|g\| \geqslant \|f\|$. Таким образом, получаем равенство $\|g\| = \|f\|$.

Следствие 2. *Если L замкнутое линейное подпространством нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и элемент $x \in \boldsymbol{E} \setminus L$, то существует функционал $f \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $\|f\| = 1$, $f(x) = d$ и $f(y) = 0$ при всех $y \in L$, где $d \doteqdot \rho(x,L) > 0$.*

Для доказательства вначале определим функционал $f(\lambda x + y) \doteqdot \lambda d$ на линейной оболочке $M \doteqdot \mathrm{sp}\{x,L)$, где $\lambda \in \mathbb{F}$, $y \in L$ и $d = \rho(x,L)$. Ясно, что $f(x) = d$ и $f(y) = 0$ при всех $y \in L$. Поскольку по определению $d = \rho(x,L)$ имеет место неравенство $|\lambda d| = \rho(\lambda x, L) \leqslant \|\lambda x + y\|$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y \in L$, то $\|f\| \leqslant 1$. С другой стороны, для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует элемент $y \in L$, т.ч. $\|x - y\| < d/(1-\varepsilon)$. Так как $d = f(x-y) \leqslant \|f\|\,\|x-y\| < \|f\|\,d/(1-\varepsilon)$, то $\|f\| > 1 - \varepsilon$. Таким образом, $\|f\| = 1$. Наконец, применяя следствие 1, получим $g \in \boldsymbol{E}'$, удовлетворяющий следствию 2.

Теорема (Ха́на). *Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ элементы нормированного пространства и $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{F}$. Для того чтобы существовал функционал $f \in \boldsymbol{E}'$ с нормой $\|f\| \leqslant C$, который удовлетворяет системе линейных уравнений $f(x_i) = c_i$ при $i = 1, \ldots, n$, необходимо и достаточно, чтобы $|\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i| \leqslant C\,\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|$ для всех $\lambda_i \in \mathbb{F}$.*

Доказательство. Необходимость условий очевидна, т.к. если $f(x_i) = c_i$, $i = 1, \ldots, n$, то получаем $|\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i| = \left|f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\right| \leqslant C\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|$. Докажем достаточность.

Определим линейный функционал по формуле $f(y) \doteqdot \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$ при $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Так как по условию $\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i = 0$, если $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$, то это определение однозначно задает функционал f на линейной оболочке $L = \mathrm{sp}\{x_i\}_{i=1}^n$, который удовлетворяет системе уравнений $f(x_i) = c_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Так как по условию теоремы имеет место неравенство $|f(y)| \leqslant C\|y\|$ при всех $y \in L$, то норма $\|f\| \leqslant C$. Применяя следствие 1, получим функционал $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| \leqslant C$, удовлетворяющий системе уравнений $g(x_i) = c_i$ при $i = 1, \ldots, n$. □

Пусть L является подпространством линейного пространства $\boldsymbol{E}$. Элементами факторпространства $\boldsymbol{E}/L$ являются смежные классы $\widehat{x} \doteqdot x + L$, где $x \in \boldsymbol{E}$. Вводя в факторпространство $\boldsymbol{E}/L$ операции сложения $\widehat{x} + \widehat{y} \doteqdot \widehat{x+y}$ и умножения $\lambda\widehat{x} \doteqdot \widehat{\lambda x}$ на число $\lambda \in \mathbb{F}$ мы получаем линейное пространство над полем $\mathbb{F}$.

Коразмерностью подпространства L называют размерность факторпространства $\boldsymbol{E}/L$ и обозначают ее через $\mathrm{codim}_{\mathbb{F}} L \doteqdot \dim \boldsymbol{E}/L$. Пусть $e = \{e_i\}_{i \in I}$ базис Га́меля L и $b = \{b_j\}_{j \in J}$ базис Га́меля $\boldsymbol{E}$, содержащий e. Тогда элементы $\widehat{b_j} = b_j + L$, где $b_j \notin e$, являются линейно независимыми и образуют базис факторпространства $\boldsymbol{E}/L$ и значит мощность системы $b \setminus e$ совпадает с коразмерностью подпространства L.

Если L является замкнутым подпространством нормируемого пространства $\boldsymbol{E}$, то в факторпространстве $\boldsymbol{E}/L$ определяется норма по формуле $\|\widehat{x}\| \doteqdot \inf_{y \in L}\|x + y\|$, которая равна наилучшему приближению $\rho(x,L)$ элемента x подпространством L.

Определение. Непустое множество $\boldsymbol{\Pi}$ в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *плоским*, если выполняется $(1-\lambda)x+\lambda y\in\boldsymbol{\Pi}$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$ и $x,y\in\boldsymbol{\Pi}$. Плоское множество $H\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid f(x)=c\}$, где $f\in\boldsymbol{E}^*$ и $c\in\mathbb{F}$, называется *гиперплоскостью*. Гиперплоскость $\ker f\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid f(x)=0\}$ называется *ядром функционала* $f\in\boldsymbol{E}^*$.

Докажем, что если $f\neq 0$, то ядро $\ker f$ имеет коразмерность $\operatorname{codim}_{\mathbb{F}}\ker f=1$. Выберем $x_0\in\boldsymbol{E}$, т.ч. $f(x_0)=1$ и для всякого $x\in\boldsymbol{E}$ положим $y\doteqdot x-f(x)x_0$. Отсюда $x=\lambda x_0+y$, где $\lambda=f(x)$ и $y\in\ker f$. Два элемента $x_1=\lambda_1x_0+y_1$ и $x_2=\lambda_2x_0+y_2$ тогда и только тогда принадлежат одному классу смежности, т.е. $x_1-x_2\in\ker f$, когда $\lambda_1=\lambda_2$. Таким образом, получаем равенство $\dim_{\mathbb{F}}\boldsymbol{E}/\ker f=\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}=1$.

Заметим, что гиперплоскость H является замкнутой тогда и только тогда, когда функционал $f\in\boldsymbol{E}'$ непрерывен. В самом деле, если $f\in\boldsymbol{E}'$ и $x_n\to x$, где $x_n\in H$, то $f(x)=\lim f(x_n)=c$ и значит $x\in H$, т.е. H замкнута. Обратно, допустим, что гиперплоскость H замкнута и $H\neq\boldsymbol{E}$. Применяя сдвиг, мы можем считать, что $c\neq 0$, т.е. $0\notin H$. Так как множество $\boldsymbol{E}\setminus H$ открыто и $0\in\boldsymbol{E}\setminus H$, то найдется шар $\boldsymbol{S}_r$ радиуса $r>0$ с центром в нуле, т.ч. $\boldsymbol{S}_r\subset\boldsymbol{E}\setminus H$. Отсюда $|f(x)|<|c|$ при всех $x\in\boldsymbol{S}_r$ и, следовательно, $|f(x)|<|c|/r$ при всех $x\in\boldsymbol{S}_1$. Поэтому $\|f\|\leqslant|c|/r$.

Теорема (Ма́зура). *Для каждого замкнутого плоского множества $\boldsymbol{\Pi}\subset\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\Pi}\neq\boldsymbol{E}$, в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ существует такая гиперплоскость $H=\{y\in\boldsymbol{E}\mid f(y)=d\}$, что $\|f\|=1$, $\boldsymbol{\Pi}\subset H$, $\rho(0,H)=\rho(0,\boldsymbol{\Pi})=d$.*

Доказательство. При $d=0$ теорема вытекает из следствия 2. Если $x\in\boldsymbol{\Pi}\setminus 0$, то $L\doteqdot x-\boldsymbol{\Pi}$ замкнутое подпространство $\boldsymbol{E}$, т.ч. $\rho(x,L)=\rho(0,\boldsymbol{\Pi})=d>0$. В силу следствия 2 существует $f\in\boldsymbol{E}'$, т.ч. $\|f\|=1$, $f(x)=d$ и $f(y)=0$ при всех $y\in L$. Пусть $H\doteqdot\{y\in\boldsymbol{E}\mid f(y)=d\}$, тогда $\boldsymbol{\Pi}\subset H$. Поэтому имеем $\rho(0,H)\leqslant\rho(0,\boldsymbol{\Pi})=d$. С другой стороны, если $y\in H$, то $z=x-y\in\ker f$ и, следовательно, имеем

$$\rho(0,H)=\inf_{y\in H}\|y\|=\inf_{z\in\ker f}\|x-z\|\geqslant\inf_{z\in\ker f}|f(x-z)|=|f(x)|=d\,.$$

Таким образом, выполняется равенство $\rho(0,H)=d$. □

Определение. Две системы элементов $\{e_i\}_{i=1}^n\subset\boldsymbol{E}$ и функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n\subset\boldsymbol{E}^*$ называются *сопряженными* (или *биортогональными*), если $f_j(e_i)=\delta_{ij}$, где через δ_{ij} обозначается символ Кро́некера, т.е. $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$, и $\delta_{ij}=1$, если $i=j$.

Лемма 1. *Если $f,f_1,\dots,f_n\in\boldsymbol{E}^*$ система линейных функционалов, то либо функционал f является линейной комбинацией системы функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n$, либо существует элемент $e\in\boldsymbol{E}$, т.ч. $f(e)=1$ и $f_j(e)=0$ при $j=1,\dots,n$*

Доказательство. В случае $n=0$ либо $f=0$, либо существует $e\in\boldsymbol{E}$, т.ч. $f(e)=1$. По индукции предположим, что для $n-1$ утверждение верно. Тогда либо система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n$ линейно зависима, либо найдутся такие элементы $x_i\in\boldsymbol{E}$, что $f_j(x_i)=\delta_{ij}$, где $i,j=1,\dots,n$. Для каждого $x\in\boldsymbol{E}$ положим $y\doteqdot x-\sum_{i=1}^n f_i(x)x_i$. Отсюда вытекает $f_j(y)=0$ при $j=1,\dots,n$ и $x\in\boldsymbol{E}$. Если $f(y)=0$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, то $f(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x)f(x_i)$ при всех $x\in \boldsymbol{E}$, т.е. f является линейной комбинацией системы функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n$. Иначе существует элемент $x\in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f(y)\neq 0$. Полагая $e \doteqdot y/f(y)$, получим $f(e)=1$ и $f_j(e)=0$ при $j=1,\ldots,n$ □

Следствие. *Для всякой линейно независимой системы линейных функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n\subset \boldsymbol{E}^*$ существует сопряженная ей система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n\subset \boldsymbol{E}$.*

Теорема (Хе́лли)**.** *Пусть $\{f_i\}_{i=1}^n\subset \boldsymbol{E}'$ непрерывные линейные функционалы на нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ и $\{c_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{F}$. Для того чтобы при каждом $\varepsilon>0$ существовал элемент $x\in\boldsymbol{E}$ с нормой $\|x\|<C+\varepsilon$, который удовлетворяет системе линейных уравнений $f_i(x)=c_i$, $i=1,\ldots,n$, необходимо и достаточно, чтобы $|\sum_{i=1}^n\lambda_i c_i|\leqslant C\|\sum_{i=1}^n\lambda_i f_i\|$ для всех $\lambda_i\in\mathbb{F}$.*

Доказательство. Необходимость этих условий очевидна, т.к. если $f_i(x)=c_i$ при $i=1,\ldots,n$, то $|\sum_{i=1}^n\lambda_i c_i|=|\sum_{i=1}^n\lambda_i f_i(x)|<(C+\varepsilon)\|\sum_{i=1}^n\lambda_i f_i\|$ при всех $\lambda_i\in\mathbb{F}$. Так как величина $\varepsilon>0$ произвольна, то выполняется условие, указанное в теореме.

