1 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Неотрицательная функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* в множестве X, если она задана на прямом произведении $X \times X \doteqdot \{(x,y) \mid x,y \in X\}$ и выполняются следующие свойства:

a) симметричность $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ при всех $x,y \in X$;

b) неравенство треугольника $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ при всех $x,y,z \in X$;

c) невырожденность $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Пара (X,ρ) называется *метрическим пространством*. Если выполнены (a) и (b), то ρ называется *полуметрикой*, а (X,ρ) *полуметрическим пространством*.

Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *сходящейся* $x_n \to x$ к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x,x_n) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *последовательностью Коши́*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$ при всех $n,m \geqslant N$.

Если всякая последовательность Коши́ является сходящейся к некоторой точке $x \in X$, то метрическое пространство (X,ρ) называется *полным*.

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}$ обозначает *линейное пространство* над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел. Неотрицательная функция $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$ называется *нормой* в $\boldsymbol{E}$, если выполняются следующие свойства:

a) однородность $\boldsymbol{p}(\lambda x) = |\lambda|\boldsymbol{p}(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \boldsymbol{E}$;

b) неравенство треугольника $\boldsymbol{p}(x+y) \leqslant \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{p}(y)$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$;

c) невырожденность $\boldsymbol{p}(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Норма обозначается через $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$ и пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ называется *нормированным пространством*. Полное нормированное пространство будем называть *ба́наховым пространством*. Если выполнены (a) и (b), то $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$ называется *полунормой*, а пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ *полунормированным пространством*. Метрика или полуметрика в этих пространствах определяются по формуле $\rho(x,y) \doteqdot \|x-y\|$.

Определение. Функция $q : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ называется *скалярным произведением* в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ и обозначаемая через $q(x,y) \doteqdot \langle x,y\rangle$, если выполняются следующие свойства:

a) $q(x,y) = \overline{q(y,x)}$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$;

b) $q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 q(x_1,y) + \lambda_2 q(x_2,y)$ при всех $x_1,x_2,y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}$;

c) $q(x,x) \geqslant 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $q(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пространство, в котором задано скалярное произведение $q(x,y) \doteqdot \langle x,y\rangle$, называется *евклидовым пространством* $(\boldsymbol{E},q)$. Функция $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x,x\rangle}$ называется *евклидовой нормой*, а $\rho(x,y) \doteqdot \|x-y\|$ называется *евклидовой метрикой*.

Пример 1. Нормированное пространство $\mathbb{F}^n \doteqdot \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{F}, k = 1, \dots, n\}$, состоящее из конечных последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n)$ действительных или комплексных чисел $x_k \in \mathbb{F}$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle \doteqdot \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ и нормой $\|x\| \doteqdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ называется *конечномерным евклидовым пространством.*

Пример 2. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *ограниченной* на множестве X, если существует число $c > 0$, т.ч. $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in X$. Нормированное пространство $\boldsymbol{B}(X) \doteqdot \{f \mid f : X \to \mathbb{F}$ ограничена$\}$, состоящее из ограниченных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством ограниченных функций.*

Пример 3. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *непрерывной* на пространстве (X, ρ), если для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho(x, y) < \delta$. Пространство $\boldsymbol{C}(X) \doteqdot \{f \mid f : X \to \mathbb{F}$ непрерывна и ограничена$\}$, состоящее из ограниченных и непрерывных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством непрерывных функций.*

Лемма. *Пространства $\boldsymbol{B}(X)$ и $\boldsymbol{C}(X)$ являются ба́наховыми.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\boldsymbol{B}(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и при всех $n, m \geqslant N$. По критерию Коши равномерной сходимости она сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и $n \geqslant N$. Отсюда $\|f_n - f\| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Так как $\|f\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_n\|$, то $f \in \boldsymbol{B}(X)$.

Поскольку равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, то $\boldsymbol{C}(X)$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{B}(X)$ и, следовательно, также будет ба́наховым пространством. □

Открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве (X, ρ) обозначаются через $\boldsymbol{U}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$; $\boldsymbol{S}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r\}$; $\boldsymbol{U}_r \doteqdot \boldsymbol{U}_r(0)$; $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \boldsymbol{S}_r(0)$. Для каждого множества $A \subset X$ введем следующие обозначения:

$\mathring{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \subset A\}$ — множество *внутренних* точек;

$\tilde{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A = x\}$ — множество *изолированных* точек;

$\overline{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$ — множество точек *прикосновения*;

$\acute{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0,\ (\boldsymbol{U}_r(x) \setminus x) \cap A \neq \emptyset\}$ — множество *предельных* точек.

Множества $\mathring{A}$ и $\overline{A}$ называются *внутренностью* и *замыканием* множества A.

Если $\mathring{A} = A$, то множество A называется *открытым.*
Если $\overline{A} = A$, то множество A называется *замкнутым.*
Если $\overline{A} = X$, то множество A называется *всюду плотным.*
Если $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, то множество A называется *нигде не плотным.*

Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется *сепара́бельным*, если в нем существует счетное и всюду плотное подмножество $A \subset X$.

Рассмотрим свойства операции замыкания в метрическом пространстве (X,ρ).

1. $\overline{A}=\{x\in X \mid \exists x_n\in A,\ \textit{т.ч.}\ x_n\to x\}$.

2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

3. $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

В самом деле, $x\in\overline{A}$ тогда и только тогда, когда существуют последовательность точек $x_n\in A$, т.ч. $x_n\in A\cap \boldsymbol{U}_{1/n}(x)$. Отсюда следует, что $\rho(x,x_n)<1/n$, т.е. $x_n\to x$.

Если $x\in\overline{A\cup B}$, то существуют точки $x_n\in A\cup B$, т.ч. $x_n\to x$. Тогда существует подпоследовательность точек x_{n_k}, принадлежащих A или B, т.ч. $x_{n_k}\to x$. Поэтому справедливо включение $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. Обратное включение очевидно.

Так как $A\subset\overline{A}$, то имеем $\overline{A}\subset\overline{\overline{A}}$. Пусть $x\in\overline{\overline{A}}$, тогда найдется последовательность $x_n\in\overline{A}$, т.ч. $x_n\to x$. Кроме того, для каждого n найдется последовательность $x_{nm}\in A$, т.ч. $x_{nm}\to x_n$. Выберем подпоследовательность m_n, т.ч. $\rho(x_{nm_n},x_n)<1/n$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x_{nm_n},x)\leqslant\rho(x_{nm_n},x_n)+\rho(x_n,x)\to 0$, т.е. $x_{nm_n}\to x\in\overline{A}$.

Определение. Отображение $F:X\to Y$ метрических пространств (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) называется *непрерывным*, если для любого $x\in X$ и для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\rho_Y(F(x),F(y))<\varepsilon$ выполняется для всех $y\in X$, $\rho_X(x,y)<\delta$.

Отображение $F:X\to Y$ называется *изометричным*, если $\rho_Y(F(x),F(y))=\rho_X(x,y)$ для всех $x,y\in X$. Если, кроме того, образ $F(X)=Y$, то отображение называется *изометрией*, а пространства X и Y называются *изометричными*.

Например, в силу неравенства треугольника $|\rho(x,y)-\rho(x_0,y_0)|\leqslant\rho(x,x_0)+\rho(y,y_0)$ метрика $\rho(x,y)$ является непрерывной функцией двух переменных.

Теорема (о пополнении)**.** *Для каждого метрического пространства (X,ρ_X) существует такое полное метрическое пространство (Y,ρ_Y) и изометричное отображение $F:X\to Y$, что его образ $F(X)\subset Y$ является всюду плотным в Y. При этом любые два таких полных пространства являются изометричными.*

Доказательство. Пусть $f_x(y)\doteqdot\rho_X(x,y)-\rho_X(x_0,y)$, где точка $x_0\in X$ фиксирована. Тогда $|f_x(y)|\leqslant\rho_X(x,x_0)$ для всех $y\in X$, т.е. $f_x\in\boldsymbol{C}(X)$ при всех $x\in X$. Определим отображение $F:X\to\boldsymbol{C}(X)$ по формуле $F(x)\doteqdot f_x$ и положим $Y\doteqdot\overline{F(X)}$. Так как

$$\rho_Y(F(x_1),F(x_2))=\sup_{y\in X}|f_{x_1}(y)-f_{x_2}(y)|=\sup_{y\in X}|\rho_X(x_1,y)-\rho_X(x_2,y)|=\rho_X(x_1,x_2),$$

то отображение F является изометричным. Пусть существуют два отображения $F:X\to Y$ и $F_1:X\to Y_1$, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда для каждого $y\in Y$ найдется последовательность $x_n\in X$, т.ч. $F(x_n)\to y$. Отсюда $F_1(x_n)\to y_1\in Y_1$. Определим отображение $I:Y\to Y_1$ по формуле $I(y)\doteqdot y_1$. Тогда при всех $y,y'\in Y$

$$\rho_Y(y,y')=\lim_{n\to\infty}\rho_Y(F(x_n),F(x_n'))=\lim_{n\to\infty}\rho_X(x_n,x_n')=\lim_{n\to\infty}\rho_{Y_1}(F_1(x_n),F_1(x_n'))=\rho_{Y_1}(y_1,y_1').$$

Таким образом, отображение I является изометрией пространств Y и Y_1. $\square$

Пример 4. Пополнением пространства $\boldsymbol{P}$ всех многочленов $P(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел с метрикой $\rho(P,Q) \doteqdot \max_{x\in[a,b]}|P(x)-Q(x)|$ является пространство $\boldsymbol{C}[a,b]$ непрерывных функций. В самом деле, по теореме Веерштрасса для каждой функции $f\in\boldsymbol{C}[a.b]$ и для любого $\varepsilon>0$ существует $P\in\boldsymbol{P}$, т.ч. $\rho(f,P)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon$. Отсюда $\boldsymbol{P}$ всюду плотно в $\boldsymbol{C}[a.b]$. Поскольку $\boldsymbol{C}[a.b]$ полно, то оно будет пополнением $\boldsymbol{P}$.

Определение. Отображение $F: X\to X$ метрического пространства (X,ρ) в себя называется *сжимающим*, если для некоторого $0<\lambda<1$ выполняется неравенство $\rho(F(x),F(y))\leqslant\lambda\rho(x,y)$ при всех $x,y\in X$.

Каждое сжимающее отображение является непрерывным, т.к. для любого $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\rho(F(x),F(y))\leqslant\lambda\rho(x,y)<\varepsilon$, если $\rho(x,y)<\delta=\varepsilon/\lambda$.

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Для всякого сжимающего отображения $F: X\to X$ полного метрического пространства (X,ρ) в себя существует единственная неподвижная точка $x\in X$, т.е. $F(x)=x$.*

Доказательство. Пусть $x_0\in X$, $x_1\doteqdot F(x_0)$, $x_2\doteqdot F(x_1)$, ..., т.е. мы имеем $x_n=F^n(x_0)$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим при $n<m$ и $0<\lambda<1$

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}\rho(x_k,x_{k+1})=\sum_{k=n}^{m-1}\rho(F^k(x_0),F^k(x_1))\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}\lambda^k\rho(x_0,x_1)\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(x_0,x_1).$$

Поэтому $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, существует предел $\lim x_n=x\in X$. Так как $F(x_{n-1})=x_n$, то, переходя к пределу и используя непрерывность отображения F, получим $F(x)=x$. Если существует еще одна точка $y\in X$, т.ч. $F(y)=y$, то из неравенства $\rho(x,y)=\rho(F(x),F(y))\leqslant\lambda\rho(x,y)$ следует, что $\rho(x,y)=0$, т.е. имеет место равенство $x=y$. □

Лемма (о вложенных шарах). *Если в полном метрическом пространстве (X,ρ) последовательность вложенных шаров $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1)\supset\boldsymbol{S}_{r_2}(x_2)\supset\ldots$ имеет радиусы, т.ч. $\lim r_n=0$, то пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)\neq\emptyset$ не пусто.*

Доказательство. Поскольку по условию $\rho(x_n,x_m)\leqslant r_n$ при $n<m$ и $\lim r_n=0$, то $\{x_n\}$ является последовательностью Ко́ши и, следовательно, существует предел $\lim x_n=x$. Переходя к пределу в неравенстве $\rho(x_n,x_m)\leqslant r_n$ при $m\to\infty$, мы получим $\rho(x_n,x)\leqslant r_n$. Таким образом, точка $x\in X$ принадлежит $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$. □

Определение. Множество $A\subset X$ в метрическом пространстве (X,ρ) называется множеством *первой категории*, если является счетным объединением $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ нигде не плотных множеств $A_n\subset X$. Множество $A\subset X$ называется множеством *второй категории*, если оно не является множеством первой категории.

Теорема (Бэ́ра). *Каждое полное метрическое пространство (X,ρ) является множеством второй категории.*

Доказательство. Предположим обратное, т.е. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества A_n нигде не плотны. Так как $\overline{A_1}$ не имеет внутренних точек, то существуют точка $x_1 \in X \setminus \overline{A}_1$ и шар $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \subset X \setminus \overline{A}_1$. Так как $\overline{A_2}$ не имеет внутренних точек, то существуют точка $x_2 \in \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и шар $\boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \subset \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и т.д. Получили последовательность вложенных шаров $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \supset \boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \supset \ldots$. Выберем радиусы $r_n > 0$, т.ч. $\lim r_n = 0$. По лемме существует точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$. Тогда по построению $x \notin A_n$ при всех n, что невозможно. Таким образом, X не является множеством первой категории. $\square$

Пример 5. Множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел является множеством первой категории, т.к. состоит из счетного объединения точек. Если бы множество $\mathbb{J} \subset \mathbb{R}$ иррациональных чисел являлось множеством первой категории, тогда объединение $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ множеств первой категории образовало бы множество первой категории. По теореме Бэ́ра множество действительных чисел $\mathbb{R}$ не является множеством первой категории. Получили противоречие. Значит множество рациональных чисел $\mathbb{J}$ является множеством второй категории.

Пример 6. Построим последовательность вложенных замкнутых шаров в полном метрическом пространстве с пустым пересечением. Рассмотрим множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ с метрикой $\rho(n,m) \doteqdot 1 + \frac{1}{n+m}$ при $n \neq m$ и $\rho(n,n) = 0$.

Замкнутые шары $\boldsymbol{S}_{r_n}(n) = \{n, n+1, \ldots\}$, $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$, являются вложенными и их пересечение пусто. Нетрудно заметить, что метрическое пространство $(\mathbb{N}, \rho)$ полно, поскольку всякая ее последовательность Коши́ стационарна (начиная с некоторого номера является постоянной). Поэтому по теореме Бэра пространство $\mathbb{N}$ является множеством второй категории. В этом пространстве все множества открыты и замкнуты, т.е. $(\mathbb{N}, \rho)$ имеет дискретную топологию. Поэтому в нем не существует нигде не плотных множеств, кроме пустого множества $\emptyset$.

Пример 7. Конечномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является сепарабельным. В самом деле, пусть $\mathbb{Q}^n \doteqdot \{q = (q_1, \ldots, q_n) \mid q_k \in \mathbb{Q}\}$ множество конечных последовательностей рациональных чисел $q_k \in \mathbb{Q}$. Так как $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, то для любых $x \in \mathbb{F}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $q \in \mathbb{Q}^n$, т.ч. $\|x - q\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - q_k|^2\right)^{1/2} < \varepsilon$. Поэтому $\mathbb{Q}$ счетное и всюду плотное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 8. Пространство $\boldsymbol{C}[a,b]$ непрерывных функций $f : [a,b] \to \mathbb{F}$ на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ является сепарабельным. В самом деле, для каждой функции $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ с коэффициентами $a_k \in \mathbb{F}$ из поля $\mathbb{F}$, т.ч. $\|f - P\| < \varepsilon/2$. Поскольку множество (комплексно) рациональных чисел $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ всюду плотно в $\mathbb{F}$, то существует многочлен $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k$ с такими коэффициентами $q_k \in \mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$, т.ч. $\|P - Q\| < \varepsilon/2$. Так как по неравенству треугольника $\|f - Q\| \leqslant \|f - P\| + \|P - Q\| < \varepsilon$, то множество всех многочленов $Q(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ является всюду плотным в пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$. Кроме того, оно является счетным. Поэтому пространство $\boldsymbol{C}[a,b]$ будет сепарабельным.

Пример 9. В евклидовом пространстве выполняется равенство параллелограмма $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$. В самом деле, имеем $\|x\pm y\|^2=\langle x\pm y,x\pm y\rangle=\langle x,x\rangle\pm(\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle)+\langle y,y\rangle=\|x\|^2\pm\Re\langle x,y\rangle+\|y\|^2$. Складывая эти два равенства, получим равенство параллелограмма.

Пример 10. Пространство ограниченных функций $\boldsymbol{B}(X)$ не является евклидовым пространством, если множество X содержит более, чем одну точку. В самом деле, пусть $x_1,x_2\in X$, где $x_1\neq x_2$. Определим следующие две функции

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x=x_1;\\ 0, & x\neq x_1,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}1, & x=x_2;\\ 0, & x\neq x_2,\end{cases}$$

Тогда имеют место равенства $\|f_1\|=\|f_2\|=\|f_1\pm f_2\|=1$. Следовательно, равенство параллелограмма не выполняется.

Пример 11. Если множество X бесконечно, то пространство $\boldsymbol{B}(X)$ несепарабельно. В самом деле, предположим, что $C\subset\boldsymbol{B}(X)$ является счетным и всюду плотным подмножеством. Рассмотрим множество $M\subset\boldsymbol{B}(X)$ всех функций, которые принимают только значения 0 и 1. Тогда $\|f-g\|=1$ для всех $f,g\in M$, $f\neq g$. В силу всюду плотности C в каждом шаре радиуса $1/3$ с центром в точке $f\in M$ существует хотя бы один элемент множества C. Так как множество M несчетно, то множество C также несченто. Получили противоречие.

Пример 12. Пусть $1\leqslant p<\infty$ и ℓ_p обозначает пространство последовательностей $x=\{x_n\}$ действительных или комплексных чисел $x_n\in\mathbb{F}$, т.ч. $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$. В этом пространстве определим норму $\|x\|_{\ell_p}\doteqdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}$. Тогда $\ell_p\subset\ell_q$ при всех $p<q$. В самом деле, для этого докажем, что выполняется неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q\right)^{1/q}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\text{ при всех }1\leqslant p<q<\infty\text{ и }x=\{x_n\}\in\ell_p.$$

Если разделить левую часть на правую, то достаточно рассмотреть только случай, когда $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p=1$. В этом случае $|x_n|\leqslant 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p=1$ при всех $1\leqslant p<q<\infty$. Таким образом, $\|x\|_{\ell_q}\leqslant\|x\|_{\ell_p}$ при всех $1\leqslant p<q<\infty$.

Пример 13. Пространства ℓ_p при всех $1\leqslant p<\infty$ банаховы и сепарабельные. В самом деле, ℓ_p является нормированным пространством. Докажем его полноту.

Пусть $x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}$ является последовательностью Коши, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что $\|x^{(k)}-x^{(l)}\|_{\ell_p}<\varepsilon$ при всех $k,l\geqslant N$. Отсюда $|x_n^{(k)}-x_n^{(l)}|<\varepsilon$ при всех $k,l\geqslant N$ и $n\geqslant 1$. Поэтому $\{x_n^{(k)}\}$ является последовательностью Коши при всех $n\geqslant 1$ и значит существует предел $\lim_{k\to\infty}x_n^{(k)}=x_n$. Тогда, полагая $x=\{x_n\}$ и переходя к пределу в неравенстве $|x_n^{(k)}-x_n^{(l)}|<\varepsilon$, получим, что $\|x^{(k)}-x\|_{\ell_p}\leqslant\varepsilon$ при всех $k\geqslant N$. В силу неравенства треугольника $\|x\|_{\ell_p}\leqslant\|x^{(k)}\|_{\ell_p}+\|x^{(k)}-x\|_{\ell_p}<\infty$. Таким образом, последовательность $x^{(k)}$ сходится к $x\in\ell_p$ в метрике ℓ_p.

Для доказательства сепарабельности ℓ_p заметим, если элемент $x=\{x_n\}\in\ell_p$, то существует предел $\lim_{m\to\infty}s_m(x)=x$ в ℓ_p, где $s_m(x)=\{y_n\}$ обозначает финитную последовательность, равную $y_n=x_n$ при $n\leqslant m$ и $y_n=0$ при $n>m$. Действительно, $\|x-s_m(x)\|_{\ell_p}=\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\to 0$. Следовательно, множество финитных последовательностей всюду плотно в ℓ_p и значит в ℓ_p всюду плотно подпространство, состоящее из всех финитных последовательностей рациональных чисел. Поскольку это подпространство является счетным, то ℓ_p будет сепарабельным.

2 ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Пусть $\mathbf{2}^X$ обозначает множество всех подмножеств множества X, включая пустое множество $\emptyset$. *Топологией* в множестве X называется такая система множеств $\tau \subset \mathbf{2}^X$, что выполняются следующие аксиомы.

a) *Аксиома объединения*: $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ для всякой системы $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$;

b) *Аксиома пересечения*: $\bigcap_{k=1}^n B_k \in \tau$ для всякой конечной системы $\{B_k\}_{k=1}^n \subset \tau$;

c) *Аксиома невырожденности*: пустое множество $\emptyset \in \tau$ и множество $X \in \tau$.

Топологическим пространством (X,τ) называется множество X, в котором задана *топология* $\tau \subset \mathbf{2}^X$, В топологическом пространстве множества $A \in \tau$ называются *открытыми*, а их дополнения $A' \doteqdot X \setminus A$ *замкнутыми*. Открытое множество $O(x)$, содержащее точку $x \in X$, называется *окрестностью* этой точки x. Топологическое пространство называется *хаусдововым*, если для любых двух различных точек $x,y \in X$, $x \neq y$, существуют непересекающиеся окрестности $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Система множеств $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии* τ, если любое множество топологии $A \in \tau$ является объединением $A = \bigcup_{i\in I} B_i$ множеств $B_i \in \beta$.

Система окрестностей $\beta(x)$ точки $x \in X$ называется *локальной базой в точке* x, если любая окрестность $O(x)$ точки x содержит некоторую окрестность из $\beta(x)$. Совокупность локальных баз всех точек образует *локальную базу топологии* τ.

С помощью базы окрестностей, как в метрическом пространстве, можно ввести понятия внутренних, предельных, изолированных точек и точек прикосновения, а также понятия замыкания, всюду плотного и нигде не плотного множества.

1. *Совокупность систем множеств $\beta(x)$, где $x \in X$, образует локальную базу некоторой топологии в X, если каждое множество из $\beta(x)$ содержит точку x и для любых $A \in \beta(x)$, $B \in \beta(y)$, $z \in A \cap B$ существует $C \in \beta(z)$, т.ч. $C \subset A \cap B$.*

Докажем, что множества, которые являются объединением элементов системы $\beta \doteqdot \bigcup_{x\in X} \beta(x)$ образуют топологию τ в X. Ясно, что $\emptyset, X \in \tau$. Очевидно также, что объединение любой системы множеств из τ принадлежит τ. Кроме того, заметим, что если $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ и $B = \bigcup_{j\in J} B_j$, где $A_i, B_j \in \beta$, то $A \cap B = \bigcup_{i\in I, j\in J} A_i \cap B_j$. Так как из условия вытекает, что множество $A_i \cap B_j$ является объединением элементов β, то $A \cap B \in \tau$. Таким образом, по индукции пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ.

2. *В метрическом пространстве (X,ρ) система τ_X всех открытых множеств в X является топологией. Открытые шары $U_r(x)$ образуют локальную базу топологии τ_X метрического пространства.*

В самом деле, если $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, то $x \in A_i$ при некотором $i \in I$ и значит существует шар $U_r(x) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Если $x \in \bigcap_{k=1}^n B_k$, то существуют шары $U_{r_k}(x) \subset B_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Пусть $r \doteqdot \min_{1\leqslant k\leqslant n} r_k$, тогда $U_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^n B_k$. Поэтому по определению система всех открытых шаров $U_r(x)$ образует локальную базу топологии τ.

3. *Топология произведения $X \doteqdot X_1 \times X_2$ метрических пространств (X_1,ρ_{X_1}) и (X_2,ρ_{X_2}) определяется метрикой $\rho_X^{(1)}(x,y) \doteqdot \rho_{X_1}(x_1,y_1)+\rho_{X_2}(x_2,y_2)$ при все $x,y \in X$.*

Метрику в произведении $X_1 \times X_2 = \{x = (x_1,x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ можно также определить другим эквивалентным способом, например, по евклидовой формуле

$$\rho_X^{(2)}(x,y)) \doteqdot \sqrt{\rho_{X_1}^2(x_1,y_1)+\rho_{X_2}^2(x_2,y_2)} \text{ при всех } x,y \in X\,.$$

Тогда, применяя элементарные неравенства $\rho_X^{(1)}(x,y)/2 \leqslant \rho_X^{(2)}(x,y) \leqslant \rho_X^{(1)}(x,y)$, легко доказать, что топология X в метрике $\rho_X^{(1)}$ совпадает с топологией X в метрике $\rho_X^{(2)}$.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если для любого $A \in \tau_Y$ прообраз $f^{-1}(A) \in \tau_X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *открытым*, если для любого $A \in \tau_X$ образ $f(A) \in \tau_Y$.

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называют *гомеоморфизмом*, если оно является биективным, непрерывным и открытым отображением.

Теорема. *Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) являются метрическими пространствами. Тогда следующие условия отображения эквивалентны:*

a) *отображение $f : X \to Y$ является непрерывным;*

b) *для каждого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч.выполняется неравенство $\rho_Y(f(x),f(y)) < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho_X(x,y) < \delta$;*

c) *для любой сходящейся последовательности $x_n \to x$ в X ее образ является сходящейся последовательностью $f(x_n) \to f(x)$ в Y.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (a) и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $x \in X$ существует шар $\boldsymbol{U}_\delta(x) \subset f^{-1}(\boldsymbol{U}_\varepsilon(f(x)))$, что равносильно (b). Пусть выполнено (b) и последовательность сходится $x_n \to x$ в X, т.е. для заданного $\delta > 0$ существует N, т.ч. $\rho_X(x,x_n) < \delta$ для всех $n \geqslant N$. В силу (b) выполняется $\rho_Y(f(x),f(x_n)) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Отсюда $f(x_n) \to f(x)$, т.е. выполнено (c). Пусть $A \subset Y$ замкнутое множество. Если $x_n \in f^{-1}(A)$ и $x_n \to x$, то по условию (c) получим $f(x_n) \to f(x)$, а из замкнутости $f(x) \in A$, т.е. $x \in f^{-1}(A)$. Поэтому прообраз замкнутого множества замкнут. Это равносильно тому, что прообраз открытого множества открыт. $\square$

Лемма. *В полунормированном пространстве $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ операции сложения $x+y$ и умножения λx на число $\lambda \in \mathbb{F}$ являются непрерывными.*

Доказательство. Для доказательства непрерывности операции λx умножения на число используем неравенство треугольника и однородность полунормы $\boldsymbol{p}$, тогда мы получим $\boldsymbol{p}(\lambda x - \lambda_0 x_0) \leqslant |\lambda - \lambda_0|\boldsymbol{p}(x-x_0) + |\lambda - \lambda_0|\boldsymbol{p}(x_0) + |\lambda_0|\boldsymbol{p}(x-x_0) < \varepsilon$, если $|\lambda_0| < a$, $\boldsymbol{p}(x_0) < b$, $\boldsymbol{p}(x-x_0) < \varepsilon/3a$, $|\lambda-\lambda_0| < \varepsilon/3b < a$. Непрерывность операции сложения $x+y$ можно доказать простым применением неравенства треугольника $\boldsymbol{p}(x+y-x_0-y_0) \leqslant \boldsymbol{p}(x-x_0)+\boldsymbol{p}(y-y_0) < \varepsilon$, если $\boldsymbol{p}(x-x_0) < \varepsilon/2$ и $\boldsymbol{p}(y-y_0) < \varepsilon/2$. $\square$

Определение. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) являются метрическими пространствами. Отображение $f:X\to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\rho_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$ для всех $x,y\in X$, $\rho_X(x,y)<\delta$.

Система $\{f_i\}_{i\in I}$ отображений $f_i:X\to Y$ называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\rho_Y(f_i(x),f_i(y))<\varepsilon$ для всех индексов $i\in I$ и для всех $x,y\in X$, $\rho_X(x,y)<\delta$.

Пример 1. Метрика $\rho(x,y)$ в метрическом пространств (X,ρ) равномерно непрерывна по совокупности переменных, так как если $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)\in X\times X$ и выполняется неравенство $\rho^{(1)}(x,y)=\rho(x_1,y_1)+\rho(x_2,y_2)<\varepsilon$, то получаем $|\rho(x_1,x_2)-\rho(y_1,y_2)|\leqslant|\rho(x_1,x_2)-\rho(y_1,x_2)|+|\rho(y_1,x_2)-\rho(y_1,y_2)|\leqslant\rho(x_1,y_1)+\rho(x_2,y_2)<\varepsilon$.

Теорема (принцип продолжения по непрерывности). *Пусть задано равномерно непрерывное отображение $f:A\to Y$, определенное на всюду плотном подмножестве $A\subset X$ метрического пространства (X,ρ_X), со значениями в полном метрическом пространстве (Y,ρ_Y). Тогда существует единственное равномерно непрерывное отображение $g:X\to Y$, т.ч. $g(x)=f(x)$ при всех $x\in A$.*

Доказательство. В силу равномерной непрерывности отображения f для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\rho_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$ для всех $x,y\in A$: $\rho_X(x,y)<\delta$. Так как A всюду плотно в X, то для каждого $x\in X$ существуют $x_n\in A$, т.ч. $x_n\to x$.

Выберем число N, т.ч. $\rho_X(x_n,x_m)<\delta$ при всех $n,m\geqslant N$. Тогда $\rho_Y(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$. Поэтому $\{f(x_n)\}$ последовательность Коши и значит существует предел $g(x)\doteqdot\lim f(x_n)$. Если взять другую сходящуюся последовательность $y_n\to x$, то, полагая $z_n\doteqdot x_k$ при $n=2k-1$ и $z_n\doteqdot y_k$ при $n=2k$, мы получим, что $z_n\to x$. Тогда $g(x)=\lim f(z_n)=\lim f(x_n)=\lim f(y_n)$. Поэтому значение $g(x)$ не зависит от выбора сходящейся последовательности и определение отображения g корректно.

Пусть $x,y\in X$ и $\rho_X(x,y)<\delta$. Выберем последовательности точек $x_n,y_n\in A$, т.ч. $x_n\to x$ и $y_n\to y$. Тогда существует N, т.ч. $\rho_X(x_n,y_n)<\delta$ при всех $n\geqslant N$. В силу равномерной непрерывности отображения f имеем неравенство $\rho_Y(f(x_n),f(y_n))<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $\rho_Y(g(x),g(y))\leqslant\varepsilon$. Таким образом, отображение $g:X\to Y$ равномерно непрерывно. □

Определение. Пара $(\boldsymbol{E},\rho)$ называется *метрическим линейным пространством*, если $\boldsymbol{E}$ линейное пространство, в котором определена метрика $\rho(x,y)$, т.ч.

a) метрика инвариантна $\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)$ при всех $x,y,z\in\boldsymbol{E}$;

b) операция умножения на число $f(\lambda,x)\doteqdot\lambda x$, $f:\mathbb{F}\times\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$, непрерывна.

Функция $\|x\|\doteqdot\rho(x,0)$ называется *квазинормой*. Она удовлетворяет неравенству треугольника $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, симметрична $\|-x\|=\|x\|$ и не вырождена. Однако свойство однородности $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ может не выполняться. Полное метрическое линейное пространство называется *пространством Фреше*.

Определение. Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$ называется *ограниченным*, если система отображений $\{f_x\}_{x \in A}$, где $f_x : \mathbb{F} \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_x(\lambda) \doteqdot \lambda x$, является равностепенно непрерывной в нуле, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|\lambda x\| < \varepsilon$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $x \in A$.

1. *Ограниченное множество A в метрическом линейном пространстве* $(\boldsymbol{E}, \rho)$ *содержится в некотором шаре, т.е.* $M \subset \boldsymbol{U}_r$. *В нормированном пространстве это условие является необходимым и достаточным для ограниченности.*

В самом деле, по определению ограниченности множества A для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x/n\| < \varepsilon$ при $x \in A$. Поскольку $\|x\| \leqslant n\|x/n\| < n\varepsilon$ при всех $x \in A$, то множество $A \subset \boldsymbol{U}_{n\varepsilon}$ содержится в шаре $\boldsymbol{U}_r$. Обратно предположим, что в нормированном пространстве множество $A \subset \boldsymbol{U}_r$ содержится в шаре $\boldsymbol{U}_r$. Тогда получим $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| < \varepsilon$, если $|\lambda| < \varepsilon/r$ и $x \in A$.

2. *Всякая сходящаяся последовательность* $x_n \to x$ *в метрическом линейном пространстве* $(\boldsymbol{E}, \rho)$ *является ограниченной.*

Так как $x_n \to x$ и операции умножения непрерывна в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda(x_n - x)\| < \varepsilon/2$ при всех $n > m$ и $|\lambda| < \delta$. Далее в силу непрерывности в нуле по переменной λ мы можем выбрать $\delta > 0$ настолько малым, чтобы $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ и $\|\lambda(x_n - x)\| < \varepsilon/2$ при $n \leqslant m$ и $|\lambda| < \delta$. Следовательно, получаем $\|\lambda x_n\| \leqslant \|\lambda x\| + \|\lambda(x_n - x)\| < \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $|\lambda| < \delta$.

Определение. Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ метрических линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если для каждого ограниченного множества $A \subset \boldsymbol{E}$ в пространстве $\boldsymbol{E}$ его образ $B = f(A) \subset \boldsymbol{F}$ является ограниченным множеством в пространстве $\boldsymbol{F}$.

Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называется *линейным* над полем $\mathbb{F}$, если $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Теорема. *Пусть* $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *линейное отображение метрических линейных пространств. Тогда следующие условия эквивалентны: отображение непрерывно в нуле; отображение равномерно непрерывно; отображение ограничено.*

Доказательство. Если f непрерывно в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| < \varepsilon$ при $\|x - y\| < \delta$, т.е. f равномерно непрерывно.

Если $M \subset \boldsymbol{E}$ ограничено, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $x \in M$. Так как f непрерывно в нуле, то существует $\varepsilon > 0$, т.ч. $\|\lambda f(x)\| = \|f(\lambda x)\| < r$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $x \in M$. Поэтому образ $f(M)$ ограничен.

Пусть последовательность $x_n \to 0$. Выберем индексы n_k, т.ч. $\|x_n\| < 1/k^2$ при всех $n \geqslant n_k$, а затем положим $\lambda_n \doteqdot k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Тогда имеем $\lambda_n \to \infty$ и $\lambda_n x_n \to 0$, так как $\|\lambda_n x_n\| \leqslant \lambda_n \|x_n\| < 1/k$. Поскольку последовательность $\{\lambda_n x_n\}$ ограничена, то по условию образ $\{f(\lambda_n x_n)\}$ ограничен. Значит по определению ограниченного множества $f(x_n) = f(\lambda_n x_n)/\lambda_n \to 0$, т.е. отображение f непрерывно в нуле. $\square$

Теорема (принцип равностепенной непрерывности). *Предположим, что задана система $\{f_i\}_{i\in I}$ непрерывных линейных отображений $f_i : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ пространства Фреше́ $(\boldsymbol{E},\rho_E)$ в метрическое линейное пространство $(\boldsymbol{F},\rho_F)$ и для любого $x\in\boldsymbol{E}$ множества $M_x \doteqdot \{y = f_i(x) \mid i\in I\}$ являются ограниченными в пространстве $\boldsymbol{F}$. Тогда эта система отображений $\{f_i\}_{i\in I}$ равностепенно непрерывна.*

Доказательство. При каждом $\varepsilon > 0$ рассмотрим следующие множества:

$$B_n \doteqdot \bigcap_{i\in I}\Big\{x\in\boldsymbol{E}\Big|\,\Big\|\frac{f_i(x)}{n}\Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как все отображения f_i непрерывны и квазинорма является непрерывной функцией, то все множества в этом пересечении являются замкнутыми. Поэтому пересечение B_n замкнутых множеств будет также замкнутым. В силу условия ограниченности множества M_x для любого $\varepsilon > 0$ существует $n\in\mathbb{N}$, т.ч. $\|f_i(x)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $i\in I$. Поэтому имеет место равенство $\boldsymbol{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

В силу теоремы Бэ́ра существуют такие $n\in\mathbb{N}$, $\delta > 0$ и $y\in\boldsymbol{E}$, что $\boldsymbol{U}_\delta(y)\subset B_n$. Это равносильно неравенству $\|f_i(y+z)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $z\in\boldsymbol{U}_\delta$ и $i\in I$. Применяя линейность отображений и неравенство треугольника, получим

$$\Big\|\frac{f_i(z)}{n}\Big\| \leqslant \Big\|\frac{f_i(z+y)}{n}\Big\| + \Big\|\frac{f_i(y)}{n}\Big\| \leqslant \varepsilon \text{ при всех } z\in\boldsymbol{U}_\delta \text{ и } i\in I.$$

Если $z\in\boldsymbol{U}_{\delta_n}$, где $\delta_n \doteqdot \delta/n$, то по неравенству треугольника $\|nz\| \leqslant n\|z\| < \delta$, т.е. $nz\in\boldsymbol{U}_\delta$. Таким образом, получаем $\|f_i(z)\| = \|f_i(nz)/n\| \leqslant \varepsilon$ при всех $z\in\boldsymbol{U}_{\delta_n}$ и $i\in I$, т.е. система отображений $\{f_i\}_{i\in I}$ равностепенно непрерывна в нуле. Следовательно, в силу линейности f_i она будет равностепенно непрерывной. □

Следствие 1 (принцип равномерной ограниченности). *В предположениях теоремы система отображений $\{f_i\}_{i\in I}$ является равномерно ограниченной, т.е. для каждого ограниченного множества $A\subset\boldsymbol{E}$ существует ограниченной множество $B\subset\boldsymbol{F}$, т.ч. образ $f_i(A)\subset B$ при всех $i\in I$.*

В самом деле, если $A\subset\boldsymbol{E}$ ограниченное множество, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon$ при всех $x\in A$ и $|\lambda| < \delta$. Поскольку в силу доказанной теоремы система отображений $\{f_i\}_{i\in I}$ равностепенно непрерывна в нуле, то для любого $r > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\|\lambda f_i(x)\| = \|f_i(\lambda x)\| < r$ при всех $i\in I$, $|\lambda| < \delta$ и $x\in A$. Следовательно, объединение $B = \bigcup_{i\in I} f_i(A)$ образов ограниченного множества $A\subset\boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством в пространстве $\boldsymbol{F}$. Таким образом, $f_i(A)\subset B$ при всех $i\in I$.

Следствие 2 (принцип непрерывности операции умножения). *Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ задана инвариантная метрика $\rho(x,y)$ и операция умножения $f(\lambda,x) = \lambda x$ непрерывна по каждой переменной $\lambda\in\mathbb{F}$ и $x\in\boldsymbol{E}$ в отдельности относительно метрической топологии в пространстве $\boldsymbol{E}$. Тогда эта операция является непрерывной по совокупности переменных $(\lambda,x)\in\mathbb{F}\times\boldsymbol{E}$.*

Проверим непрерывность операции умножения $f(\lambda,x)=\lambda x$ в точке (λ_0,x_0). В силу неравенства $\|\lambda x-\lambda_0x_0\|\leqslant\|(\lambda-\lambda_0)(x-x_0)\|+\|(\lambda-\lambda_0)x_0\|+\|\lambda_0(x-x_0)\|$ нам достаточно доказать непрерывность в точке $(0,0)$. Для этого следует рассмотреть систему отображений $f_x:\mathbb{F}\to\mathbb{R}_+$, где $f_x(\lambda)\doteqdot\|\lambda x\|$ при всех $\|x\|\leqslant\delta$. Заметим, что теорема остается справедливой, если вместо условия линейности использовать следующие два свойства этих функций: $f_x(\lambda+\mu)\leqslant f_x(\lambda)+f_x(\mu)$ и $f_x(n\lambda)\leqslant nf_x(\lambda)$. Таким образом, система отображений $\{f_x(\lambda)\}$ равностепенно непрерывна в нуле и значит операция умножения непрерывна по совокупности переменных в нуле.

Пример 2. Пространство последовательностей $\boldsymbol{s}\doteqdot\{x=\{x_n\}\mid x_n\in\mathbb{F}\}$ с метрикой $\rho(x,y)\doteqdot\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ является пространством Фреше́.

Операции сложения и умножения на число $\lambda\in\mathbb{F}$ последовательностей задаются следующими формулами: $x+y\doteqdot\{x_n+y_n\}$, $\lambda x\doteqdot\{\lambda x_n\}$. Поэтому $\boldsymbol{s}$ является линейным пространством. Проверим свойства метрики: симметричность $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ очевидна; невырожденность, если $\rho(x,y)=0$, то $x_n-y_n=0$ при всех $n\in\mathbb{N}$ и значит $x=y$; неравенство треугольника, т.к. функция $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ возрастающая при $t\geqslant0$, то имеем $\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\leqslant\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}+\frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|}$ и поэтому $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$. Кроме того, $\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)$ при всех $x,y,z\in\boldsymbol{s}$. Следовательно, метрика является инвариантной на пространстве $\boldsymbol{s}$.

Теперь мы докажем, что сходимость в метрическом пространстве $\boldsymbol{s}$ совпадает со сходимостью по координатам последовательности, т.е. если $x_m\to x$ при $m\to\infty$ в пространстве $\boldsymbol{s}$, где $x_m=\{x_{mn}\}$ и $x=\{x_n\}$, то для всех $n\in\mathbb{N}$ имеет место $x_{mn}\to x_n$ при $m\to\infty$. Предположим, что последовательность $x_m\to x$ сходится в $\boldsymbol{s}$, тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $N\in\mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x_m,x)<\varepsilon$ при всех $m\geqslant N$. Так как $\frac{1}{2^n}\frac{|x_{mn}-x_n|}{1+|x_{mn}-x_n|}\leqslant\rho(x_m,x)<\varepsilon$, то $|x_{mn}-x_n|<\frac{2^n\varepsilon}{1-2^n\varepsilon}$, если $m\geqslant N$ и $\varepsilon>0$ достаточно мало. Отсюда следует, что $x_{mn}\to x_n$ при $m\to\infty$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Обратно, предположим, что $x_{mn}\to x_n$ при $m\to\infty$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Для любого $\varepsilon>0$ выберем $M\in\mathbb{N}$, т.ч. $|x_{mn}-x_n|<\varepsilon/4$ при всех $m\geqslant M$ и $n=1,\ldots,N$, а число $N\in\mathbb{N}$ так, чтобы $1/2^N<\varepsilon/4$. Тогда при всех $m\geqslant M$ получим неравенство

$$\rho(x_m,x)\leqslant\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{2^n}\frac{|x_{mn}-x_n|}{1+|x_{mn}-x_n|}+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_{mn}-x_n|}{1+|x_{mn}-x_n|}\leqslant\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\varepsilon\,.$$

В силу эквивалентности сходимости в $\boldsymbol{s}$ покоординатной сходимости, для того чтобы проверить непрерывность операции умножения в $\boldsymbol{s}$ нам достаточно доказать непрерывность операции умножения в поле $\mathbb{F}$. Для этого используем числовое неравенство $|\lambda x-\lambda_0x_0|\leqslant|\lambda-\lambda_0|\,|x-x_0|+|\lambda-\lambda_0|\,|x_0|+|\lambda_0|\,|x-x_0|<\varepsilon$, если выполняются неравенства $|\lambda_0|<a$, $|x_0|<b$, $|x-x_0|<\varepsilon/3a$, $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon/3b<a$.

Доказательства полноты этого метрического пространства вытекает из полноты поля $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел, поскольку сходимость в метрике пространства $\boldsymbol{s}$ равносильна сходимости по координатам последовательности.

Пример 3. Пространство $\boldsymbol{s}$ не является нормированным пространством.

Предположим, что существует норма в $\boldsymbol{s}$. Пусть $\boldsymbol{e}_n \doteqdot \{0,\dots,0,1,0\dots\}$, где на n-том месте стоит 1, а остальные равны нулю. Положим $x_n \doteqdot \boldsymbol{e}_n/\|\boldsymbol{e}_n\|$. Тогда имеем $\rho(x_n,0) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_n\|+1} \to 0$ при $n \to \infty$, т.к. только одна координата x_n не равна нулю. Однако это не возможно, поскольку $\|x_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Пример 4. Контрпример к принципу равностепенной непрерывности и принципу равномерной ограниченности.

Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{s}$ подпространство $\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{s}$, состоящее из всех финитных последовательностей. Очевидно, это подпространство не является полным, т.к. его замыкание совпадает с пространством $\boldsymbol{s}$. Таким образом, $\boldsymbol{f}$ не является пространством Фреще. Определим линейные функционалы $\alpha_n(x) \doteqdot x_n$, $n = 1,2,\dots$. Так как они непрерывны на $\boldsymbol{s}$, то они будут непрерывны на подпространстве $\boldsymbol{f}$. Заметим, что при каждом фиксированном $x \in \boldsymbol{f}$ множество $M_x \doteqdot \{x_n = \alpha_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в $\mathbb{F}$. Однако эти функционалы не являются равностеменно непрерывными в нуле на пространстве $\boldsymbol{f}$, т.к. в каждой окрестности нуля

$$O(n_1,\dots,n_m,\varepsilon) \doteqdot \big\{x = \{x_n\} \in \boldsymbol{f} \mid |x_{n_k}| < \varepsilon, k = 1,\dots,m\big\}, \quad \varepsilon > 0,$$

эти функционалы равномерно не ограничены. Кроме того, существуют ограниченные множества, например, $A \doteqdot \{x = \big\{x_n\big\} \in \boldsymbol{f} \mid |x_n| \leqslant n, n = 1,2,\dots\big\}$, образы которых $\alpha_n(A) \subset \mathbb{F}$ равномерно неограничены, т.к. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n(A) = \mathbb{F}$.

Пример 5. Пусть $\boldsymbol{P}$ пространство всех многочленов $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Найти пополнение пространства $\boldsymbol{P}$ относительно заданной метрики $(1 \leqslant p < \infty)$

$$\rho(P,Q) = \Big(\sum_{k=1}^{n\vee m} |a_k - b_k|^p\Big)^{1/p}, \quad \text{где } P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \text{ и } Q(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k x^k$$

Нетрудно заметить, что эта метрика совпадает с метрикой в подпространстве финитных последовательностей пространства $\boldsymbol{\ell}_p$. Покажем, что множество финитных последовательностей всюду плотно в $\boldsymbol{\ell}_p$. Пусть $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p$ и $y = \{y_n\}$, т.ч. $y_n = x_n$ при $n \leqslant N$ и $y_n = 0$ при $n > N$. Тогда имеем $\|x-y\|_{lp} = \big(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p\big)^{1/p} \to 0$ при $N \to \infty$ в силу сходимости этого ряда. Отсюда следует всюду плотность финитных последовательностей в $\boldsymbol{\ell}_p$. Поскольку $\boldsymbol{\ell}_p$ полно, то оно будет пополнением пространства $\boldsymbol{P}$.

3 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение. Пусть (X,τ) топологическое пространство, где τ его топология. Тогда всякое подмножество $M \subset X$ является подпространством топологического пространства с *индуцированной топологией* $\tau_M \doteqdot \{A = B \cap M \mid B \in \tau\}$.

Подмножество $M \subset X$ называется *компактным* в топологическом пространстве (X,τ), если для всякого открытого покрытия $M \subset \bigcup_{i\in I} B_i$, где $B_i \in \tau$, существует конечное подпокрытие $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{i_k}$, где индексы $i_k \in I$. Компактное топологическое пространство (X,τ) называется коротко *компактом*.

1. *Любое замкнутое подмножество $M \subset X$ компактного топологического пространства (X,τ) является компактным.*

Действительно, пусть $M \subset \bigcup_{i\in I} B_i$, где $B_i \in \tau$. Тогда, добавив к этому покрытию открытое множество $A = X \setminus M$, мы получим открытое покрытие X. Взяв конечное подпокрытие X и вычитая из него A получим конечное подпокрытие M.

2. *При непрерывном отображении $f : X \to Y$ топологического пространства (X,τ_X) в топологическое пространство (Y,τ_Y) образ $f(M) \subset Y$ любого компактного множества $M \subset X$ является компактным.*

Действительно, пусть $f(M) \subset \bigcup_{i\in I} B_i$, где $B_i \in \tau_Y$. тогда $M \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, где $A_i = f^{-1}(B_i) \in \tau_X$ в силу непрерывности отображения f. По условию компактности M существует конечное подпокрытие $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}$, где $i_k \in I$. Поэтому $f(M) \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{i_k}$.

3. *Всякое компактное подмножество $M \subset X$ в хаусдорфовом топологическом пространстве (X,τ) является замкнутым.*

В самом деле, пусть $y \notin M$. Поскольку топология хаусдорфова, то для каждого $x \in M$ существуют непересекающиеся окрестности $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Так как множество M покрывается окрестностями $O(x)$, то существует конечное подпокрытие, т.е. $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} O(x_i)$. Следовательно, взяв пересечение соответствующих окрестностей точки y, мы получим окрестность $O(y)$, которая не пересекается с M. Таким образом, множество M является замкнутым.

4. *Всякое биективное и непрерывное отображение $f : X \to Y$ компакта X в хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

В самом деле, любое замкнутое подмножество $M \subset X$ по свойству 1 является компактным. Поэтому по свойству 2 его образ $f(M) \subset Y$ будет компактным и значит замкнутым. Таким образом, образ всякого замкнутого множества является замкнутым. Поэтому образ всякого открытого множества является открытым.

Определение. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и задано число $\varepsilon > 0$. Множество $C \subset X$ называется *ε-сетью* множества $M \subset X$, если для любого $y \in M$ существует $x \in C$, т.ч. $\rho(x,y) \leqslant \varepsilon$, т.е. выполняется включение $M \subset \bigcup_{x\in C} S_\varepsilon(x)$.

Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ для множества M.

1. *Вполне ограниченное множество $M \subset X$ содержится в некотором шаре.*

Пусть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ 1-сеть множества M и $r_1 \doteqdot \max_{2\leqslant k\leqslant n} \rho(x_1,x_k)+1$. По условию 1-сети для любого $y \in M$ найдется x_k, т.ч. $\rho(x_1,y) \leqslant \rho(x_1,x_k)+\rho(x_k,y) \leqslant r_1$. Поэтому имеет место включение $M \subset \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1)$.

2. *Если множество $M \subset X$ является вполне ограниченным, то его замыкание $\overline{M}$ будет также вполне ограниченным.*

Пусть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ образует ε-сеть для множества M. Поскольку множество M содержится в замкнутом множестве $\bigcup_{k=1}^n \boldsymbol{S}_\varepsilon(x)$, то его замыкание $\overline{M} \subset \bigcup_{k=1}^n \boldsymbol{S}_\varepsilon(x)$. Поэтому C является ε-сетью множества $\overline{M}$.

3. *Каждое вполне ограниченное множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ является ограниченным.*

В силу непрерывности операции умножения для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $\|x\| \leqslant \delta$. Пусть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ является δ-сетью множества M. Выберем $\delta > 0$, т.ч. $\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|\lambda x_k\| < \varepsilon/2$ при всех $|\lambda| < \delta$. Тогда для каждого $x \in M$ существует x_k, т.ч. $\|\lambda x\| \leqslant \|\lambda x_k\| + \|\lambda(x-x_k)\| < \varepsilon$ при всех $|\lambda| < \delta$.

Пример 1. Докажем, что каждое ограниченное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ будет вполне ограниченным. Рассмотрим куб $[a,b]^n$, содержащий множество M. Разобьем куб на кубики с ребром $\delta \doteqdot (b-a)/k$. Тогда вершины кубиков $\{x_j\}_{j=1}^m$, где $m \doteqdot (k+1)^n$, образуют конечную ε-сеть для множества M, где число $\varepsilon \doteqdot \sqrt{n}\delta/2$, равное половине диагонали кубика, достаточно мало при $k \to \infty$.

Теорема. *В метрическом пространстве (X,ρ) следующие условия, которым удовлетворяет множество $M \subset X$, являются эквивалентными:*

a) компактность: для всякого открытого покрытия $M \subset \bigcup_{i\in I} B_i$ существует конечное подпокрытие $M \subset \bigcup_{k=1}^n B_{i_k}$, где $i_k \in I$.

b) счетная компактность: каждое бесконечное подмножество $A \subset M$ имеет предельную точку $x \in \acute{A}$, т.ч. $x \in M$;

c) секвенциальная компактность: для каждой последовательности $\{x_n\} \subset M$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x$, т.ч. $x \in M$.

d) критерий компактности Ха́усдорфа: множество $M \subset X$ является вполне ограниченным и полным.

Доказательство. $a) \Rightarrow b)$. Пусть $A \subset M$ является бесконечным множеством. Если M не имеет предельных точек из $\acute{A}$, то для всякой точки $x \in M$ существует $r > 0$, т.ч. множество $\boldsymbol{U}_r(x) \cap A = x$. Поскольку шары $\boldsymbol{U}_r(x)$ покрывают M, то выбирая конечное подпокрытие, заключаем, что A конечно. Получили противоречие.

$b) \Rightarrow c)$. Мы можем считать, что последовательность $A = \{x_n\} \subset M$ состоит из различных точек. По условию b) существует $x \in \acute{A}$, т.ч. $x \in M$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k} \in \boldsymbol{U}_{1/k}(x)$. Отсюда следует $x_{n_k} \to x \in M$.

$c) \Leftrightarrow d)$. Полнота M вытекает из свойства c). Докажем вполне ограниченность. Пусть $\varepsilon > 0$ и точка $x_0 \in M$. Тогда существует точка $x_1 \in M$, т.ч. $\rho(x_1, x_0) > \varepsilon$, иначе точка $\{x_0\}$ образует ε-сеть M. Аналогично, существует точка $x_2 \in M$, т.ч. $\rho(x_2, x_0) > \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$, иначе $\{x_0, x_1\}$ образуют ε-сеть M, и т.д. По индукции существует $x_n \in M$, т.ч. $\rho(x_n, x_k) > \varepsilon$ при $k = 1, \ldots, n-1$. Если процесс выбора точек оборвется на некотором шаге n, то $\{x_k\}_{k=1}^n$ образует конечную ε-сеть для M. Иначе последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

Обратно, пусть $\{x_n\} \subset M$. В силу условия вполне ограниченности существует конечное покрытие M шарами радиуса $r_1 = 1$. Следовательно, найдется шар $\boldsymbol{S}_{r_1}(y_1)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$. Аналогично существует конечное покрытие M шарами радиуса $r_2 = 1/2$ и найдется шар $\boldsymbol{S}_{r_2}(y_2)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$, и т.д.

По индукции при $r_k = 1/k$ существует подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$, содержащаяся в некотором шаре $\boldsymbol{S}_{r_k}(y_k)$. Обозначим через $z_n \doteqdot x_n^{(n)}$ диагональную подпоследовательность. Так как $\rho(z_n, z_m) \leqslant \rho(z_n, y_n) + \rho(y_n, z_m) \leqslant 2r_n$ при $m > n$, то $\{z_n\}$ последовательность Коши. В силу полноты M она имеет предел в M.

$d) \Rightarrow a)$. Пусть задано открытое покрытие $M \subset \bigcup_{i \in I} B_i$. Покажем вначале, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $x \in M$ существует индекс $i \in I$, т.ч. $\boldsymbol{S}_\varepsilon(x) \subset B_i$. Иначе найдутся такие точки $x_n \in M$, что $\boldsymbol{S}_{r_n}(x_n) \not\subset B_i$ при всех $i \in I$, где $r_n = 1/n$. По условию существует подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in M$. Так как $x \in B_i$ при некотором $i \in I$, то найдется шар $\boldsymbol{S}_{2r}(x) \subset B_i$. Выберем n_k, т.ч. $r_{n_k} < r$ и $\rho(x_{n_k}, x) < r$. Тогда $\boldsymbol{S}_{r_{n_k}}(x_{n_k}) \subset \boldsymbol{S}_r(x_{n_k}) \subset \boldsymbol{S}_{2r}(x) \subset B_i$, что противоречит нашему предположению.

Пусть $\{y_k\}_{k=1}^m$ конечная ε-сетью для множестве M. По доказанному существует индекс $i_k \in I$, т.ч. $\boldsymbol{S}_\varepsilon(y_k) \subset B_{i_k}$. Поэтому $M \subset \bigcup_{k=1}^m \boldsymbol{S}_\varepsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^m B_{i_k}$. □

Лемма. *Непрерывное отображение $f : X \to Y$ метрических пространств, заданное на компакте X, является равномерно непрерывным.*

Предположим обратное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < 1/n$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$ при всех n. В силу компактности X найдутся сходящиеся подпоследовательности $x_{n_k} \to x$ и $y_{n_k} \to y$. Так как по условию $\rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$, то $x = y$. В силу непрерывности отображения f существует n_k, т.ч. $\rho_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leqslant \rho_Y(f(x_{n_k}), f(x))) + \rho_Y(f(y), f(y_{n_k})) < \varepsilon$. Получили противоречие.

Определение. Множество $M \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется *предкомпактным*, если его замыкание $\overline{M}$ компактно.

Например, в силу критерия Ха́усдорфа в полном метрическом пространстве (X, ρ) множество является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено (т.к. его замыкание является вполне ограниченным и полным).

Теорема (Арце́ла–Аско́ли). *Множество $M \subset \boldsymbol{C}(X)$ в пространстве непрерывных функций на компакте X, тогда и только тогда предкомпактно, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Так как M предкомпактно, то оно будет вполне ограниченным и значит ограничено. Докажем равностепенную непрерывность. По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/3$-сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$ множества M. Тогда для любого $f \in M$ существует f_k, т.ч. $|f(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in X$. Поскольку функции f_k равномерно непрерывны, то существует $\delta_k > 0$, т.ч. $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$ при всех $x, y \in X$, $\rho(x,y) < \delta_k$. Обозначим через $\delta \doteqdot \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta_k$, тогда

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

при всех $x, y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$. Таким образом, M равностепенно непрерывно.

Достаточность. Из условия равностепенной непрерывности M для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ для всех $f \in M$ и $x, y \in X$, $\rho(x,y) \leqslant \delta$. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ является δ-сетью компакта X, а $F : M \to \mathbb{F}^m$ обозначает отображение, заданное по формуле $F(f) \doteqdot \{f(x_j)\}_{j=1}^m$. Поскольку $F(M) \subset \mathbb{F}^m$ ограничено, то оно вполне ограничено. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset M$ элементы прообраза $\varepsilon/3$-сети $\{F(f_k)\}_{k=1}^n$ множества $F(M)$. Для любого $x \in X$ выберем индекс j, т.ч. $\rho(x, x_j) \leqslant \delta$, и для любого $f \in M$ выберем индекс k, т.ч. $\|F(f) - F(f_k)\|_{\mathbb{F}^m} \leqslant \varepsilon/3$. Отсюда получим

$$|f(x) - f_k(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_k(x_j)| + |f_k(x_j) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{f_k\}_{k=1}^n$ образует ε-сеть множества M. Значит множество $M \subset \boldsymbol{C}(X)$ является вполне ограниченным и, следовательно, будет предкомпактным. □

Пример 2. Рассмотрим пространства $\boldsymbol{\ell}_p$ последовательностей $x = \{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{F}$, имеющих конечную величину нормы $\|x\|_{\boldsymbol{\ell}_p} < \infty$, где

$$\|x\|_{\boldsymbol{\ell}_p} \doteqdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{1/p} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Ранее было доказано, что $\boldsymbol{\ell}_p$ при $1 \leqslant p < \infty$ является сепарабельным банаховым пространством. Покажем, что если $x, y \in \boldsymbol{\ell}_p$, то выполняется *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \|x\|_{\boldsymbol{\ell}_p} \|y\|_{\boldsymbol{\ell}_q} \quad \text{при } 1 < p, q < \infty \text{ и } 1/p + 1/q = 1.$$

Вначале докажем *неравенство Ю́нга*: $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$ при $a, b \in \mathbb{R}_+$. Функции $\varphi(t) = t^{p-1}$ и $\varphi^{-1}(t) = t^{q-1}$ взаимно обратные на полуоси $\mathbb{R}_+$, т.к. $1/(p-1) = q - 1$. Поэтому площадь прямоугольника $[0,a] \times [0,b]$ в декартовой системе координат оценивается сверху суммой интегралов

$$ab \leqslant \int_0^a t^{p-1}\, dt + \int_0^b t^{q-1}\, dt = a^p/p + b^q/q.$$

Знак равенства имеет место только в том случае, если $a^{p-1} = b$, т.е. когда выполняется равенство $a^p = ab = b^q$. Таким образом, неравенство Ю́нга доказано.

Пусть $A = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$. Если один из этих интегралов равен нулю, то утверждение верно. Иначе, полагая $a_n \doteqdot |x_n|/A^{1/p}$ и $b_n \doteqdot |y_n|/B^{1/q}$ в неравенстве Ю́нга , а затем суммируя обе его части по n, мы получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{A^{1/p}} \frac{|y_n|}{B^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{A} + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^q}{B} = 1/p + 1/q = 1\,.$$

Отсюда следует неравенство Гёльдера. Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство $|x_n|^p/A = |y_n|^q/B$ при всех n.

Докажем, что если $x, y \in \ell_p$, то выполняется *неравенство Минко́вского*:

$$\|x+y\|_{\ell_p} \leqslant \|x\|_{\ell_p} + \|y\|_{\ell_p} \quad \text{при } 1 \leqslant p < \infty\,.$$

При этом, если $1 < p < \infty$, то равенство будет выполняться тогда и только тогда, когда элементы x и y удовлетворяют равенству $x = \lambda y$ при некотором $\lambda \geqslant 0$.

В случае $p = 1$ неравенство очевидно. В случае $1 < p < \infty$ введем следующие обозначения $A = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p$, $C = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p$. Применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что $(p-1)q = p$, получим

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|\,|x_n + y_n|^{p-1} \leqslant A^{1/p} C^{1/q} + B^{1/p} C^{1/q}\,.$$

Поделив на множитель $C^{1/q}$, получим неравенство Минко́вского. Знак равенства имеет место только в том случае, когда $|x_n + y_n| = |x_n| + |y_n|$ и $|x_n|^p/A = |y_n|^p/B = |x_n + y_n|^p/C$ при всех n. Тогда из первого равенства вытекает, что $x_n = c_n y_n$ при всех n, где $c_n \geqslant 0$. Из второго равенства получим, что $c_n^p = A/B$ для тех n, которые удовлетворяют неравенству $y_n \neq 0$. Отсюда получим $x = \lambda\, y$, где $\lambda = (A/B)^{1/p}$.

Пример 3. Рассмотрим пространство ℓ_p, состоящее из всех последовательностей $x = \{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{F}$, т.ч. квазинорма $\|x\|_{\ell_p} < \infty$ конечна, где квазинорма равна

$$\|x\|_{\ell_p} \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \quad \text{при} \quad 0 < p < 1\,.$$

Пространство ℓ_p при $0 < p < 1$ является сепарабельным пространством Фреше с метрикой $\rho(x,y) = \|x - y\|_{\ell_p}$. Докажем свойства квазинормы.

Ясно, что квазинорма $\|x\|_{\ell_p}$ симметрична и невырождена. Для доказательства неравенства треугольника достаточно доказать элементарное числовое неравенство $|a+b|^p \leqslant |a|^p + |b|^p$ при $0 < p < 1$, где $a, b \in \mathbb{F}$. Так как $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, то нужно рассмотреть только случай положительных чисел $0 < a < b$. Если поделить на b^p, то требуется доказать неравенство $(t+1)^p \leqslant t^p + 1$ при $0 < t < 1$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = t^p$ при $t > 0$. Ее производная $\varphi'(t) = pt^{p-1}$. По формуле конечных приращений имеем $\varphi(t+1) - \varphi(t) = p\xi^{p-1} < pt^{p-1} < 1$ в случае $p \leqslant t^{1-p} < 1$, где

$t < \xi < t+1$. С другой стороны, $\varphi(t+1) - \varphi(1) = p\xi^{p-1}t < pt < p^2t^p < t^p$ в случае $0 < t^{1-p} \leqslant p$, где $1 < \xi < t+1$. Таким образом, применяя указанное неравенство

$$\|x+y\|_{\ell_p} \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p = \|x\|_{\ell_p} + \|y\|_{\ell_p},$$

мы заключаем, что $\|x\|_{\ell_p}$ является квазинормой. Поскольку выполняется равенство $\|\lambda x\|_{\ell_p} = |\lambda|^p \|x\|_{\ell_p}$, то также как в лемме (лекция 2) легко проверить, что операция умножения непрерывна. Поэтому $(\boldsymbol{E}, \rho)$ будет линейным метрическим пространством. Полнота и сепарабельность доказывается аналогично случаю $1 \leqslant p < \infty$.