Докажем достаточность. Если все функционалы $f_i=0$ при $i=1,\ldots,n$, то $c_i=0$ и элемент $x=0$ удовлетворяет условию. Иначе рассмотрим максимальную линейно независимую подсистему, полагая ее равной $\{f_i\}_{i=1}^r$ при надлежащей нумерации. Пусть $H_i\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid f_i(x)=c_i\}$ гиперплоскости и $\Pi\doteqdot\bigcap_{i=1}^r H_i$ плоское множество. В силу линейной независимости функционалов множество Π не пусто и при этом совпадает с множеством $\bigcap_{i=1}^n H_i$. По теореме Ма́зура существует гиперплоскость $H\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid f(x)=d\}$, т.ч. $\|f\|=1$, $\Pi\subset H$ и $\rho(0,\Pi)=\rho(0,H)=d$. Докажем, что f является линейной комбинацией системы функционалов $\{f_i\}_{i=1}^r$.

Предположим обратное, тогда система $\{f_i\}_{i=0}^r$, где $f_0\doteqdot f$, линейно независима. Следовательно, по следствию леммы существует сопряженная система элементов $\{e_i\}_{i=0}^r$. Рассмотрим элемент $x=\sum_{i=0}^r c_i e_i$, где $c_0\neq d$. Поскольку в силу биортогональности $f_i(x)=c_i$ при $i=1,\ldots,r$, то элемент $x\in\Pi$. Однако $f(x)=f_0(x)=c_0\neq d$ и значит элемент $x\notin H$. Получили противоречие, т.к. $\Pi\subset H$.

Таким образом, $f=\sum_{i=1}^r a_i f_i$ при некоторых $a_i\in\mathbb{F}$ и, следовательно, $d=\sum_{i=1}^r a_i c_i$. По условию $d=\sum_{i=1}^r a_i c_i\leqslant\sup|\sum_{i=1}^r\lambda_i c_i|\leqslant C$, где верхняя грань берется по всем $\lambda_i\in\mathbb{F}$, т.ч. $\|\sum_{i=1}^n\lambda_i f_i\|=1$. Поэтому $d=\rho(0,\Pi)=\inf_{x\in\Pi}\|x\|\leqslant C$. Наконец, в силу определения нижней грани для любого $\varepsilon>0$ существует $x\in\Pi$, т.ч. $\|x\|<C+\varepsilon$. □

Пример (Ба́наховый предел)**.** Пусть $\boldsymbol{c}\subset\boldsymbol{\ell}_\infty$ подпространство всех сходящихся последовательностей в пространстве ограниченных последовательностей с нормой $\|x\|_{\ell_\infty}\doteqdot\sup_n|x_n|$, где $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Рассмотрим линейный функционал $f(x)\doteqdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, заданный на подпространстве $\boldsymbol{c}$. Его норма $\|f\|=1$. В силу следствия 1 существует линейный функционал $g\in\boldsymbol{\ell}_\infty'$, т.ч. $g|_{\boldsymbol{c}}=f$ и $\|g\|=1$. Он называется *ба́наховым пределом* на пространстве $\boldsymbol{\ell}_\infty$ и обозначается через $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty}x_n\doteqdot g(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{\ell}_\infty$.

Аналогичным образом, рассмотрим линейный функционал $\alpha(f)\doteqdot\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$, где $x_0\in(a,b]$, определенный на подпространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$ (или даже на более широком подпространстве $\boldsymbol{BV}[a,b]$) пространства $\boldsymbol{L}_\infty[a,b]$ всех существенно ограниченных функций. Его норма $\|\alpha\| = 1$. В силу следствия 1 найдется линейный функционал $\beta \in \boldsymbol{L}'_\infty[a,b]$, т.ч. $\beta|_{\boldsymbol{C}[a,b]} = \alpha$ и $\|\beta\| = 1$. Он называется *ба́наховым пределом* на пространстве $\boldsymbol{L}_\infty[a,b]$ и обозначается через $\operatorname*{Lim}\limits_{x\to x_0} f(x) \doteqdot \beta(f)$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_\infty[a,b]$. Заметим, что на пространстве $\boldsymbol{L}_p[a,b]$, $1 \leqslant p < \infty$, если рассматривать его вместо $\boldsymbol{L}_\infty[a,b]$, такой непрерывный линейный функционал определить нельзя.

12 ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ТОПОЛОГИИ

Определение. Топология в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *локально выпуклой*, если в пространстве $\boldsymbol{E}$ задана система полунорм $\mathfrak{P} = \{\boldsymbol{p}_i\}_{i\in I}$, т.ч. локальная база $\beta(x)$ топологии в точке $x\in\boldsymbol{E}$ состоит из окрестностей вида

$$O(x) \doteqdot \{y\in\boldsymbol{E} \mid \max_{1\leqslant k\leqslant n} \boldsymbol{p}_{i_k}(y-x) < \varepsilon\}, \text{ где } \varepsilon > 0,\ i_k \in I,\ k = 1,\ldots,n.$$

Линейное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором определена локально выпуклая топология называется *локально выпуклым*. В локально выпуклом пространстве множество $M\subset\boldsymbol{E}$ называется *ограниченным*, если верхняя грань $\sup_{x\in M}\boldsymbol{p}_i(x) < \infty$ конечна при всех $i\in I$. Последовательность $\{x_n\}\subset\boldsymbol{E}$ называется *сходящейся к* $x\in\boldsymbol{E}$, если для любых $\varepsilon>0$ и $i\in I$ существует N, т.ч. $\boldsymbol{p}_i(x_n-x)<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$.

Например, всякое нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ является локально выпуклым, его локальная база задается нормой $\boldsymbol{p}(x)=\|x\|$. Рассмотрим локально выпуклые топологии в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ непрерывных линейных операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, действующих из одного нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ в другое $\boldsymbol{F}$.

Равномерной топологией в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется такая локально выпуклая топология, которая определяемая нормой $\boldsymbol{p}(A)=\|A\|$.

Сильной топологией в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется локально выпуклая топология, определяемая системой полунорм $\boldsymbol{p}_x(A)=\|Ax\|$, $x\in\boldsymbol{E}$.

Слабой топологией в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется локально выпуклая топология, определяемая системой полунорм $\boldsymbol{p}_{x,f}(A)=|f(Ax)|$, $x\in\boldsymbol{E},\ f\in\boldsymbol{F}'$.

Поскольку $|f(Ax)|\leqslant\|f\|\,\|Ax\|$ и $\|Ax\|\leqslant\|A\|\,\|x\|$ при всех $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, $x\in\boldsymbol{E}$ и $f\in\boldsymbol{F}'$, то всякая слабая окрестность содержит сильную окрестность, а всякая сильная окрестность содержит равномерную окрестность. Значит слабая топология слабее сильной, а сильная топология слабее равномерной. Поэтому из равномерной сходимости следует сильная сходимость, а из сильной сходимости следует слабая сходимость. Если размерность пространств $\dim\boldsymbol{E}<\infty$ и $\dim\boldsymbol{F}<\infty$ конечна, то все три сходимости (и три топологии) совпадают, т.к. в силу существования конечного базиса в $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}'$ эти сходимости равносильны сходимости на элементах базиса.

Теорема (Ба́наха–Штейнга́уза). *Если $\boldsymbol{E}$ является банаховом пространством, а $\boldsymbol{F}$ нормированным пространством, то система операторов $\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сильно ограничена, тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена.*

Доказательство. Если система операторов $\{A_i\}_{i\in I}$ сильно ограничена, то в силу принципа равностепенной непрерывности (лекция 2) она является равностепенно непрерывной в нуле. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч.$\|A_ix\|<\varepsilon$ при всех $\|x\|\leqslant\delta$ и $i\in I$. Отсюда $\|A_i\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|A_i(x)\|=\sup_{\|x\|\leqslant\delta}\|A_i(x/\delta)\|\leqslant\varepsilon/\delta$ при всех $i\in I$, т.е. система операторов будет равномерно ограниченной.

Обратно, применяя неравенство $\sup_{i\in I}\|A_ix\|\leqslant\|x\|\sup_{i\in I}\|A_i\|<\infty$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, из равномерной ограниченности получим сильную ограниченность. $\square$

Следствие. *Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сходится сильно к A, где $\boldsymbol{E}$ банахово, а $\boldsymbol{F}$ нормированное пространство, то $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\|A\| \leqslant \underline{\lim}\,\|A_n\|$.*

Так как существует предел $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то последовательность $\{A_n\}$ сильно ограничена. Поэтому в силу теоремы Ба́наха–Штейнга́уза мы получаем, что $\sup\|A_n\| < \infty$. Выберем индексы n_k так, чтобы $\underline{\lim}\,\|A_n\| = \lim\|A_{n_k}\|$. Тогда $\|A(x)\| = \lim\|A_{n_k}(x)\| \leqslant \lim\|A_{n_k}\| = \underline{\lim}\,\|A_n\|$ при всех $x \in \boldsymbol{S}$. Поэтому имеем $\|A\| \leqslant \underline{\lim}\,\|A_n\| \leqslant \sup\|A_n\| < \infty$, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

Теорема (критерий сильной сходимости операторов)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются банаховыми пространствами. Последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ тогда и только тогда сходится сильно к $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, когда $\sup\|A_n\| < \infty$ и существует множество $M \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. линейная оболочка $\mathrm{sp}M$ всюду плотна в $\boldsymbol{E}$ и предел $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in M$.*

Доказательство. Необходимость этого утверждения вытекает из следствия. Для доказательства достаточности обозначим через $L \doteqdot \mathrm{sp}M$ линейную оболочку M. В силу линейности операторов существует предел $\lim A_n(y) = A(y)$ при всех $y \in L$. Поскольку L всюду плотно, то для любых $x \in \boldsymbol{E}$ и $\varepsilon > 0$ существует $y \in L$, т.ч. $\|x-y\| < \varepsilon/4c$, где $c \doteqdot \sup\|A_n\| > 0$. Выберем N, т.ч. $\|A_n(y) - A_m(y)\| < \varepsilon/2$ при всех $n,m \geqslant N$. Так как $\|A_n(x) - A_n(y)\| \leqslant \|A_n\|\,\|x-y\| < \varepsilon/4$, то при всех $n,m \geqslant N$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leqslant \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\| < \varepsilon.$$

Отсюда $\{A_n(x)\}$ является последовательностью Коши при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и значит в силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $\lim A_n(x) \doteqdot A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Применяя следствие теоремы Ба́наха-Штейнга́уза, мы получим, что $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$. □

Сильная топология* в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}'$ к нормированному пространству $\boldsymbol{E}$ определяется нормой $\boldsymbol{p}(f) \doteqdot \|f\|$. Сходимость по норме называется сильной* сходимостью в $\boldsymbol{E}'$. *Слабая* топология* в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}'$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_x(f) \doteqdot |f(x)|$, $x \in \boldsymbol{E}$, $f \in \boldsymbol{E}'$. Последовательность $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}'$ *сходится слабо** к f, если $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поскольку $\boldsymbol{E}' = \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\mathbb{F})$, то получаем следующие свойства слабой* сходимости:

1. *Из сильной* сходимости следует слабая* сходимость. Если размерность $\dim(\boldsymbol{E}) < \infty$ конечна, то эти сходимости совпадают.*

2. *Если $\boldsymbol{E}$ банахово пространство и последовательность $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}'$ сходится слабо* к функционалу f, то $f \in \boldsymbol{E}'$ и $\|f\| \leqslant \underline{\lim}\,\|f_n\|$.*

3. *Если $\boldsymbol{E}$ банахово пространство, то множество $M \subset \boldsymbol{E}'$ слабо* ограничено тогда и только тогда, когда оно сильно ограничено.*

Теорема (критерий слабой* сходимости)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ банахово пространство, то последовательность $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}'$ тогда и только тогда сходится слабо* к $f \in \boldsymbol{E}'$, когда $\sup\|f_n\| < \infty$ и существует множество $M \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. линейная оболочка $\mathrm{sp}M$ всюду плотна в $\boldsymbol{E}$ и предел $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in M$.*

Подпространство функционалов $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *тотальным* на $\boldsymbol{E}$, если из $x \in \boldsymbol{E}$ и $f(x) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}$ следует $x = 0$. В силу линейности функционалов $f \in \boldsymbol{F}$ это условие равносильно тому, что множество $\boldsymbol{F}$ разделяет точки $\boldsymbol{E}$.