Для каждого $x \in \ell_p$ обозначим через $s_m(x) = y = \{y_n\}$ финитную последовательность, т.ч. $y_n = x_n$ при $n \leqslant m$ и $y_n = 0$ при $n > m$. Тогда эта последовательность $s_m(x) \to x$ при $m \to \infty$ сходится в метрике ℓ_p в случае $1 \leqslant p < \infty$, т.к. величина

$$\|x - s_m(x)\|_{\ell_p} = \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{1/p} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

в силу сходимости ряда.

Теорема (Ри́сса). *Множество $M \subset \ell_p$ тогда и только тогда предкомпактно в пространстве ℓ_p при $1 \leqslant p < \infty$, когда выполняются следующие два условия:*

a) множество M ограничено в пространстве ℓ_p;

b) для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x - s_m(x)\|_{\ell_p} < \varepsilon$ при всех $x \in M$.

Доказательство. Необходимость. Ограниченность $M \subset \ell_p$ вытекает из его вполне ограниченности. Докажем второе условие. Пусть $A = \{x^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ является $\varepsilon/3$-сетью множества M. Для каждого k выберем $m_k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x^{(k)} - s_{m_k}(x^{(k)})\|_{\ell_p} < \varepsilon/3$, а затем возьмем среди них наибольшее $m = \max_{1 \leqslant k \leqslant l} m_k$. Так как A является $\varepsilon/3$-сетью, то для любого $x \in M$ найдется k, т.ч. $\|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} \leqslant \varepsilon/3$, и по неравенству треугольника

$$\|x - s_m(x)\|_{\ell_p} \leqslant \|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} + \|x^{(k)} - s_m(x^{(k)})\|_{\ell_p} + \|s_m(x^{(k)} - x)\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

при всех $x \in M$, т.е. выполнено второе условие (b).

Достаточность. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $M_m \doteqdot \{s_m(x) \mid x \in M\}$ в пространстве ℓ_p, где m определяется из второго условия для $\varepsilon/3$. Поскольку M_m содержится в конечномерном подпространстве ℓ_p и является ограниченным в ℓ_p, то оно будет вполне ограниченным в пространстве ℓ_p.

Для заданного $\varepsilon > 0$ обозначим через $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ $\varepsilon/3$-сеть множества M_m, а через $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ элементы прообраза $y^{(k)} = s_m(x^{(k)})$. Тогда для каждого $x \in M$ найдется k, т.ч. $\|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\|_{\ell_p} \leqslant \varepsilon/3$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} \leqslant \|x - s_m(x)\|_{\ell_p} + \|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\|_{\ell_p} + \|s_m(x^{(k)}) - x^{(k)}\|_{\ell_p} < \varepsilon\,.$$

Таким образом, $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ образует ε-сеть M. Поэтому M вполне ограничено в ℓ_p и значит является предкомпактным в пространстве ℓ_p. □

Замечание. Из неравенства $\|x\|_{\ell_p} \leqslant \|x\|_{\ell_1}$ вытекает, что если множество $M \subset \ell_1$ предкомпактно, то оно будет также предкомпактным в любом ℓ_p, $1 < p < \infty$.

4 НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Всюду далее через $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ будем обозначать *линейные пространства* над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел. Напомним, что функция $\boldsymbol{p}:\boldsymbol{E}\to\mathbb{R}_+$ называется *нормой* в $\boldsymbol{E}$, если выполняются следующие свойства:

a) однородность: $\boldsymbol{p}(\lambda x)=|\lambda|\boldsymbol{p}(x)$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$ и $x\in\boldsymbol{E}$;

b) неравенство треугольника: $\boldsymbol{p}(x+y)\leqslant\boldsymbol{p}(x)+\boldsymbol{p}(y)$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$;

c) невырожденность: $\boldsymbol{p}(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

Норма обозначается через $\boldsymbol{p}(x)\doteqdot\|x\|$ и пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ называется *нормированным пространством*. Полное нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *ба́наховым пространством*. Если выполнены (a) и (b), то $\boldsymbol{p}(x)\doteqdot\|x\|$ называется *полунормой*, а пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ *полунормированным пространством*. Метрика или полуметрика в этих пространствах определяются по формуле $\rho(x,y)\doteqdot\|x-y\|$.

Определение. Отображение $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$ называется *линейным функционалом* (или просто *функционалом*) над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел, если

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)\ \text{при всех}\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}\ \text{и}\ x_1,x_2\in\boldsymbol{E}.$$

Через $\boldsymbol{E}^*$ обозначается линейное пространство всех линейных функционалов. *Норма функционала* $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$ вычисляется по формулам:

$$\|f\|\doteqdot\sup_{x\neq0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{x\in\boldsymbol{S}}|f(x)|,\ \text{где}\ \boldsymbol{S}\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid\|x\|\leqslant1\}\ \text{единичный шар}.$$

Функционал $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$ называется *ограниченным*, если $\|f\|<\infty$. Это равносильно тому, что он отображает ограниченные множества в ограниченные и, следовательно, как показано ранее, равносильно его непрерывности в $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$. Через $(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{p}')$ обозначается *сопряженное пространство* к $\boldsymbol{E}$, состоящее из всех непрерывных функционалов $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$ на пространстве $\boldsymbol{E}$ с нормой $\boldsymbol{p}'(x)\doteqdot\|f\|$.

Определение. Два нормированных пространства $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p}_E)$ и $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{p}_F)$ называются *изоморфными* или *эквивалентными* $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p}_E)\simeq(\boldsymbol{F},\boldsymbol{p}_F)$, если найдется биективное линейное отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, для которого f и f^{-1} непрерывны.

Два нормированные пространства $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p}_E)$ и $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{p}_F)$ называются *изометрически изоморфными* или просто *изометричными* $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p}_E)=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{p}_F)$, если существует биективное линейное и изометричное отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, т.е. для которого выполняется равенство $\|f(x)\|_F=\|x\|_E$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.

Ясно, что изометричные пространства являются изоморфными. Если нормированные пространства изоморфны и одно из них является полным или сепарабельным, то другое также будет соответственно полным или сепарабельным. Из следующей теоремы вытекает, что нормированные пространства одной и той же конечной размерности являются изоморфными.

Теорема. *Всякое нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности над полем $\mathbb{F}$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, где $n = \dim \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ обозначает базис $\boldsymbol{E}$. Поэтому для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ найдется единственный элемент $\lambda \doteqdot \{\lambda_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n$, т.ч. $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Определим отображение $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$ по формуле $f(x) \doteqdot \lambda$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда отображение f является линейным и биективным. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) \doteqdot \|x\|$. Применяя неравенство треугольника и неравенство Коши́, получим

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda')| \leqslant \|x - x'\| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda - \lambda'| \, \|e_k\| \leqslant \|\lambda - \lambda'\|_{\mathbb{F}^n} \Big(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \Big)^{1/2}.$$

Поэтому функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{F}^n$ величина нижней грани $a \doteqdot \inf_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1} \varphi(\lambda)$ положительна, а величина верхней грани $b \doteqdot \sup_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1} \varphi(\lambda)$ конечна. Следовательно, в силу свойства однородности функции $\varphi(\lambda)$ получим $a\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant \|x\| \leqslant b\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}^n$. В силу этих неравенств отображения f и f^{-1} являются непрерывными. □

Следствие 1. *Всякое нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности является банаховым, а всякое его ограниченное и замкнутое подмножество $M \subset \boldsymbol{E}$ является компактным.*

Это утверждение вытекает из полноты пространства $\mathbb{F}^n$ и теоремы Хаусдо́рфа.

Следствие 2. *В линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ конечной размерности $n = \dim \boldsymbol{E}$ любые две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$, т.е. существует такое число $c \geqslant 1$, что $c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Пусть $f(x) = \lambda$ обозначает изоморфизм $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$. Используя обозначения теоремы, имеем $\|x\|_1 \leqslant b_1\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant b_1 a_2^{-1}\|x\|_2$ и $\|x\|_2 \leqslant b_2\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant b_2 a_1^{-1}\|x\|_1$. Поэтому, полагая $c \doteqdot \max\{b_1 a_2^{-1}, b_2 a_1^{-1}\}$, получим неравенство $c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1$.

Определение. Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства. Величина $\rho(x, L) \doteqdot \inf_{y \in L} \|x - y\|$ называется *наилучшим приближением* элемента $x \in \boldsymbol{E}$ подпространством L. Всякий элемент $y_0 \in L$, для которого $\rho(x, L) = \|x - y_0\|$, называется *элементом наилучшего приближения* подпространством L.

Теорема (о существовании наилучшего приближения)**.** *Если подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность $\dim L < \infty$, то для всякого $x \in \boldsymbol{E}$ существует элемент $y_0 \in L$ наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $x \in \boldsymbol{E}$, тогда имеем $\rho(x, L) \leqslant \|x\|$. Рассмотрим множество $K_x \doteqdot \{y \in L \mid \|x - y\| \leqslant \|x\|\}$. Поскольку K_x является замкнутым, ограниченным и содержится в конечномерном пространстве, то в силу следствия 1 оно компактно. Поэтому непрерывная функция $\varphi_x(y) \doteqdot \|x - y\|$ достигает своей нижней грани на компакте K_x. Следовательно, существует $y_0 \in K_x$, т.ч. $\varphi_x(y_0) = \inf_{y \in K_x} \varphi_x(y)$. □

Определение. Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *строго нормированным*, если из равенства $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ следует, что $x = \lambda y$ при $\lambda \geqslant 0$.

Теорема (о единственности наилучшего приближения)**.** *Если пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ может существовать не более одного элемента наилучшего приближения подпространством $L \subset \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Пусть $\rho(x,L) = \|x-y_0\| = \|x-y_1\|$, где $y_0, y_1 \in L$. Тогда имеем

$$\rho(x,L) \leqslant \left\|x - \frac{y_0+y_1}{2}\right\| = \left\|\frac{x-y_0}{2} + \frac{x-y_1}{2}\right\| \leqslant \left\|\frac{x-y_0}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y_1}{2}\right\| = \rho(x,L).$$

Следовательно, вместо неравенств имеют место равенства. Поэтому в силу условия строгой нормированности $x - y_1 = \lambda(x-y_0)$ при некотором $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 1$, то $y_0 = y_1$. Если $\lambda \neq 1$, то $x = (y_1 - \lambda y_0)/(1-\lambda) \in L$ и значит $x = y_0 = y_1$. □

Элемент $x \in \boldsymbol{E}$ называют *ортогональным* подпространству $L \subset \boldsymbol{E}$ и обозначают через $x \perp L$, если $\|x-y\| \geqslant \|x\|$ при всех $y \in L$, т.е. $\rho(x,L) = \|x\|$. Применяя теорему существования наилучшего приближения конечномерным подпространством L, мы получим, что перпендикуляр $x \perp L$ с нормой $\|x\| = 1$ существует для таких L.

Лемма (Ф. Ри́сса о почти перпендикуляре)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым подпространством нормированного пространства. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x \in \boldsymbol{E} \setminus L$, т.ч. $\|x\| = 1$ и $\|x-y\| > 1-\varepsilon$ при всех $y \in L$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \boldsymbol{E} \setminus L$, тогда $d \doteqdot \rho(x_0, L) > 0$. Выберем элемент $y_0 \in L$, т.ч. $\|x_0 - y_0\| < d/(1-\varepsilon)$. Тогда если $x \doteqdot (x_0-y_0)/\|x_0-y_0\|$, то при всех $y \in L$ имеем

$$\|x-y\| = \left\|\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|} - y\right\| = \frac{\|x_0-y_1\|}{\|x_0-y_0\|} \geqslant \frac{d}{\|x_0-y_0\|} > 1-\varepsilon,$$

где элемент $y_1 \doteqdot y_0 + \|x_0-y_0\|\, y \in L$. □

Теорема. *Замкнутый единичный шар $\boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ является компактным в том и только в том случае, когда пространство $\boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность $\dim \boldsymbol{E} < \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\dim \boldsymbol{E} = \infty$. Если $x_1 \in \boldsymbol{S}$ и $L_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1\}$ обозначает линейную оболочку x_1, то по лемме существует $x_2 \in \boldsymbol{S} \setminus L_1$, т.ч. $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Аналогично, если $L_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, x_2\}$ обозначает линейную оболочку x_1 и x_2, то существует $x_3 \in \boldsymbol{S} \setminus L_2$, т.ч. $\|x_3 - x_1\| > 1/2$, $\|x_3 - x_2\| > 1/2$ и т.д. По индукции имеем $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$ и существует $x_{n+1} \in \boldsymbol{S} \setminus L_n$, т.ч. $\|x_{n+1} - x_k\| > 1/2$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. т.е. шар $\boldsymbol{S}$ некомпактный.

Достаточность. Предположим, что существует изоморфизм $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$, где $n = \dim \boldsymbol{E}$. Тогда образ шара $f(\boldsymbol{S}) \subset \mathbb{F}^n$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{F}^n$. Поэтому множество $f(\boldsymbol{S})$ компактно в $\mathbb{F}^n$ и, следовательно, единичный шар $\boldsymbol{S}$ компактен в силу непрерывности обратного отображения $f^{-1} : \mathbb{F}^n \to \boldsymbol{E}$. □

Определение. Отображение $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *линейным оператором*, если

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 \text{ при всех } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F} \text{ и } x_1, x_2 \in \boldsymbol{E}.$$

Норма линейного оператора $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ вычисляется по формулам:

$$\|A\| \doteqdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \boldsymbol{S}} \|Ax\|, \text{ где } \boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\} \text{ единичный шар}.$$

Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если $\|A\| < \infty$. Это равносильно тому, что он отображает ограниченные множества в ограниченные и, следовательно, как показано ранее, равносильно его непрерывности. Далее через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ обозначается пространство всех ограниченных операторов из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$.

Теорема. *Если $\boldsymbol{F}$ — банахово пространство, то пространство ограниченных операторов $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является ба́наховым пространством,.*

Доказательство. Сложение операторов $A + B$ и их умножение λA на число $\lambda \in \mathbb{F}$ определяются по формулам $(A+B)(x) \doteqdot Ax + Bx$ и $(\lambda A)(x) \doteqdot \lambda Ax$. Очевидно, что $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$ и $\|A + B\| = \sup_{x \in \boldsymbol{S}_1} \|Ax + Bx\| \leqslant \|A\| + \|B\|$. Следовательно, $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является нормированным пространством. Докажем его полноту.

Пусть $\{A_n\}$ есть последовательность Коши́ в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Из определения операторной нормы вытекает неравенство $\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $n, m \geqslant N$. Следовательно, $\{A_n x\}$ есть последовательность Коши́ в $\boldsymbol{F}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. В силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $Ax \doteqdot \lim_{n \to \infty} A_n x$. Ясно, что A является линейным оператором. Переходя к пределу в неравенстве, указанном выше, получим, что $\|A_n x - Ax\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $n \geqslant N$, т.е. $\|A_n - A\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Поэтому $A_n \to A$ сходится по норме. Так как $\|A\| \leqslant \|A_n\| + \|A_n - A\|$, то $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$. □

Следствие 3. *Сопряженное пространство $\boldsymbol{E}' = \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \mathbb{F})$ к нормированному пространству $\boldsymbol{E}$ является банаховым пространством.*

Определение. *Банаховой алгеброй* называется такое банахово пространство $\boldsymbol{E}$, которое образует алгебру с единицей $e \in \boldsymbol{E}$, т.е. задано билинейное произведение $x \cdot y \in \boldsymbol{E}$ двух элементов $x, y \in \boldsymbol{E}$, удовлетворяющее равенствам: $e \cdot x = x \cdot e = x$,

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \cdot y = \lambda_1 x_1 \cdot y + \lambda_2 x_2 \cdot y, \quad x \cdot (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x \cdot y_1 + \lambda_2 x \cdot y_2,$$

и, кроме того, выполняются следующие свойства: $\|e\| = 1$ и $\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.

Следствие 4. *Если $\boldsymbol{E}$ является ба́наховым пространством, то пространство $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$ является банаховой алгеброй.*

В самом деле, произведение операторов $A \cdot B(x) \doteqdot A(Bx)$ является билинейным, т.к. $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot B = \lambda_1 A_1 \cdot B + \lambda_2 A_2 \cdot B$ и $A \cdot (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 A \cdot B_1 + \lambda_2 A \cdot B_2$. При этом выполняется неравенство $\|A \cdot B\| \leqslant \sup_{x \in \boldsymbol{S}_1} \|A(Bx)\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$. Тождественное отображение $I(x) \doteqdot x$ является единицей этой алгебры, т.к. $I \cdot A = A \cdot I = A$ и $\|I\| = 1$.

Пример 1. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{C}(X)$ непрерывных функций $f : X \to \mathbb{F}$ на компактном метрическом пространстве (X,ρ). Относительно операций сложения и умножения функций пространство $\boldsymbol{C}(X)$ является банаховой алгеброй с единицей $e(x) = 1$ при всех $x \in X$. Оператор $A : \boldsymbol{C}(X) \to \boldsymbol{C}(X)$, определенный по формуле $Af(x) \doteqdot \varphi(x)f(x)$, где $\varphi \in \boldsymbol{C}(X)$ некоторая фиксированная функция, называется *оператором умножения* на заданную функцию φ. Докажем, что его норма равна $\|A\| = \|\varphi\|_{\boldsymbol{C}}$ норме функции φ в пространстве $\boldsymbol{C}(X)$. В самом деле, поскольку

$$\|Af\|_{\boldsymbol{C}} \doteqdot \sup_{x\in X}|\varphi(x)f(x)| \leqslant \sup_{x\in X}|\varphi(x)| \sup_{x\in X}|f(x)| = \|\varphi\|_{\boldsymbol{C}}\|f\|_{\boldsymbol{C}},$$

то $\|A\| \leqslant \|\varphi\|_{\boldsymbol{C}}$. Докажем, что это неравенство, на самом деле, является равенством. Пусть $\sup_{x\in X}|\varphi(x)\| = |\varphi(x_0)|$ в точке $x_0 \in X$. Рассмотри непрерывную функцию

$$f(x) \doteqdot \begin{cases} r-\rho(x_0,x), & \text{если } \rho(x_0,x) \leqslant r; \\ 0, & \text{если } \rho(x_0,x) > r. \end{cases}$$

Тогда получим $\|f\|_{\boldsymbol{C}} = r$ и $\|Af\|_{\boldsymbol{C}} \doteqdot \sup_{x\in X}|\varphi(x)f(x)| = |\varphi(x_0)|\,|f(x_0)| = \|\varphi\|_{\boldsymbol{C}}\|f\|_{\boldsymbol{C}}$. Следовательно, $\|A\| = \|\varphi\|_{\boldsymbol{C}}$. Таким образом, алгебра функций $\boldsymbol{C}(X)$ изометрична подалгебре операторов умножения на заданную функцию в пространстве $\boldsymbol{C}(X)$.

Пример 2. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{C}[0,1]$ непрерывных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Докажем, что для каждой функции $h \in \boldsymbol{C}[0,1]$ уравнение

$$f(x) + \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t+2}\,dt = h(x), \quad x \in [0,1],$$

относительно неизвестной функции $f \in \boldsymbol{C}[0,1]$ имеет единственное решение. Для этого определим оператор $Af(x) = h(x) - \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t+2}dt$ при всех $f \in \boldsymbol{C}[0,1]$ и покажем, что он является сжимающим отображением в пространстве $\boldsymbol{C}[0,1]$. В самом деле, имеем

$$\|Af - Ag\|_{\boldsymbol{C}} = \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1 \frac{f(t)-g(t)}{x+t+2}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)| = \frac{1}{2}\|f-g\|_{\boldsymbol{C}}$$

Значит по принципу сжимающих отображений существует единственная функция $f \in \boldsymbol{C}[0,1]$, т.ч. $Af = f$, т.е. уравнение имеет единственное решение.

Пример 3. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{\ell}_1$ последовательностей $x = \{x_n\}$ с конечной нормой $\|x\|_{\ell_1} \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty$. Докажем, что для каждой последовательности $h = \{h_n\} \in \boldsymbol{\ell}_1$ система уравнений

$$x_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{(n+k)^2+10} = h_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

относительно неизвестных $x = \{x_n\}$ имеет единственное решение. Для этого определим оператор $Ax_n = h_n - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{(n+k)^2+10}$, где $n \in\in \mathbb{N}$, при всех $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_1$ и покажем, что он является сжимающим отображением в пространстве $\boldsymbol{\ell}_1$. В самом деле, имеем

$$\|Ax-Ay\|_{\ell_1}=\Big\|\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k-y_k}{(n+k)^2+10}\Big\}\Big\|_{\ell_1}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k-y_k|}{(n+k)^2+10}\leqslant c\,\|x-y\|_{\ell_1},$$

где

$$c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2+10}\leqslant\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+10}=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}}\Big|_1^{\infty}<\frac{\pi}{2\sqrt{10}}<\frac{\pi}{6}<1\,.$$

Значит по принципу сжимающих отображений существует единственная последовательность $x\in\boldsymbol{\ell}_1$, т.ч. $Ax=x$, т.е. система уравнений имеет единственное решение.

Лемма. *Пусть $F:X\to X$ отображение полного метрического пространства (X,ρ), т.ч. при некотором n отображение*

$$F^n:X\to X\,,\quad \text{где } F^n\doteqdot\underbrace{F\cdot F\cdot\ldots\cdot F}_{n}$$

является сжимающим. Тогда существует единственная неподвижная точка $x\in X$, т.е. $F(x)=x$.

Доказательство. По принципу сжимающих отображений существует точка $x\in X$, т.ч. $F^n(x)=x$. Тогда $\rho(x,F(x))=\rho(F^n(x),F^{n+1}(x))\leqslant\lambda\rho(x,F(x))$, где $0<\lambda<1$, что невозможно. Поэтому $F(x)=x$. Если имеется еще одна точка $y\in X$, т.ч. $F(y)=y$, то $\rho(x,y)=\rho(F^n(x),F^n(y)\leqslant\lambda\rho(x,y)$, что опять невозможно. Значит $x=y$. □

Пример 4. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{C}[0,1]$ непрерывных функций с нормой $\|f\|\doteqdot\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Докажем, что для каждой функции $h\in\boldsymbol{C}[0,1]$ и для любого числа $\lambda\in\mathbb{F}$ уравнение

$$f(x)+\lambda\int_0^x f(t)\,dt=h(x)\,,\quad x\in[0,1]\,,$$

относительно неизвестной функции $f\in\boldsymbol{C}[0,1]$ имеет единственное решение. Для этого рассмотрим оператор $Af(x)\doteqdot h(x)-\lambda\int_0^x f(t)\,dt$. Тогда получим следующую последовательность неравенств

$$\begin{gathered}
|Af(x)-Ag(x)|\leqslant|\lambda|\textstyle\int_0^x|f(t)-g(t)|\,dt\leqslant|\lambda|x\|f-g\|_{\boldsymbol{C}}\,,\\
|A^2f(x)-A^2g(x)|\leqslant|\lambda|\textstyle\int_0^x|Af(t)-Ag(t)|\,dt\leqslant|\lambda|^2\frac{x^2}{2}\,\|f-g\|_{\boldsymbol{C}}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
|A^nf(x)-A^ng(x)|\leqslant|\lambda|\textstyle\int_0^x|A^{n-1}f(t)-A^{n-1}g(t)|\,dt\leqslant|\lambda|^n\frac{x^n}{n!}\,\|f-g\|_{\boldsymbol{C}}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Следовательно, $\|A^nf-A^ng\|_{\boldsymbol{C}}\leqslant\frac{|\lambda|^n}{n!}\,\|f-g\|_{\boldsymbol{C}}$. Так как при достаточно большом n величина $\frac{|\lambda|^n}{n!}<1$, то отображение A^n является сжимающим. Поэтому в силу леммы существует единственная неподвижная точка $f\in\boldsymbol{C}[0,1]$, т.ч. $Af=f$, т.е. уравнение имеет единственное решение.

Пример 5. Рассмотрим пространство $C[0,1]$ непрерывных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Докажем, что в этом пространстве множество функций

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x^2+n^2}\,, \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqslant c\,,$$

является предкомпактным. Для этого используем теорему Арцела–Асколи. Так как $|f(x)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leqslant c$, то это множество функций равномерно ограничено. Кроме того, производные также равномерно ограничены, т.к.

$$|f'(x)|=\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2xa_n}{(x^2+n^2)^2}\Big|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|\leqslant 2c\,.$$

В силу формулы конечных приращений Лагранжа, получим $|f(x)-f(y)|\leqslant 2c|x-y|$. Следовательно, множество функций равностепенно непрерывно. Таким образом, по теореме Арцела–Асколи указанное множество функций предкомпактно.

Пример 6. В пространстве ℓ_p, $1\leqslant p<\infty$, множество $M=\{x=\{x_n\}\mid |x_n|\leqslant a_n, n\in\mathbb{N}\}$ компактно тогда и только тогда, когда последовательность $a=\{a_n\}\in\ell_p$.

Необходимость. Так как $M\subset\ell_p$ и $a=\{a_n\}\in M$, то следовательно $a=\{a_n\}\in\ell_p$.

Достаточность. Пусть $a=\{a_n\}\in\ell_p$, тогда $\|x\|_{\ell_p}\leqslant\|a\|_{\ell_p}$ при всех $x\in M$. Поэтому множество M ограничено в пространстве ℓ_p. Для каждого $x\in\ell_p$ обозначим через $s_m(x)=y=\{y_n\}$ финитную последовательность, т.ч. $y_n=x_n$ при $n\leqslant m$ и $y_n=0$ при $n>m$. Тогда эта последовательность $s_m(x)\to x$ при $m\to\infty$ сходится в метрике ℓ_p в случае $1\leqslant p<\infty$, т.к. величина

$$\|x-s_m(x)\|_{\ell_p}=\Big(\sum_{n=m+1}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{1/p}\to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty$$

в силу сходимости ряда. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует $m\in\mathbb{N}$, т.ч. $\|a-s_m(a)\|_{\ell_p}<\varepsilon$. Отсюда мы получим $\|x-s_m(x)\|_{\ell_p}\leqslant\|a-s_m(a)\|_{\ell_p}<\varepsilon$ при всех $x\in M$. Таким образом, применяя критерий предкомпактности в пространстве ℓ_p (теорема Рисса), заключаем, что множество M будет предкомпактным. Кроме того, поскольку из сходимости в пространстве ℓ_p следует покоординатная сходимость последовательности, то множество M замкнуто в ℓ_p и значит компактно.

5 ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Определение. Множество X называется *упорядоченным*, если в этом множестве задано *отношение порядка* $x \leqslant y$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $x \leqslant x$; 2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$; 3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Множество $A \subset X$ называется *цепью*, если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ для всех пар $x, y \in A$. Элемент $y \in X$ называется *мажорантой* множества A, если $x \leqslant y$ при всех $x \in A$. Элемент $x \in X$ называется *максимальным* в X, если из $x \leqslant y$ следует $x = y$.

Например, отношением порядка является *отношение включения* множеств, т.е. $A \leqslant B$, если $A \subset B$. Следующая лемма принимается за аксиому в теории множеств.

Лемма (Цóрна). *Если любая цепь $A \subset X$ упорядоченного множества X имеет мажоранту, то в множестве X существует максимальный элемент.*

Пусть $L \subset M \subset \boldsymbol{E}$ подпространства линейного подпространства $\boldsymbol{E}$. Линейный функционал $g : M \to \mathbb{F}$ называется *продолжением* линейного функционала $f : L \to \mathbb{F}$, если $g(x) = f(x)$ для всех $x \in L$. В каждом множестве линейных функционалов, заданных на некоторых подпространствах $\boldsymbol{E}$, *отношение продолжения* является *отношением порядка* и обозначается через $\{f, L\} \leqslant \{g, M\}$.

Теорема (Хáна–Бáнаха). *Если линейный функционал $f : L \to \mathbb{F}$ определён на линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$ полунормированного пространства $(\boldsymbol{E}, p)$ и $|f(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in L$, то существует такое его продолжение $g : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ на все пространство $\boldsymbol{E}$, что $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим действительный случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Пусть $e_1 \notin L$ и $M_1 \doteqdot \operatorname{sp}\{e_1, L\}$ линейная оболочка e_1 и L. Поскольку при всех $x, y \in L$

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x - e_1) + p(y + e_1),$$

то $f(x) - p(x - e_1) \leqslant p(y + e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Поэтому существует $c_1 \in \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - p(x - e_1) \leqslant c_1 \leqslant p(y + e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Заменяя x и y на x/λ, а затем умножая на λ, получим $f(x) \pm \lambda c_1 \leqslant p(x \pm \lambda e_1)$ при всех $\lambda > 0$ и $x \in L$.

Определим на подпространстве M_1 функционал по формуле $g_1(z) \doteqdot f(x) + \lambda c_1$, где $z = x + \lambda e_1$, $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $g_1(x) = f(x)$ при всех $x \in L$ и по доказанному $g_1(z) \leqslant p(z)$ при всех $z \in M_1$. Так как $p(-z) = p(z)$, то $|g_1(z)| \leqslant p(z)$ при всех $z \in M_1$. Таким образом, построили продолжение функционала f на подпространство M_1. Если существует элемент $e_2 \notin M_1$, то аналогично можно доказать существование продолжения g_2 функционала g_1 на подпространство $M_2 \doteqdot \operatorname{sp}\{M_1, e_2\}$ и т.д.

Рассмотрим множество всех продолжений $\{g, M\}$ функционала f, заданного на подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$, которые будут удовлетворять условию теоремы. Определим в этом множестве отношение порядка, как отношение продолжения. Тогда для каждой цепи продолжений $\{g_i, M_i\}_{i \in I}$ имеется мажоранта $\{g, M\}$, где $M = \cup_{i \in I} M_i$ и $g|_{M_i} = g_i$. Следовательно, по лемме Цóрна существует максимальный элемент.

Поскольку по доказанному выше каждый функционал можно продолжить на более широкое подпространство, то максимальное продолжение определено на всем $\boldsymbol{E}$.

Переход от действительного к комплексному случаю производится следующим образом. Пусть $f(x) = u(x) + \boldsymbol{i}v(x)$, где $u(x) = \Re f(x)$ и $v(x) = \Im f(x)$. Так как в силу линейности $f(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}f(x)$, то $u(\boldsymbol{i}x) + \boldsymbol{i}v(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}u(x) - v(x)$. Поэтому $v(x) = -u(\boldsymbol{i}x)$ и $f(x) = u(x) - \boldsymbol{i}u(\boldsymbol{i}x)$. Пусть функционал h определяет продолжение функционала u в действительном случае. Тогда для функционала $g(x) \doteqdot h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)$ выполняется свойство линейности $g(\boldsymbol{i}x) = h(\boldsymbol{i}x) - \boldsymbol{i}h(-x) = \boldsymbol{i}(h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)) = \boldsymbol{i}g(x)$.

Следовательно, функционал g является линейным над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и задает продолжение функционала f. Докажем неравенство $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если $g(x) = \boldsymbol{e}^{i\theta}|g(x)|$, то $|g(x)| = \boldsymbol{e}^{-i\theta}g(x) = g(\boldsymbol{e}^{-i\theta}x) = h(\boldsymbol{e}^{-i\theta}x) \leqslant p(\boldsymbol{e}^{-i\theta}x) = p(x)$. Таким образом, функционал g удовлетворяет условиям теоремы. □

Следствие 1. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ подпространство в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, то для каждого $f \in L'$ существует $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|_L$.*

Для доказательства определим $p(x) \doteqdot \|f\|_L\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда по теореме существует функционал g, т.ч. $g|_L = f$ и $|g(x)| \leqslant \|f\|_L\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому имеем $\|g\| \leqslant \|f\|_L$, а в силу условия $g|_L = f$ справедливо обратное неравенство $\|g\| \geqslant \|f\|_L$. Таким образом, имеет место равенство $\|g\| = \|f\|_L$.

Следствие 2. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ подпространство в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, то для каждого $x \in \boldsymbol{E} \setminus L$ существует $f \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $\|f\| = 1$, $f(y) = 0$ при всех $y \in L$ и $f(x) = \rho(x,L)$, где $\rho(x,L) = \inf_{y \in L}\|x - y\|$.*

Определим функционал $f(\lambda x + y) \doteqdot \lambda d$ на линейной оболочке $M \doteqdot \mathrm{sp}\{x, L)$, где $\lambda \in \mathbb{F}$, $y \in L$ и $d = \rho(x,L)$. Поскольку $|\lambda d| \leqslant \|\lambda x + y\|$ по определению $\rho(x,L)$, то $\|f\|_M \leqslant 1$. С другой стороны, для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется $y \in L$, т.ч. $\|x - y\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$. Так как $d = |f(x - y)| \leqslant \|f\|_M\|x - y\| < \|f\|_M\frac{d}{1-\varepsilon}$, то $\|f\|_M > 1 - \varepsilon$. Поэтому $\|f\|_M = 1$. Применяя следствие 1 получим функционал, удовлетворяющий следствию 2.

Определение. В нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ множество $\boldsymbol{\Pi} \subset \boldsymbol{E}$ называется *плоскостью*, если $(1-t)x + ty \in \boldsymbol{\Pi}$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x, y \in \boldsymbol{\Pi}$. *Модуль* этой плоскости равен $|\boldsymbol{\Pi}| \doteqdot \inf_{x \in \boldsymbol{\Pi}}\|x\|$ расстоянию $\rho(0, \boldsymbol{\Pi})$ от точки 0 до множества $\boldsymbol{\Pi}$.

Например, для каждого $f \in \boldsymbol{E}^*$ множество $H \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = c\}$, определяемое уравнением $f(x) = c$, называется *гиперплоскостью* в пространстве $\boldsymbol{E}$. Заметим, что гиперплоскость H замкнута тогда и только тогда, когда функционал $f \in \boldsymbol{E}'$ непрерывен. В самом деле, если $f \in \boldsymbol{E}'$ и $x_n \to x$, где $x_n \in H$, то $f(x) = \lim f(x_n) = c$ и поэтому $x \in H$. Обратно, предположим, что гиперплоскость $H \neq \boldsymbol{E}$ замкнута. При помощи сдвига на некоторый элемент мы можем считать, что $c \neq 0$, т.е. $0 \notin H$. Так как множество $\boldsymbol{E} \setminus H$ открыто и $0 \in \boldsymbol{E} \setminus H$, то найдется шар $\boldsymbol{S}_r(0)$ радиуса $r > 0$ с центром в нуле, т.ч. $\boldsymbol{S}_r(0) \subset \boldsymbol{E} \setminus H$. Отсюда $|f(x)| < |c|$ при всех $x \in \boldsymbol{S}_r(0)$ и, следовательно, $|f(x)| < |c|/r$ при всех $x \in \boldsymbol{S}$. Поэтому $\|f\| \leqslant |c|/r$.

Теорема (Мазура)**.** *Для всякой плоскости $\Pi \subset \boldsymbol{E}$ существует гиперплоскость $H \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\Pi \subset H$ и $|\Pi| = |H|$.*

Доказательство. Если $x \in \Pi$, то $L \doteqdot \Pi - x$ линейное подпространство $\boldsymbol{E}$. В силу следствия 2 найдется $f \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $\|f\| = 1$, $f(y) = 0$ при всех $y \in L$ и $f(x) = d$, где $d = \rho(x, L)$. Пусть $H \doteqdot \{y \in \boldsymbol{E} \mid f(y) = d\}$, тогда $\Pi \subset H$ и выполняются равенства

$$|H| = \inf_{y \in H} \|y\| = \inf_{f(y)=0} \|x - y\| = \frac{|f(x)|}{\sup\limits_{f(y)=0} \frac{|f(\lambda x - y)|}{\|\lambda x - y\|}} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = d$$

Поскольку $d = \rho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\| = \inf_{y \in \Pi} \|y\| = |\Pi|$, то теорема доказана. □

Определение. Систему элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ будем называть *биортогональной* системе функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}'$, если $f_j(e_i) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$.

Лемма 1. *Если система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}'$ линейно независима, то существует биортогональная ей система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. При $n = 1$ имеем $f_1 \neq 0$. Поэтому найдется $e_1 \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_1(e_1) = 1$. По индукции предположим, что для $n-1$ утверждение верно. Тогда существуют $x_i \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_j(x_i) = 0$ при $i \neq j$ и $f_i(x_i) = 1$, где $i, j = 1, \ldots, n-1$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ положим $y \doteqdot x - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) x_i$. Тогда $f_j(y) = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n-1$ и $x \in \boldsymbol{E}$.

Если $f_n(y) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) f_n(x_i)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, что противоречит условию линейной независимости. Поэтому найдется элемент $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_n(y) \neq 0$. Определяя $e_n \doteqdot y / f_n(y)$ и $e_i \doteqdot x_i - f_n(x_i) e_n$ при $i = 1, \ldots, n-1$, получим биортогональную систему элементов $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве $\boldsymbol{E}$. □

Лемма 2. *Пусть система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}'$ линейно независима, функционал $f \in \boldsymbol{E}'$, $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{F}$ и $c \in \mathbb{F}$. Обозначим через $H_i \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f_i(x) = c_i\}$ и $H \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = c\}$ гиперплоскости в пространстве $\boldsymbol{E}$. Тогда если $\bigcap_{i=1}^n H_i \subset H$, то существуют $\lambda_i \in \mathbb{F}$, т.ч. $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ и $c = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$.*

Доказательство. Рассмотрим систему функционалов $\{f_i\}_{i=0}^n$, где $f_0 = f$. Докажем, что она является линейно зависимой. В самом деле, предположим, что $\{f_i\}_{i=0}^n$ линейно независима. Тогда в силу леммы 1 существует биортогональная система элементов $\{e_i\}_{i=0}^n$. Положим $c_0 = c + 1$ и $x = \sum_{i=0}^n c_i e_i$. В силу биортогональности получим $f_i(x) = c_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Однако это невозможно, поскольку по условию из $f_i(x) = c_i$, $i = 1, \ldots, n$, следует $f_0(x) = f(x) = c \neq c_0$. Получили противоречие. □

Теорема (Хелли)**.** *Пусть система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}'$ линейно независима и числа $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{F}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_i(x) = c_i$, $i = 1, \ldots, n$, и $\|x\| < C + \varepsilon$, где $C > 0$ вычисляется по формуле*

$$C \doteqdot \sup\Big\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \mid \lambda_i \in \mathbb{F}, \text{ т.ч. } \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \Big\| = 1 \Big\}.$$

Доказательство. Обозначим через $\Pi \doteqdot \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ плоскость, образованную пересечением гиперплоскостей $H_i \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f_i(x) = c_i\}$ в пространстве $\boldsymbol{E}$. По теореме Мазура существует гиперплоскость $H \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = c\}$, т.ч. $\Pi \subset H$ и $|\Pi| = |H|$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что норма $\|f\| = 1$. Тогда, применяя лемму 2, мы получим $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, при этом $c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$. Следовательно, мы имеем неравенство $|\Pi| = |H| = |c| = |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i| \leqslant \sup |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i|$, где верхняя грань берется по всем $\lambda_i \in \mathbb{F}$, т.ч. $\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\| = \|f\| = 1$ (см. доказательство теоремы Мазура). Таким образом, $|\Pi| \leqslant C$. Наконец, вспоминая определение модуля этой плоскости, получим, что любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in \Pi$, т.ч. $\|x\| < C + \varepsilon$. □

Определение. Бесконечная система элементов $\{e_i\}_{i \in I}$ линейного пространства $\boldsymbol{E}$ называется линейно независимой, если каждая ее конечная подсистема $\{e_{i_k}\}_{k=1}^{n}$ линейно независима. Линейно независимая система элементов $\{e_i\}_{i \in I}$ называется *базисом Гáмеля* в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$, если для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует конечная система чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$, т.ч. $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}$, где $i_k \in I$, $k = 1, \dots, n$

Лемма. *В каждом линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ существует базис Гáмеля.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ обозначает множество всех линейно независимых систем в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$, упорядоченная отношением включения. Так как каждая цепь в $\mathfrak{S}$ имеет мажоранту, равную объединению всех множеств цепи, то по лемме Цорна множество $\mathfrak{S}$ имеет максимальный элемент, который является максимальной линейно независимой системой в $\boldsymbol{E}$, т.е. базисом Гамеля. □

Пример 1. Если нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ имеет бесконечную размерность $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то существует разрывный линейный функционал.

В самом деле, пусть $\{e_i\}_{i \in I}$ базис Гамеля в $\boldsymbol{E}$. Мы можем считать, что нормы $\|e_i\| = 1$ при всех $i \in I$. Так как базис Гамеля бесконечный, то в нем существует счетная линейно независимая подсистема $\{e_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Определим линейный функционал на базисе $f(e_i) = n$, если $i = i_n$, и $f(e_i) = 0$, если $i \neq i_n$, а затем продолжим его по линейности на все пространство $\boldsymbol{E}$. Полагая $x_n = \frac{1}{n} e_{i_n}$, получим $\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0$. Однако $f(x_n) = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, функционал f не является непрерывным.

Определение. Счетная система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *базисом Шáудера* в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, если для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует единственная система чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{F}$, т.ч. $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, где ряд сходится по норме.

Заметим, что в силу единственности разложения в сходящийся ряд такая система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является линейно независимой. При этом система линейных функционалов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяемая по формуле $f_n(x) \doteqdot \lambda_n$, если $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, образуют биортогональную систему к системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Лемма. *Если в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ существует базис Шáудера, то это пространство является сепарабельным.*

Доказательство. Пусть $x \in \boldsymbol{E}$ и $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ его разложение по базису Шаудера. Так как этот ряд сходится по норме, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется число n, т.ч. $\| \sum_{r=n+1}^{\infty} \lambda_k e_k \| < \varepsilon/2$. Выберем (комплексно) рациональные числа $r_k \in \mathbb{Q}$ так, чтобы $|\lambda_k - r_k| < \varepsilon/2c_n$ при всех $k = 1, \ldots, n$, где $c_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|$. Тогда, полагая $y = \sum_{k=1}^{n} r_k e_k$ применяя неравенство треугольника, мы получим неравенство

$$\|x - y\| \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - r_k) e_k \Big\| + \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k e_k \Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - r_k| \, \|e_k\| + \varepsilon/2 < \varepsilon .$$

Таким образом, множество всех конечных сумм $y = \sum_{k=1}^{n} r_k e_k$, где $r_k \in \mathbb{Q}$, является счетным и всюду плотным подмножеством пространства $\boldsymbol{E}$. □

Пример 2. В любом конечномерном нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ размерности $\dim \boldsymbol{E} = n$ всякий линейный функционал $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ является непрерывным.

В самом деле, пусть $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ образует базис в $\boldsymbol{E}$. Тогда каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует единственная система чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$, т.ч. $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Тогда имеем

$$|f(x)| = \Big| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, |f(e_k)| \leqslant c \, \|\lambda\|_{\ell_1} ,$$

где $\|\lambda\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$ и $c = \sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|$. Поскольку $\|x\|_1 \doteqdot \|\lambda\|_{\ell_1}$, если $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, является нормой в $\boldsymbol{E}$ и любые две нормы в $\boldsymbol{E}$ эквивалентны, то существует $c_1 > 0$, т.ч. $\|x\|_1 \leqslant c_1 \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому $|f(x)| \leqslant c c_1 \|x\|$ и, следовательно, линейный функционал f является ограниченным, а значит непрерывным.

Пример 3. Доказать, что сопряженное пространство $\boldsymbol{\ell}'_p$ к пространству $\boldsymbol{\ell}_p$ является изометричным пространству $\boldsymbol{\ell}_q$, где $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$.

Покажем вначале, что элементы $e_i \doteqdot \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, где $i \in \mathbb{N}$, образуют базис Ша́удера в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$. Для этого необходимо доказать, что ряд $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ сходится к элементу $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ в метрике $\boldsymbol{\ell}_p$. Обозначим через $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ частичную сумму этого ряда. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{\ell}_p$ последовательность $s_n(x) \to x$ при $n \to \infty$ сходится в метрике $\boldsymbol{\ell}_p$ в случае $1 < p < \infty$, т.к. величина

$$\|x - s_n(x)\|_{\ell_p} = \Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \Big)^{1/p} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

стремится к нулю в силу сходимости ряда. Если теперь $f \in \boldsymbol{\ell}'_p$ является непрерывным линейным функционалом на пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$, то имеем равенство

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(s_n(x)) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i ,$$

где $y_i \doteqdot f(e_i)$. Пусть элемент $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|f(x)| = \Big| \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_{\ell_p} \|y\|_{\ell_q} .$$

Следовательно, норма функционала $\|f\| \leqslant \|y\|_{\ell_q}$. Рассмотрим последовательность

$$x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \text{ где } x_i \doteqdot \overline{\operatorname{sign}(y_i)} \frac{|y_i|^{q-1}}{(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q)^{1/p}}, \text{ если } i \leqslant n, \text{ и } x_i = 0, \text{ если } i > n.$$

Здесь $\operatorname{sign}(z) \doteqdot z/|z|$ при $z \in \mathbb{C}$. Тогда имеем $f(x) = (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{1/q} \leqslant \|f\|$, т.к. $\|x\|_{\ell_p} = 1$. Отсюда мы получим $\|f\| = \|y\|_{\ell_q} < \infty$. Поэтому последовательность $y \in \boldsymbol{\ell}_q$ и значит пространство $\boldsymbol{\ell}'_p$ изометрично пространству $\boldsymbol{\ell}_q$.

Пример 4. Доказать, что сопряженное пространство $\boldsymbol{\ell}'_1$ к пространству $\boldsymbol{\ell}_1$ является изометричным пространству $\boldsymbol{\ell}_\infty$, состоящему из всех ограниченных последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ с нормой $\|x\|_{\ell_\infty} \doteqdot \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$.

Покажем вначале, что элементы $e_i \doteqdot \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, где $i \in \mathbb{N}$, образуют базис Ша́удера в пространстве $\boldsymbol{\ell}_1$. Для этого необходимо доказать, что ряд $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ сходится к элементу $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ в метрике $\boldsymbol{\ell}_1$. Обозначим через $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ частичную сумму этого ряда. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{\ell}_1$ последовательность $s_n(x) \to x$ при $n \to \infty$ сходится в метрике $\boldsymbol{\ell}_1$, т.к. величина

$$\|x - s_n(x)\|_{\ell_1} = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

стремится к нулю в силу сходимости ряда. Если теперь $f \in \boldsymbol{\ell}'_1$ является непрерывным линейным функционалом на пространстве $\boldsymbol{\ell}_1$, то имеем равенство

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(s_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

где $y_i \doteqdot f(e_i)$. Пусть элемент $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Применяя очевидное неравенство, получим

$$|f(x)| = \Big|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_{\ell_1} \|y\|_{\ell_\infty}.$$

Следовательно, норма функционала $\|f\| \leqslant \|y\|_{\ell_\infty}$. Рассмотрим последовательность

$$x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \text{ где } x_i \doteqdot \overline{\operatorname{sign}(y_i)} \text{ при } i = n, \text{ и } x_i = 0 \text{ при } i \neq n.$$

Тогда $x \in \boldsymbol{\ell}_1$ и $f(x) = |y_n| \leqslant \|f\|$, т.к. норма $\|x\|_{\ell_1} = 1$. Поэтому норма функционала $\|f\| = \|y\|_{\ell_\infty}$ и значит пространство $\boldsymbol{\ell}'_1$ изометрично пространству $\boldsymbol{\ell}_\infty$.

Пример 5. Доказать, что сопряженное пространство $\boldsymbol{c}'_0$ к пространству $\boldsymbol{c}_0$ всех последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, стремящихся к нулю, с нормой $\|x\|_{c_0} \doteqdot \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$, является изометричным пространству $\boldsymbol{\ell}_1$.

Покажем вначале, что элементы $e_i \doteqdot \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, где $i \in \mathbb{N}$, образуют базис Ша́удера в пространстве $\boldsymbol{c}_0$. Для этого необходимо доказать, что ряд $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ сходится к элементу $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ в метрике $\boldsymbol{c}_0$. Обозначим через $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ частичную сумму этого ряда. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{c}_0$ последовательность $s_n(x) \to x$ при $n \to \infty$ сходится в метрике $\boldsymbol{c}_0$, т.к. величина

$$\|x - s_n(x)\|_{\boldsymbol{c}_0} = \sup_{i \geqslant n+1} |x_i| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

стремится к нулю в силу того, что $x_i \to 0$. Если теперь $f \in \boldsymbol{c}_0'$ является непрерывным линейным функционалом на пространстве $\boldsymbol{c}_0$, то имеем равенство

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(s_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\,,$$

где $y_i \doteqdot f(e_i)$. Пусть элемент $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Применяя очевидное неравенство, получим

$$|f(x)| = \Big|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_{\boldsymbol{c}_0} \|y\|_{\ell_1}.$$

Следовательно, норма функционала $\|f\| \leqslant \|y\|_{\ell_1}$. Рассмотрим последовательность

$$x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}\,, \text{ где } x_i \doteqdot \overline{\operatorname{sign}(y_i)} \text{ при } i \leqslant n\,, \text{ и } x_i = 0 \text{ при } i > n\,.$$

Тогда $x \in \boldsymbol{c}_0$ и $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leqslant \|f\|$, т.к. $\|x\|_{\boldsymbol{c}_0} = 1$. Поэтому норма функционала $\|f\| = \|y\|_{\ell_1}$ и значит пространство $\boldsymbol{c}_0'$ изометрично пространству $\boldsymbol{\ell}_1$.

Пример 6. Продолжить линейный функционал $\alpha(P) = P'(1)$ с сохранением его нормы, заданный на пространстве алгебраических многочленов $P(x) = ax^2 + bx + c$, т.е. $\deg P \leqslant 2$, на пространство непрерывных функций $\boldsymbol{C}[-1,1]$.

Для продолжения функционала $\alpha(P) = P'(1)$ в $\boldsymbol{C}[-1,1]$, где $P(x) = ax^2 + bx + c$, представим его в виде линейной комбинации значений $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, т.е.

$$\alpha(P) = 2a + b = \lambda_1 P(1) + \lambda_2 P(0) + \lambda_3 P(-1).$$

Подставляя в это равенство вместо $P(x)$ одночлены x^2, x, 1, получим следующую систему линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + \lambda_3; \\ 1 = \lambda_1 - \lambda_3; \\ 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим $\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_2 = -2$ и $\lambda_3 = 1/2$. Таким образом, получаем продолжение функционала на пространство $\boldsymbol{C}[-1,1]$ по формуле

$$\alpha(f) = \tfrac{3}{2} f(1) - 2f(0) + \tfrac{1}{2} f(-1), \quad f \in \boldsymbol{C}[-1,1].$$

Экстремальным многочленом является многочлен Чебышева $T(x) = 2x^2 - 1$, т.к. $T(1) = T(-1) = 1$, $T(0) = -1$ и $\alpha(T) = 4$. Поэтому норма функционала $\|\alpha\| = 4$.

6 ТОПОЛОГИЯ СИЛЬНОЙ И СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ

Определение. *Локально выпуклым пространством* $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ называется линейное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором определена система полунорм $\mathfrak{P}$ и локальная база β топологии пространства $\boldsymbol{E}$ состоит из окрестностей следующего вида:

$$O(x) \doteqdot \{y \in \boldsymbol{E} \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n} \boldsymbol{p}_i(y-x) < \varepsilon\}, \text{ где } x\in\boldsymbol{E},\ \varepsilon>0,\ \boldsymbol{p}_i\in\mathfrak{P},\ i=1,\ldots,n\in\mathbb{N}.$$

Топология этого пространства $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ называется *локально выпуклой*, поскольку ее локальная база β_0 состоит из выпуклых множеств. В этом пространстве $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ множество $M\subset\boldsymbol{E}$ называется *ограниченным*, если $\sup_{x\in M}\boldsymbol{p}(x)<\infty$ при всех $\boldsymbol{p}\in\mathfrak{P}$. Последовательность $\{x_n\}\subset\boldsymbol{E}$ называется *сходящейся к* x, если для любых $\varepsilon>0$ и $\boldsymbol{p}\in\mathfrak{P}$ существует N, т.ч. $\boldsymbol{p}(x_n-x)<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$.

Например, нормированное пространство $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ является локально выпуклым, в нем система полунорм состоит из одной нормы $\boldsymbol{p}(x)=\|x\|$. Рассмотрим локально выпуклые топологии в пространстве ограниченных операторов $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

Равномерной топологией или топологией равномерной сходимости в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется локально выпуклая топология, определяемая нормой $\boldsymbol{p}(A)=\|A\|$.

Сильной топологией или топологией сильной сходимости в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется локально выпуклая топология системы полунорм $\boldsymbol{p}_x(A)=\|Ax\|$, $x\in\boldsymbol{E}$.

Слабой топологией или топологией слабой сходимости в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется локально выпуклая топология системы полунорм $\boldsymbol{p}_{f,x}(A)=|f(Ax)|$, $f\in\boldsymbol{F}'$, $x\in\boldsymbol{E}$.

Поскольку имеют место неравенства $|f(Ax)|\leqslant\|f\|\,\|Ax\|\leqslant\|f\|\,\|A\|\,\|x\|$ при всех $f\in\boldsymbol{F}'$, $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, $x\in\boldsymbol{E}$, то всякая слабая окрестность содержит сильную окрестность, а всякая сильная окрестность содержит равномерную окрестность. Значит слабая топология слабее сильной, а сильная топология слабее равномерной и, следовательно, из равномерной сходимости вытекает сильная сходимость, а из сильной сходимости вытекает слабая сходимость. Если размерность пространства $\dim\boldsymbol{E}<\infty$ конечна, то все эти три топологии и соответствующие три сходимости совпадают, т.к. они однозначно определяются на элементах базиса в $\boldsymbol{E}$.

Теорема (Ба́наха–Штейнга́уза)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ является банаховом пространством, а $\boldsymbol{F}$ нормированным пространством, то система операторов $\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сильно ограничена, тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена.*

Доказательство. Если система операторов $\{A_i\}_{i\in I}$ сильно ограничена, то в силу принципа равностепенной непрерывности получаем, что она является равностепенно непрерывной. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч.$\|A_ix\|<\varepsilon$ при всех $\|x\|\leqslant\delta$ и $i\in I$. Отсюда $\|A_i\|=\sup_{\|x\|\leqslant1}\|A_i(x)\|=\sup_{\|x\|\leqslant\delta}\|A_i(x/\delta)\|\leqslant\varepsilon/\delta$ при всех $i\in I$, т.е. система операторов является равномерно ограниченной.

Обратно, применяя неравенство $\sup_{i\in I}\|A_ix\|\leqslant\|x\|\sup_{i\in I}\|A_i\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, из равномерной ограниченности получим сильную ограниченность. $\square$

Следствие. *Если $\boldsymbol{E}$ банахово пространство и последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сходится сильно к A, то $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\|A\| \leqslant \underline{\lim}\|A_n\|$.*

Так как существует предел $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то последовательность $\{A_n\}$ сильно ограничена. Поэтому в силу теоремы Ба́наха–Штейнга́уза мы получаем, что $\sup\|A_n\| < \infty$. Выберем индексы n_k так, чтобы $\underline{\lim}\|A_n\| = \lim\|A_{n_k}\|$. Тогда $\|A(x)\| = \lim\|A_{n_k}(x)\| \leqslant \lim\|A_{n_k}\| = \underline{\lim}\|A_n\|$ при всех $x \in \boldsymbol{S}$. Поэтому имеем $\|A\| \leqslant \underline{\lim}\|A_n\| \leqslant \sup\|A_n\| < \infty$, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

Пример 1. Рассмотрим контрпример к теореме Ба́наха–Штейнга́уза.

Пусть $\boldsymbol{c}_0$ есть пространство всех последовательностей $x = \{x_n\}$, стремящихся к нулю, с обычной нормой $\|x\|_{\boldsymbol{c}_0} = \sup|x_n|$. Рассмотрим его подпространство $\boldsymbol{f} \subset \boldsymbol{c}_0$, состоящее из всех финитных последовательностей. В силу принципа продолжения по непрерывности получим, что их сопряженные пространства являются изометричными, т.е. $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{c}_0' = \boldsymbol{\ell}_1$. Определим линейные функционалы $\alpha_n(x) \doteqdot nx_n$, $n = 1,2,\ldots$. Они непрерывны на $\boldsymbol{c}_0$ и значит непрерывны на $\boldsymbol{f}$. Кроме того, для каждого фиксированного $x \in \boldsymbol{f}$ предел $\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x) = 0$ равен нулю. Однако нормы этих функционалов не ограничены, поскольку $\|\alpha_n\| = n$.

Теорема (критерий сильной сходимости операторов)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются банаховыми пространствами. Последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ тогда и только тогда сходится сильно к $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, когда $\sup\|A_n\| < \infty$ и существует множество $M \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. линейная оболочка $\mathrm{sp}M$ всюду плотна в $\boldsymbol{E}$ и предел $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in M$.*

Доказательство. Необходимость этого утверждения вытекает из следствия. Для доказательства достаточности обозначим через $L \doteqdot \mathrm{sp}M$ линейную оболочку M. В силу линейности операторов существует предел $\lim A_n(y) = A(y)$ при всех $y \in L$. Поскольку L всюду плотно, то для любых $x \in \boldsymbol{E}$ и $\varepsilon > 0$ существует $y \in L$, т.ч. $\|x-y\| < \varepsilon/4c$, где $c \doteqdot \sup\|A_n\| > 0$. Выберем N, т.ч. $\|A_n(y) - A_m(y)\| < \varepsilon/2$ при всех $n,m \geqslant N$. Так как $\|A_n(x) - A_n(y)\| \leqslant \|A_n\|\,\|x-y\| < \varepsilon/4$, то при всех $n,m \geqslant N$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leqslant \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\| < \varepsilon.$$

Отсюда $\{A_n(x)\}$ является последовательностью Коши при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и значит в силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $\lim A_n(x) \doteqdot A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Применяя следствие теоремы Ба́наха-Штейнга́уза, мы получим, что $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$. □

Пример 2. Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$ при $1 \leqslant p < \infty$ последовательность операторов $(A_nx)_k = x_k$, если $k < n$, и $(A_nx)_k = 0$, если $k \geqslant n$. Она сходится сильно к тождественному оператору $I(x) = x$, поскольку $\|A_nx - x\|_{\boldsymbol{\ell}_p} = (\sum_{k=n}^{\infty}|x_k|^p)^{1/p} \to 0$ при всех $x \in \boldsymbol{\ell}_p$. Однако она не сходится равномерно к I, т.к. $\|A_n - I\| = 1$.

Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$ при $1 < p < \infty$ последовательность операторов $(A_nx)_k = 0$, если $k \leqslant n$, $(A_nx)_k = x_{k-n}$, если $k > n$. Она сходится слабо к нулевому оператору $0(x) = 0$, т.к. $|f(A_nx)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty}x_{k-n}y_k| \leqslant \|x\|_{\boldsymbol{\ell}_p}(\sum_{k=n+1}^{\infty}|y_k|^q)^{1/q} \to 0$ при всех $y \in \boldsymbol{\ell}_q$, где $1/p + 1/q = 1$. Однако не сходится сильно к 0, т.к. $\|A_nx\| = \|x\|$.

Сильной топологией* сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$ к нормированному пространству $\boldsymbol{E}$ называется локально выпуклая топология, определяемая его нормой $\boldsymbol{p}(f) \doteqdot \|f\|$, а сходимость по норме называется *сильной сходимостью*.

Слабой топологией* или топологией слабой* сходимости называется локально выпуклая топология в $\boldsymbol{E}'$, определяемая системой полунорм $\boldsymbol{p}_x(f) \doteqdot |f(x)|$, $x \in \boldsymbol{E}$. Последовательность $\{f_n\}$ сходится слабо* к f, если $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если считать фунуционалы из $\boldsymbol{E}'$ операторами из $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}.\mathbb{F})$, то из свойств сильной сходимости операторов мы получим свойства слабой* сходимости функционалов:

1. *Из сильной сходимости следует слабая* сходимость. Если размерность* $\dim(\boldsymbol{E}) < \infty$ *конечна, то эти сходимости равносильны.*

2. *Если* $\boldsymbol{E}$ *банахово пространство и последовательность* $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}'$ *сходится слабо* к функционалу* f, *то* $f \in \boldsymbol{E}'$ *и* $\|f\| \leqslant \varliminf \|f_n\|$.

3. *Если* $\boldsymbol{E}$ *банахово пространство, то множество* $M \subset \boldsymbol{E}'$ *слабо* ограничено, тогда и только тогда, когда* M *является сильно ограниченным.*

Теорема (критерий слабой* сходимости в $\boldsymbol{E}'$)**.** *Пусть* $\boldsymbol{E}$ *банахово пространство. Последовательность* $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}'$ *тогда и только тогда сходится слабо* к* $f \in \boldsymbol{E}'$, *когда* $\sup \|f_n\| < \infty$ *и существует* $M \subset \boldsymbol{E}$, *т.ч. линейная оболочка* $\mathrm{sp} M$ *всюду плотна в* $\boldsymbol{E}$ *и предел* $\lim f_n(x) = f(x)$ *при всех* $x \in M$.

Определение. Подпространство $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}'$ называется *тотальным* на $\boldsymbol{E}$, если из условий $x \in \boldsymbol{E}$ и $f(x) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}$ следует, что элемент $x = 0$.

Каноническим вложением $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$ во второе сопряженное пространство $\boldsymbol{E}''$ называется отображение $J(x) \doteqdot \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$, $f \in \boldsymbol{E}^*$, функционал Дира́ка.

Лемма 1. *Для каждой линейно независимой система элементов* $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ *и тотального подпространства* $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}'$ *соответствующую биортогональную систему функционалов* $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{F}$ *в подпространстве* $\boldsymbol{F}$.

Доказательство. Используя каноническое вложение и тотальность подпространства $\boldsymbol{F}$, заметим, что система $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейно независима тогда и только тогда, когда соответствующая система функционалов $\{\delta_{e_i}\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{F}'$ линейно независима. Таким образом, применяя лемму, доказанную на прошлой лекции, получим биортогональную систему функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{F}$ в подпространстве $\boldsymbol{F}$. □

Лемма 2. *Подпространство* $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}'$ *является слабо* плотным в* $\boldsymbol{E}'$, *тогда и только тогда, когда оно тотально на пространстве* $\boldsymbol{E}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}'$ слабо* плотно и $f(x) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}$. Так как слабая* окрестность $O(g) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' \mid |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ точки $g \in \boldsymbol{E}'$ содержит $f \in \boldsymbol{F}$, то $|g(x)| = |g(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$. Отсюда $g(x) = 0$ при всех $g \in \boldsymbol{E}'$. Пусть функционал $f(\lambda x) = \lambda \|x\|$ задан на линейной оболочке $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x\}$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Поскольку $\|f\|_L = 1$, то по следствию из теоремы Ха́на–Ба́наха существует $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g(x) = \|x\|$ и $\|g\| = \|f\|_L = 1$. Поэтому элемент $x = 0$, т.е. $\boldsymbol{F}$ тотально.

Обратно, пусть $O(g) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' | \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |g(e_i) - f(e_i)| < \varepsilon\}$ определяет слабую* окрестностью точки $g \in \boldsymbol{E}'$. Можно считать, что $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ линейно независима. Из леммы 1 имеем биортогональную систему $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{F}$. Построим функционал $f(x) = \sum_{j=1}^n g(e_j) f_j(x) \in \boldsymbol{F}$, т.ч. $f(e_i) = g(e_i)$ при $i = 1, \ldots, n$. Тогда $f \in O(g)$. □

Теорема. *Каноническое отображение $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$ является изометричным, его образ $J(\boldsymbol{E})$ является слабо* плотным в пространстве $\boldsymbol{E}''$ и состоит из всех функционалов, которые непрерывны в слабой* топологии пространства $\boldsymbol{E}'$.*

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{E}'$ и $\|f\| \leqslant 1$, тогда $|\delta_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\|$. Поэтому имеем $\|J(x)\| = \|\delta_x\| \leqslant \|x\|$. Докажем равенство $\|\delta_x\| = \|x\|$. Применяя, также как в лемме 2, теорему Ха́на–Ба́наха для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ построим функционал $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $\|g\| = 1$ и $g(x) = \|x\|$. Тогда $\delta_x(g) = \|x\|$ и, следовательно, $\|\delta_x\| = \|x\|$. Таким образом, каноническое отображение изометрично. Поскольку подпространство $J(\boldsymbol{E})$ тотально на $\boldsymbol{E}'$, то по лемме 2 оно является слабо* плотным в $\boldsymbol{E}''$.

Если функционал $\alpha \in \boldsymbol{E}''$ является слабо* непрерывным в нуле, то существует слабая* окрестность нуля $O \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' | \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |f(e_i)| < \delta\}$, т.ч. $|\alpha(f)| < \varepsilon$ для всех $f \in O$. Тогда имеет место неравенство $|\alpha(g)| \leqslant c \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |g(e_i)|$ при всех $g \in \boldsymbol{E}'$, где $c = \varepsilon/\delta$. Мы можем считать, что система $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейно независима и значит существует биортогональная система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}'$. Так как любой элемент $g \in \boldsymbol{E}'$ допускает представление $g(x) = \sum_{i=1}^n g(e_i) f_i(x) + h(x)$, где $h(e_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, n$, то из указанного выше неравенства следует, что $\alpha(h) = 0$. Отсюда имеем $\alpha(g) = \sum_{i=1}^n g(e_i)\alpha(f_i) = \delta_e(g)$ при всех $g \in \boldsymbol{E}'$, где $e = \sum_{i=1}^n \alpha(f_i) e_i$. Осталось заметить, что слабая* непрерывность функционала Дирака $\delta_e \in J(\boldsymbol{E})$ вытекает из неравенства $|\delta_e(g)| = |g(e)| < \varepsilon$, где $g \in O \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' \mid |f(e)| < \varepsilon\}$. □

Замечание. Если каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}''$ является сюръективным, то пространство $\boldsymbol{E}$ называется *рефлексивным*. Например, нетрудно доказать, что все конечномерные нормированные пространства будут рефлексивны. По *теореме Джéймса* сепарабельное банахово пространство $\boldsymbol{E}$ рефлексивно в том и в том случае, когда всякий функционал $f \in \boldsymbol{E}'$ достигает своей нормы на единичном шаре $\boldsymbol{S}$, т.е. существует $x \in \boldsymbol{S}$, т.ч. $f(x) = \|f\|$.