Каноническим вложением $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ в его второе сопряженное пространство $\boldsymbol{E}''$ называется отображение, определенное по формуле $J(x) \doteqdot \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ обозначает функционал Дира́ка и $f \in \boldsymbol{E}'$.

В случае, когда каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}''$ является *сюръективным*, пространство $\boldsymbol{E}$ называется *рефлексивным*. Например, нетрудно доказать, что все конечномерные нормированные пространства будут рефлексивны. В силу теоремы Ри́сса–Штейнга́уза пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ и $\boldsymbol{\ell}_p$ рефлексивны при всех $1 < p < \infty$.

Пример 1. Покажем, что пространство $\boldsymbol{L}_1[0,1]$ не рефлексивно. В силу теоремы Ри́сса–Штейнга́уза сопряженное пространство $\boldsymbol{L}_1'[0,1]$ изометрически изоморфно $\boldsymbol{L}_1'[0,1] = \boldsymbol{L}_\infty[0,1]$ пространству существенно ограниченных функций. Рассмотрим на этом пространстве банаховый предел $\mathrm{Lim}_{x\to 1} f(x) = \beta(f)$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_\infty[0,1]$, где функционал $\beta \in \boldsymbol{L}_\infty'[0,1]$ и совпадает с обычным пределом в точке 1 для всех функций $f \in \boldsymbol{C}[0,1]$. Если бы пространство $\boldsymbol{L}_1[0,1]$ было рефлексивным, то для некоторой функции $g \in \boldsymbol{L}_1[0,1]$ выполнялось равенство $\mathrm{Lim}_{x\to 1} f(x) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_\infty[0,1]$. Полагая $f(x) = x^n$, имеем $\mathrm{Lim}_{x\to 1} x^n = 1$ при всех n. Однако предел $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n g(x)\,dx = 0$ по теореме Лебе́га о мажорируемой сходимости.

Лемма 1. *Для каждой линейно независимой системы элементов* $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ *линейного пространства* $\boldsymbol{E}$ *и тотального подпространства* $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}^*$ *найдется сопряженная системе функционалов* $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{F}$ *на пространстве* $\boldsymbol{E}$.

Доказательство. В силу тотальности $\boldsymbol{F}$ система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ линейно независима тогда и только тогда, когда система функционалов $\delta_{e_i}(f) = f(e_i)$ при $f \in \boldsymbol{F}$ линейно независима. Таким образом, в силу следствия леммы, доказанной на прошлой лекции, получим сопряженную систему функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{F}$. □

Лемма 2. *Линейное подпространство* $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}^*$ *тотально на* $\boldsymbol{E}$*, тогда и только тогда, когда оно является слабо* плотным в пространстве* $\boldsymbol{E}^*$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $O(g) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}^* \,|\, \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |g(e_i) - f(e_i)| < \varepsilon\}$ слабая* окрестность точки $g \in \boldsymbol{E}^*$ и $\{e_i\}_{i=1}^r$ максимальная линейно независимая подсистема в системе $\{e_i\}_{i=1}^n$. В силу леммы 1 существует сопряженная система $\{f_j\}_{j=1}^r \subset \boldsymbol{F}$ к системе $\{e_i\}_{i=1}^r$. Пусть $f(x) = \sum_{j=1}^r g(e_j) f_j(x)$. Тогда имеем $f \in \boldsymbol{F}$, $f(e_i) = g(e_i)$ при $i = 1,\ldots,r$ и значит при $i = r+1,\ldots,n$. Поэтому $f \in O(g)$.

Достаточность. Пусть $e \in \boldsymbol{E}$ и $f(e) = 0$ при $f \in \boldsymbol{F}$. Так как слабая* окрестность $O(g) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}^* \,|\, |g(e) - f(e)| < \varepsilon\}$ содержит $f \in \boldsymbol{F}$, то $|g(e)| = |g(e) - f(e)| < \varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$. Отсюда $g(e) = 0$ при всех $g \in \boldsymbol{E}^*$. Если $e \neq 0$, то выберем базис Га́меля $b = \{b_i\}_{i\in I}$, содержащий e. Определим функционал на базисе $f(e) = 1$ и $f(b_i) = 0$, если $b_i \neq e$, затем его продолжим по линейности на $\boldsymbol{E}$. Тогда $f \in \boldsymbol{E}^*$ и $f(e) = 1$. Получили противоречие. Поэтому $e = 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{F}$ тотально на $\boldsymbol{E}$. □

Теорема. *Каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$ изометрично, его образ $J(\boldsymbol{E})$ является слабо* плотным подпространством $\boldsymbol{E}''$ и совпадает с множеством функционалов, которые непрерывны в слабой* топологии пространства $\boldsymbol{E}'$.*

Доказательство. Пусть $x \in \boldsymbol{E}$. Так как $|\delta_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\|$, если $\|f\| \leqslant 1$, то $\|J(x)\| = \|\delta_x\| \leqslant \|x\|$. Применяя следствие 1 из теоремы Ха́на–Ба́наха для элемента x построим функционал $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $\|g\| = 1$ и $g(x) = \|x\|$. Тогда имеем $\delta_x(g) = \|x\|$ и, следовательно, $\|\delta_x\| = \|x\|$. Таким образом, каноническое вложение J изометрично. Поскольку подпространство $\boldsymbol{F} = J(\boldsymbol{E})$ тотально на $\boldsymbol{E}'$, то по лемме 2 оно слабо* плотно в $\boldsymbol{E}'^*$ и значит будет слабо* плотным в подпространстве $\boldsymbol{E}'' \subset \boldsymbol{E}'^*$.

Если функционал $\alpha \in \boldsymbol{E}''$ является слабо* непрерывным, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая слабая* окрестность нуля $O(0) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' | \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |f(e_i)| < 2\delta\}$, что $|\alpha(f)| < \varepsilon$ при всех $f \in O(0)$. Тогда $|\alpha(g)| \leqslant (\varepsilon/\delta) \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |g(e_i)|$ при всех $g \in \boldsymbol{E}'$.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^r$ максимальная линейно независимая подсистема в системе $\{e_i\}_{i=1}^n$. Так как по лемме существует сопряженная система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^r \subset \boldsymbol{E}'$, то всякий функционал $f \in \boldsymbol{E}'$ имеет вид $f(x) = \sum_{i=1}^r f(e_i) f_i(x) + g(x)$, где $g(e_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, r$ и значит $g(e_i) = 0$ при $i = r+1, \ldots, n$. Поскольку в силу доказанного выше неравенства $\alpha(g) = 0$, то $\alpha(f) = \sum_{i=1}^n f(e_i)\alpha(f_i) = \delta_x(f)$, где $x = \sum_{i=1}^n \alpha(f_i) e_i$, т.е. всякий слабо* непрерывный функционал является функционалом Дира́ка δ_x. Обратно, всякий функционал Дира́ка, очевидно, является слабо* непрерывным, т.к. $|\delta_x(f)| = |f(x)| < \varepsilon$ при всех $f \in O(0) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' \mid |f(x)| < \varepsilon\}$. □

Сильная топология в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ определяется нормой. Сходимость по норме $\boldsymbol{E}$ называется сильной сходимостью. *Слабая топология* в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_f(x) \doteqdot |f(x)|$, $x \in \boldsymbol{E}$, $f \in \boldsymbol{E}'$. Последовательность $\{x_n\}$ *сходится слабо* к элементу $x \in \boldsymbol{E}$, если $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in \boldsymbol{E}'$. При помощи канонического вложения $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$ и свойств слабой* сходимости получаем следующие свойства слабой сходимости:

1. *Из сильной сходимости следует слабая сходимость. Если размерность $\dim \boldsymbol{E} < \infty$ конечна, то эти сходимости совпадают.*

2. *Если последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ сходится слабо к $x \in \boldsymbol{E}$, то $\|x\| \leqslant \underline{\lim} \|x_n\|$.*

3. *Множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ слабо ограничено тогда и только тогда, когда оно является сильно ограниченным.*

Теорема (критерий слабой сходимости в $\boldsymbol{E}$). *Последовательность элементов $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда сходится слабо к $x \in \boldsymbol{E}$, когда $\sup \|x_n\| < \infty$ и существует такое множество функционалов $M \subset \boldsymbol{E}'$, что линейная оболочка $\mathrm{sp} M$ всюду плотна в $\boldsymbol{E}'$ и предел $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in M$.*

Замечание. Слабая топология и сходимость определяются во всех локально выпуклых пространствах. Однако слабая* топология и сходимость определяются только в сопряженных пространствах. Например, в пространствах $\boldsymbol{L}_1[a,b]$ и $\boldsymbol{C}[a,b]$ нет слабой* топологии и сходимости, т.к. они не являются сопряженными.

Теорема (Ри́сса о представлении). *Если $\alpha \in C'[a,b]$ непрерывный линейный функционал на пространстве $C[a,b]$, то существует единственная функция $F \in BV[a,b]$ ограниченной вариации, т.ч. $\alpha(f) = \int_a^b f\,dF$ для всех $f \in C[a,b]$, при этом $F(a) = 0$, $F(x)$ непрерывна слева в (a,b) и ее вариация $V_a^b(F) = \|\alpha\|$.*

Доказательство. Применяя следствие 1 из теоремы Ха́на–Ба́наха, продолжим α на пространство $B[a,b]$. Определим функцию $F(t) \doteqdot \alpha(u_t)$, где $u_t(x) \doteqdot \chi_{[a,t)}(x)$ при $a \leqslant t < b$ и $u_b(x) = 1$. Тогда $F(a) = 0$. Докажем, что функция $F \in BV[a,b]$. Если $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ разбиение отрезка $[a,b]$ и $\theta_k \doteqdot \arg\big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big)$, то получаем

$$\sum_{k=1}^n |F(t_k) - F(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\alpha(u_{t_k} - u_{t_{k-1}}) = \alpha\Big(\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\chi_{[t_{k-1},t_k)}\Big) \leqslant \|\alpha\|.$$

поскольку $|\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\chi_{[t_{k-1},t_k)}(x)| = 1$. Поэтому $V_a^b(F) \leqslant \|\alpha\|$ и $F \in BV[a,b]$. Для каждой $f \in C[a,b]$ введём ступенчатые функции $f_\tau(x) \doteqdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(u_{t_k}(x) - u_{t_{k-1}}(x))$, где $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Эти функции $f_\tau \rightrightarrows f$ сходятся равномерно на $[a,b]$, когда диаметр разбиения $d_\tau \to 0$. Отсюда в силу непрерывности $\alpha \in B'[a,b]$ получим

$$\alpha(f) = \lim_{d_\tau\to 0}\alpha(f_\tau) = \lim_{d_\tau\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big) = \int_a^b f\,dF.$$

Поскольку $F \in BV[a,b]$ имеет не более счетного числа точек разрыва и интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса не зависит от изменения F на счётном множестве точек (a,b), то F можно считать непрерывной слева в (a,b). При этом, если $\|f\|_C \leqslant 1$, то

$$|\alpha(f)| = \Big|\int_a^b f\,dF\Big| \leqslant \sup_\tau \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\,|F(t_k) - F(t_{k-1})| \leqslant V_a^b(F),\ \text{т.е. } \|\alpha\| = V_a^b(F).$$

Докажем единственность. Пусть $c_n \in (a,b)$ точки непрерывности функции F. Рассмотрим функцию $g_n \in C[a,b]$, т.ч. $g_n(x) = 1$ при $x \in [a,c_n]$, $g_n(x) = 0$ при $x \in [c,b]$, а в интервале (c_n,c) является линейной. Из непрерывности $F(x)$ в точке c слева получим $|\alpha(g_n) - F(c_n)| = \left|\int_{c_n}^c g_n dF\right| \leqslant V_{c_n}^c(F) \to 0$ при $c_n \nearrow c < b$. Таким образом, $\lim\alpha(g_n) = \lim_{n\to\infty}F(c_n) = F(c)$ при $c \in (a,b)$. Кроме того, имеем $\alpha(1) = F(b)$. □

Следствие. *Сопряжённое пространство $C'[a,b]$ изометрически изоморфно подпространству $BV_0[a,b] \subset BV[a,b]$ всех функций ограниченной вариации, т.ч. $F(a) = 0$, $F(x)$ непрерывна слева в (a,b) и норма $\|F\|_{BV_0} \doteqdot V_a^b(F)$.*

Пример 2. Последовательность $f_n \to f$ сходится слабо в $C[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена по норме и сходится $f_n(x) \to f(x)$ в любой точке $x \in [a,b]$. Заметим, что ограниченность следует из критерия слабой сходимости, а сходимость в точке получается применением функционалов Дирака $\delta_x \in C'[a,b]$.