Сильной топологией в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, называется локально выпуклая топология, определяемая его нормой $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$, а сходимость по норме в пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *сильной сходимостью*.

Слабой топологией пространства $\boldsymbol{E}$ называют локально выпуклую топологию, определяемую системой полунорм $\boldsymbol{p}_f(x) \doteqdot |f(x)|$, где $f \in \boldsymbol{E}'$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся слабо к* $x \in \boldsymbol{E}$, если $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in \boldsymbol{E}'$. При помощи канонического вложения $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$ и свойств слабой* сходимости функционалов, мы получим свойства слабой сходимости:

1. *Из сильной сходимости следует слабая сходимость. Если размерность $\dim(\boldsymbol{E}) < \infty$ конечна, то эти сходимости равносильны.*

2. *Если последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ сходится слабо к $x \in \boldsymbol{E}$, то $\|x\| \leqslant \underline{\lim} \|x_n\|$.*

3. *Если множество $M \subset \boldsymbol{E}$ слабо ограничено, тогда и только тогда, когда M является сильно ограниченным.*

Теорема (критерий слабой сходимости в $\boldsymbol{E}$)**.** *Последовательность элементов $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда сходится слабо к $x \in \boldsymbol{E}$, когда $\sup \|x_n\| < \infty$ и существует множество $M \subset \boldsymbol{E}'$, т.ч. линейная оболочка $\mathrm{sp} M$ всюду плотна в $\boldsymbol{E}'$ и предел $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in M$.*

Пример 3. Последовательность $\{f_n\} \subset \boldsymbol{C}[a,b]$ сходится слабо в том и только в том случае когда является равномерно ограниченной и сходится $f_n(x) \to f(x)$ в любой точке $x \in [a,b]$. Для доказательства необходимости достаточно рассмотреть функционалы Дирака $\delta_x \in \boldsymbol{C}'[a,b]$, тогда имеем $\delta_x(f_n) = f_n(x) \to f(x) = \delta_x(f)$.

Для доказательства достаточности всякий функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}'[a,b]$ представим в виде интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса $\alpha(f) = \int_a^b f\,dF$. Поскольку этот интеграл от непрерывной функции совпадает с интегралом Лебе́га–Сти́лтьеса, то мы можем применить теорему Лебе́га о предельном переходе под знаком интеграла.

Рассмотрим последовательность $\delta_{x_n} \subset \boldsymbol{C}'[a,b]$ функционалов Дира́ка, т.е. имеем $\delta_{x_n}(f) \doteqdot f(x_n)$ при всех $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. Тогда если $x_n \to x$, то $\delta_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) = \delta_x(f)$ в силу непрерывности функций $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. Поэтому $\delta_{x_n} \to \delta_x$ сходится слабо* в $\boldsymbol{C}'[a,b]$. Однако $\{\delta_{x_n}\}$ не сходится по норме, т.к. $\|\delta_{x_n} - \delta_x\| = 2$ при всех $x_n \neq x$.

Пусть $\boldsymbol{E}$ является *сепарабельным банаховым* пространством. Тогда существует счетная и всюду плотная система элементов $A = \{a_k\}$ пространства $\boldsymbol{E}$. Определим метрику в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}'$ следующей формулой:

$$\rho(f,g) \doteqdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f(a_k) - g(a_k)|}{1 + |f(a_k) - g(a_k)|} \text{ при всех } f,g \in \boldsymbol{E}'.$$

Проверим аксиомы метрики. Симметричность $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ очевидна. Так как функция $\varphi(t) = t/(t+1)$ возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+$ и является полуаддитивной $\varphi(t+s) \leqslant \varphi(t) + \varphi(s)$ при всех $t,s \in \mathbb{R}_+$, то выполняется неравенство треугольника $\rho(f,g) \leqslant \rho(f,h) + \rho(h,g)$. Пусть $\rho(f,g) = 0$, тогда $f(a_k) = g(a_k)$ при всех k. Так как множество A всюду плотно в $\boldsymbol{E}$, то для любого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют $a_{k_n} \in A$, т.ч. $a_{k_n} \to x$. Отсюда в силу непрерывности $f(x) = \lim f(a_{k_n}) = \lim g(a_{k_n}) = g(x)$.

Лемма. *Если $\boldsymbol{E}$ — сепарабельное банахово пространство, то ограниченная последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}'$ тогда и только тогда сходится слабо*, когда она сходится в метрическом пространстве $(\boldsymbol{E}', \rho)$.*

Доказательство. Необходимость. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем m, т.ч. $1/2^m < \varepsilon/2$. Поскольку последовательность сходится $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке $x \in \boldsymbol{E}$, то найдется N, т.ч. $|f_n(a_k) - f(a_k)| < \varepsilon/2$ при всех $n \geqslant N$ и $k = 1, \ldots, m$. Тогда имеем

$$\rho(f_n, f) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon \text{ при всех } n \geqslant N.$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N, т.ч. $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Тогда для любого k имеем $|f_n(a_k) - f(a_k)| < 2^k \varepsilon (1 + |f_n(a_k) - f(a_k)|)$ при всех $n \geqslant N$. Отсюда вытекает неравенство $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leqslant 2^k \varepsilon / (1 - 2^k \varepsilon)$ при всех $0 < \varepsilon < 1/2^k$ и $n \geqslant N$. Следовательно, существует предел $\lim f_n(a_k) = f(a_k)$ в каждой точке $a_k \in A$. Поэтому, применяя критерий слабой* сходимости функционалов, мы получим, что последовательность сходится $f_n(x) \to f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. $\square$

Теорема. *Если $\boldsymbol{E}$ — сепарабельное банахово пространство, то множество $M \subset \boldsymbol{E}'$ слабо* компактно в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}'$ тогда и только тогда, когда оно является ограниченным и слабо* замкнутым.*

Доказательство. Необходимость. Так как функционал Дирака δ_x является слабо* непрерывным, то он достигает своей верхней грани на слабом* компакте $M \subset \boldsymbol{E}'$. Поэтому $\sup_{f \in M} |f(x)| = \sup_{f \in M} |\delta_x(f)| < \infty$. Отсюда множество M слабо* ограничено и значит по свойству 3 оно будет ограниченным в пространстве $\boldsymbol{E}'$.

Докажем слабую* замкнутость M. Пусть $g \notin M$. Поскольку слабая* топология хаусдорфова, то для каждого $f \in M$ существуют непересекающиеся окрестности $O(f) \cap O(g) = \emptyset$. Так как множество M покрывается окрестностями $O(f)$, то существует конечное подпокрытие, т.е. $M \subset \bigcup_{i=1}^n O(f_i)$. Следовательно, взяв пересечение соответствующих окрестностей точки g, мы получим окрестность $O(g)$, которая не пересекается с M. Таким образом, множество M является слабо* замкнутым.

Достаточность. По лемме слабая* сходимость ограниченной последовательности функционалов $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}'$ равносильна ее сходимости в метрическом пространстве $(\boldsymbol{E}', \rho)$. Поэтому всякое слабо* замкнутое множество является замкнутым в метрической топологии, т.е. слабая* топология слабее метрической. Отсюда всякое множество компактное в метрической топологии будет компактным и в слабой* топологии. Для доказательства компактности в метрическом пространстве $(\boldsymbol{E}', \rho)$ ограниченного и слабо* замкнутого множества M достаточно показать, что всякая последовательность $\{f)n\} \subset M$ имеет слабо* сходящуюся подпоследовательность. Поскольку последовательность чисел $\{f_n(a_1)\}$ является ограниченной, то для нее существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. Аналогично, поскольку последовательность чисел $\{f_n^{(1)}(a_2)\}$ является ограниченной, то для нее существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(2)}(a_2)\}$, и т.д.

Таким образом, диагональная последовательность $f_{n_k} = f_k^{(k)}$ сходится в каждой точке множества A. Следовательно, будут выполнены условия критерия слабой* сходимости последовательности функционалов $\{f_{n_k}\}$ в пространстве $\boldsymbol{E}'$. Поэтому эта последовательность сходится $f_{n_k}(x) \to f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. В силу слабой* замкнутости множества M ее предел принадлежит $f \in M$. $\square$

Следствие. *На каждом ограниченном и слабо* замкнутым множестве $M \subset \boldsymbol{E}'$ слабая* топология совпадает с метрической.*

В самом деле, в силу доказательства достаточности этой теоремы множество M компактно в метрической топологии. А так как слабая* топология слабее метрической, то рассматривая тождественное отображение метрического компакта M в хаусдарфово пространство M со слабой* топологией, заключаем, что оно является гомеоморфизмом.

7 АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение. Говорят, что функция $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$, если величина ее вариации на отрезке $[a,b]$

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(F) \doteqdot \sup_\tau \sum_{i=1}^n |F(x_i)-F(x_{i-1})| < \infty$$

конечна, где верхняя грань берется по всем разбиениям $\tau \doteqdot \{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$. Через $\boldsymbol{BV}[a,b]$ обозначается пространство всех функции ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|F\|_{\boldsymbol{BV}} \doteqdot |F(a)|+\mathbf{V}_a^b(F)$.

Имеют место следующие свойства функции ограниченной вариации:

1. *Если $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$, то $\mathbf{V}_a^b(F)=\mathbf{V}_a^c(F)+\mathbf{V}_c^b(F)$ при $a<c<b$.*

Если разбиение $\tau\doteqdot\{a=x_0<\ldots<x_k<\ldots<x_n=b\}$ содержит точку $c=x_k$, то

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i)-F(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^k |F(x_i)-F(x_{i-1})| + \sum_{i=k+1}^n |F(x_i)-F(x_{i-1})| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^c(F)+\mathop{\mathbf{V}}_c^b(F)\,.$$

Если разбиение не имеет точки c, то ее добавим, при этом указанное неравенство сохранится. Отсюда $\mathbf{V}_a^b(F)\leqslant\mathbf{V}_a^c(F)+\mathbf{V}_c^b(F)$. Выберем разбиения $[a,c]$ и $[c,b]$, т.ч.

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^c(F) < \sum_{i=1}^k |F(x_i)-F(x_{i-1})|+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \mathop{\mathbf{V}}_c^b(F) < \sum_{i=k+1}^n |F(x_i)-F(x_{i-1})|+\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

где $\varepsilon>0$ и $c=x_k$. Тогда, складывая эти неравенства, получим $\mathbf{V}_a^c(F)+\mathbf{V}_c^b(F)\leqslant \sum_{i=1}^n |F(x_i)-F(x_{i-1})|+\varepsilon\leqslant\mathbf{V}_a^b(F)+\varepsilon$. Отсюда следует, что $\mathbf{V}_a^c(F)+\mathbf{V}_c^b(F)\leqslant\mathbf{V}_a^b(F)$.

2. *Если $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$, то функция $V(x)\doteqdot\mathbf{V}_a^x(F)$ неубывающая, при этом, если $F(x)$ непрерывна слева, то функция $V(x)$ также непрерывна слева.*

Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго выберем разбиение $a=x_0<\ldots<x_{k-1}=x<x_k=c$, т.ч. $\mathbf{V}_a^c(F)<\sum_{i=1}^k |F(x_i)-F(x_{i-1})|+\varepsilon/2$, при этом мы можем считать, что $|F(c)-F(x)|<\varepsilon/2$ при всех $x\in(c-\delta,c)$, где $\delta>0$ и $\varepsilon>0$. Следовательно, при всех $x\in(c-\delta,c)$ выполняется неравенство

$$V(c)-V(x)\leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^c(F)-\sum_{i=1}^{k-1}|F(x_i)-F(x_{i-1})| < \mathop{\mathbf{V}}_a^c(F)-\sum_{i=1}^{k}|F(x_i)-F(x_{i-1})|+\varepsilon/2<\varepsilon\,.$$

Таким образом, функция $V(x)$ непрерывна слева в точке $c\in(a,b]$.

3. Разложение Жорда́на. *Если функция $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$ имеет ограниченную вариацию, то существуют неубывающие функции α и β, т.ч.*

$$F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x)\,,\quad V(x)=\alpha(x)+\beta(x)\,,\quad \alpha(a)=\beta(a)=0.$$

Эти неубывающие функции α и β вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha(x) \doteqdot \frac{1}{2}\Big\{V(x)+F(x)-F(a)\Big\}, \quad \beta(x) \doteqdot \frac{1}{2}\Big\{V(x)-F(x)+F(a)\Big\}.$$

где $V(x) = \mathbf{V}_a^x(F)$. Так как функция F имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,x]$, то $|F(x)-F(a)| \leqslant \mathbf{V}_a^x(F)$. Поэтому функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ неубывающие. При этом, если $F(x)$ непрерывна слева, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ будут непрерывны слева.

4. Теорема Лебе́га. *Если функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ имеет ограниченную вариацию, то существует производная $F'(x)$ п.в. на отрезке $[a,b]$* (без доказательства).

Интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса по функции $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ называется предел интегральных сумм $R_\tau(f)$ Ри́мана-Сти́лтьеса, когда диаметр разбиения $d_\tau \to 0$, т.е.

$$\int_a^b f\,dF \doteqdot \lim_{d_\tau \to 0} R_\tau(f)\,, \text{ где } R_\tau(f) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(F(x_k)-F(x_{k-1})) \text{ и } \xi_k \in [x_{k-1},x_k]\,.$$

Здесь $\tau \doteqdot \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ разбиение $[a,b]$ и $d_\tau \doteqdot \max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k - x_{k-1})$. Если $F(x) = F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$ разложение Жорда́на, то он равен разности интегралов

$$\int_a^b f\,dF = \int_a^b f\,d\alpha - \int_a^b f\,d\beta\,.$$

Определение. Пусть функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ ограниченной вариации и непрерывна слева, а $F(x) = F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$ есть ее разложение Жорда́на. По неубывающим и непрерывным слева функциям $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определим меры Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β. Разность мер $\varphi_F \doteqdot \mu_\alpha - \mu_\beta$ называется *обобщенной мерой* или *зарядом* Лебе́га–Сти́лтьеса. При этом заряд φ_F определяется на пересечении $\Sigma_F \doteqdot \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ σ-алгебр Σ_α и Σ_β измеримых множеств соответствующих мер μ_α и μ_β.

Интегралом Лебе́га–Сти́лтьеса по заряду φ_F называется разность интегралов

$$\int_a^b f\,d\varphi_F \doteqdot \int_a^b f\,d\mu_\alpha - \int_a^b f\,d\mu_\beta$$

по мерам Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β на $[a,b]$. Функция $f:[a,b] \to \mathbb{F}$ называется *интегрируемой по заряду φ_F*, если она интегрируема по мерам μ_α и μ_β.

Лемма. *Интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса по $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ существует для всякой непрерывной функции $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ и равен интегралу Лебе́га–Сти́лтьеса. Он не зависит от изменения функции $F(x)$ на счетном множестве точек $x \in (a,b)$.*

Доказательство. Суммы Ри́мана–Сти́лтьеса $R_\tau(f,\xi,F)$ совпадают с интегралами Лебе́га–Сти́лтьеса от простых функций $h_\tau(x) = f(\xi_k)$ при $x \in [x_{k-1},x_k)$ и $k = 1,\ldots,n$. Поскольку функция $f(x)$ равномерно непрерывна, то $|f(x)-f(\xi_k)| < \varepsilon$ при всех $x \in [x_{k-1},x_k]$ и $d_\tau < \delta$. Поэтому $h_\tau \rightrightarrows f$ сходится равномерно при $d_\tau \to 0$. По теореме Лебе́га о мажорируемой сходимости существует предел интегралов от простых функций и значит f интегрируема по F в смысле Ри́мана–Сти́лтьеса. $\square$

Теорема (Ри́сса о представлении)**.** *Если $\alpha \in \boldsymbol{C}'[a,b]$ непрерывный линейный функционал на пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$, то существует единственная функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ ограниченной вариации, т.ч. $\alpha(f) = \int_a^b f\,dF$ для всех $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$, где $F(a) = 0$, $F(x)$ непрерывна слева в (a,b) и ее вариация $\mathbf{V}_a^b(F) = \|\alpha\|$.*

Доказательство. Применяя следствие из теоремы Ха́на-Ба́наха, продолжим α на пространство $\boldsymbol{B}[a,b]$. Определим $F(t) \doteqdot \alpha(u_t)$, где $u_t(x) \doteqdot \chi_{[a,t)}(x)$ при $a \leqslant t < b$ и $u_b(x) = 1$. Тогда $F(a) = 0$. Докажем, что функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$. Пусть $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ задает разбиение отрезка $[a,b]$ и $\theta_k \doteqdot \arg\big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big)$, тогда имеем

$$\sum_{k=1}^n |F(t_k) - F(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\alpha(u_{t_k} - u_{t_{k-1}}) = \alpha\Big(\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\chi_{[t_{k-1},t_k)}\Big) \leqslant \|\alpha\|.$$

поскольку $|\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\chi_{[t_{k-1},t_k)}(x)| = 1$. Поэтому $\mathbf{V}_a^b(F) \leqslant \|\alpha\|$ и $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$. Для каждой $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ введём ступенчатые функции $f_\tau(x) \doteqdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(u_{t_k}(x) - u_{t_{k-1}}(x))$, где $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Эти функции $f_\tau \rightrightarrows f$ сходятся равномерно на $[a,b]$, когда диаметр разбиения $d_\tau \to 0$. Отсюда в силу непрерывности $\alpha \in \boldsymbol{B}'[a,b]$ получим

$$\alpha(f) = \lim_{d_\tau \to 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d_\tau \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big) = \int_a^b f\,dF.$$

Поскольку $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ имеет не более счетного числа точек разрыва и интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса не зависит от изменения F на счётном множестве точек (a,b), то F можно считать непрерывной слева в (a,b). Так как при $\|f\|_C \leqslant 1$

$$|\alpha(f)| = \Big|\int_a^b f\,dF\Big| \leqslant \sup_\tau \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\,|F(t_k) - F(t_{k-1})| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^b(F), \text{ то } \|\alpha\| = \mathop{\mathbf{V}}_a^b(F).$$

Докажем единственность. Пусть функция $g_n \in \boldsymbol{C}[a,b]$, т.ч. $g_n(x) = 1$ при $x \in [a, t_n]$, $g_n(x) = 0$ при $x \in [t,b]$, а в интервале (t_n, t) является линейной. Тогда в силу непрерывности F слева $|\alpha(g_n) - F(t_n)| = \Big|\int_{t_n}^t g_n dF\Big| \leqslant \mathbf{V}_{t_n}^t(F) \to 0$ при $t_n \nearrow t$, т.е. имеет место равенство $\lim \alpha(g_n) = \lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t)$ при всех $t \in (a,b]$. □

Следствие. *Сопряжённое пространство $\boldsymbol{C}'[a,b]$ к пространству $\boldsymbol{C}[a,b]$ изометрично подпространству $\boldsymbol{BV}_0[a,b]$ всех функций $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, т.ч. $F(a) = 0$, $F(x)$ непрерывна слева в (a,b) и ее норма равна $\|F\|_{BV_0} \doteqdot \mathbf{V}_a^b(F)$.*

Определение. Пусть (X, Σ, μ) измеримое пространство с полной, σ-аддитивной и σ-конечной мерой μ, заданной на σ-алгебре Σ измеримых множеств в X. Далее через $\boldsymbol{L}(X,\mu)$ обозначается пространство всех функций, интегрируемых по Лебегу на множестве X относительно меры μ.

Функция $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ называется *зарядом* (или обобщенной мерой) на множестве X, если она является σ-аддитивной функцией, заданной на σ-алгебре Σ. Заряд называется *абсолютно непрерывным* на X (обозначается $\varphi \ll \mu$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|\varphi(A)| < \varepsilon$ при всех $A \in \Sigma$ меры $\mu(A) < \delta$.

Теорема (Радóна–Никодúма). *Если заряд является абсолютно непрерывным $\varphi \ll \mu$ на X, то существует функция $f \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ интегрируемая по Лебегу, т.ч. $\varphi(A) = \int_A f\,d\mu$ для всех множеств $A \in \Sigma$* (без доказательства).

Указанная функция $f \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ называется *производной Радóна–Никодúма* и обозначается через $f \doteqdot d\varphi/d\mu$. Докажем, что ее единственность с точностью до эквивалентности. Пусть $f,g \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$, т.ч. $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ при всех $A \in \Sigma$. Положим $A_n \doteqdot \{x \in X \mid f(x) - g(x) > 1/n\}$, тогда мера $\mu(A_n) \leqslant n\int_{A_n}(f-g)\,d\mu = 0$ и значит множество $\{x \in X \mid f(x) - g(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ имеет меру нуль. Аналогично множество $\{x \in X \mid f(x) - g(x) < 0\}$ имеет меру нуль. Поэтому функции $f \sim g$ эквивалентны.

Теорема (критерий абсолютной непрерывности). *Заряд является абсолютно непрерывным $\varphi \ll \mu$ на множестве X тогда и только тогда, когда $\varphi(A) = 0$ для каждого множества $A \in \Sigma$ меры нуль $\mu(A) = 0$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, т.к. если имеет место $\mu(A) = 0 < \delta$ при всех $\delta > 0$, то $|\varphi(A)| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $\varphi(A) = 0$.

Для доказательства достаточности применим теорему Радóна–Никодúма, тогда существует функция $f \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$, т.ч. $\varphi(A) = \int_A f\,d\mu$ при всех $A \in \Sigma$. Поскольку $f = f_+ - f_-$, то достаточно рассмотреть случай, когда функция f неотрицательна. Полагая $E_n \doteqdot \{x \in X \mid f(x) \leqslant n\}$, имеем $E_n \nearrow X$ и в силу свойства непрерывности снизу $\lim \varphi(E_n) = \varphi(X)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует число n, т.ч. $\varphi(X \setminus E_n) < \varepsilon/2$. Отсюда для всех $A \in \Sigma$ с мерой $\mu(A) < \delta \doteqdot \varepsilon/2n$ получим

$$\varphi(A) = \int_A f\,d\mu = \int_{A\cap E_n} f\,d\mu + \int_{A\setminus E_n} f\,d\mu \leqslant n\mu(A) + \varphi(X \setminus E_n) < \varepsilon\,.$$

Таким образом, заряд является абсолютно непрерывным. □

Определение. Функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. для всякой системы непересекающихся интервалов $\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k) \subset [a,b]$ с суммой длин $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n}|F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$. Через $\boldsymbol{AC}[a,b]$ обозначается пространство всех абсолютно непрерывных функций с нормой $\|F\| \doteqdot |F(a)| + \int_a^b |F'(t)|\,dt$.

1. *Если $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$, т.е. при некотором $c > 0$ выполняется условие Лúпшица $|F(x) - F(y)| \leqslant c\,|x-y|$ при всех $x,y \in [a,b]$, то $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$.*

В самом деле, для всякой системы интервалов $\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k) \subset [a,b]$ с суммой длин $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta < \varepsilon/c$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n}|F(b_k) - F(a_k)| < c\delta < \varepsilon$.

2. *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, то $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$. Поэтому производная $F'(x)$ абсолютно непрерывной функции по теореме Лебега существует п.в. на $[a,b]$.*

Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$, как было указано в определении абсолютной непрерывности. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ на интервалы равной дилины $(x_k - x_{k-1}) = \frac{(b-a)}{n} < \delta$, тогда получим $\mathbf{V}_a^b(F) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}_{x_{k-1}}^{x_k}(F) \leqslant n\varepsilon$.

3. *Если $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ разложение Жорда́на функции $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, то функции $\alpha, \beta \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывны.*

Докажем, что функция $V(x) = \mathbf{V}_a^x(F)$ абсолютно непрерывна. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$, как было указано в определении абсолютной непрерывности, т.ч.

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon/2\,, \text{ если } \bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subset [a,b] \text{ и } \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta\,.$$

Поскольку $F \in \boldsymbol{BV}[a_k, b_k]$, то существует разбиение $a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \ldots < x_{k,n_k} = b_k$, т.ч. $\mathbf{V}_{a_k}^{b_k}(F) < \sum_{l=1}^{n_k} |F(x_{k,l}) - F(x_{k,l-1})| + \varepsilon/2^{k+1}$. Тогда выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |V(b_k) - V(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \mathop{\mathbf{V}}_{a_k}^{b_k}(F) < \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n_k} |F(x_{k,l}) - F(x_{k,l-1})| + \varepsilon/2 < \varepsilon\,,$$

Поэтому $V(x)$ абсолютно непрерывна. Поскольку $\alpha(x) \doteqdot \{V(x) + F(x) - F(a)\}/2$ и $\beta(x) \doteqdot \{V(x) - F(x) + F(a)\}/2$, то они также абсолютно непрерывны.

Лемма 1. *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывна, то найдется $f \in \boldsymbol{L}[a,b]$ интегрируемая по Лебегу, т.ч. $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$.*

Доказательство. Так как функция F абсолютно непрерывна, то она имеет ограниченную вариацию. Рассмотрим ее разложение Жорда́на $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$. Так как $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ абсолютно непрерывны, то меры Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β, а также заряд Лебе́га–Сти́лтьеса $\varphi_F \doteqdot \mu_\alpha - \mu_\beta$ будут абсолютно непрерывными относительно меры Лебега. Значит в силу теоремы Радо́на–Никоди́ма существуют функции $f_\alpha, f_\beta, f \doteqdot f_\alpha - f_\beta \in \boldsymbol{L}[a,b]$ интегрируемые по Лебегу, т.ч.

$$F(x) - F(a) = \mu_\alpha([a,x)) - \mu_\beta([a,x)) = \int_a^x f_\alpha(t)\,dt - \int_a^x f_\beta(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Таким образом, получаем равенство $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$. □

Лемма 2. *Если F неубывающая функция на $[a,b]$, то $\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b) - F(a)$. Если, кроме того, $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то это неравенство является равенством.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $F_n(t) \doteqdot n(F(t+1/n) - F(t))$, где $F(t) \doteqdot F(b)$ при $t \in [b, b+1]$. Поскольку по теореме Лебега предел $\lim F_n(t) = F'(t)$ существует п.в. на отрезке $[a,b]$, то по теореме Фату́ выполняется неравенство

$$\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_a^b F_n(t)\,dt = \varliminf_{n\to\infty} \left(n\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)\,dt - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)\,dt \right) \leqslant F(b) - F(a).$$

Если функция $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$ удовлетворяет условию Липшица, то будет выполняться неравенство $|F_n(t)| \leqslant c$ при всех $x \in [a,b]$. Следовательно, в силу теоремы Лебе́га о мажорируемой сходимости имеют место равенства

$$\int_a^b F'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left(n\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)\,dt - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)\,dt \right) = F(b) - F(a)\,.$$

Таким образом, лемма доказана полностью. □

Теорема (формула Ньюто́на–Ле́йбница для абсолютно непрерывных функций**).** *Если* $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, *то* $F'(x) \in \boldsymbol{L}[a,b]$ *и* $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$ *при* $x \in [a,b]$.

Доказательство. Мы можем считать, что $F(a) = 0$. Тогда при помощи леммы 1 найдется функция $f \in \boldsymbol{L}[a,b]$, т.ч. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$. Представляя функцию в виде $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm \doteqdot \max\{\pm f, 0\}$, мы сведем доказательство к случаю, когда функция $f(x) \geqslant 0$ неотрицательна, а функция $F(x)$ неубывающая. Нам осталось доказать, что имеет место равенство $F'(x) = f(x)$ п.в. на $[a,b]$.

Пусть $F_n(x) \doteqdot \int_a^x f_n(t)\,dt$, где $f_n(t) \doteqdot \min\{f(t), n\}$. Тогда $F_n \in \mathrm{Lip}[a,b]$ и по лемме 2 получим $F_n(x) = \int_a^x F_n'(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$. В силу единственности производной Радо́на–Никоди́ма $F_n'(x) = f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$. Тогда $F(x) - F_n(x) = \int_a^x (f - f_n)(t)\,dt$. Так как здесь подынтегральная функция неотрицательна, то функция $F(x) - F_n(x)$ неубывающая и существует неотрицательная производная $F'(x) - F_n'(x) \geqslant 0$ п.в. на отрезке $[a,b]$. Поэтому $F'(x) \geqslant F_n'(x) = f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$.

Переходя к пределу в этом неравенстве получим, что $F'(x) \geqslant f(x)$ п.в. на $[a,b]$. Отсюда $\int_a^b F'(t) - f(t)\,dt \geqslant 0$. С другой стороны, по леммы 2 выполняется обратное неравенство $\int_a^b (F' - f)(t)\,dt \leqslant 0$. Таким образом, этот интеграл $\int_a^b (F' - f)(t)\,dt = 0$ равен нулю. Поскольку подынтегральная функция является неотрицательной п.в. на отрезке $[a,b]$, то функция $F'(x) - f(x) = 0$ равна нулю п.в. на $[a,b]$. □

Пример 1. Рассмотрим пример непрерывной и п.в. дифференцируемой функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, которая не является абсолютно непрерывной, т.е. $f \notin \boldsymbol{AC}[a,b]$.

Как известно, функция Ка́нтора $k : [0,1] \to [0,1]$ является на $[0,1]$ монотонной и непрерывной, а ее производная равна нулю $k'(x) = 0$ п.в. на отрезке $[0,1]$, т.к. на каждом дополнительном интервале к канторову множеству $C \subset [0,1]$ она равна константе, а канторово множество имеет меру нуль $\mu(C) = 0$. Отсюда имеем

$$1 = k(1) - k(0) \neq \int_0^1 k'(t)\,dt = 0\,,$$

т.е. $k \notin \boldsymbol{AC}[0,1]$ не является абсолютно непрерывной. В частности, $k \notin \mathrm{Lip}[0,1]$.

Пример 2. Если функция $f \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ имеет ограниченную вариацию, то ее вариация вычисляется по формуле $\mathbf{V}_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\,dx$.

В самом деле, пусть $\tau = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда, применяя формулу Ньютона-Ле́йбница, получим

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\,dx \right| \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(x)|\,dx = \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

Отсюда $\mathbf{V}_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'(x)|\,dx$. С другой стороны, если $V(x) = \mathbf{V}_a^x(f)$, то по лемме 2

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) = V(b) - V(a) \geqslant \int_a^b V'(x)\,dx \geqslant \int_a^b |f'(x)|\,dx\,.$$

т.к. $\mathbf{V}_x^y(f) \geqslant |f(y) - f(x)|$ и, следовательно, $V'(x) \geqslant |f'(x)|$ при п.в. $x \in [a,b]$.

Замечание. В силу доказанного в этой задаче имеем $\int_a^b V'(x)\,dx = \int_a^b |f'(x)|\,dx$ и $V'(x) \geqslant |f'(x)|$ при п.в. $x \in [a,b]$. Поэтому $V'(x) = |f'(x)|$ при п.в. $x \in [a,b]$, т.к. если интеграл Лебега от неотрицательной функции $\int_a^b V'(x) - |f'(x)|\,dx = 0$ равен нулю, то эта функция равна нулю почти всюду на отрезке $[a,b]$.

Пример 3. Выяснить при каких $\alpha > 0$ функция $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x}$ и $f(0) = 0$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0,1]$, т.е. $f \in \boldsymbol{BV}[0,1]$.

Выберем точки $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$ из отрезка $[0,1]$, т.ч. $\sin\frac{1}{x_n} = (-1)^n$, где $n = 0,1,\ldots$. Тогда вариация функции f оценивается снизу величиной сходящегося ряда

$$\underset{0}{\overset{1}{\mathbf{V}}}(f) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n) - f(x_{n-1})| = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(2n+1)^\alpha} + \frac{1}{(2n-1)^\alpha}\Big) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}.$$

Последний ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$. Поэтому, если функция $f \in \boldsymbol{BV}[0,1]$, то $\alpha > 1$. Обратно, если $\alpha > 1$, то $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$ и

$$\underset{0}{\overset{1}{\mathbf{V}}}(f) \leqslant \int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant \alpha\int_0^1 x^{\alpha-1}dx + \int_0^1 x^{\alpha-2}dx = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} < \infty.$$

Пример 4. Выяснить при каких $\alpha > 0$ функция $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x}$ и $f(0) = 0$ будет абсолютно непрерывной на отрезке $[0,1]$, т.е. $f \in \boldsymbol{AC}[0,1]$.