Для доказательства достаточности всякий функционал $\alpha \in C'[a,b]$ представим в виде интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса $\alpha(f) = \int_a^b f\,dF$ для всех $f \in C[a,b]$. Поскольку этот интеграл от непрерывной функции совпадает с интегралом Лебе́га–Сти́лтьеса, то по теореме Лебе́га о мажорируемой сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(f_n) = \alpha(f)$.

13 ГИ́ЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение. *Скалярным произведением* в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ называется функция $q : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ двух переменных $x, y \in \boldsymbol{E}$, обозначаемая далее через $\langle x, y\rangle \doteqdot q(x, y)$ и обладающая следующими свойствами:

a) $q(x,y) = \overline{q(y,x)}$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$;

b) $q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 q(x_1, y) + \lambda_2 q(x_2, y)$ при всех $x_1, x_2, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$;

c) $q(x,x) \geqslant 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $q(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пространство $\boldsymbol{E}$, в котором определено скалярное произведение $\langle x, y\rangle \doteqdot q(x, y)$, называется *евклидовым пространством* $(\boldsymbol{E}, q)$. Функция $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x, x\rangle}$ называется *евклидовой нормой*, а $\rho(x,y) \doteqdot \|x - y\|$ называется *евклидовой метрикой*.

1. Неравенство Коши́–Буняко́вского: *$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$.*

Пусть $z = tx + \lambda y$, где $\lambda \doteqdot \langle x, y\rangle / |\langle x, y\rangle|$ и $\langle x, y\rangle \neq 0$. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\langle z, z\rangle = t^2\langle x, x\rangle + t\left(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle\right) + |\lambda|^2\langle y, y\rangle = t^2\|x\|^2 + 2t|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \geqslant 0.$$

Т.к. дискриминант этого трехчлена не положительный, то $|\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$. При этом равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $z = tx + \lambda y = 0$ при некотором $t \in \mathbb{R}$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимы.

2. Неравенство треугольника: *$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$.*

Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, получим неравенство треугольника

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\Re\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Равенство выполняется в том и только в том случае, когда $\Re\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимыми $x = \lambda y$, где $\Re\lambda = |\lambda| \geqslant 0$, и значит $\lambda \geqslant 0$. Поэтому евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным.

3. Равенство параллелограмма: *$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ при $x, y \in \boldsymbol{E}$.*

Складывая два равенства $\langle x \pm y, x \pm y\rangle = \langle x, x\rangle \pm 2\Re\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$, получим равенство параллелограмма $\langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle$.

Теорема (Дж. фон Не́ймана). *Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае является евклидовым пространством, когда в нем выполняется равенство параллелограмма.*

Доказательство достаточности приведено в учебнике Колмого́рова и Фомина́. Например, пространство $\boldsymbol{B}(X)$ ограниченных функций не является евклидовым пространством, если $\dim \boldsymbol{B}(X) \neq 1$. В самом деле, пусть $f(x) = \chi_A(x)$ и $g(x) = \chi_B(x)$, где $A = \{x\}$, $B = \{y\}$ и $x \neq y$. Тогда не выполняется равенство параллелограмма, т.к. $\|f\|_{\boldsymbol{B}} = \|g\|_{\boldsymbol{B}} = \|f+g\|_{\boldsymbol{B}} = \|f-g\|_{\boldsymbol{B}} = 1$, где нормы берутся в пространстве $\boldsymbol{B}(X)$.

4. Непрерывность скалярного произведения (как функции двух переменных).

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ и $c > 0$, т.ч. $\|x_0\| < c$, $\|y_0\| < c$, $\delta^2 + 2c\delta < \varepsilon$. Тогда, если $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - y_0\| < \delta$, то по неравенству Коши́–Буняко́вского

$$|\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \leqslant |\langle x - x_0, y - y_0\rangle| + |\langle x - x_0, y_0\rangle| + |\langle x_0, y - y_0\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|x - x_0\|\,\|y - y_0\| + \|x - x_0\|\,\|y_0\| + \|x_0\|\,\|y - y_0\| < \varepsilon\,.$$

5. Неравенство Бе́ппо Ле́ви. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ линейное подпространство в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$, то для всех $x, y \in L$ и $z \in \boldsymbol{E}$ выполняется неравенство*

$$\|x - y\| \leqslant \sqrt{\|z - x\|^2 - d^2} + \sqrt{\|z - y\|^2 - d^2}, \quad \text{где } d = \rho(z, L)\,.$$

Пусть $u \doteqdot (tx + y)/(t+1) \in L$, тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\|t(z - x) + (z - y)\|^2 = \|(t+1)z - (tx + y)\|^2 = (t+1)^2\|z - u\|^2 \geqslant (t+1)^2 d^2.$$

Раскрывая левую норму и перенося правую часть этого неравенства влево, получим

$$t^2(\|z - x\|^2 - d^2) + 2t(\Re\langle z - x, z - y\rangle - d^2) + (\|z - y\|^2 - d^2) \geqslant 0 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Так как дискриминант этого трехчлена не положительный, то имеем неравенство $\Re\langle z - x, z - y\rangle - d^2 \leqslant \sqrt{(\|z - x\|^2 - d^2)(\|z - y\|^2 - d^2)}$, из которого следует, что

$$\|x - y\|^2 = \|(z - x) - (z - y)\|^2 = \|z - x\|^2 - 2\Re\langle z - x, z - y\rangle + \|z - y\|^2 =$$
$$= \big(\|z - x\|^2 - d^2\big) - 2\big(\Re\langle z - x, z - y\rangle - d^2\big) + \big(\|z - y\|^2 - d^2\big) \leqslant$$
$$\leqslant \big(\|z - x\|^2 - d^2\big) + 2\sqrt{\big(\|z - x\|^2 - d^2\big)\big(\|z - y\|^2 - d^2\big)} + \big(\|z - y\|^2 - d^2\big).$$

Замечая, что в конце стоит полный квадрат, получим неравенство Бе́ппо Ле́ви.

Определение. Элементы $x, y \in \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначаются через $x \perp y$, если их скалярное произведение $\langle x, y\rangle = 0$. Элемент $x \in \boldsymbol{E}$ называется *ортогональным подпространству* $L \subset \boldsymbol{E}$ и обозначается $x \perp L$, если $\langle x, y\rangle = 0$ при всех $y \in L$. Два подпространства $L, M \subset \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначаются через $L \perp M$, если $\langle x, y\rangle = 0$ для всех $x \in L$ и $y \in M$.

Лемма. *Элемент $y \in L$ является наилучшим приближением элемента $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. $\rho(x, L) = \|x - y\|$, тогда и только тогда, когда $x - y \perp L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle x - y, z\rangle \neq 0$ при некотором $z \in L \setminus 0$. Тогда, пологая $u \doteqdot y + \lambda z \in L$ и подставляя $\lambda \doteqdot \langle x - y, z\rangle / \|z\|^2$, получим равенство

$$\|x - u\|^2 = \|(x - y) - \lambda z\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\Re\overline{\lambda}\langle x - y, z\rangle + |\lambda|^2\|z\|^2 = \|x - y\|^2 - |\lambda|^2\|z\|^2.$$

Откуда следует неравенство $\|x - u\| < \|x - y\| = \rho(x, L)$, что невозможно.

Достаточность. Пусть $\langle x - y, z\rangle = 0$ при всех $z \in L$. Тогда при всех $z \in L$ имеем

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x - y, x - z\rangle \leqslant \|x - y\|\,\|x - z\|.$$

Поэтому $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$ при всех $z \in L$ и, следовательно, $\rho(x, L) = \|x - y\|$. □

Определение. *Ги́льбертовым пространством* $\boldsymbol{H}$ называется полное евклидово пространство над полем $\mathbb{F}$ относительно евклидовой метрики.

Пример. Примером ги́льбертова пространства является пространство $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$, в котором скалярное произведение и норма определяются следующими формулами:

$$\langle f,g\rangle \doteqdot \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu\,, \quad \|f\|_{L_2} \doteqdot \Big(\int_X |f(x)|^2 d\mu\Big)^{1/2}, \quad \text{где } f,g\in \boldsymbol{L}_2(X,\mu)\,.$$

При $p\neq 2$ пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ не являются ги́льбертовыми, если размерность $\dim \boldsymbol{L}_p(X,\mu)\neq 1$. Так как, например, для функций $f(x)=\chi_A(x)$ и $g(x)=\chi_B(x)$, т.ч. $A\cap B=\emptyset$ и $0<\mu(A)=\mu(B)<\infty$, не выполняется равенство параллелограмма.

Частным случаем пространства $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$, когда множество X является счетным и мера каждой его точки равна единице, является пространство $\boldsymbol{\ell}_2$, состоящее из последовательностей $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\in\mathbb{F}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$. Скалярное произведение и норма в $\boldsymbol{\ell}_2$ определяются следующими формулами:

$$\langle x,y\rangle \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n} \quad \|x\|_{\ell_2} \doteqdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\Big)^{1/2} \quad \text{где } x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in\boldsymbol{\ell}_2\,.$$

Теорема (о наилучшем приближении)**.** *Если $L\subset \boldsymbol{H}$ замкнутое подпространство в ги́льбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, то для каждого $x\in\boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y\in L$, т.ч. $\rho(x,L)=\|x-y\|$.*

Доказательство. Пусть $d=\rho(x,L)\doteqdot \inf_{y\in L}\|x-y\|$. Тогда существуют $y_n\in L$, т.ч. $d^2\leqslant \|x-y_n\|^2<1/n^2+d^2$. По неравенству Бе́ппо Ле́ви $\|y_n-y_m\|<1/n+1/m$, т.е. $\{y_n\}$ является последовательностью Коши́ в L. В силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ и замкнутости подпространства L получим, что $\lim y_n=y\in L$. Переходя к пределу в неравенстве $d\leqslant\|x-y_n\|<\sqrt{d^2+1/n^2}$, имеем $\|x-y\|=\lim\|x-y_n\|=d$.