Допустим, что функция $f \in \boldsymbol{AC}[0,1]$ абсолютно непрерывна. Тогда $f \in \boldsymbol{BV}[0,1]$ имеет ограниченную вариацию, и, следовательно, по предыдущей задаче $\alpha > 1$. Пусть теперь $\alpha > 1$. Так как производная $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$ является интегрируемой по Лебегу, то по формуле Ньютона–Лéйбница $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$ при всех $x \in [0,1]$. Используя теорему об абсолютной непрерывности неопределенного интеграла Лебега, заключаем, что $f(x)$ абсолютно непрерывна.

Пример 5. Пусть функции $f \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ и $g \in \boldsymbol{AC}[c,d]$ абсолютно непрерывны, функция $g(x)$ строго возрастает на отрезке $[c,d]$ и $[g(c),g(d)] \subset [a,b]$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[c,d]$.

По определению абсолютной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$, т.ч. для всякой системы непересекающихся интервалов $\bigsqcup_{k=1}^n (a_k,b_k) \subset [g(c),g(d)]$ с суммой длин $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \eta$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Кроме того, существует такое $\delta > 0$, что для всякой системы непересекающихся интервалов $\bigsqcup_{k=1}^n (c_k,d_k) \subset [c,d]$ с суммой длин $\sum_{k=1}^n (d_k - c_k) < \delta$ будет выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n (g(d_k) - g(c_k)) < \eta$. Следовательно, получаем

$$\sum_{k=1}^n |F(d_k) - F(c_k)| < \varepsilon, \quad \text{если} \ \bigsqcup_{k=1}^n (c_k,d_k) \subset [c,d] \ \text{и} \ \sum_{k=1}^n (d_k - c_k) < \delta.$$

Таким образом, функция $F \in \boldsymbol{AC}[c,d]$ абсолютно непрерывна. Заметим еще, что если исключить условие строгой монотонности функции $g(x)$, то утверждение этой задачи не верно.

8 ПРОСТРАНСТВА $L_p(X,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Пусть (X,Σ,μ) — измеримое пространство с полной и σ-конечной мерой μ, а $\mathbb{F}$ обозначает поле действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел.

Определение. *Комплекснозначная функция* $f : X \to \mathbb{C}$ называется *измеримой*, если $f = u + \boldsymbol{i}v$, где $u \doteqdot \Re f$ и $v \doteqdot \Im f$ измеримые функции, и *интегрируемой по Лебегу*, т.е. $f \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$, если u и v интегрируемы по Лебегу, при этом интеграл

$$\int_X f\,d\mu \doteqdot \int_X u\,d\mu + \boldsymbol{i}\int_X v\,d\mu\,.$$

1. *Если $f,g \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, то $\lambda f, f+g \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ и выполняются равенства*

$$\int_X (\lambda f)\,d\mu = \lambda\int_X f\,d\mu \quad \text{и} \quad \int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu\,.$$

Пусть $\lambda = a + \boldsymbol{i}b$, $f = u + \boldsymbol{i}v$, $g = p + \boldsymbol{i}q$, тогда имеем $\lambda f = (au - bv) + \boldsymbol{i}(av + bu)$ и $f + g = (u+p) + \boldsymbol{i}(v+q)$. Отсюда по определению интеграла получим

$$\int_X (\lambda f)\,d\mu = \Big(a\int_X u\,d\mu - b\int_X v\,d\mu\Big) + \boldsymbol{i}\Big(a\int_X v\,d\mu + b\int_X u\,d\mu\Big) = \lambda\int_X f\,d\mu\,.$$

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X (u+p)\,d\mu + \boldsymbol{i}\int_X (v+q)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu\,.$$

Таким образом, $\boldsymbol{L}(X,\mu)$ является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$.

2. *Если $f \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$, то модуль $|f| \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ и $|\int_X f\,d\mu| \leqslant \int_X |f|\,d\mu$.*

Так как $|f| \leqslant |u| + |v|$, то $|f| \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$. Если $\int_X f\,d\mu = \boldsymbol{e}^{i\theta}|\int_X f\,d\mu|$, то получаем

$$\Big|\int_X f\,d\mu\Big| = \Re\big(\boldsymbol{e}^{-i\theta}\int_X f\,d\mu\big) = \int_X \Re\big(\boldsymbol{e}^{-i\theta} f\big)\,d\mu \leqslant \int_X |f|\,d\mu\,.$$

3. *Если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$, то $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ и $\lambda f_1 \sim \lambda g_1$. При этом если $f \sim g$ и $f \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$, то $g \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ и интегралы равны.*

По условию $f_1 = g_1$ на множестве $X \setminus A_1$ и $f_2 = g_2$ на множестве $X \setminus A_2$, где $\mu(A_1) = \mu(A_2) = 0$. Тогда $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ на множестве $X \setminus (A_1 \cup A_2)$, где $\mu(A_1 \cup A_2) = 0$, и $\lambda f_1 = \lambda g_1$ на множестве $X \setminus A_1$, где $\mu(A_1) = 0$. Следовательно, $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ и $\lambda f_1 \sim \lambda g_1$ эквивалентны. Таким образом, пространство классов эквивалентности измеримых функций является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$. Последнее утверждение вытекает из свойства интеграла Лебега.

Определение. Множество $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ всех классов эквивалентности ограниченных измеримых функций $f : X \to \mathbb{F}$ с нормой $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \doteqdot \inf_{\mu(A)=0}\sup_{x \in X\setminus A}|f(x)|$ называется пространством *существенно ограниченных функций*. Таким образом, $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ является факторпространством пространства $\boldsymbol{B}(X,\Sigma)$ всех ограниченных измеримых функций по подпространству функций, эквивалентных нулю. Далее мы будем обращаться с классами эквивалентности как с обычными функциями.

Норма $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ называется *существенной верхней гранью модуля функции* $|f|$. Покажем, что указанная нижняя грань достигается на некотором множестве меры нуль. Выберем множества $A_n \subset X$, т.ч. $\mu(A_n) = 0$ и $|f(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} + 1/n$ при всех $x \in X \setminus A_n$. Тогда их объединение $N_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ имеет меру нуль $\mu(N_f) = 0$ и значит существенная верхняя грань равна верхней грани $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_f} |f(x)|$.

Докажем свойства нормы. Если $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = 0$, то по доказанному выше имеем $f \sim 0$. Однородность нормы $\|\lambda f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = |\lambda| \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ очевидна. Выберем множества N_f и N_g меры нуль $\mu(N_f) = \mu(N_g) = 0$, т.ч. $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_f} |f(x)|$ и $\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_g} |g(x)|$. Полагая $N = N_f \cup N_g$, получим $\mu(N) = 0$ и выполняется неравенство

$$\|f+g\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \leqslant \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| + \sup_{x \in X \setminus N} |g(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} + \|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}.$$

Теорема. *Пространство $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ является ба́наховым пространством.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ последовательность Коши в пространстве $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ и множество $N = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} N_{(f_n - f_m)}$ имеет меру нуль $\mu(N) = 0$. Так как выполняются равенства $\|f_n - f_m\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x \in X \setminus N} |f_n(x) - f_m(x)|$, то $\{f_n\}$ является последовательностью Коши в пространстве $\boldsymbol{B}(X \setminus N)$ ограниченных функций на множестве $X \setminus N$ и в силу его полноты имеет предел $f_n \rightrightarrows f \in \boldsymbol{B}(X \setminus N)$. Полагая функцию $f(x) = 0$ при всех $x \in N$, мы получим ограниченную измеримую функцию $f \in \boldsymbol{B}(X)$, при этом из равномерной сходимости на $X \setminus N$ следует, что $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = 0$. □

Определение. *Пространством $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ суммируемых функций степени $p \geqslant 1$* называется множество классов эквивалентности измеримых функций $f : X \to \mathbb{F}$, т.ч. $|f|^p \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$ и норма определяются по формуле $\|f\|_{\boldsymbol{L}_p} \doteqdot \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Пространство $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ является факторпространством пространства измеримых функций, т.ч. $|f|^p \in \boldsymbol{L}(X,\mu)$, по подпространству функций, эквивалентных нулю. Мы будем обращаться с классами эквивалентности как с обычными функциями. Если функции $f, g \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, то $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$ и значит $f+g \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Поэтому $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ является линейным пространством. Докажем свойства нормы.

Неравенство Гёльдера. Если $f, g : X \to \mathbb{F}$ являются измеримыми функциями, то

$$\int_X |fg|\, d\mu \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p} \|g\|_{Lq} \quad \text{при } 1 \leqslant p,q \leqslant \infty \text{ и } 1/p + 1/q = 1.$$

Пусть $1 < p,q < \infty$. Докажем неравенство Ю́нга: $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$ при $a,b \in \mathbb{R}_+$. Функции $y = x^{p-1}$ и $x = y^{q-1}$ взаимно обратные на полуоси $\mathbb{R}_+$, т.к. $1/(p-1) = q-1$. Поэтому площадь прямоугольника ab оценивается суммой интегралов

$$ab \leqslant \int_0^a x^{p-1}\, dx + \int_0^b y^{q-1}\, dy = a^p/p + b^q/q.$$

Знак равенства имеет место только тогда, когда $a^{p-1} = b$, т.е. $a^p = b^q$.

Пусть $A = \int_X |f|^p \, d\mu$ и $B = \int_X |g|^q \, d\mu$. Если один из этих интегралов равен нулю или бесконечности, то утверждение верно. Иначе, полагая в неравенстве Юнга $a \doteqdot |f|/A^{1/p}$ и $b \doteqdot |g|/B^{1/q}$, а затем интегрируя обе его части, получим

$$\int_X ab \, d\mu \leqslant \int_X |f|^p d\mu / pA + \int_X |g|^q d\mu / qB = 1/p + 1/q = 1\,.$$

Отсюда получаем неравенство Гёльдера. Знак равенства в неравенстве Гёльдера имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство $|f|^p/A = |g|^q/B$ п.в. на множестве X. При $p = 1$ и $q = \infty$ неравенство Гёльдера очевидно.

Неравенство Минко́вского. Если $f, g : X \to \mathbb{F}$ измеримые функции, то

$$\|f+g\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g\|_{\boldsymbol{L}_p} \quad \text{при } 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

При этом в случае $1 < p < \infty$ равенство будет выполняться тогда и только тогда, когда $f = \lambda\, g$ п.в. на X, где $\lambda \geqslant 0$. В случае $p = 1$ неравенство очевидно, а случае $p = \infty$ оно было доказано выше. Рассмотрим случай $1 < p < \infty$. Введем обозначения $A = \int_X |f|^p \, d\mu$, $B = \int_X |g|^p \, d\mu$, $C = \int_X |f+g|^p \, d\mu$. Применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что $(p-1)q = p$, имеем неравенство

$$C = \int_X |f+g|^p \, d\mu \leqslant \int_X |f|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu \leqslant A^{1/p} C^{1/q} + B^{1/p} C^{1/q}\,.$$

Поделив на множитель $C^{1/q}$, получим неравенство Минко́вского. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда равенства $|f+g| = |f| + |g|$ и $|f|^p/A = |g|^p/B$ выполняются п.в. на множестве X. Тогда из первого равенства следует, что $f = hg$ п.в. на X, где $h \geqslant 0$ п.в. на X. Из второго равенства следует, что $h^p = A/B$ п.в. на множестве $X(g \neq 0)$. Отсюда $f = \lambda\, g$ п.в. на X, где $\lambda = (A/B)^{1/p} \geqslant 0$. Следовательно, пространство $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ является строго нормированным при $1 < p < \infty$.

Обобщенное неравенство Минко́вского. Пусть (X_1, Σ_1, μ_1) и (X_2, Σ_2, μ_2) два измеримых пространства с полными и σ-конечными мерами μ_1 и μ_2. Если функция $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{F}$ измерима на произведении этих измеримых пространств, то

$$\Big(\int_{X_1} \Big(\int_{X_2} |f_{x_1}| d\mu_2\Big)^p d\mu_1\Big)^{1/p} \leqslant \int_{X_2} \Big(\int_{X_1} |f_{x_2}|^p d\mu_1\Big)^{1/p} d\mu_2 \quad \text{при } 1 < p < \infty.$$

Здесь функции $f_{x_1}(x_2) \doteqdot f(x_1, x_2)$ и $f_{x_2}(x_1) \doteqdot f(x_1, x_2)$ обозначают сечения функции $f(x_1, x_2)$ по переменным x_1 и x_2 соответственно. Поскольку по теореме Фуби́ни функция $g(x_1) \doteqdot \int_{X_2} |f_{x_1}| \, d\mu_2$ определена п.в. и измерима на X_1, то, изменяя порядок интегрирования и применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\int_{X_1} g^p d\mu_1 = \int_{X_2} \Big(\int_{X_1} |f_{x_2}|\, g^{p-1} d\mu_1\Big) d\mu_2 \leqslant \int_{X_2} \Big(\int_{X_1} |f_{x_2}|^p d\mu_1\Big)^{1/p} d\mu_2 \, \Big(\int_{X_1} g^p d\mu_1\Big)^{1/q}.$$

где $(p-1)q = p$. Осталось поделить обе части неравенства на последнюю скобку и мы получим обобщенное неравенство Минко́вского.

Теорема. $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$ *является банаховым пространством.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ последовательность Коши́ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Выберем $n_1 < n_2 < \ldots$, т.ч. $\|f_i - f_j\|_{\boldsymbol{L}_p} < 2^{-k}$ при всех $i,j \geqslant n_k$, и положим

$$g(x) \doteqdot |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\,.$$

Поскольку частичные суммы $g_n(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ монотонно сходятся $g_n(x) \nearrow g(x)$ и в силу неравенства Минко́вского $\|g_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f_{n_1}\|_{\boldsymbol{L}_p} + 1$, то по теореме о монотонной сходимости $g \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Поэтому функция $g(x)$ является п.в. конечной на X и следующий ряд сходится абсолютно

$$f(x) \doteqdot f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \text{ п.в. на } X\,.$$

При этом из неравенства $|f(x)| \leqslant g(x)$ вытекает, что $f \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Поскольку

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| \text{ п.в. на } X\,,$$

то по теореме о монотонной сходимости $\|f - f_{n_k}\|_{\boldsymbol{L}_p} < 2/2^k$, т.е. $\lim \|f - f_{n_k}\|_{\boldsymbol{L}_p} = 0$. Поскольку последовательность Коши $\{f_n\}$ содержит сходящуюся к f по норме $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, то при всех $n \geqslant n_k$

$$\|f - f_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_n\| < 3/2^k\,.$$

Следовательно, последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. □

Следствие. *Если* $\{f_n\} \subset \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ *при* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *последовательность Коши, то найдется подпоследовательность* $\{f_{n_k}\}$*, т.ч.* $f_{n_k} \to f$ *сходится п.в. на* X.

Это утверждение вытекает из доказательства указанных выше теорем.

Лемма. *Множество* $H(X,\mu)$ *простых интегрируемых функций* $h : X \to \mathbb{F}$ *всюду плотно в пространстве* $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ *при всех* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Доказательство. Представим функцию $f \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ в виде линейной комбинации $f = u + \boldsymbol{i}v = (u_+ - u_-) + \boldsymbol{i}(v_+ - v_-)$, где $u_\pm = \max\{\pm u, 0\}$ и $v_\pm = \max\{\pm v, 0\}$ являются неотрицательными и измеримыми. Тогда существуют простые неотрицательные функции $g_n^\pm \in H(X,\mu)$ и $h_n^\pm \in H(X,\mu)$, т.ч. $g_n^\pm \nearrow u_\pm$ и $h_n^\pm \nearrow v_\pm$ будут сходиться всюду на X. Если функция f ограничена, то ограничены также функции $u_\pm$ и $v_\pm$ и, следовательно, сходимость будет равномерной. Пусть $f_n \doteqdot (g_n^+ - g_n^-) + \boldsymbol{i}(h_n^+ - h_n^-)$ простые измеримые функции, тогда, применяя неравенство Минковского и теорему о монотонной сходимости, мы получим, что

$$\|f - f_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|u_+ - g_n^+\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|u_- - g_n^-\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|v_+ - h_n^+\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|v_- - h_n^-\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0\,.$$

т.е. множество $H(X,\mu)$ простых измеримых функций всюду плотно в $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. □

Теорема (Штейнга́уза о представлении)**.** *Для каждого непрерывного линейного функционала $\alpha \in \boldsymbol{L}_1'(X,\mu)$ существует единственная функция $g \in \boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$, для которой $\alpha(f) = \int_X fg\,d\mu$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_1(X,\mu)$ и норма $\|\alpha\| = \|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$.*

Доказательство. Так как функционал α является непрерывным, то он ограничен. Поэтому существует $c > 0$, т.ч. $|\alpha(f)| \leqslant c$ для всех функций $\|f\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant 1$, где $c \doteqdot \|\alpha\|$. Рассмотрим функцию $\varphi(A) \doteqdot \alpha(\chi_A)$, определенную на классе измеримых множеств $A \in \Sigma$ конечной меры $\mu(A) < \infty$. В силу линейности функционала α получим

$$\varphi\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \alpha\Big(\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \alpha\big(\chi_{A_k}\big) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k),$$

т.е. функция $\varphi(A)$ является конечно-аддитивной. Если $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in \Sigma_X$ множества конечной меры, то из счетной аддитивности меры μ следует, что ряд $\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$ сходится в $\boldsymbol{L}_1(X,\mu)$. Поэтому в силу непрерывности функционала α имеем $\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$, т.е. функция $\varphi(A)$ является σ-аддитивной. Поскольку $|\varphi(A)| \leqslant c\,\mu(A)$, то функция $\varphi(A)$ абсолютно непрерывна, т.е. $\varphi \ll \mu$.

Пусть $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ разбиение на множества конечной меры $\mu(X_n) < \infty$. Так как на X_n функция $\varphi(A)$ абсолютно непрерывна, то по теореме Радона-Никодима она имеет представление интегралом Лебега $\varphi(A) = \int_A g_n\,d\mu$ на классе измеримых множеств $A \subset X_n$, где $g_n \in \boldsymbol{L}_1(X_n,\mu)$ и $g_n = 0$ вне X_n. Полагая $g \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n$, мы получим представление $\varphi(A) = \int_A g\,d\mu$ для всех множеств $A \in \Sigma$ конечной меры. Отсюда функционал $\alpha(h) = \int_X hg\,d\mu$ для всех простых функций $h \in H(X,\mu)$.

Если множество $A_n = \{x \in X_n \,|\, |g(x)| > a\}$ имеет положительную меру $\mu(A_n) > 0$, то имеет место неравенство $a < \int_X h_n g\,d\mu = \alpha(h_n) \leqslant c$, где $h_n(x) \doteqdot e^{-i\arg g}\chi_{A_n}(x)/\mu(A_n)$. Таким образом, если $a \geqslant c$, то множество A_n имеет меру нуль $\mu(A_n) = 0$ и значит норма $\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \leqslant c$, т.е. функция $g \in \boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_1(X,\mu)$. Рассмотрим теперь простые функции $f_n \in H(X,\mu)$, которые были указаны в лемме. Поскольку $f_n \to f$ сходится по норме $\boldsymbol{L}_1(X,\mu)$, то, используя непрерывность функционала, а затем применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получим

$$\alpha(f) = \lim_{n\to\infty} \alpha(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n g\,d\mu = \int_X fg\,d\mu$$

представление для всех функций $f \in \boldsymbol{L}_1(X,\mu)$. Поэтому норма $\|\alpha\| = \|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. □

Теорема (Ри́сса о представлении)**.** *Для каждого непрерывного линейного функционала $\alpha \in \boldsymbol{L}_p'(X,\mu)$ существует единственная функция $g \in \boldsymbol{L}_q(X,\mu)$, для которой $\alpha(f) = \int_X fg\,d\mu$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ и норма $\|\alpha\| = \|g\|_{\boldsymbol{L}_q}$, где $1 \leqslant p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$* (без доказательства).

В случае $p = 1$ эта теорема Штейнга́уза о представлении была доказана выше. В случае $1 < p < \infty$ доказательство во многом повторяет указанные рассуждения. Таким образом, эти теоремы Ри́сса и Штейнга́уза устанавливают изометрический изоморфизм сопряжённого пространства $\boldsymbol{L}_p^*(X,\mu)$ на пространство $\boldsymbol{L}_q(X,\mu)$ при всех $1 \leqslant p < \infty$, где $1/p + 1/q = 1$ и $1 < q \leqslant \infty$.

Пример 1. В силу неравенства Гёльдера $L_q[a,b] \subset L_p[a,b]$ при $1 \leqslant p < q < \infty$

$$\|f\|_{L_p} = \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_a^b dx\Big)^{1/pr}\Big(\int_a^b |f(x)|^q dx\Big)^{1/q} = (b-a)^{1/p-1/q}\|f\|_{L_q},$$

при всех $f \in L_q[a,b]$, где $1/r + p/q = 1$ и $1/pr = 1/p - 1/q$.

Пример 2. Выяснить сильную, слабую и слабую* сходимость последовательности функций $f_n(x) = x^n$ в пространстве $C[0,1]$.

Если эта последовательность сходится по норме $\|f\|_C \doteqdot \max_{x\in[0,1]}|f(x)|$, то она сходится равномерно на отрезке $[0,1]$, а если сходится слабо, то она сходится в каждой точке. Рассмотрим линейные функционалы Дирака $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$, где $x_0 \in [0,1]$, на пространстве $C[0,1]$. Так как $\|\delta_{x_0}\| = 1$, то $\delta_{x_0} \in C^*[0,1]$. При этом предел $\lim\delta_{x_0}(f_n) = 1$, если $x_0 = 1$, и $\lim\delta_{x_0}(f_n) = 0$, если $x_0 \in [0,1)$. Поэтому эта последовательность сходится поточечно к разрывной функции и, следовательно, не сходится сильно и слабо в пространстве $C[0,1]$. Слабый* предел в пространстве $C[0,1]$ не определен, т.к. пространство $C[0,1]$ не является сопряженным пространством ни к какому нормированному пространству.

Пример 3. Выяснить сильную, слабую и слабую* сходимость последовательности функций $f_n(x) = x^n$ в пространстве $L_p[0,1]$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Так как нормы функций в пространстве $L_p[0,1]$ этой последовательности

$$\|x^n\|_{L_p} = \Big(\int_0^1 x^{np}dx\Big)^{1/p} = \Big(\frac{x^{np+1}}{np+1}\Big|_0^1\Big)^{1/p} = \frac{1}{(np+1)^{1/p}} \to 0,$$

стремятся к нулю, то эта последовательность сходится сильно к нулю. Поскольку из сильной сходимости следует слабая и слабая* сходимости, то получаем, что она сходится слабо и слабо* к нулю в пространстве $L_p[0,1]$.

Пример 4. Выяснить сильную, слабую и слабую* сходимость последовательности функций $f_n(x) = \sin nx$ в пространстве $L_p[0,\pi]$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Всякий линейный функционал $\alpha \in L_p'[0,\pi]$ представляется интегралом Лебега $\alpha(f) = \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$, где $f \in L_p[0,\pi]$, $g \in L_q[0,\pi]$ и $1/p + 1/q = 1$. В силу леммы Римана–Лебега предел интегралов $\lim\alpha(\sin nx) = \lim\int_0^\pi \sin nx\, g(x)\,dx = 0$ равен нулю для любой функции $g \in L_q[0,\pi]$. Поэтому слабый предел этой последовательности в пространстве $L_p[0,\pi]$ равен нулю при всех $1 \leqslant p < \infty$. Аналогичным образом, слабый* предел последовательности в пространстве $L_p[0,\pi]$ равен нулю при всех $1 < p \leqslant \infty$. В случае $p = 1$ слабый* предел в пространстве $L_1[0,\pi]$ не определен, т.к. пространство $L_1[0,\pi]$ не является сопряженным пространством ни к какому нормированному пространству. Так как нормы функций в пространстве $L_p[0,\pi]$

$$\|\sin nx\|_{L_p} = \Big(\int_0^\pi |\sin nx|^p dx\Big)^{1/p} = \Big(\frac{1}{n}\int_0^{\pi n} |\sin x|^p dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_0^\pi |\sin x|^p dx\Big)^{1/p} = c,$$

где $c \neq 0$ не зависит от n, то эта последовательность не сходится сильно. В самом деле, из того, что она сходится слабо к нулю в пространстве $L_p[0,\pi]$, следует, что ее сильным пределом в этом пространстве может быть только нуль.

9 ГИ́ЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение. *Скалярным произведением* в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ называется функция $q : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ двух переменных $x, y \in \boldsymbol{E}$, обозначаемая через $\langle x, y \rangle \doteqdot q(x, y)$ и обладающая следующими свойствами:

a) $q(x,y) = \overline{q(y,x)}$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$;

b) $q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 q(x_1, y) + \lambda_2 q(x_2, y)$ при всех $x_1, x_2, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$;

c) $q(x,x) \geqslant 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $q(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пространство $\boldsymbol{E}$, в котором определено скалярное произведение $\langle x, y \rangle \doteqdot q(x, y)$, называется *евклидовым пространством* $(\boldsymbol{E}, q)$. Функция $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x, x \rangle}$ называется *евклидовой нормой*, а $\rho(x,y) \doteqdot \|x - y\|$ называется *евклидовой метрикой*.

1. Неравенство Коши́–Буняко́вского: $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ *при всех* $x, y \in \boldsymbol{E}$.

Пусть $z = tx + \lambda y$, где $\lambda \doteqdot \langle x, y \rangle / |\langle x, y \rangle|$ и $\langle x, y \rangle \neq 0$. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\langle z, z \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + t\left(\overline{\lambda}\langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle\right) + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle = t^2 \|x\|^2 + 2t|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \geqslant 0\,.$$

Так как дискриминант этого трехчлена не положительный, то $|\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$. При этом равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $z = tx + \lambda y = 0$ при некотором $t \in \mathbb{R}$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимы.

2. Неравенство треугольника: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *при всех* $x, y \in \boldsymbol{E}$.

Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, получим неравенство треугольника

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\Re\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Равенство выполняется в том и только в том случае, когда $\Re\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\|$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимыми $x = \lambda y$, где $\Re\lambda = |\lambda| \geqslant 0$, и значит $\lambda \geqslant 0$. Поэтому евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным.

3. Равенство параллелограмма: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *при* $x, y \in \boldsymbol{E}$.

Складывая два равенства $\langle x \pm y, x \pm y \rangle = \langle x, x \rangle \pm 2\Re\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$, получим равенство параллелограмма $\langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle$.

Теорема (Дж. фон Не́ймана). *Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае является евклидовым пространством, когда в нем выполняется равенство параллелограмма.*

Доказательство достаточности приведено в учебнике Колмого́рова и Фомина́. Например, пространство $\boldsymbol{B}(X)$ ограниченных функций не является евклидовым пространством. В самом деле, если $f(x) = \chi_A(x)$ и $g(x) = \chi_B(x)$, где $A \cap B = \emptyset$, то не выполняется равенство параллелограмма, т.к. $\|f\| = \|g\| = \|f+g\| = \|f-g\| = 1$, за исключением тривиального случая, когда X состоит из одной точки.

4. Непрерывность скалярного произведения (как функции двух переменных).

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ и $c > 0$, т.ч. $\|x_0\| < c$, $\|y_0\| < c$, $\delta^2 + 2c\delta < \varepsilon$. Тогда, если $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - y_0\| < \delta$, то по неравенству Коши́–Буняко́вского

$$|\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \leqslant |\langle x-x_0, y-y_0\rangle| + |\langle x-x_0, y_0\rangle| + |\langle x_0, y-y_0\rangle| \leqslant \\ \leqslant \|x-x_0\|\,\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\,\|y_0\| + \|x_0\|\,\|y-y_0\| < \varepsilon\,.$$

5. Неравенство Бе́ппо Ле́ви. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ линейное подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{E}$, то для всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $y,z \in L$ выполняется неравенство*

$$\|y-z\| \leqslant \sqrt{\|x-y\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x-z\|^2 - d^2}, \quad \textit{где } d = \rho(x,L)\,.$$

Пусть $u \doteqdot (ty+z)/(t+1) \in L$, тогда $\|x-u\| \geqslant d$ и выполняется неравенство

$$\|t(x-y) + (x-z)\|^2 = \|(t+1)(x-u)\|^2 \geqslant (t+1)^2 d^2 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Раскрывая левую норму и перенося правую часть этого неравенства влево, получим

$$t^2(\|x-y\|^2 - d^2) + 2t(\Re\langle x-y, x-z\rangle - d^2) + (\|x-z\|^2 - d^2) \geqslant 0 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Так как дискриминант этого трехчлена не положительный, то имеем неравенство $\Re\langle x-y, x-z\rangle - d^2 \leqslant \sqrt{(\|x-y\|^2 - d^2)(\|x-z\|^2 - d^2)}$, из которого следует, что

$$\|y-z\|^2 = \|(x-y) - (x-z)\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\Re\langle x-y, x-z\rangle + \|x-z\|^2 = \\ = \big(\|x-y\|^2 - d^2\big) - 2\big(\Re\langle x-y, x-z\rangle - d^2\big) + \big(\|x-z\|^2 - d^2\big) \leqslant \\ \leqslant \big(\|x-y\|^2 - d^2\big) + 2\sqrt{\big(\|x-y\|^2 - d^2\big)\big(\|x-z\|^2 - d^2\big)} + \big(\|x-z\|^2 - d^2\big).$$

Замечая, что это полный квадрат, получим неравенство Бе́ппо Ле́ви.

Определение. Элементы $x, y \in \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначаются через $x \perp y$, если их скалярное произведение $\langle x,y\rangle = 0$. Элемент $x \in \boldsymbol{E}$ называется *ортогональным подпространству* $L \subset \boldsymbol{E}$ и обозначается $x \perp L$, если $\langle x,y\rangle = 0$ при всех $y \in L$. Два подпространства $L, M \subset \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначаются через $L \perp M$, если $\langle x,y\rangle = 0$ для всех $x \in L$ и $y \in M$.

Лемма. *Элемент $y \in L$ является наилучшим приближением элемента $x \in \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $x - y \perp L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle x-y, z\rangle \neq 0$ при некотором $z \in L\setminus 0$. Тогда, пологая $u \doteqdot y + \lambda z \in L$ и подставляя $\lambda \doteqdot \langle x-y, z\rangle / \langle z,z\rangle$, получим равенство

$$\|x-u\|^2 = \|(x-y) - \lambda z\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\Re\overline{\lambda}\langle x-y, z\rangle + |\lambda|^2\langle z,z\rangle = \|x-y\|^2 - |\lambda|^2\|z\|^2.$$

Откуда следует неравенство $\|x-u\| < \|x-y\| = \rho(x,L)$, что невозможно.

Достаточность. Пусть $\langle x-y, z\rangle = 0$ при всех $z \in L$. Тогда при всех $z \in L$ имеем

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x-z\rangle \leqslant \|x-y\|\,\|x-z\|.$$

Поэтому $\|x-y\| \leqslant \|x-z\|$ при всех $z \in L$, т.е. $\rho(x,L) = \|x-y\|$. $\square$

Теорема. *Пусть задана* $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ *линейно независимая система элементов евклидова пространства* $\boldsymbol{E}$ *и* $L \doteqdot \operatorname{sp}\{x_k\}_{k=1}^n$ *линейная оболочка. Тогда величина наилучшего приближения элемента* $x \in \boldsymbol{E}$ *подпространство* L *вычисляется по следующей формуле:*

$$\rho(x,L) = \sqrt{\frac{D(x_1,\ldots,x_n,x)}{D(x_1,\ldots,x_n)}}, \quad \text{где } D(x_1,\ldots,x_n) \doteqdot \det\begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1,x_n\rangle & \ldots & \langle x_n,x_n\rangle \end{pmatrix}$$

обозначает определитель Гра́ма.