Таким образом, доказали существование элемента наилучшего приближения. Его единственность вытекает из ранее доказанной теоремы, так как ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ является строго нормированным. □

Теорема (об ортогональном разложении)**.** *Пусть $L\subset\boldsymbol{H}$ является замкнутым подпространством в ги́льбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда пространство $\boldsymbol{H}$ представляется в виде прямой суммы $\boldsymbol{H}=L\oplus L^{\perp}$ подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp}\doteqdot\{x\in\boldsymbol{H}\mid x\perp L\}$.*

Доказательство. В силу теоремы о наилучшем приближении для каждого $x\in\boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y\in L$, т.ч. $\rho(x,L)=\|x-y\|$. Пусть $z\doteqdot x-y$. Тогда по лемме получим $z\in L^{\perp}$. Таким образом, имеем разложение $x=y+z$, где $y\in L$ и $z\in L^{\perp}$. Докажем единственность этого разложения. Пусть $x=y_1+z_1=y_2+z_2$, где $y_1,y_2\in L$ и $z_1,z_2\in L^{\perp}$. Из этого равенства следует, что $y_1-y_2=z_2-z_1\in L\cap L^{\perp}$. Поэтому $y_1-y_2=z_1-z_2=0$, т.е. $y_1=y_2$ и $z_1=z_2$. □

Следствие. *Пусть $L\subset\boldsymbol{H}$ линейное подпространство в $\boldsymbol{H}$. Тогда $L^{\perp\perp}=\overline{L}$. Поэтому L всюду плотно в $\boldsymbol{H}$ тогда и только тогда, когда $L^{\perp}=0$.*

В силу теоремы $\boldsymbol{H}=\overline{L}\oplus\overline{L}^{\perp}$. Поэтому $\overline{L}=\overline{L}^{\perp\perp}$. Ясно, что $\overline{L}^{\perp}\subset L^{\perp}$. Пусть $x\in L^{\perp}$ и $y_n\in L$, т.ч. $y_n\to y$, тогда $\langle x,y\rangle=\lim\langle x,y_n\rangle=0$, т.е. $x\in\overline{L}^{\perp}$. Таким образом, $L^{\perp}=\overline{L}^{\perp}$. Если L всюду плотно, то $\overline{L}=\boldsymbol{H}$. Тогда $L^{\perp}=\overline{L}^{\perp}=\boldsymbol{H}^{\perp}=0$. Обратно, если $L^{\perp}=0$, то $\overline{L}^{\perp}=L^{\perp}=0$. Поэтому по теореме $\boldsymbol{H}=\overline{L}\oplus\overline{L}^{\perp}=\overline{L}$, т.е. L всюду плотно в $\boldsymbol{H}$.

Определение. Оператор $P:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$, т.ч. $P(x)=y$, где $x=y+z$, $y\in L$ и $z\in L^{\perp}$ называется *ортогональным проектором* на замкнутое подпространство $L\subset\boldsymbol{H}$.

Лемма. *Оператор $P:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ является ортогональным проектором тогда и только тогда, когда он линейный, идемпотентный $P^2=P$ и симметричный $\langle Px,y\rangle=\langle x,Py\rangle$ при $x,y\in\boldsymbol{H}$, при этом его норма равна $\|P\|=1$.*

Докажем линейность. Если $P(x_1)=y_1$ и $P(x_2)=y_2$, то $x_1-y_1\perp L$ и $x_2-y_2\perp L$. Откуда $(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\perp L$. Следовательно, $P(x_1+x_2)=y_1+y_2$. Кроме того, если $P(x)=y$, то $x-y\perp L$ и значит $\lambda x-\lambda y\perp L$ при $\lambda\in\mathbb{F}$. Откуда $P(\lambda x)=\lambda y$.

Пусть $x=y+z$, где $y\in L$ и $z\in L^{\perp}$. Так как $P^2(x)=P(y)=y=P(x)$, то оператор P является идемпотентным. Если $x_1=y_1+z_1$ и $x_2=y_2+z_2$, где $y_1,y_2\in L$ и $z_1,z_2\in L^{\perp}$, то $\langle Px_1,x_2\rangle=\langle y_1,y_2\rangle=\langle x_1,Px_2\rangle$. Поэтому оператор P является симметричным.

Найдем норму. Пусть $x=y+z$, где $y\in L$ и $z\in L^{\perp}$. Из ортогональности $y\perp z$ вытекает равенство $\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$. Поэтому $\|P(x)\|\leqslant\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$ и значит норма $\|P\|\leqslant 1$. Поскольку $\|P(y)\|=\|y\|$ при всех $y\in L$, то $\|P\|=1$.

Пусть теперь оператор P обладает всеми этими свойствами. Положим $y\doteqdot P(x)$ и $Q(x)\doteqdot z$, где $z\doteqdot x-y$. Если $L\doteqdot P(\boldsymbol{H})$ и $M\doteqdot Q(\boldsymbol{H})$, то в силу симметричности и идемпотентности получаем равенство $\langle y,z\rangle=\langle P(x),x-P(x)\rangle=\langle x,P(x)-P^2(x)\rangle=0$ для всех $y\in L$ и $z\in M$. Отсюда $L\perp M$ и $L\cap M=0$. Так как $QP=P-P^2=0$ и $PQ=Q-Q^2=0$, то $L=\ker Q$ и $M=\ker P$. Следовательно, L и M замкнутые линейные подпространства и имеет место ортогональное разложение $\boldsymbol{H}=L\oplus M$, где $M=L^{\perp}$ и $L=M^{\perp}$. Таким образом, P и Q ортогональные проекторы.

Теорема (Ри́сса–Фреше́ о представлении)**.** *Для каждого функционала $\alpha\in\boldsymbol{H}'$ на гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y\in\boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x)=\langle x,y\rangle$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$ и его норма $\|\alpha\|=\|y\|$.*

Доказательство. Так как $\alpha\in\boldsymbol{H}'$ непрерывный линейный функционал, то его ядро $L=\ker\alpha$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{H}$. Если $L^{\perp}=0$, то в силу следствия теоремы об ортогональном разложении $L=\boldsymbol{H}$, т.е. $\alpha=0$. Поэтому $y=0$. Если $\alpha\neq 0$, то существует $z\in L^{\perp}$, т.ч. $\|z\|=1$. Для каждого $x\in\boldsymbol{H}$ рассмотрим элемент $u=\alpha(x)z-\alpha(z)x$, т.ч. $\alpha(u)=0$. Тогда $u\in L$. Полагая $y\doteqdot\overline{\alpha(z)}z$, получим равенство $\langle u,z\rangle=\alpha(x)\langle z,z\rangle-\alpha(z)\langle x,z\rangle=\alpha(x)-\langle x,y\rangle=0$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$, т.к. $u\perp z$. Таким образом, имеет место представление $\alpha(x)=\langle x,y\rangle$ для всех $x\in\boldsymbol{H}$.

Для доказательства единственности представления допустим, что $\langle x,y_1\rangle=\langle x,y_2\rangle$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$. Тогда $\langle x,y_1-y_2\rangle=0$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$ и, следовательно, $y_1-y_2=0$. Из неравенства Коши́–Буняко́вского вытекает неравенство $|\alpha(x)|=|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$. При этом, если $x=y/\|y\|$, то $|\alpha(x)|=\|y\|$. Поэтому норма $\|\alpha\|=\|y\|$. □

Рассмотрим измеримое пространство (X,Σ,μ) полной и σ-конечной меры μ. Пусть задана σ-конечная мера ν, определенная на σ-алгебре Σ. Тогда $\mathfrak{m} \doteqdot \mu+\nu$ является также σ-конечной мерой, определенной на σ-алгебре Σ.

Лемма. *Существуют разложение $X = E \sqcup F \sqcup H$ на измеримые множества и положительная измеримая функция $h: H \to \mathbb{R}_+$, т.ч.*

a) $\mu(E) = \nu(F) = 0$*;*

b) $\mu(A) = \int_A (1/h)\, d\nu$ *для всех* $A \in \Sigma_H$*;*

c) $\nu(A) = \int_A h\, d\mu$ *для всех* $A \in \Sigma_H$*,*

где Σ_H обозначает σ-алгебру всех измеримых подмножеств $A \subset H$.

Доказательство. Поскольку мера $\mathfrak{m} \doteqdot \mu+\nu$ является σ-конечной, то, разбивая X на множества конечной меры, сведем доказательство к случаю, когда $\mathfrak{m}(X) < \infty$.

Пусть $\alpha(f) \doteqdot \int_X f\, d\mu$ линейный функционал на действительном пространстве $\boldsymbol{L}_2(X,\mathfrak{m})$. Так как $|\alpha(f)| \leqslant \int_X |f|\, d\mu \leqslant \big(\mu(X)\int_X |f|^2 d\mu\big)^{1/2} \leqslant \big(\mu(X)\big)^{1/2}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ в силу неравенства Коши́–Буняко́вского, то функционал ограничен, т.е. $\alpha \in \boldsymbol{L}_2'(X,\mathfrak{m})$.

По теореме Ри́сса–Фреше́ существует $g \in \boldsymbol{L}_2(X,\mathfrak{m})$, т.ч. $\alpha(f) = \int_X f g\, d\mathfrak{m}$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2(X,\mathfrak{m})$. Если $f = \chi_A$, то для любого измеримого множества $A \in \Sigma$ имеем $\mu(A) = \int_A g\, d\mathfrak{m} \geqslant 0$ и $\nu(A) = \int_A (1-g)\, d\mathfrak{m} \geqslant 0$. Поэтому $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ п.в. на X.

Если положить $E \doteqdot X(g \leqslant 0)$ и $F \doteqdot X(g \geqslant 1)$, то условие a) выполнено. Поскольку $\int_X f\, d\mu = \int_X f g\, d\mu + \int_X f g\, d\nu$, то $\int_X f(1-g)\, d\mu = \int_X f g\, d\nu$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2(X,\mathfrak{m})$. Но тогда это равенство верно для всякой неотрицательной измеримой функции, т.к. такие функции является монотонным пределом простых функций.

Определим на множестве $H \doteqdot X(0 < g < 1)$ положительную измеримую функцию $h = (1-g)/g$. Полагая в указанном выше равенстве $f = \chi_A/(1-g)$, а затем $f = \chi_A/g$, получим $\mu(A) = \int_A g/(1-g)\, d\nu$ и $\nu(A) = \int_A (1-g)/g\, d\mu$ для всех множеств $A \in \Sigma_H$. Таким образом, условия b) и c) также выполнены. □

Теорема (Радо́на–Никоди́ма)**.** *Если заряд $\varphi: \Sigma \to \mathbb{F}$ абсолютно непрерывный, т.е. $\varphi \ll \mu$, то существует $f \in \boldsymbol{L}_1(X,\mu)$, т.ч. $\varphi(A) = \int_A f\, d\mu$ при всех $A \in \Sigma$.*

Доказательство. При помощи разложения Жорда́на представим абсолютно непрерывный заряд $\varphi = u + \boldsymbol{i}v$ в виде линейной комбинации $\varphi = (u_+ - u_-) + \boldsymbol{i}(v_+ - v_-)$ неотрицательных абсолютно непрерывных зарядов $u_\pm$ и $v_\pm$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда заряд $\varphi \geqslant 0$ является неотрицательным.

Применяя лемму к мерам μ и $\nu \doteqdot \varphi$, разложим пространство $X = E \sqcup F \sqcup H$, т.ч. будут выполнены условия $\mu(E) = \nu(F) = 0$ и $\nu(A) = \int_A h\, d\mu$ для всех $A \in \Sigma_H$. В силу абсолютной непрерывности заряда $\nu = \varphi$ имеем $\nu(E) = 0$. Таким образом, полагая $f = h\chi_H$, получим равенство $\nu(A) = \nu(A \cap H) = \int_A h\chi_H\, d\mu = \int_A f\, d\mu$ для всех измеримых множеств $A \in \Sigma$. Поскольку заряд $\nu = \varphi$ принимает конечные значения на σ-алгебре Σ, то функция $f \in \boldsymbol{L}_1(X,\mu)$. □

14 ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Определения. Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется называется *ортогональной*, если $e_n \perp e_m$ при всех $n \neq m$, и называется *ортонормированной*, если, кроме того, $\|e_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ называется *замкнутой* в пространстве $\boldsymbol{E}$, если ее замкнутая линейная оболочка $\overline{\mathrm{sp}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{E}$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ называется *полной* в пространстве $\boldsymbol{E}$, если ее ортогональное дополнение равно нулю $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}{}^{\perp} = 0$.

Пусть далее $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ обозначает ортонормированную систему в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим *коэффициенты Фурье́* $c_n \doteqdot \langle x, e_n \rangle$ относительно заданной ортонормированной системы. Тогда ряд $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ будем называть *рядом Фурье́* элемента x. Если для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ ряд Фурье́ сходится, т.е. последовательность его частичных сумм $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ имеет предел $x = \lim s_n$, то система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ортонормированным базисом* пространства $\boldsymbol{E}$.