Доказательство. Поскольку евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ строго нормировано, то по доказанному ранее элемент наилучшего приближения существует и единственный. Пусть $d^2 \doteqdot \rho(x,L)^2 = \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle$, где $y \in L$. Поскольку $\langle x-y, y\rangle = 0$, то $\langle y,x\rangle = \langle x,x\rangle - d^2$. Кроме того, из равенств $\langle x-y, x_k\rangle = 0$ следует, что $\langle y,x_k\rangle = \langle x,x_k\rangle$ при $k = 1,\ldots,n$. Подставляя в эти равенства выражение $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, мы получим систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\begin{cases} \lambda_1\langle x_1,x_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x_1\rangle &= \langle x,x_1\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots \\ \lambda_1\langle x_1,x_n\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x_n\rangle &= \langle x,x_n\rangle \\ \lambda_1\langle x_1,x\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x\rangle &= \langle x,x\rangle - d^2. \end{cases}$$

Так как эта система уравнений имеет решение, то по теореме Кро́некера–Капе́лли ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов. Следовательно, определитель расширенной матрицы равен нулю. Записывая последний столбец определителя расширенной матрицы в виде суммы двух столбцов, в результате мы получим $D(x_1,\ldots,x_n,x) - d^2 D(x_1,\ldots,x_n) = 0$, что требовалось доказать. □

Определение. *Ги́льбертовым пространством* $\boldsymbol{H}$ называется полное евклидово пространство относительно евклидовой метрики.

Пример 1. Примером ги́льбертова пространства является пространство $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$, в котором скалярное произведение и норма определяются по следующим формулам:

$$\langle f,g\rangle \doteqdot \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu\,, \quad \|f\|_{\boldsymbol{L}_2} \doteqdot \Big(\int_X |f(x)|^2 d\mu\Big)^{1/2}, \quad \text{где } f,g \in \boldsymbol{L}_2(X,\mu).$$

При $p \neq 2$ пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ не являются ги́льбертовыми, кроме тривиального случая, когда размерность пространства равна единице, т.к. для $f(x) = \chi_A(x) \neq 0$ и $g(x) = \chi_B(x) \neq 0$, где $A \cap B = \emptyset$, не выполняется равенство параллелограмма.

Частным случаем пространства $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$, когда множество X является счетным и мера каждой его точки равна единице, является пространство $\boldsymbol{\ell}_2$, состоящее из последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in \mathbb{F}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$. Скалярное произведение и норма в $\boldsymbol{\ell}_2$ определяются по следующим формулам:

$$\langle x,y\rangle \doteqdot \sum_{n=1}^\infty x_n\overline{y_n} \quad \|x\|_{\ell_2} \doteqdot \Big(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2\Big)^{1/2} \quad \text{где } x = \{x_n\}_{n=1}^\infty,\ y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in \boldsymbol{\ell}_2.$$

Теорема (о наилучшем приближении). *Если $L \subset \boldsymbol{H}$ замкнутое подпространство в ги́льбертова пространства $\boldsymbol{H}$, то для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y \in L$ наилучшего приближения подпространством L.*

Доказательство. Пусть $d = \rho(x, L) \doteqdot \inf_{y \in L} \|x - y\|$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $d^2 \leqslant \|x - y_n\|^2 < 1/n^2 + d^2$. По неравенству Бе́ппо Ле́ви $\|y_n - y_m\| < 1/n + 1/m$, т.е. $\{y_n\}$ является последовательностью Коши́ в L. В силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ и замкнутости подпространства L получим, что $\lim y_n = y \in L$. Переходя к пределу в неравенстве $d \leqslant \|x - y_n\| < \sqrt{d^2 + 1/n^2}$, имеем $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = d$.

Таким образом, мы доказали существование элемента наилучшего приближения. Единственность элемента наилучшего приближения вытекает из ранее доказанной теоремы, т.к. ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ является строго нормированным. $\square$

Теорема (об ортогональном разложении). *Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ является замкнутым подпространством в ги́льбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда пространство $\boldsymbol{H}$ представляется в виде прямой суммы $\boldsymbol{H} = L \oplus L^{\perp}$ подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid x \perp L\}$.*

Доказательство. В силу теоремы о наилучшем приближении для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y \in L$, т.ч. $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Пусть $z \doteqdot x - y$. Тогда по лемме получим $z \in L^{\perp}$. Таким образом, имеем разложение $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$. Докажем единственность этого разложения. Пусть $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, где $y_1, y_2 \in L$ и $z_1, z_2 \in L^{\perp}$. Из этого равенства следует, что $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^{\perp}$. Поэтому $y_1 - y_2 = z_1 - z_2 = 0$, т.е. $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$. $\square$

Следствие. *Биортогональное дополнение $M \doteqdot L^{\perp\perp}$ подпространства $L \subset \boldsymbol{H}$ совпадает с его замыканием $M = \overline{L}$. Поэтому подпространство $L \subset \boldsymbol{H}$ всюду плотно в ги́льбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ тогда и только тогда, когда $L^{\perp} = 0$.*

В самом деле, по теореме $\boldsymbol{H} = \overline{L} \oplus \overline{L}^{\perp}$ и значит $\overline{L} = \overline{L}^{\perp\perp}$. Нам осталось доказать равенство $L^{\perp} = \overline{L}^{\perp}$. Для любого $y \in \overline{L}$ существуют $y_n \in L$, т.ч. $y_n \to y$. Если $x \in L^{\perp}$, то $\langle x, y \rangle = \lim \langle x, y_n \rangle = 0$ при всех $y \in \overline{L}$. Поэтому $L^{\perp} \subset \overline{L}^{\perp}$, а поскольку выполняется очевидное включение $\overline{L}^{\perp} \subset L^{\perp}$, то справедливо равенство $L^{\perp} = \overline{L}^{\perp}$.

Если $L \subset \boldsymbol{H}$ всюду плотно, то $\overline{L} = \boldsymbol{H}$. Тогда в силу доказанного выше получим $L^{\perp} = \overline{L}^{\perp} = \boldsymbol{H}^{\perp} = 0$. Обратно, если $L^{\perp} = 0$, то $\overline{L}^{\perp} = L^{\perp} = 0$. Поэтому в силу теоремы $\boldsymbol{H} = \overline{L} \oplus \overline{L}^{\perp} = \overline{L}$, т.е. подпространство L является всюду плотным в $\boldsymbol{H}$.

Пример 2. Оператор $P(x) = y$, где $y \in L$ элемент наилучшего приближения для $x \in \boldsymbol{H}$, называется *ортогональным проектором* на подпространство L. Докажем, что ортогональный проектор является линейным и его норма равна $\|P\| = 1$.

Если $P(x_1) = y_1$ и $P(x_2) = y_2$, то по лемме $x_1 - y_1 \perp L$ и $x_2 - y_2 \perp L$. Отсюда $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \perp L$. Поэтому по лемме $P(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$. Кроме того, если $P(x) = y$, то, применяя аналогичные рассуждения, мы получим $P(\lambda x) = \lambda y$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Поэтому оператор P является линейным. Так как при разложении в прямую сумму $x = y+z$, где $P(x) = y$ и $z = x-P(x)$, то из ортогональности $y \perp z$ вытекает равенство $\langle x,x\rangle = \langle y+z,y+z\rangle = \langle y,y\rangle + \langle z,z\rangle$, т.е. $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Поэтому имеет место неравенство $\|P(x)\| \leqslant \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и, следовательно, норма проектора равна $\|P\| \leqslant 1$. Поскольку $P(y) = y$ при всех $y \in L$, то $\|P\| = 1$.

Пример 3. Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *эрмитовым* или *симмметричным*, если $\langle Ax,y\rangle = \langle x,Ay\rangle$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$. Построим неограниченный эрмитовый оператор в евклидовом пространстве.

Пусть $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{\ell}_2$ подпространство финитных последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $x_i \in \mathbb{F}$, т.е. имеющих конечное число ненулевых координат x_n. Определим оператор по формуле $Ax = y$, где $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $y_n \doteqdot nx_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда оператор A будет эрмитовым и неограниченным. Действительно, имеем $\langle Ax,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n\overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{ny_n} = \langle x,Ay\rangle$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$. Если $e_i \doteqdot \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, где δ_{ij} символ Кронекера, т.е. $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то мы получим $Ae_n = ne_n$ и, следовательно, $\|Ae_n\| = n$, где $\|e_n\| = 1$. Поэтому норма оператора $\|A\| = \infty$.

Пример 4. Линейный оператор $P : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, имеющий свойства *непрерывности*, *идемпотентности* $P^2 = P$ и *симметричности* $\langle Px,y\rangle = \langle x,Py\rangle$ при всех $x,y \in \boldsymbol{H}$, является ортогональным проектором на подпространство $L \doteqdot P(\boldsymbol{H})$.

По теореме об ортогональном разложении $x = y+z$, где $y = P(x)$ и $z = x-P(x) \doteqdot Q(x)$, тогда оператор $Q : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ также обладает свойствами непрерывности, идемпотентности и симметричности. При этом $x = P(x)+Q(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Положим $L \doteqdot P(\boldsymbol{H})$ и $M \doteqdot Q(\boldsymbol{H})$. Используя идемпотентность и симметричность, получим $\langle y,z\rangle = \langle P(x),x-P(x)\rangle = \langle x,P(x)-P^2(x)\rangle = 0$ для всех $y \in L$ и $z \in M$. Отсюда $L \perp M$ и при этом $L \cap M = 0$. Поскольку $Q(y) = (I-P)(P(x)) = (P-P^2)(x) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $y = P(x) \in L$, то $L = \ker Q$. Аналогично имеем $M = \ker P$. Следовательно, L и M будут замкнутыми подпространствами. Значит имеет место ортогональное разложение в прямую сумму $\boldsymbol{H} = L \oplus M$, где $M = L^{\perp}$ и $L = M^{\perp}$. Таким образом, операторы P и Q является ортогональными проекторами.

Пример 5. Последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$ называется *слабо сходящейся к элементу* $x \in \boldsymbol{H}$, если предел $\lim_{n\to\infty}\langle x_n,y\rangle = \langle x,y\rangle$ при всех $y \in \boldsymbol{H}$. Покажем, что если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна, то следующие условия равносильны: a) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ сходится; b) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится сильно; c) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится слабо.

Пусть $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} x_k$ образуют частичные суммы ряда. Тогда, если выполнено условие a), то $\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m}\|x_k\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши и значит имеет предел в $\boldsymbol{H}$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится сильно. Если выполнено условие b), тогда, так как из сильной сходимости следует слабая сходимость, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится слабо. Если выполнено условие c), тогда последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно ограничена и значит $\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 \leqslant c$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ сходится.

Пример 6. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ сходится слабо к элементу $x \in \boldsymbol{H}$ и $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$, то она сходится сильно.

В самом деле, по условию слабой сходимости для любого $y \in \boldsymbol{H}$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Тогда существует сильный предел $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2 = \lim_{n\to\infty}\left\{\|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\Re\langle x_n, x\rangle\right\} = 2\|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle = 0\,.$$

В частности, если последовательность линейных операторов $A_n : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ сходится слабо $A_n \to A$ и выполняется условие $\|A_n x\| \to \|Ax\|$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то она сходится сильно. Отсюда немедленно следует, что для *изометричных* операторов, а значит и для *унитарных*, понятие слабой и сильной сходимости совпадают.

Пример 7. Гильбертово пространство $\boldsymbol{H}$ является секвенциально слабо полным.

Докажем, что каждая слабая последовательность Коши́ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{H}$ является слабо сходящейся. По условию существует предел $\lim_{n\to\infty}\langle x, x_n\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Тогда последовательность $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена и значит $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо ограниченной. Так как из слабой ограниченности следует сильная ограниченность, то линейный функционал $\alpha(x) = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, x\rangle$ является ограниченным, поскольку по неравенству Коши́–Буняко́вского $|\alpha(x)| \leqslant \|x\| \sup\|x_n\|$, т.е. $\|\alpha\| \leqslant \sup\|x_n\|$. Тогда по теореме Ри́сса–Фреше́ о представлении существует элемент $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x) = \langle x, y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Таким образом, существует слабый предел $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.

Пример 8. Найти ортогональное дополнение в пространстве $\boldsymbol{L}_2[0,1]$ к следующим подпространствам: a) многочленов от x; b) многочленов от x^2; c) многочленов с нулевым свободным членом; d) многочленов с нулевой суммой коэффициентов.

Мы покажем, что во всех этих случаях ортогональное дополнение равно нулю.

a) Из курса действительного анализа известно, что для каждой $f \in \boldsymbol{L}_2[0,1]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $g \in \boldsymbol{C}[0,1]$, т.ч. $\|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/2$. По теореме Вейерштрасса существует многочлен $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, т.ч. $\|g - P\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/2$. Тогда по неравенству треугольника $\|f - P\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|g - P\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|g - P\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon$. Значит в силу доказанного выше следствия ортогональное дополнение равно нулю.

b) Достаточно сделать в интеграле замену переменных $y = x^2$ и рассмотреть вместо пространства $\boldsymbol{L}_2[0,1]$ пространство $\boldsymbol{L}_2([0,1],\mu)$ с мерой $d\mu \doteqdot dy/2\sqrt{y}$ на отрезке $[0,1]$. В остальном доказательство аналогично предыдущему.

c) Рассуждая как в случае a), требуется доказать, что многочлены с нулевым свободным членом всюду плотны в подпространстве $M \subset \boldsymbol{C}[0,1]$ функций g, т.ч. $g(0) = 0$. Это следует из неравенства $\|(g(x) - g(0)) - (P(x) - P(0))\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant 2\|g - P\|_{\boldsymbol{C}}$. Для доказательства всюду плотности подпространства M в пространстве $\boldsymbol{L}_2[0,1]$, полагаем $g_\delta(x) = \chi_\delta(x) g(x)$, где $\chi_\delta(x) = 1$ при $x \in [\delta, 1]$ и $\chi_\delta(x) = x/\delta$ при $x \in [0, \delta]$. Используя неравенство $\|f - g_0\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} + \left(\int_0^\delta |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ и абсолютную непрерывность интеграла Лебега, заключаем, что M всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2[0,1]$.

d) Доказательство проводится также, как в случае c), нужно только заменить точку $x = 0$ на точку $x = 1$.

Пример 9. Построить пример линейного подпространства $M \subset \boldsymbol{E}$ евклидова пространства $\boldsymbol{E}$, у которого ортогональное дополнение $M^{\perp} = 0$ равно нулю, однако M не является всюду плотным в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C}[-1,1]$ как линейное подпространство гильбертова пространства $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{L}_2[-1,1]$ с соответствующим скалярным произведением. Пусть M подпространство, состоящее из многочленов, ортогональных характеистической функции $\chi_{[0,1]}(x)$ отрезка $[0,1]$, которая равна 1 на отрезке $[0,1]$ и равна 0 на полуинтервале $[-1,0)$. Тогда $M \subset \boldsymbol{E}$ имеет ортогональное дополнение в пространстве $\boldsymbol{E}$ равное нулю $M^{\perp} = 0$, поскольку его ортогональное дополнение в пространстве $\boldsymbol{H}$ является линейной оболочкой разрывной функции $\chi_{[0,1]}(x)$. Однако M не является всюду плотным в $\boldsymbol{E}$, т.к. иначе в силу всюду плотности $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{H}$ подпространство M будет всюду плотным в $\boldsymbol{H}$, что невозможно.

Пример 10. Доказать, что операция умножения операторов в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ непрерывна в равномерной топологии и разрывна в сильной и слабой топологиях.

Доказательство для равномерной топологии вытекает из следующих неравенств

$$\begin{aligned}\|AB - A_0B_0\| &\leqslant \|(A-A_0)(B-B_0)\| + \|(A-A_0)B_0\| + \|A_0(B-B_0)\| \leqslant \\ &\leqslant \|A-A_0\|\,\|B-B_0\| + \|A-A_0\|\,\|B_0\| + \|A_0\|\,\|B-B_0\| \quad .\end{aligned}$$

Поэтому, если $\|A-A_0\| < \delta$ и $\|B-B_0\| < \delta$, то $\|AB-A_0B_0\| < \delta^2 + (\|A_0\|+\|B_0\|)\delta < \varepsilon$. Покажем, что в сильной топологии операция возведения в квадрат A^2 не является непрерывной. В самом деле, если операция непрерывна, то множество операторов из пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$, удовлетворяющих уравнению $A^2 = 0$, будет собственным сильно замкнутым подмножеством в $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$. Мы придем к противоречию, если докажем, что это множество операторов всюду плотно в $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$. Рассмотрим произвольную сильную окрестность в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$

$$O(A_0) \doteqdot \{A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H}) \mid \|Ax_k - A_0x_k\| < \varepsilon,\, k = 1, \ldots, n\},$$

где система $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset \boldsymbol{H}$ является линейно независимой (в противном случае их можно заменить на систему линейно независимых векторов с той же линейной оболочкой). Теперь для любого $\varepsilon > 0$ найдем элементы $y_k \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\|A_0x_k - y_k\| < \varepsilon$, где $k = 1,\ldots,n$, при этом система $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ линейно не зависит от системы $\{y_k\}_{k=1}^{n}$, т.е. линейная оболочка $\mathrm{sp}\{y_k\}_{k=1}^{n}$ пересекается с линейной оболочкой $\mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^{n}$ только в нуле. Выберем конечномерный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, равный нулю на ортогональном дополнении к подпространству $\mathrm{sp}\{x_k, y_k\}_{k=1}^{n}$, и такой, что $Ax_k = y_k$ и $Ay_k = 0$, где $k = 1,\ldots,n$. Таким образом, линейный оператор A, удовлетворяет уравнению $A^2 = 0$ и принадлежит указанной окрестности $O(A_0)$. Следовательно, операция умножения операторов разрывна в сильной топологии. Поскольку слабая топология слабее сильной, то сильно плотное множество будет слабо плотным. Поэтому операция операция умножения также разрывна в слабой топологии.

10 ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть $\boldsymbol{H}$ является гильбертовом пространством над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел, а $\boldsymbol{H}'$ обозначает его сопряженное пространство.

Теорема (Ри́сса–Фреше́ о представлении)**.** *Для каждого $\alpha \in \boldsymbol{H}'$ существует единственный элемент $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x) = \langle x, y \rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|\alpha\| = \|y\|$.*

Доказательство. Поскольку $\alpha \in \boldsymbol{H}'$ является непрерывным функционалом, то его ядро $L = \ker(\alpha) \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid \alpha(x) = 0\}$ образует замкнутое подпространство в $\boldsymbol{H}$. Если $L^{\perp} = 0$, то в силу следствия теоремы об ортогональном разложении $L = \boldsymbol{H}$, т.е. $\alpha = 0$. Если $\alpha \neq 0$, то существует элемент $z \in L^{\perp}$, т.ч. $\|z\| = 1$. Для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ рассмотрим элемент $u = \alpha(x)z - \alpha(z)x \in L$, т.ч. $\alpha(u) = 0$. Отсюда получаем равенство $\langle u, z \rangle = \alpha(x)\langle z, z \rangle - \alpha(z)\langle x, z \rangle = \alpha(x) - \langle x, y \rangle = 0$ при $x \in \boldsymbol{H}$, где $y \doteqdot \overline{\alpha(z)}z$. Таким образом, имеет место представление $\alpha(x) = \langle x, y \rangle$ для всех $x \in \boldsymbol{H}$.

Для доказательства единственности представления допустим, что $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Тогда $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и, следовательно, $y_1 - y_2 = 0$. Из неравенства Коши́–Буняко́вского вытекает неравенство $|\alpha(x)| = |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. При этом, если $x = y/\|y\|$, то $|\alpha(x)| = \|y\|$. Поэтому норма $\|\alpha\| = \|y\|$. □

Определения. Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется называется *ортогональной*, если $e_n \perp e_m$ при всех $n \neq m$, и называется *ортонормированной*, если, кроме того, $\|e_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ называется *замкнутой* в пространстве $\boldsymbol{E}$, если ее замкнутая линейная оболочка $\overline{\mathrm{sp}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{E}$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ называется *полной* в пространстве $\boldsymbol{E}$, если ее ортогональное дополнение равно нулю $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}{}^{\perp} = 0$.

Пусть далее $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ обозначает ортонормированную систему в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим *коэффициенты Фурье́* $c_n \doteqdot \langle x, e_n \rangle$ относительно заданной ортонормированной системы. Тогда ряд $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ будем называть *рядом Фурье́* элемента x. Если для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ ряд Фурье́ сходится, т.е. последовательность его частичных сумм $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ имеет предел $x = \lim s_n$, то система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ортонормированным базисом* пространства $\boldsymbol{E}$.

1. Неравенство Бе́сселя. *Если $c_n \doteqdot \langle x, e_n \rangle$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Действительно, поскольку система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной, то для частичных сумм ряда Фурье $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|x - s_n\|^2 = \langle x - s_n, x - s_n \rangle = \langle x.x \rangle - 2\Re\langle x, s_n \rangle + \langle s_n, s_n \rangle = \|x\|^2 - \textstyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geqslant 0.$$

2. Равенство Парсева́ля. *Равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$, где $c_n \doteqdot \langle x, e_n \rangle$, выполняется тогда и только тогда, когда ряд Фурье элемента $x \in \boldsymbol{E}$ сходится.*

В самом деле, по доказанному выше $\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$. Следовательно, $\|x - s_n\| \searrow 0$ стремится к нулю тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

3. Обобщенное равенство Парсева́ля. *Равенство Парсева́ля* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ *выполняется в* $\boldsymbol{E}$ *тогда и только тогда, когда в* $\boldsymbol{E}$ *справедливо обобщенное равенство Парсева́ля* $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d_n}$*, где* $c_n = \langle x, e_n\rangle$ *и* $d_n = \langle y, e_n\rangle$.

Так как $\langle x+\lambda y, e_n\rangle = c_n + \lambda d_n$, то применяя равенство Парсева́ля, получим

$$\|x+\lambda y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n + \lambda d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{\lambda d_n}) + |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2.$$

Поскольку $\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2$, то $\Re(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{\lambda d_n})$. Полагая здесь $\lambda = 1$, а затем $\lambda = \boldsymbol{i}$, получим обобщенное равенство Парсева́ля

$$\langle x, y\rangle = \Re\langle x, y\rangle + \boldsymbol{i}\Im\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{d_n}) + \boldsymbol{i}\sum_{n=1}^{\infty} \Im(c_n \overline{d_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d_n}.$$

Теорема (замкнутости Стекло́ва). *Ортонормированная система* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *тогда и только тогда замкнута в евклидовом пространстве* $\boldsymbol{E}$*, когда выполняется равенство Парсева́ля* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ *при все* $x \in \boldsymbol{E}$*, где* $c_n \doteqdot \langle x, e_n\rangle$.

Доказательство. Необходимость. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута, то для всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\varepsilon > 0$ существует $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, т.ч. $\|x-y\| < \varepsilon$. Пусть $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{n}$ обозначает линейную оболочку системы $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Поскольку $x - s_n \perp L_n$, то суммы s_n является наилучшим приближением элемента x подпространством L_n. Поэтому имеет место неравенство $\|x-s_m\| \leqslant \|x-s_n\| \leqslant \|x-y\| < \varepsilon$ при всех $m \geqslant n$. Отсюда ряд Фурье сходится в $\boldsymbol{E}$ и, следовательно, выполняется равенство Парсева́ля.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$. Так как $\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\|x-s_n\| < \varepsilon$. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$. □

Следствие. *Ортонормированная система* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *замкнута в гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{H}$ *тогда и только тогда, когда она является полной.*

В самом деле, если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой, то в силу теоремы замкнутости имеет место равенство Парсева́ля. Поскольку из условия $\langle x, e_n\rangle = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ вытекает, что $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 0$, то $x = 0$. Значит система будет полной. Обратно, если система полна, то ее ортогональное дополнение $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}{}^{\perp} = 0$ равно нулю. Поэтому в силу следствия теоремы об ортогональном разложении $\overline{\mathrm{sp}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{E}$, т.е. система является замкнутой в пространстве $\boldsymbol{H}$.

Пример 1. В бесконечномерных евклидовых пространствах из свойства полноты ортонормированной системы не следует ее замкнутость, т.е. существуют полные ортонормированные системы, которые не являются ортонормированным базисом.

Пусть M подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{E} \doteqdot \boldsymbol{C}[-1, 1]$, построенное на предыдущей лекции (пример 9). Оно состоит из алгебраических многочленов и его ортогональное дополнение в $\boldsymbol{E}$ равно $M^{\perp} = 0$. Поскольку многочлены, имеющие рациональные коэффициенты, всюду плотны в $\boldsymbol{M}$ и их счетное число, то, выбирая линейно независимую систему и применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, можно построить ортонормированную систему многочленов из $\boldsymbol{M}$, которая будет полной в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$, но не является замкнутой.

Лемма (метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта)**.** *Для каждой линейно независимой системы элементов* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *в евклидовом пространстве* $\boldsymbol{E}$ *существует ортонормированная система* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$*, т.ч. ее элементы* e_n *являются линейными комбинациями элементов* $\{x_k\}_{k=1}^{n}$.

Доказательство. Пусть $y_1 = x_1$ и $e_1 \doteqdot y_1/\|y_1\|$. Далее полагаем $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ и определим $e_2 \doteqdot y_2/\|y_2\|$, и т.д. На n-том шаге полагаем $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, e_k\rangle e_k$ и определим $e_n \doteqdot y_n/\|y_n\|$. Поскольку система $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ линейно независима, то $y_n \neq 0$ при всех n. Таким образом, матрица A_n преобразования системы $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ в систему $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ является треугольной, т.е. имеет вид

$$\begin{cases} e_1 &= a_{11}x_1 \\ e_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \cdots & \cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{kk} = 1/\|y_k\| \neq 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Обратная матрица также будет треугольной. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой тогда и только тогда, когда будет замкнута система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Явное выражение элементов e_n имеет вид

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_{n-1}\rangle & \cdots & \langle x_n, x_{n-1}\rangle \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

где $D_n \doteqdot D(x_1, \ldots, x_n) = \det\{\langle x_k, x_l\rangle\}_{k,l=1}^{n}$ обозначают определители Гра́ма. □

Пример 2. Рассмотрим примеры классических ортогональных многочленов. Они получаются методом ортогонализации системы степеней $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ относительно скалярного произведения в пространстве $\boldsymbol{L}_2(X, \mu)$, т.е.

$$\langle f, g\rangle \doteqdot \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x), \text{ где } f, g \in \boldsymbol{L}_2(X, \mu) \text{ и } X \subset \mathbb{R}.$$

a) Многочлены Лежандра: $P_n(x) \doteqdot c_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n (1-x^2)^n$, где $X = [-1, 1]$ и $d\mu(x) = dx$.

b) Многочлены Чебышёва: $T_n(x) \doteqdot c_n \cos n \arccos x$, где $X = [-1, 1]$ и $d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Многочлены Лагерра: $L_n(x) \doteqdot c_n e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n e^{-x}$, где $X = \mathbb{R}_+$ и $d\mu(x) = e^{-x}dx$.

d) Многочлены Эрмита: $H_n(x) \doteqdot c_n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n e^{-x^2}$, где $X = \mathbb{R}$ и $d\mu(x) = e^{-x^2}dx$.

Здесь функция $d\mu(x)$ определяет борелевскую меру по формуле $\mu(A) \doteqdot \int_A d\mu(x)$, где $A \subset X$, а константы $c_n \in \mathbb{R}$ подобраны так, чтобы система многочленов образовывала ортонормированную систему в пространстве $\boldsymbol{L}_2(X, \mu)$. Доказательство их ортогональности проводится при помощи интегрирования по частям и замены переменных. Все эти системы полны в соответствующих пространствах $\boldsymbol{L}_2(X, \mu)$.

Теорема (Ри́сса–Фи́шера)**.** *Каждое сепарабельное ги́льбертово пространство* $\boldsymbol{H}$ *изометрически изоморфно либо конечномерному евклидову пространству* $\mathbb{F}^n$*, либо бесконечномерному пространству* $\boldsymbol{\ell}_2$.

Доказательство. В силу условия сепарабельности в пространстве $\boldsymbol{H}$ существует замкнутая система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Отбрасывая из этой системы элементы, которые линейно выражаются через предыдущие, мы получим замкнутую линейно независимую систему элементов в пространстве $\boldsymbol{H}$. Рассмотрим случай, когда эта система является бесконечной, т.е. размерность $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. В случае, когда эта система конечна, т.е. $\dim \boldsymbol{H} < \infty$, доказательство полностью аналогично.

Применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, мы построим замкнутую в $\boldsymbol{H}$ ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу теоремы Стекло́ва и свойства 2 всякий элемент $x \in \boldsymbol{H}$ представляется сходящимся в $\boldsymbol{H}$ рядом Фурье $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, где $c_n = \langle x, e_n \rangle$ его коэффициенты Фурье́. Определим отображение $F : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(x) = c$, где $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что F линейное отображение. Поскольку по теореме Стекло́ва выполняется равенство Парсева́ля $\|F(x)\|_{\ell_2} = \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то отображение F является изометричным. Осталось доказать, что образ этого отображения $F(\boldsymbol{H})$ совпадает с пространством $\boldsymbol{\ell}_2$.

Для каждого элемента $c = \{c_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$ рассмотрим последовательность частичных сумм $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ ряда Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. Так как по свойству ортогональности

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j} \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0 \text{ при } n, m \to \infty,$$

то $\{s_n\}$ является последовательностью Коши́ и в силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ существует предел $\lim s_n = x$ по норме $\boldsymbol{H}$. Применяя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle x, e_n \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle s_m, e_n \rangle = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $F(x) = c$ Таким образом, $F : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ является биективным и изометричным отображением гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$ на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$. □

Пример 3. Тригонометрическая система функций $e_n(z) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^n$, где $z = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}$ и $n \in \mathbb{Z}$, является ортонормированным базисом в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2(C, \mu)$ на окружности $C \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ с лебеговой мерой $d\mu(z) = d\theta$.

В самом деле, вычисляя скалярное произведение, получим

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(n-m)\theta} d\theta = \frac{\boldsymbol{e}^{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)} - 1}{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)} = \delta_{nm} \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ 1 & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Докажем замкнутость этой системы. Так как множество непрерывных функций всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2(C, \mu)$, то для любой $f \in \boldsymbol{L}_2(C, \mu)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $g \in \boldsymbol{C}[0, 2\pi]$, т.ч. $\|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/2$. Изменяя g на достаточно малом отрезке $[0, \delta]$ мы можем считать, что $g(0) = g(2\pi)$. По теореме Вейерштрасса об аппроксимации найдется тригонометрический полином $T(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$, т.ч. $\|g - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/2\sqrt{2\pi}$. Так как $\|g - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \sqrt{2\pi} \|g - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/2$, то $\|f - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|g - T\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon$. Отсюда система замкнута и значит образует ортонормированный базис в $\boldsymbol{L}_2(C, \mu)$.

При помощи теоремы Ри́сса–Фи́шера определяется изометрический изоморфизм пространства $\boldsymbol{L}_2(C,\mu)$ на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(f)=c$, где $c=\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ обозначает совокупность всех коэффициентов Фурье́ функции $f\in\boldsymbol{L}_2(C,\mu)$. По теореме Стекло́ва будет выполняться равенство Парсева́ля $\|F(f)\|_{\ell_2}=\|f\|$ при всех $f\in\boldsymbol{L}_2(C,\mu)$ и, следовательно, указанное отображение $F:\boldsymbol{L}_2(C,\mu)\to\boldsymbol{\ell}_2$ является изометрическим изоморфизмом на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$.

Пример 4. Пусть $d\mu(z)=dx\otimes dy$ мера Лебе́га на комплексной плоскости $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, где $z=x+\boldsymbol{i}y$. *Пространство Бе́ргмана* $\boldsymbol{A}_2(D)$ состоит из аналитических функций в области $D\subset\mathbb{C}$, т.ч. $\int_D|f(z)|^2d\mu(z)<\infty$. Скалярное произведение в пространстве $\boldsymbol{A}_2(D)$ вводится, как обычно, по формуле

$$\langle f,g\rangle \doteqdot \int_D f(z)\overline{g(z)}\,d\mu(z)\,,\ \text{где}\ f,g\in\boldsymbol{A}_2(D)\,.$$

Докажем, что пространство $\boldsymbol{A}_2(D)$ является гильбертовым пространством.

Линейность пространства $\boldsymbol{A}_2(D)$ и свойства скалярного произведения вытекают из свойств интеграла Лебе́га. Докажем полноту. Пусть r_0 есть радиус наибольшего круга с центром в точке $z_0\in D$, содержащийся в D. Если функция $f\in\boldsymbol{A}_2(D)$, то $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^n$ представляется равномерно сходящимся степенным рядом в круге $D_r(z_0)\doteqdot\{z\in\mathbb{C}\mid|z-z_0|<r\}$ при $r<r_0$. Интегрируя этот ряд и переходя к полярным координатам, получим

$$\int_{D_r(z_0)}f(z)\,d\mu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_k\int_{D_r(z_0)}(z-z_0)^n\,d\mu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_k\int_0^r\int_0^{2\pi}t^{n+1}\boldsymbol{e}^{in\theta}\,d\theta dt=a_0\pi r^2\,.$$

Поскольку $a_0=f(z_0)$, то, применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем

$$|f(z_0)|=\frac{1}{\pi r^2}\Big|\int_{D(z_0)}f(z)\,d\mu(z)\Big|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{\boldsymbol{A}_2}\to\frac{1}{\sqrt{\pi}r_0}\|f\|_{\boldsymbol{A}_2}\ \text{при}\ r\to r_0\,.$$

Пусть $K\Subset D$ компактное множество, тогда найдется $\varepsilon>0$, т.ч. $r_0>\varepsilon$ при всех $z_0\in K$. Поэтому, если $\{f_n\}$ последовательность Коши́ в $\boldsymbol{A}_2(D)$, то при всех $z_0\in K$

$$|f_n(z_0)-f_m(z_0)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon}\|f_n-f_m\|_{\boldsymbol{A}_2}\to 0\ \text{при}\ n,m\to\infty\,.$$

Следовательно, по теореме Вейерштра́сса последовательность сходится равномерно на каждом компакте $K\Subset D$ к аналитической функции f в области D. В то же время из полноты $\boldsymbol{L}_2(D,\mu)$ вытекает, что последовательность $\{f_n\}$ сходится в метрике $\boldsymbol{L}_2(D,\mu)$ к некоторой функции, равной f п.в. на D. Таким образом, $f\in\boldsymbol{A}_2(D)$.