1. Неравенство Бе́сселя. *Если $c_n \doteqdot \langle x, e_n \rangle$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Действительно, поскольку система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной, то для частичных сумм ряда Фурье $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|x - s_n\|^2 = \langle x - s_n, x - s_n \rangle = \langle x.x \rangle - 2\Re\langle x, s_n \rangle + \langle s_n, s_n \rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geqslant 0.$$

2. Равенство Парсева́ля. *Равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$, где $c_n \doteqdot \langle x, e_n \rangle$, выполняется тогда и только тогда, когда ряд Фурье элемента $x \in \boldsymbol{E}$ сходится.*

В самом деле, по доказанному выше $\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$. Следовательно, $\|x - s_n\| \searrow 0$ стремится к нулю тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

3. Обобщенное равенство Парсева́ля. *Равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ выполняется в $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда в $\boldsymbol{E}$ справедливо обобщенное равенство Парсева́ля $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d_n}$, где $c_n = \langle x, e_n \rangle$ и $d_n = \langle y, e_n \rangle$.*

Так как $\langle x + \lambda y, e_n \rangle = c_n + \lambda d_n$, то применяя равенство Парсева́ля, получим

$$\|x + \lambda y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n + \lambda d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{\lambda d_n}) + |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2.$$

Поскольку $\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\overline{\lambda}\langle x, y \rangle) + |\lambda|^2 \|y\|^2$, то $\Re(\overline{\lambda}\langle x, y \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{\lambda d_n})$. Полагая здесь $\lambda = 1$, а затем $\lambda = \boldsymbol{i}$, получим обобщенное равенство Парсева́ля

$$\langle x, y \rangle = \Re\langle x, y \rangle + \boldsymbol{i}\Im\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{d_n}) + \boldsymbol{i}\sum_{n=1}^{\infty} \Im(c_n \overline{d_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d_n}.$$

Обратно, из обобщенного равенства Парсева́ля следует равенство Парсева́ля.

Теорема (замкнутости Стекло́ва). *Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда замкнута в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$, когда выполняется равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ при все $x \in \boldsymbol{E}$, где $c_n \doteqdot \langle x, e_n \rangle$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута, то для всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\varepsilon > 0$ существует $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, т.ч. $\|x-y\| < \varepsilon$. Пусть $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{n}$ обозначает линейную оболочку системы $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Поскольку $x - s_n \perp L_n$, то суммы s_n является наилучшим приближением элемента x подпространством L_n. Поэтому имеет место неравенство $\|x-s_m\| \leqslant \|x-s_n\| \leqslant \|x-y\| < \varepsilon$ при всех $m \geqslant n$. Отсюда ряд Фурье́ сходится в $\boldsymbol{E}$ и, следовательно, выполняется равенство Парсева́ля.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$. Так как $\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\|x-s_n\| < \varepsilon$. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$. $\square$

Следствие. *Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ тогда и только тогда, когда она полна.*

В самом деле, если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой, то в силу теоремы замкнутости Стекло́ва имеет место равенство Парсева́ля. Поскольку из условия $\langle x, e_n\rangle = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ вытекает, что $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 0$, то $x = 0$. Следовательно, система является полной. Обратно, если система полна, то ее ортогональное дополнение $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}{}^{\perp} = 0$ равно нулю. Поэтому в силу следствия теоремы об ортогональном разложении замкнутая линейная оболочка $\overline{\mathrm{sp}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{H}$, т.е. система замкнута.

Теорема (вычисление величины наилучшего приближения)**.** *Пусть $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^{n}$ линейная оболочка линейно независимой системы элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}$. Тогда величина наилучшего приближения элемента $x \in \boldsymbol{E}$ подпространством $L \subset \boldsymbol{E}$ вычисляется по следующей формуле:*

$$d = \rho(x, L) = \sqrt{\frac{D(x_1, \dots, x_n, x)}{D(x_1, \dots, x_n)}}, \quad \text{где } D(x_1, \dots, x_n) \doteqdot \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_n\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{pmatrix}$$

обозначает определитель Гра́ма.

Доказательство. Так как $\boldsymbol{E}$ строго нормировано, то элемент $y \in L$ наилучшего приближения существует и единственный. Тогда имеем $d^2 = \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle$. Поскольку $\langle x-y, y\rangle = 0$, то $d^2 = \langle x-y, x\rangle$. Кроме того, $\langle x-y, x_k\rangle = 0$ при $k = 1, \dots, n$. Подставляя в эти равенства $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1\langle x_1, x_1\rangle + \dots + \lambda_n\langle x_n, x_1\rangle & = & \langle x, x_1\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots\cdots \\ \lambda_1\langle x_1, x_n\rangle + \dots + \lambda_n\langle x_n, x_n\rangle & = & \langle x, x_n\rangle \\ \lambda_1\langle x_1, x\rangle + \dots + \lambda_n\langle x_n, x\rangle & = & \langle x, x\rangle - d^2. \end{cases}$$

Так как эта система уравнений имеет решение, то по теореме Кро́некера–Капе́лли ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов. Следовательно, определитель расширенной матрицы равен нулю. Записывая последний столбец определителя расширенной матрицы в виде суммы двух столбцов, в результате мы получим $D(x_1, \dots, x_n, x) - d^2 D(x_1, \dots, x_n) = 0$, что требовалось доказать. $\square$

Лемма (метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта)**.** *Для каждой линейно независимой системы элементов* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *в евклидовом пространстве* $\boldsymbol{E}$ *существует ортонормированная система* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$*, т.ч. элементы* e_n *являются линейными комбинациями элементов* $\{x_k\}_{k=1}^{n}$.

Доказательство. Пусть $y_1 = x_1$ и $e_1 \doteqdot y_1/\|y_1\|$. Далее пусть $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ и $e_2 \doteqdot y_2/\|y_2\|$, тогда $\langle e_2, e_1\rangle = 0$. На n-том шаге полагаем $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, e_k\rangle e_k$ и определим $e_n \doteqdot y_n/\|y_n\|$, тогда $\langle e_n . e_k\rangle = 0$ при $k = 1, \dots, n-1$. Поскольку система $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ линейно независима, то $y_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что матрица A_n преобразования системы $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ в систему $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ является треугольной

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & a_{11}x_1 \\ e_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{array}\right. \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{kk} = 1/\|y_k\| \neq 0$ при $k = 1, \dots, n$. Обратная матрица также будет треугольной. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой тогда и только тогда, когда будет замкнута система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Явное выражение элементов e_n имеет вид

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_{n-1}\rangle & \cdots & \langle x_n, x_{n-1}\rangle \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

где $D_n \doteqdot D(x_1, \dots, x_n) = \det\{\langle x_k, x_l\rangle\}_{k,l=1}^{n}$ обозначают определители Гра́ма. □

Теорема (Ри́сса–Фи́шера об изоморфизме)**.** *Каждое сепарабельное ги́льбертово пространство* $\boldsymbol{H}$ *изометрически изоморфно, либо конечномерному евклидову пространству* $\mathbb{F}^n$*, либо бесконечномерному пространству* $\boldsymbol{\ell}_2$.

Доказательство. В силу условия сепарабельности в пространстве $\boldsymbol{H}$ существует замкнутая система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Отбрасывая из этой системы элементы, которые линейно выражаются через предыдущие, мы получим замкнутую линейно независимую систему элементов в пространстве $\boldsymbol{H}$. Рассмотрим случай, когда эта система является бесконечной, т.е. размерность $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. В случае, когда эта система конечна, т.е. $n = \dim \boldsymbol{H} < \infty$, доказательство полностью аналогично.

Применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, мы построим замкнутую в $\boldsymbol{H}$ ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу теоремы Стекло́ва и свойства 2 каждый элемент $x \in \boldsymbol{H}$ представляется сходящимся рядом Фурье́ $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, где $c_n = \langle x, e_n\rangle$ его коэффициенты Фурье́. Определим отображение $F : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(x) = c$, где $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что F линейное отображение. Поскольку по теореме Стекло́ва выполняется равенство Парсева́ля $\|F(x)\|_{\ell_2} = \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то отображение F является изометричным. Осталось доказать, что образ этого отображения $F(\boldsymbol{H})$ совпадает с пространством $\boldsymbol{\ell}_2$.

Для каждого элемента $c = \{c_n\} \in \ell_2$ рассмотрим последовательность частичных сумм $s_n \doteq \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. Так как в силу ортогональности элементов e_k

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j} \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0 \text{ при } m > n \to \infty,$$

то $\{s_n\}$ является последовательностью Коши́ и в силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ существует предел $\lim s_n = x$ по норме $\boldsymbol{H}$. Применяя непрерывность скалярного произведения, мы получим $\langle x, e_n \rangle = \lim\limits_{m\to\infty} \langle s_m, e_n \rangle = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $F(x) = c$. Таким образом, отображение $F : \boldsymbol{H} \to \ell_2$ гильбертова пространства в ℓ_2 является линейным, биективным и изометричным. $\square$

Пример 1. *Тригонометрическая система* $e_n(z) \doteq z^n$, где $z = e^{i\theta}$ и $n \in \mathbb{Z}$, образует ортонормированный базис в пространстве $\boldsymbol{L}_2(C,\mu) \doteq \boldsymbol{L}_2([0,2\pi],\mu)$ на окружности $C \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ с нормированной лебеговой мерой $d\mu(z) = d\theta/2\pi$. В самом деле, вычисляя скалярное произведение, докажем ортонормированность системы

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta/2\pi = \frac{e^{2\pi i(n-m)} - 1}{2\pi i(n-m)} = \delta_{nm} \doteq \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ 1 & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Докажем замкнутость. Для любой $f \in \boldsymbol{L}_2([0,2\pi],\mu)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется простая функция $h \in \boldsymbol{H}[0,2\pi]$, т.ч. $h = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ и $\|f - h\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/4$. По теореме Валле́-Пуссе́на найдутся множества $A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m_i} [a_{ij}, b_{ij})$, т.ч. если $k = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$, то

$$\|h - k\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |c_i| \, \|\chi_{E_i} - \chi_{A_i}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \sqrt{\mu(E_i \triangle A_i)} < \varepsilon/4.$$

Заменяя кусочно постоянную функция k на линейную в достаточно малой окрестности каждой точки разрыва, построим непрерывную 2π-периодическую функцию $l \in \boldsymbol{C}[0,2\pi]$, т.ч. $\|k - l\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/4$. По теореме Сто́уна существует тригонометрический полином $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$, т.ч. $\|l - p\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/4$. Применяя неравенство треугольника, получим $\|f - p\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f - h\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|h - k\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|k - l\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|l - p\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon$. Таким образом, тригонометрическая система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является замкнутой в $\boldsymbol{L}_2([0,2\pi],\mu) = \boldsymbol{L}_2(C,\mu)$ и, следовательно, образует ортонормированный базис в этом пространстве.

Пример 2. *Пространством Ха́рди* называется подпространство $\boldsymbol{H}_2 \subset \boldsymbol{L}_2(C,\mu)$, состоящее из всех функций $f \in \boldsymbol{L}_2(C,\mu)$, для которых коэффициенты Фурье́ с отрицательными индексами $c_n = \langle f, e_n \rangle = 0$, $n = -1, -2, \ldots$, равны нулю. Функции $f \in \boldsymbol{H}_2$ являются голоморфными внутри круге $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

В самом деле, ряд Фурье́ $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ функции $f \in \boldsymbol{H}_2$ сходится в метрике $\boldsymbol{L}_2(C,\mu)$. Поэтому сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ и, следовательно, радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_k z^k$ не меньше 1, т.е. ряд определяет голоморфную функцию внутри круга D. Таким образом, в силу изометрического изоморфизма в теореме Ри́сса–Фи́шера пространство Ха́рди $\boldsymbol{H}_2$ состоит из всех голоморфных функций $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_k z^k$ внутри круга D, для которых последовательность коэффициентов Те́йлора квадратично суммируема $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ и норма $\|f\|_{\boldsymbol{H}_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\right)^{1/2}$.

Пример 3. *Задача Дирихле́ о сопряженной функции.* Доказать, что каждой действительной функции $u \in \boldsymbol{L}_2(C,\mu)$ соответствует единственная действительная функция $v \in \boldsymbol{L}_2(C,\mu)$, т.ч. $\langle v, e_0 \rangle = 0$ и $f = u + \boldsymbol{i}v \in \boldsymbol{H}_2$.

Такая функция v называется сопряженной к функции u в пространстве $\boldsymbol{L}_2(C,\mu)$. Соответствующее преобразование $\boldsymbol{\Gamma} : \boldsymbol{L}_2(C,\mu) \to \boldsymbol{L}_2(C,\mu)$, т.ч. $\boldsymbol{\Gamma}(u) = v$, действительного пространства $\boldsymbol{L}_2(C,\mu)$ называется *преобразованием Ги́льберта*.

Рассмотрим разложение в ряд Фурье́ $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ функции $f \in \boldsymbol{H}_2$ и обозначим через $u = \Re f$ действительную часть функции f. Поскольку $|u| \leqslant |f|$, то $u \in \boldsymbol{L}_2(C,\mu)$. Поэтому функция u разлагается в ряд Фурье́ $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$ и, следовательно, имеют место следующие равенства:

$$u = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} e_{-n}\Big) = \Re c_0\, e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2}\, e_n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{\overline{c_{-n}}}{2}\, e_n\,.$$

Сравнивая эти два разложения в ряд Фурье́, получим следующие равенства:

$$a_0 = \Re c_0\,; \quad a_n = \begin{cases} c_n/2 & \text{при } n > 0\,; \\ \overline{c_{-n}}/2 & \text{при } n < 0\,. \end{cases}$$

Теперь ясно как решить задачу Дирихле́. Пусть задано разложение в ряд Фурье действительной функции $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$. Тогда $a_n = \overline{a_{-n}}$, т.к. функция принимает действительные значения. Следовательно, коэффициенты Фурье́ функции f можно вычислить по следующим формулам:

$$c_0 = a_0\,; \quad c_n = 2a_n = 2\overline{a_{-n}} = a_n + \overline{a_{-n}} \text{ при всех } n > 0\,.$$

Поскольку последовательность $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ квадратично суммируема, то последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ также квадратично суммируема. Поэтому функция $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ принадлежит пространству $\boldsymbol{H}_2$. Что касается функции $v = \Im f$, то легко получить явное выражение ее коэффициентов Фурье́. Действительно, мы имеем

$$v = \frac{1}{2\boldsymbol{i}}(f - \overline{f}) = \frac{1}{2\boldsymbol{i}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} e_{-n}\Big) = \Im c_0\, e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2\boldsymbol{i}}\, e_n - \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{\overline{c_{-n}}}{2\boldsymbol{i}}\, e_n\,.$$

Сравнивая с разложением этой функции в ряд Фурье́ $v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e_n$, получим

$$b_0 = \Im c_0 = 0\,; \quad b_n = \begin{cases} c_n/2\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}a_n & \text{при } n > 0\,; \\ -\overline{c_{-n}}/2\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}a_n & \text{при } n < 0\,. \end{cases}$$

Эти равенства можно выразить коротко в виде $b_n = -\boldsymbol{i}\,\mathrm{sign}(n)\, a_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, коэффициенты Фурье́ функции v определяются однозначно.

Пример 4. Рассмотрим примеры классических ортогональных многочленов. Они обычно определяются, как ортогонализация системы степеней $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ при помощи скалярного произведения в действительном пространстве $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$

$$\langle f, g \rangle \doteqdot \int_X f(x)\, g(x)\, d\mu(x)\,, \text{ где } f, g \in \boldsymbol{L}_2(X,\mu) \text{ и } X \subset \mathbb{R}\,.$$

a) Многочлены Лежа́ндра: $P_n(x) \doteqdot c_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n(1-x^2)^n$, $X=[-1,1]$, $d\mu(x)=dx$.

b) Многочлены Чебышёва: $T_n(x) \doteqdot c_n \cos n \arccos x$, $X=[-1,1]$, $d\mu(x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Многочлены Лаге́рра: $L_n(x) \doteqdot c_n \boldsymbol{e}^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n \boldsymbol{e}^{-x}$, $X=\mathbb{R}_+$, $d\mu(x)=\boldsymbol{e}^{-x}dx$.

d) Многочлены Эрми́та: $H_n(x) \doteqdot c_n \boldsymbol{e}^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n \boldsymbol{e}^{-x^2}$, $X=\mathbb{R}$, $d\mu(x)=\boldsymbol{e}^{-x^2}dx$.

Здесь функция $d\mu(x)$ определяет меру на множестве X по формуле $\mu(A) \doteqdot \int_A d\mu(x)$, заданной σ-алгебре измеримых множеств $A \subset X$, а константы $c_n > 0$ подобраны так, чтобы соответствующая система многочленов была ортонормированной системой в пространстве $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$. Доказательство ортогональности, как обычно, проводится при помощи интегрирования по частям и замены переменных. Все эти системы полны в соответствующем пространстве $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$.

Интеграл Лебе́га–Сти́лтьеса

Вначале вспомним определение меры Лебе́га–Сти́лтьеса на прямой $\mathbb{R}$. Пусть задана неубывающая функция $\alpha(x)$ на прямой $\mathbb{R}$, непрерывная слева, которую будем называть *производящей функцией* меры Лебе́га–Сти́лтьеса. Если функция $\alpha(x)$ задана на отрезке $[a,b]$, то мы продолжим ее на всю прямую, полагая $\alpha(x)=\alpha(a)$, если $x<a$, и $\alpha(x)=\alpha(b)$, если $x>b$. Стандартная мера Сти́лтьеса $\mathfrak{m}_\alpha$ определяется на полукольце $\mathfrak{S}$ всех полуинтервалов $[a,b)\subset\mathbb{R}$ по формуле

$$\mathfrak{m}_\alpha([a,b))=\alpha(b)-\alpha(a)\,,\ \text{если}\ [a,b)\in\mathfrak{S}\,.$$

Эту меру можно продолжить на минимальное кольцо $\mathscr{R}(\mathfrak{S})$ по аддитивности, т.е. $\mathfrak{m}_\alpha(A)\doteqdot\sum_{i=1}^n\mathfrak{m}_\alpha([a_i,b_i))$, если $A=\bigsqcup_{i=1}^n[a_i,b_i)$. Чтобы продолжить эту меру на более широкий класс множеств вводится понятие внешней меры $\mathfrak{m}_\alpha^*$ и определяется σ-алгебра измеримых множеств Σ_α внешней меры $\mathfrak{m}_\alpha^*$, на которой определяется мера Лебе́га–Сти́лтьеса по формуле $\mu_\alpha(A)=\mathfrak{m}_\alpha^*(A)$ для всех $A\in\Sigma_\alpha$.

Для определения интеграла Лебе́га–Сти́лтьеса вводится понятие нижних сумм Дарбу́–Лебе́га, а интеграл от неотрицательной измеримой функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ будет равен верхней грани нижних сумм Дарбу́–Лебе́га

$$\int_a^b f\,d\mu_\alpha\doteqdot\sup_\tau\underline{D}_\tau(f)=\sup_\tau\sum_{i=1}^n\underline{d}_i(f)\mu_\alpha(e_i),\ \text{где}\ \underline{d}_i(f)\doteqdot\inf_{x\in e_i}f(x)$$

и верхняя грань берется по всем разбиениям τ отрезка $[a,b]=\bigsqcup_{i=1}^n e_i$, где $e_i\in\Sigma_\alpha$. Для произвольной измеримой функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ интеграл Лебе́га–Сти́лтьеса равен разности интегралов от соответствующих неотрицательных функций

$$\int_a^b f\,d\mu_\alpha\doteqdot\int_a^b f_+\,d\mu_\alpha-\int_a^b f_-\,d\mu_\alpha,\ \text{где}\ f_\pm(x)\doteqdot\max\{\pm f(x),0\}.$$

Предполагается, что один из интегралов от $f_\pm$ является конечным, иначе интеграл не имеет смысла. Функция называется *интегрируемой*, т.е. $f\in\boldsymbol{L}([a,b],\mu_\alpha)$, если интегралы от неотрицательных функций $f_\pm$ являются конечными.

Наконец, если функция $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$ имеет ограниченную вариацию, то при помощи разложения Жорда́на $F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$, в котором α и β являются неубывающими функциями, вводятся меры Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β, а также заряд Лебе́га–Сти́лтьеса $\varphi_F\doteqdot\mu_\alpha-\mu_\beta$. После этого интеграл Лебе́га–Сти́лтьеса по заряду φ_F определяется, как разность интегралов по соответствующим мерам

$$\int_a^b f\,d\varphi_F\doteqdot\int_a^b f\,d\mu_\alpha-\int_a^b f\,d\mu_\beta\,.$$

Функцию $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ называют *интегрируемой по заряду* φ_F, если она интегрируема по мерам μ_α и μ_β, т.е. каждый из интегралов справа имеет конечное значение. Для краткости записи эти интегралы по мерам и заряду Лебе́га–Сти́лтьеса записываются иногда как интегралы Ри́мана–Сти́лтьеса $\int_a^b f\,d\alpha$, $\int_a^b f\,d\beta$ и $\int_a^b f\,dF$.

Рассмотрим различные типы интегрирующих и производящих функций.

a) Среди функций $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ ограниченной вариации простейшими являются функции скачков. Пусть в полуинтервале $[a,b)$ задано конечное или счетное множество точек $\{x_k\}$ и соответствующее им множество скачков $\{d_k\}$, т.ч. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ абсолютно сходится. Функция скачков определяется по формуле

$$F(x) \doteqdot F(a) + \sum_{x_k<x} d_k\,, \text{ где } F(b) = F(a) + \sum d_k\,.$$

Эта ступенчатая функция, быть может, с бесконечным числом ступенек, является непрерывной слева $F(x-0) = F(x)$ при всех $x \in (a,b]$ и имеет скачки в точках x_k, равные $F(x_k+0) - F(x_k) = d_k$. Заряд Лебéга–Сти́лтьеса φ_F и соответствующие меры μ_α и μ_β, полученные из разложения Жордáна, равны следующим выражениям:

$$\varphi_F(A) = \sum_{x_k \in A} d_k\,, \quad \mu_\alpha(A) = \sum_{x_k \in A, d_k>0} d_k\,, \quad \mu_\beta(A) = -\sum_{x_k \in A, d_k<0} d_k\,.$$

Поскольку σ-алгебры Σ_α и Σ_β состоят из всех множеств отрезка $[a,b]$, то любая функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима и ее интеграл Лебéга–Сти́лтьеса равен

$$\int_a^b f\,d\varphi_F = \sum f(x_k) d_k\,.$$

При этом интеграл имеет смысл, если, хотя бы один подряд с положительными или отрицательными слагаемыми сходится. Для того, чтобы функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ была интегрируемой по заряду φ_F, необходимо и достаточно, чтобы указанный ряд сходился абсолютно. В самом деле, по ранее доказанной лемме для всякой неотрицательной функции $f \geqslant 0$ существуют неотрицательные простые функции $h_n(x) = \sum_{i=1}^{m_n} h_{ni}\chi_{H_{ni}}$, т.ч. $h_n \nearrow f$. Отсюда по теореме о монотонной сходимости

$$\int_a^b f\,d\mu_\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n\,d\mu_\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} h_{ni}\mu_\alpha(H_{ni}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{d_k>0} h_n(x_k) d_k = \sum_{d_k>0} f(x_k) d_k\,.$$

Аналогичное равенство имеет место для меры μ_β и значит справедливо для φ_F.

b) Рассмотрим в качестве интегрирующей функции F абсолютно непрерывную функцию $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Ее производная $F' \in \boldsymbol{L}[a,b]$ интегрируема по Лебéгу, а заряд Лебéга–Сти́лтьеса и соответствующие меры μ_α и μ_β, полученные из разложения Жордáна, равны следующим интегралам

$$\varphi_F(A) = \int_A F'(x)\,dx\,, \quad \mu_\alpha(A) = \int_A \alpha'(x)\,dx\,, \quad \mu_\beta(A) = \int_A \beta'(x)\,dx\,,$$

Действительно, эти равенства выполняются на полуалгебре $\mathfrak{S}$ полуинтервалов на отрезке $[a,b]$, поскольку $\mu_\alpha([c,d)) = \alpha(d) - \alpha(c)$ и $\mu_\beta([c,d)) = \beta(d) - \beta(c)$. В силу единственности продолжения меры на σ-алгебру измеримых множеств получим, что указанные равенства справедливы на соответствующих на σ-алгебрах $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$, Σ_α и Σ_β, которые содержат все измеримые по Лебегу множества отрезка $[a,b]$.

Лемма. *Если функция $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывна, то ее вариация вычисляется по формуле $\boldsymbol{V}_a^b(F) = \int_a^b |F'(x)|\,dx$.*

Доказательство. Пусть $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ разбиение $[a,b]$. Применяя формулу Нью́тона-Ле́йбница для абсолютно непрерывных функций, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \Big| \int_{x_{k-1}}^{x_k} F'(x)\,dx \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |F'(x)|\,dx = \int_a^b |F'(x)|\,dx$$

Отсюда $\boldsymbol{V}_a^b(F) \leqslant \int_a^b |F'(x)|\,dx$. С другой стороны, применяя лемму (в лекции 9) к неубывающей функции $\boldsymbol{V}(x) \doteq \boldsymbol{V}_a^x(F)$, получим обратное неравенство

$$\boldsymbol{V}_a^b(F) = \boldsymbol{V}(b) - \boldsymbol{V}(a) \geqslant \int_a^b \boldsymbol{V}'(x)\,dx \geqslant \int_a^b |F'(x)|\,dx,$$

поскольку $\boldsymbol{V}_y^x(F) \geqslant |F(x) - F(y)|$ и значит $\boldsymbol{V}'(x) \geqslant |F'(x)|$ при п.в. $x \in [a,b]$. □

Следствие. *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывна, то $|\varphi_F| = \mu_\alpha + \mu_\beta$.*

Действительно, т.к. $\varphi_F(A) = \int_A F'(x)\,dx$, то $|\varphi_F|(A) = \int_A |F'(x)|\,dx$. В силу леммы $\boldsymbol{V}(x) = \alpha(x) + \beta(x) = \int_a^x |F'(x)|\,dx$. Тогда $|F'(x)| = \alpha'(x) + \beta'(x)$ п.в. на $[a,b]$ и

$$|\varphi_F|(A) = \int_A |F'(x)|\,dx = \int_A \alpha'(x) + \beta'(x)\,dx = \mu_\alpha(A) + \mu_\beta(A) \text{ при } A \in \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta\,.$$

Множество $S_F \doteq \{x \in [a,b] \mid F'(x) \neq 0\}$ называется носителем заряда φ_F. Ясно, что это множество измеримо по Лебе́гу, а всякое подмножество дополнительного множества $[a,b] \setminus S_F$ имеет меру нуль относительно вариации заряда $|\varphi_F| = \mu_\alpha + \mu_\beta$, однако может быть не измеримым по Лебе́гу. Следовательно, всякое измеримое множество $A \in \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ представляется в виде $A = A_1 \sqcup A_2$, где $A_1 \doteq A \cap S_F$ измеримо по Лебегу, а $A_2 \doteq A \setminus S_F$ имеет меру нуль относительно вариации $|\varphi_F| = \mu_\alpha + \mu_\beta$.

Интеграл Лебе́га–Сти́лтьеса по абсолютно непрерывному заряду φ_F равен

$$\int_a^b f\,d\varphi_F = \int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx\,.$$

В самом деле, это равенство верно для любой характеристической функции $f = \chi_A$ измеримого множества $A \in \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ и значит выполняется для простой функции по свойству линейности интеграла. Для всякой неотрицательной измеримой функции f существуют простые измеримые функции h_n, т.ч. $0 \leqslant h_n \leqslant f$ и $h_n \nearrow f$ на отрезке $[a,b]$. Отсюда, если функция $f \in \boldsymbol{L}([a,b],\varphi_F)$ интегрируема по заряду φ_F, то по теореме о монотонной сходимости получаем

$$\int_a^b f\,d\varphi_F = \int_a^b f\,d\mu_\alpha - \int_a^b f\,d\mu_\beta = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n\,d\mu_\alpha - \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n\,d\mu_\beta =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)\alpha'(x)\,dx - \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)\beta'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx - \int_a^b f(x)\beta'(x)\,dx\,.$$

Так как $F'(x) = \alpha'(x) - \beta'(x)$ п.в. на $[a,b]$, то отсюда следует указанное равенство.

c) Так как всякая монотонная функция имеет точки разрыва первого рода и их не более, чем счетно, то у функции $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ ограниченной вариации существует не более, чем счетное множество $\{x_k\}$ точек разрыва первого рода, т.ч. существуют скачки $d_k \doteqdot F(x_k+0)-F(x_k-0)$ и ряд $\sum d_k$ сходится абсолютно. Для функции F, непрерывной слева, определим функцию скачков $F_d(x) \doteqdot F(a)+\sum_{x_k<x} d_k$, которая называется *дискретной составляющей* F. Тогда $F_c(x) = F(x) - F_d(x)$ непрерывная функция ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$. Следовательно, производная $F_c'(x) = F'(x)$ существует п.в. на $[a,b]$. Поскольку $F' \in \boldsymbol{L}([a,b],\mu_1)$ интегрируема по Лебегу, то функция $F_a(x) \doteqdot \int_a^x F'(t)\,dt$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[a,b]$ и называется *абсолютно непрерывной составляющей* F. Поэтому функция $F_s(x) \doteqdot F_c(x) - F_a(x)$ непрерывна и имеет производную $F_s'(x) = 0$ п.в. на $[a,b]$. Она называется *сингулярной составляющей* F. Равенства $F(x) = F_d(x) + F_a(x) + F_s(x)$ и $\varphi_F = \varphi_{F_d} + \varphi_{F_a} + \varphi_{F_s}$ называются *разложением Лебе́га* функции F и заряда φ_F. Таким образом, интеграл Лебе́га–Сти́лтьеса по заряду равен сумме интегралов

$$\int_a^b f\,d\varphi_F = \sum f(x_k)d_k + \int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx + \int_a^b f\,d\varphi_{F_s}$$

Определение. Интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса называется предел интегральных сумм Ри́мана–Сти́лтьеса $R_\tau(f,\xi,F)$, когда диаметр разбиения $d_\tau \to 0$, т.е.

$$\int_a^b f\,dF \doteqdot \lim_{d_\tau\to 0} R_\tau(f,\xi,F)\,,\ \text{где}\ R_\tau(f,\xi,F) \doteqdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(F(x_k)-F(x_{k-1}))\,.$$

где $d_\tau \doteqdot \max(x_k - x_{k-1})$, $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ и $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$. Если $F(x) = F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$ разложение Жорда́на, то он равен разности интегралов $\int_a^b f\,dF = \int_a^b f\,d\alpha - \int_a^b f\,d\beta$.

Теорема. *Если $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограниченная функция, то для существования интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса по $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ непрерывной слева, необходимо и достаточно, чтобы вариация $|\varphi_F|(N_f) = 0$ на множестве N_f точек разрыва f. При этом, из существования у функции f интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса вытекает существование интеграла Лебе́га–Сти́лтьеса и их равенство.*

В частности, интегралы Ри́мана–Сти́лтьеса и Лебе́га–Сти́лтьеса по функции $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ ограниченной вариации существуют для всех непрерывных функций и не зависят от изменения функции $F(x)$ на счетном множестве точек интервала (a,b). Поэтому требование непрерывности слева для функции $F(x)$ в этом случае излишне. Рассмотрим простые свойства интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса, в которых не накладывается особых ограничений, кроме существования интегралов.

$$\int_a^b (f+g)\,dF = \int_a^b f\,dF + \int_a^b g\,dF; \quad \int_a^b (\lambda f)\,dF = \lambda\int_a^b f\,dF\,,\ \lambda\in\mathbb{R};$$
$$\int_a^b f\,d(F+G) = \int_a^b f\,dF + \int_a^b f\,dG; \quad \int_a^b f\,d(\lambda F) = \lambda\int_a^b f\,dF\,,\ \lambda\in\mathbb{R};$$

$$\int_a^b f\,dF = \int_a^c f\,dF + \int_c^b f\,dF; \qquad \int_a^b f\,dF = \big[f(x)F(x)\big]_a^b - \int_a^b F\,df;$$
$$\int_a^b f\,dF = \int_a^b f(x)F'(x)\,dx; \qquad \Big|\int_a^b f\,dF\Big| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,\boldsymbol{V}_a^b(F).$$

Пример. Вычислить интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса на отрезке $[0,\pi]$, если

$$f(x) = \sin x \quad \text{и} \quad F(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x\in[0,\pi/2);\\ 2, & \text{если } x=\pi/2 \text{ и } x=\pi;\\ x-\pi/2, & \text{если } x\in(\pi/2,\pi).\end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dF(x) = \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx + 2-\pi/2-2+\int_{\pi/2}^{\pi}\sin x\,dx = 1-\pi/2+1 = 2-\pi/2.$$

Основным приложением интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса является представление ограниченных линейных функционалов на пространстве непрерывных функций. Пусть $\boldsymbol{C}[a,b]$ пространство непрерывных функций с нормой $\|f\|_{\boldsymbol{C}} \doteqdot \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Отображение $\alpha:\boldsymbol{C}[a,b]\to\mathbb{R}$ называется *линейным функционалом*, если

$$\alpha(f+g)=\alpha(f)+\alpha(g) \;\text{ и }\; \alpha(\lambda f)=\lambda\alpha(f) \;\text{ для всех }\; f,g\in\boldsymbol{C}[a.b] \;\text{ и }\; \lambda\in\mathbb{R}.$$

Функционал α называется *ограниченным*, если его норма $\|\alpha\|<\infty$ конечна, где

$$\|\alpha\| \doteqdot \sup_{\|f\|\leqslant 1}|\alpha(f)| = \sup_{f\neq 0}\frac{|\alpha(f)|}{\|f\|}.$$

Теорема (Ри́сса о представлении)**.** *Если $\alpha:\boldsymbol{C}[a,b]\to\mathbb{R}$ ограниченный линейный функционал, то существует единственная функция $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$ ограниченной вариации, т.ч. $F(a)=0$, $F(x-0)=F(x)$ при всех $x\in(a,b]$, $\boldsymbol{V}_a^b(F)=\|\alpha\|$ и*

$$\alpha(f) = \int_a^b f\,dF \;\; \textit{для всех} \;\; f\in\boldsymbol{C}[a,b].$$

Подпространство всех функций ограниченной вариации $\boldsymbol{BV}_0[a,b]$, для которых выполнено утверждение теоремы, т.е. $F(a)=0$ и $F(x-0)=F(x)$ при $x\in(a,b]$, с заданной в нем нормой $\|F\|_{\boldsymbol{BV}_0}=\boldsymbol{V}_a^b(F)$, изометрично пространству ограниченных линейных функционалов. Оно называется *сопряженным пространством* к $\boldsymbol{C}[a,b]$.

Задачи. Найти элементы пространства $\boldsymbol{BV}_0[a,b]$ и их нормы, соответствующие следующим ограниченным линейным функционалам:

1. $\alpha(f)=\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$, где $f\in\boldsymbol{C}[-1,1]$ и $-1\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_n\leqslant 1$;
2. $\alpha(f)=\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$, где $f\in\boldsymbol{C}[-1,1]$ и $g\in\boldsymbol{L}[-1,1]$;
3. $\alpha(f)=\lambda_0 f(x_0)+\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$, где $f\in\boldsymbol{C}[-1,1]$, $g\in\boldsymbol{L}[-1,1]$ и $-1\leqslant x_0\leqslant 1$;