Пример 5. Функции $e_n(z)\doteqdot\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$, где $n\in\mathbb{Z}_+$, образуют ортонормированный базис пространства Бе́ргмана $\boldsymbol{A}_2\doteqdot\boldsymbol{A}_2(D)$ в единичном круге $D\doteqdot\{z\in\mathbb{C}\mid|z|<1\}$. Если $f\in\boldsymbol{A}_2$, то ее ряд Фурье́ сходится равномерно на каждом компакте $K\Subset D$ и

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ne_n(z)\,,\ \text{где}\ c_n\doteqdot\langle f,e_n\rangle\ \text{коэффициенты Фурье́}\,.$$

Вычислим скалярное произведение этих функций в пространстве $\boldsymbol{A}_2$

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} t^{n+m+1}e^{i(n-m)\theta}d\theta dt = 2\frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{n+m+2}\delta_{nm}$$

Значит система функций $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $\boldsymbol{A}_2$. Рассмотрим частичные суммы $s_n(z) \doteqdot \sum_{k=0}^{n} c_n e_n(z)$ ряда Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{A}_2$. Применяя неравенство, доказанное в предыдущей задачи, получим

$$|s_n(z_0) - s_m(z_0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon}\|s_n - s_m\|_{\boldsymbol{A}_2} \to 0 \text{ при } n, m \to \infty,$$

где $|z_0| \leqslant 1-\varepsilon$. Следовательно, ряд Фурье сходится равномерно к функции f на каждом компакте $K \Subset D$. Поэтому, если $f \perp e_n$ при $n = 0, 1, \ldots$, то все коэффициенты ряда Фурье́ равны нулю и значит функция $f = 0$.

Каждая функция $f \in \boldsymbol{A}_2$ разлагается в ряд Фурье́ $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$, сходящийся в метрике $\boldsymbol{L}_2(D, \mu)$. Тогда последовательность коэффициентов Фурье́ квадратично суммирума $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$ и, следовательно, радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}c_n z^n$ не меньше 1. Таким образом, в силу указанного изоморфизма в теореме Ри́сса–Фи́шера пространство $\boldsymbol{A}_2$ можно рассматривать, как пространство аналитических функций в единичном круге D, для которых последовательность коэффициентов $c_n \doteqdot \frac{1}{n!}\sqrt{\frac{\pi}{n+1}}f^{(n)}(0)$ квадратично суммируема $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$ и норма функции $f \in \boldsymbol{A}_2$ вычисляется по формуле $\|f\|_{\boldsymbol{A}_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2}$.

Пример 6. Пусть $e_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^n$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $z = e^{i\theta}$, тригонометрическая система функций на окружности $C \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, которая образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2(C, \mu)$ с лебеговой мерой $\mu(z) = d\theta$ на C.

Пространством Харди называется подпространство $\boldsymbol{H}_2 \subset \boldsymbol{L}_2(C, \mu)$, состоящее из функций $f \in \boldsymbol{L}_2(C, \mu)$, у которых все коэффициенты Фурье с отрицательными индексами $c_n = \langle f, e_n\rangle = 0$ при $n = -1, -2, \ldots$ равны нулю. Функции $f \in \boldsymbol{H}_2$ мы будем рассматривать, как аналитические функции в единичном круге D.

В самом деле, если $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ есть разложение в ряд Фурье, сходящийся в метрике $\boldsymbol{L}_2(C, \mu)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$ сходится и значит радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_k}{\sqrt{2\pi}}z^k$ не меньше 1. Поэтому этот ряд задает аналитическую функцию в единичном круге D. Таким образом, в силу указанного изоморфизма в теореме Ри́сса–Фи́шера пространство Харди $\boldsymbol{H}_2$ можно рассматривать, как пространство аналитических функций в единичном круге D, для которых последовательность коэффициентов $c_n \doteqdot \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}f^{(n)}(0)$ квадратично суммируема $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$ и норма функции $f \in \boldsymbol{H}_2$ вычисляется по формуле $\|f\|_{\boldsymbol{H}_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2}$.

Пример 7. *Задача Дирихле о сопряженной функции.* Доказать, что каждой действительнозначной функции $u \in \boldsymbol{L}_2(C, \mu)$ соответствует единственная действительнозначная функция $v \in \boldsymbol{L}_2(C, \mu)$, т.ч. $f = u + iv \in \boldsymbol{H}_2$ и $\langle v, e_0\rangle = 0$.

Такая функция v называется сопряженной к функции u в пространстве $\boldsymbol{L}_2(C,\mu)$. Соответствующее преобразование $\boldsymbol{\Gamma} : \boldsymbol{L}_2(C,\mu) \to \boldsymbol{L}_2(C,\mu)$, т.ч. $\boldsymbol{\Gamma}(u) = v$, действительного пространства $\boldsymbol{L}_2(C,\mu)$ называется *преобразованием Гильберта*.

Пусть функция $f \in \boldsymbol{H}_2$. Рассмотрим ее разложение в ряд Фурье $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ и положим $u = \Re f$ действительной части f. Поскольку $|u| \leqslant |f|$, то $u \in \boldsymbol{L}_2(C,\mu)$. Тогда функция u разлогается в ряд Фурье $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$ и, кроме того, имеем

$$u = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} e_{-n}\Big) = \Re c_0\, e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} e_n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{\overline{c_n}}{2} e_n .$$

Сравнивая эти два разложения в ряд Фурье, получим следующие равенства:

$$a_0 = \Re c_0 \quad a_n = \begin{cases} c_n/2 & \text{при } n > 0; \\ \overline{c_n}/2 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Таким образом, если задано разложение в ряд Фурье функции $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$, т.ч. $a_n = \overline{a_{-n}}$, т.к. функция u принимает действительные значения, то коэффициенты Фурье функции f можно вычислить по следующим формулам:

$$c_0 = a_0; \quad c_n = 2a_n = 2\overline{a_{-n}} = a_n + \overline{a_{-n}} \text{ при всех } n > 0.$$

Поскольку последовательность $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ квадратично суммируема, то последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ также квадратично суммируема. Поэтому функция $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ принадлежит пространству $\boldsymbol{H}_2$. Что касается функции $v = \Im f$, то легко получить явное выражение ее коэффициентов Фурье. Действительно, мы имеем

$$v = \frac{1}{2\boldsymbol{i}}(f - \overline{f}) = \frac{1}{2\boldsymbol{i}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} e_{-n}\Big) = \Im c_0\, e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2\boldsymbol{i}} e_n - \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{\overline{c_n}}{2\boldsymbol{i}} e_n .$$

Сравнивая это разложение с разложением функции $v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e_n$, мы получим

$$b_0 = \Im c_0 = 0; \quad b_n = \begin{cases} c_n/2\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} a_n & \text{при } n > 0; \\ -\overline{c_n}/2\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} a_n & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Эти равенства можно выразить коротко $b_n = -\boldsymbol{i}\,\mathrm{sign}(n) a_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, коэффициенты Фурье разложения функции v определяются однозначно.

11 ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Напомним, что полунормой в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ называется неотрицательная функция $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию однородности $\boldsymbol{p}(\lambda x) = |\lambda|\boldsymbol{p}(x)$ и неравенству треугольника $\boldsymbol{p}(x+y) \leqslant \boldsymbol{p}(x)+\boldsymbol{p}(y)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x,y \in \boldsymbol{E}$.

Определение. *Локально выпуклым пространством* $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ называется линейное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором определена система полунорм $\mathfrak{P}$ и локальная база β его топологии состоит из окрестностей точек $x \in \boldsymbol{E}$ следующего вида:

$$O(x) \doteqdot \{y \in \boldsymbol{E} \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n} \boldsymbol{p}_i(y-x) < \varepsilon\}\,,\ \text{где}\ \varepsilon > 0,\ \boldsymbol{p}_i \in \mathfrak{P},\ i = 1,\ldots,n \in \mathbb{N}.$$

Топология этого пространства $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ называется *локально выпуклой*, поскольку ее локальная база β состоит из выпуклых множеств. В этом пространстве $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ множество $M \subset \boldsymbol{E}$ называется *ограниченным*, если $\sup_{x\in M}\boldsymbol{p}(x) < \infty$ при всех $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{P}$. Последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ называется *сходящейся к* x, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{P}$ существует N, т.ч. $\boldsymbol{p}(x_n - x) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{P}$ найдется N, т.ч. $\boldsymbol{p}(x_n - x_m) < \varepsilon$ при всех $n,m \geqslant N$. Пространство $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ называется *полным*, если всякая последовательность Коши является сходящейся.

В системе полунорм $\mathfrak{P}$ на пространстве $\boldsymbol{E}$ введем отношение порядка $\boldsymbol{p}_1 \leqslant \boldsymbol{p}_2$, если $\boldsymbol{p}_1(x) \leqslant \boldsymbol{p}_2(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Система полунорм $\mathfrak{P}$ называется *направленной*, если для любых $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2 \in \mathfrak{P}$ найдется $\boldsymbol{p}_3 \in \mathfrak{P}$, т.ч. $\boldsymbol{p}_1 \leqslant \boldsymbol{p}_3$ и $\boldsymbol{p}_2 \leqslant \boldsymbol{p}_3$. Всякую систему $\mathfrak{P}$ можно преобразовать в направленную $\vec{\mathfrak{P}}$, состоящую из $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \max_{1\leqslant i\leqslant n}\boldsymbol{p}_i(x)$, где $\boldsymbol{p}_i \in \mathfrak{P}$, $i = 1,\ldots,n \in \mathbb{N}$. При этом локальная база топологии $\boldsymbol{E}$ не изменится.

1. *Линейное отображение $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ локально выпуклых пространств $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ и $(\boldsymbol{F},\mathfrak{Q})$ тогда и только тогда непрерывно, когда для любого $\boldsymbol{q} \in \mathfrak{Q}$ найдутся $c > 0$ и $\boldsymbol{p} \in \vec{\mathfrak{P}}$, т.ч. $\boldsymbol{q}(f(x)) \leqslant c\,\boldsymbol{p}(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Действительно, линейное отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в нуле. Поэтому, если f непрерывно в нуле, то для любых $\varepsilon > 0$ и $\boldsymbol{q} \in \mathfrak{Q}$ найдутся $\delta > 0$ и $\boldsymbol{p} \in \vec{\mathfrak{P}}$, т.ч. $\boldsymbol{q}(f(x)) < \varepsilon$ для всех $x \in \boldsymbol{E}$, удовлетворяющих неравенству $\boldsymbol{p}(x) \leqslant \delta$. Следовательно, имеем $\boldsymbol{q}(f(x)) < (\varepsilon/\delta)\,\boldsymbol{p}(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{p}(x) = \delta$. В силу однородности полунорм и отображения это неравенство будет выполнено при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Обратно, если имеем $\boldsymbol{q}(f(x)) \leqslant c\,\boldsymbol{p}(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то отображение f, очевидно, непрерывно в нуле и значит является непрерывным.

Говорят, что полунорма $\boldsymbol{q}$ *мажорирует* $\boldsymbol{p} \ll \boldsymbol{q}$ полунорму $\boldsymbol{p}$ на пространстве $\boldsymbol{E}$, если существует $c > 0$, т.ч. $\boldsymbol{p}(x) \leqslant c\,\boldsymbol{q}(x)$ для всех $x \in \boldsymbol{E}$. Две системы полунорм $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ на пространстве $\boldsymbol{E}$ называются *эквивалентными* $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$, если для любого $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{P}$ найдется $\boldsymbol{q} \in \vec{\mathfrak{Q}}$, т.ч. $\boldsymbol{p} \ll \boldsymbol{q}$, и для любого $\boldsymbol{q} \in \mathfrak{Q}$ найдется $\boldsymbol{p} \in \vec{\mathfrak{P}}$, т.ч. $\boldsymbol{q} \ll \boldsymbol{p}$.

2. *Две системы полунорм $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ на пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда эквивалентны $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$, когда они задают одну и ту же топологию в $\boldsymbol{E}$.*

Для доказательства $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$ достаточно применить свойство 1 к тождественному отображению $I : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $I(x) = x$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда каждая окрестность локальной базы для $\mathfrak{P}$ будет окрестностью локальной базы для $\mathfrak{Q}$ и наоборот.

Топологическое пространство $(\boldsymbol{E}, \tau)$ называется *хаусдорфовым*, если для любых точек $x, y \in \boldsymbol{E}$, $x \neq y$, существуют непересекающиеся окрестности $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

3. *Локально выпуклое пространство* $(\boldsymbol{E}, \mathfrak{P})$ *является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда для любого* $x \neq 0$ *существует* $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{P}$, *т.ч.* $\boldsymbol{p}(x) > 0$.

В самом деле, если пространство $\boldsymbol{E}$ хаусдорфово, то для любого $x \neq 0$ найдется окрестность нуля $O \in \beta(0)$, т.ч. $x \notin O$. Откуда $\boldsymbol{p}(x) \geqslant \varepsilon$ при некоторых $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{P}$ и $\varepsilon > 0$. Обратно, если $x \neq y$, то существует $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{P}$, т.ч. $\boldsymbol{p}(x - y) \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда окрестности $O(x) = \{z \in \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{p}(z - x) < \varepsilon/2\}$ и $O(y) = \{z \in \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{p}(z - y) < \varepsilon/2\}$ не пересекаются, т.к. иначе получим $\boldsymbol{p}(x - y) \leqslant \boldsymbol{p}(x - z) + \boldsymbol{p}(z - y) < \varepsilon$ при некотором $z \in O(x) \cap O(y)$.

Теорема (о метризуемости). *Хаусдорфово локально выпуклое пространство тогда и только тогда является метрическим линейным пространством, когда его топология может быть задана счетной системой полунорм.*

Доказательство. Если $(\boldsymbol{E}, \mathfrak{P})$ является метрическим линейным пространством, то его топология задается инвариантной метрикой $\rho(x, y)$, при этом открытые шары $\boldsymbol{U}_{r_n}$, где $r_n = 1/n$, составляют локальную базу в нуле его метрической топологии. Следовательно, для каждого $O \in \beta(0)$ существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $U_{r_n} \subset O$.

С другой стороны, т.к. $\beta(0)$ является локальной базой топологии пространства $(\boldsymbol{E}, \mathfrak{P})$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $\varepsilon_n > 0$ и конечное множество $\mathfrak{Q}_n \subset \mathfrak{P}$, т.ч. $O_n \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \max_{\boldsymbol{p} \in \mathfrak{Q}_n} \boldsymbol{p}(x) < \varepsilon_n\} \subset \boldsymbol{U}_{r_n}$. Таким образом, счетная система полунорм $\mathfrak{Q} \doteqdot \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_n$ образует локальную базу в нуле топологии пространства $(\boldsymbol{E}, \mathfrak{P})$.

Предположим теперь, что система полунорм $\mathfrak{P} = \{\boldsymbol{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ счетна и определим квазинорму по формуле $\|x\| \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{\boldsymbol{p}_n(x), 1\}$. Легко проверяются, что она невырождена, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника. Поэтому функция $\rho(x, y) \doteqdot \|x - y\|$ определяет инвариантную метрику в $\boldsymbol{E}$ и шары $\boldsymbol{U}_{r_n} \subset \boldsymbol{E}$, где $r_n = 2^{-n}$, образуют локальную базу в нуле его метрической топологии.

Так как в топологии пространства $(\boldsymbol{E}, \mathfrak{P})$ квазинорма $\|x\|$ является непрерывной, то шары $\boldsymbol{U}_{r_n}$ являются открытыми множествами в топологии пространства $(\boldsymbol{E}, \mathfrak{P})$ и, следовательно, топология в $(\boldsymbol{E}, \mathfrak{P})$ сильнее метрической. С другой стороны, шар $\boldsymbol{U}_{r_n}$ содержится в множестве $O_n \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{p}_n(x) < 1\}$, т.к. если имеет место обратное неравенство $\boldsymbol{p}_n(x) \geqslant 1$, то $\|x\| \geqslant 1/2^n$. Поэтому топология в $(\boldsymbol{E}, \mathfrak{P})$ слабее метрической. Таким образом, топологии $(\boldsymbol{E}, \mathfrak{P})$ и $(\boldsymbol{E}, \rho)$ совпадают. □

Пример 1. Классическим примером локально выпуклого пространства является пространство $\boldsymbol{C}(\mathbb{R}^m)$ непрерывных функций $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, в котором задана система полунорм следующего вида:

$$\boldsymbol{p}_n(\varphi) \doteqdot \sup_{\|x\| \leqslant n} |\varphi(x)|, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

Сходимость последовательности функций относительно этой системы полунорм совпадает с равномерной сходимостью на каждом компактном множестве в $\mathbb{R}^m$. Так как в силу критерия Коши равномерно сходящееся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, то это пространство полно. По доказанной теоремы пространство $\boldsymbol{C}(\mathbb{R}^m)$ является метрическим пространством с метрикой $\rho(\varphi_1,\varphi_2) \doteqdot \|\varphi_1-\varphi_2\|$, где $\|\varphi\| \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\min\{\boldsymbol{p}_n(\varphi),1\}$ является квазинормой в пространстве $\boldsymbol{C}(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, $\boldsymbol{C}(\mathbb{R}^m)$ задает локально выпуклое пространством Фреше, т.е. полное метрическое линейное пространство.

Пример 2. Еще одним классическим примером локально выпуклого пространства является пространство $\boldsymbol{C}^{(k)}(\mathbb{R}^m)$ непрерывных функций $\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{F}$, у которых существует и непрерывны частные производные до порядка k включительно. Система система полунорм в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{p}_n(\varphi) \doteqdot \sup_{\|x\|\leqslant n,\,|\alpha|\leqslant k} |\partial^{\alpha}\varphi(x)|, \text{ где } n\in\mathbb{N}.$$

Здесь выражение $\partial^{\alpha}\varphi(x) \doteqdot \partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_m^{\alpha_m}\varphi(x)$ обозначает дифференциальный оператор порядка $|\alpha| \doteqdot \alpha_1+\ldots+\alpha_m$, $\partial_j^{\alpha_j}\varphi(x) \doteqdot \partial^{\alpha_j}\varphi(x)/\partial x_j^{\alpha_j}$ задает частные производные по переменной x_j, а $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{Z}_+^m$ является мультииндексом.

Сходимость последовательности функций относительно этой системы полунорм совпадает с равномерной сходимостью на каждом компактном множестве в $\mathbb{R}^m$ вместе с частными производными до порядка k включительно. Так как в силу критерия Коши равномерно сходящееся последовательность вместе с производными сходится к такой функции, у которой существуют соответствующие производные, то это пространство полно. По доказанной выше теореме пространство $\boldsymbol{C}^{(k)}(\mathbb{R}^m)$ является метрическим линейным пространством с метрикой $\rho(\varphi_1,\varphi_2) \doteqdot \|\varphi_1-\varphi_2\|$, где $\|\varphi\| \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\min\{\boldsymbol{p}_n(\varphi),1\}$ является квазинормой в пространстве $\boldsymbol{C}^{(k)}(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, $\boldsymbol{C}^{(k)}(\mathbb{R}^m)$ образует локально выпуклое пространством Фреше, т.е. полное метрическое линейное пространство.

Пример 3. Рассмотрим пространств $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ *локально интегрируемых функций* $\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{F}$, т.е. интегрируемых по Лебегу на каждом компактном множестве в $\mathbb{R}^m$. Система система полунорм в $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{p}_n(\varphi) \doteqdot \int_{\|x\|\leqslant n} |\varphi(x)|\,dx, \text{ где } n\in\mathbb{N}.$$

Сходимость последовательности функций относительно этой системы полунорм совпадает со сходимостью в пространстве $\boldsymbol{L}_1(K,\mu)$ относительно меры Лебега на каждом компактном множестве $K\Subset\mathbb{R}^m$. Так как пространство $\boldsymbol{L}_1(K,\mu)$ полно, то пространство $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ также полно. По доказанной выше теореме оно является метрическим линейным пространством с метрикой $\rho(\varphi_1,\varphi_2) \doteqdot \|\varphi_1-\varphi_2\|$, где $\|\varphi\| \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\min\{\boldsymbol{p}_n(\varphi),1\}$ является квазинормой в $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ образует локально выпуклое пространством Фреше́.

Определение. Подпространство $\boldsymbol{E}'$ пространства всех линейных функционалов $\boldsymbol{E}^*$, состоящее из непрерывных функционалов относительно топологии в $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$, называется *сопряженным пространством* к $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$. Топология локально выпуклого пространства $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ называется его *сильной топологией*.

Слабая топология τ_w в локально выпуклом пространстве $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_f(x) \doteqdot |f(x)|$, $f \in \boldsymbol{E}'$. *Слабая* топология* τ_{w*} в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}'$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_x(f) \doteqdot |f(x)|$, $x \in \boldsymbol{E}$.

Сильная топология* τ_{s^*} сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_A(f) = \sup_{x\in A}|f(x)|$, где A любое ограниченное множество в $(\boldsymbol{E},\mathfrak{P})$.

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}_1 \subset \boldsymbol{E}_2 \subset \ldots$ возрастающая последовательность локально выпуклых пространств $(\boldsymbol{E}_n,\mathfrak{P}_n)$, т.ч. 1) $\boldsymbol{E}_n$ является подпространством линейного пространства $\boldsymbol{E}$ и объединение этих подпространств $\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{E}$; 2) сужение системы полунорм $\vec{\mathfrak{P}}_{n+1}$ на подпространство $\boldsymbol{E}_n$ совпадает с $\vec{\mathfrak{P}}_{n+1}|_{\boldsymbol{E}_n} = \vec{\mathfrak{P}}_n$.

Обозначим через $\mathfrak{D}$ множество всех *допустимых полунорм* $\boldsymbol{p}$ на $\boldsymbol{E}$, которые на каждом $\boldsymbol{E}_n$ мажорируются $\boldsymbol{p} \ll \boldsymbol{q}$ некоторой полунормой $\boldsymbol{q} \in \vec{\mathfrak{P}}_n$.

Локально выпуклое пространство $(\boldsymbol{E},\mathfrak{D})$ называется *индуктивным пределом* последовательности локально выпуклых пространств $(\boldsymbol{E}_n,\mathfrak{P}_n)$.

1. *Сужение топологии индуктивного предела* $(\boldsymbol{E},\mathfrak{D})$ *на подпространство* $\boldsymbol{E}_n$ *совпадает с топологией пространства* $(\boldsymbol{E}_n,\mathfrak{P}_n)$.

Так как каждая допустимая полунорма из $\mathfrak{D}$ мажорируется на подпространстве $\boldsymbol{E}_n$ полунормой из $\vec{\mathfrak{P}}_n$, то топология $(\boldsymbol{E}_n,\mathfrak{P}_n)$ сильнее суженной топологии $(\boldsymbol{E},\mathfrak{D})$. Обратно, пусть $\boldsymbol{p}_n \in \mathfrak{P}_n$. Поскольку по условию $\vec{\mathfrak{P}}_{m+1}|_{\boldsymbol{E}_m} = \vec{\mathfrak{P}}_m$, то по индукции существуют $\boldsymbol{p}_{m+1} \in \vec{\mathfrak{P}}_{m+1}$, т.ч. $\boldsymbol{p}_{m+1}|_{\boldsymbol{E}_m} = \boldsymbol{p}_m$ при всех $m \geqslant n$. Обозначим через $\boldsymbol{p}$ полунорму на $\boldsymbol{E}$, которая на каждом $\boldsymbol{E}_m$ совпадает с $\boldsymbol{p}_m$ при $m \geqslant n$. Тогда $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{D}$ и $\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{E}_n}$. Поэтому суженная топология $(\boldsymbol{E},\mathfrak{D})$ сильнее топологии $(\boldsymbol{E}_n,\mathfrak{P}_n)$.

2. *Если все пространства* $(\boldsymbol{E}_n,\mathfrak{P}_n)$ *являются хаусдорфовыми, то их индуктивный предел* $(\boldsymbol{E},\mathfrak{D})$ *будет хаусдорфовым пространством.*

В самом деле, если $x \neq 0$ и $x \in \boldsymbol{E}_n$, то существует $\boldsymbol{p}_n \in \mathfrak{P}_n$, т.ч. $\boldsymbol{p}_n(x) > 0$. Тогда, как показано выше, найдется $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{D}$, т.ч. $\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{E}_n}$. Отсюда $\boldsymbol{p}(x) > 0$.

3. *Линейное отображение* $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *индуктивного предела* $(\boldsymbol{E},\mathfrak{D})$ *в локально выпуклое пространство* $(\boldsymbol{F},\mathfrak{Q})$ *в том и только в том случае непрерывно, если все его сужения* $f|_{\boldsymbol{E}_n}$ *непрерывны на подпространстве* $(\boldsymbol{E}_n,\mathfrak{P}_n)$.

Поскольку топология $(\boldsymbol{E}_n,\mathfrak{P}_n)$ совпадает с сужением топологии $(\boldsymbol{E},\mathfrak{D})$ на $\boldsymbol{E}_n$, то непрерывность $f|_{\boldsymbol{E}_n}$ следует из непрерывности f. Обратно, если все сужения $f|_{\boldsymbol{E}_n}$ непрерывны, то для любого $q \in \mathfrak{Q}$ найдутся $c_n > 0$ и $\boldsymbol{p}_n \in \vec{\mathfrak{P}}_n$, т.ч. $\boldsymbol{q}(f(x)) \leqslant c_n\boldsymbol{p}_n(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}_n$. Поэтому $\boldsymbol{q}\cdot f \in \mathfrak{D}$ и значит отображение f непрерывно.

Пусть $\boldsymbol{C}^{\infty}(X)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : X \to \mathbb{F}$ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, у которых существуют все частные производные, а $\boldsymbol{C}_0^{\infty}(Y)$ его подпространство функций с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \Subset Y \subset X$.

Напомним, что носителем функции $\operatorname{supp}\varphi$ называется замыкание множества тех точек $x \in \mathbb{R}^m$, для которых функция $\varphi(x) \neq 0$ не равна нулю. Далее выражение $\partial^\alpha \varphi(x) \doteqdot \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_m^{\alpha_m} \varphi(x)$ обозначает дифференциальный оператор $\partial^\alpha \doteqdot \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_m^{\alpha_m}$ порядка $|\alpha| \doteqdot \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, где $\partial_j^{\alpha_j} \varphi(x) \doteqdot \partial^{\alpha_j} \varphi(x)/\partial x_j^{\alpha_j}$ задает частные производные по переменной x_j порядка α_j и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ является мультииндексом.

Лемма. *Локально выпуклое пространство $\mathscr{E}(X) = \boldsymbol{C}^\infty(X)$ с системой полунорм $\boldsymbol{p}_{k,K}(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha| \leqslant k, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, где $K \Subset X$ произвольный компакт в открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$ и $k \in \mathbb{N}$, является пространством Фреше́.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, т.ч. $K_n \doteqdot \{x \in X \mid \|x\| \leqslant n, \rho(x, \partial X) \geqslant 1/n\}$, где $\rho(x, \partial X) \doteqdot \inf_{x \in \partial X} \|x - y\|$ расстояние от точки x до границы ∂X. Так как всякий компакт $K \Subset X$ содержится в некотором K_n, то система полунорм $\boldsymbol{p}_{k,K}$ эквивалентна системе полунорм $\boldsymbol{p}_{n,K_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

В силу теоремы метризуемости в пространстве $\mathscr{E}(X)$ можно ввести квазинорму $\|\varphi\| = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \min\{\boldsymbol{p}_{n,K_n}(\varphi), 1\}$ и инвариантную метрику $\rho(\varphi_1, \varphi_2) \doteqdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|$, для которой топология совпадает с топологией локально выпуклого пространства $\mathscr{E}(X)$. Докажем полноту этого метрического линейного пространства.

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ последовательность Коши в пространстве $\mathscr{E}(X)$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует N, т.ч. $2^{-n} \boldsymbol{p}_{n,K_n}(\varphi_i - \varphi_j) \leqslant \|\varphi_i - \varphi_j\| < \varepsilon$ при всех $i, j \geqslant N$. В силу критерия Коши последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ сходится равномерно вместе со всеми производными на каждом компакте K_n. Отсюда пределы этой последовательности и всех ее производных будут непрерывны. Следовательно, существует функция $\varphi \in \boldsymbol{C}^\infty(X)$, т.ч. $\varphi_i \to \varphi$ сходится в метрике $\mathscr{E}(X)$. □

Следствие. *Для каждого компакта $K \Subset X$ в открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$ локально выпуклые пространства $\mathscr{D}(K) = \boldsymbol{C}_0^\infty(K)$, в которых введена система норм $\boldsymbol{p}_k(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha| \leqslant k, x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, где $k \in \mathbb{N}$, образуют пространства Фреше́.*

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое множество и задана такая возрастающая последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, что $X = \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{K}_n$. Тогда имеют место включения $\mathscr{D}(K_1) \subset \mathscr{D}(K_2) \subset \ldots$ и $\mathscr{D}(X) \doteqdot \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{D}(K_n) = \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$.

Пространством *основных функций* $\mathscr{D}(X)$ на открытом множестве X называется индуктивный предел последовательности пространств Фреше́ $\mathscr{D}(K_n)$. Сопряженное пространство $\mathscr{D}'(X)$ к пространству $\mathscr{D}(X)$, в котором введена слабая* топология, называется пространством *обобщенных функций*.

Определение индуктивного предела не зависит от выбора последовательности компактов. В самом деле, если $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \Subset X$ и $X = \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{K}_n$, то всякий компакт $K \Subset X$ содержится в некотором $\mathring{K}_n$. Иначе существует последовательность точек $x_n \in K \setminus \mathring{K}_n$, которые являются ближайшими точками к границе ∂X. Поскольку $x_k \notin K_n$ при всех $k \geqslant n$, то эта последовательность не имеет предельных точек в X. Однако в силу компактности множества K существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K \subset X$. Таким образом, мы получили противоречие.

Пример 4. *Примеры основных функций из пространства* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $e(t) \doteqdot e^{-1/t}$ при всех $t > 0$ и $e(t) \doteqdot 0$ при всех $t \leqslant 0$. По правилу Лопита́ля $e(t)$ будет бесконечно дифференцируемой в точке $x = 0$. Поэтому $\xi(x) \doteqdot e(1 - \|x\|^2)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ является бесконечно дифференцируемой, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ и имеет носитель $\operatorname{supp}\xi \subset \boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant 1\}$ в единичном шаре пространства $\mathbb{R}^m$.

Система функций $\theta_r(x) \doteqdot c_r\xi(x/r)$ называется *аппроксимативной единицей*, где константы $c_r > 0$ подобраны так, чтобы ее интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x)\,dx = 1$. Функции $\theta_r(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ являются бесконечно дифференцируемыми, неотрицательными и имеют носитель $\operatorname{supp}\theta_r \subset \boldsymbol{S}_r \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant r\}$ в шаре радиуса $r > 0$.

Рассмотрим функцию $\eta(x) \doteqdot \int_{\boldsymbol{S}_{3/4}} \theta_{1/4}(x-y)\,dy$. Ясно, что $\eta(x) = 1$ при $x \in \boldsymbol{S}_{1/2}$ и $\eta(x) = 0$ при $x \notin \boldsymbol{S}$. При этом функция $\eta(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ будет бесконечно дифференцируемой, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ и имеет носитель $\operatorname{supp}\eta \subset \boldsymbol{S}$ в единичном шаре.

Теорема (Боре́ля). *Для всякой последовательности чисел* $\{c_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^m}$ *и любой точки* $x_0 \in \mathbb{R}^m$ *существует функция* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, *т.ч.* $\partial^\alpha\varphi(x_0) = c_\alpha$.

Доказательство. Для доказательства в случае $m = 1$ используем выражение

$$\varphi(x) \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-x_0)^n}{n!}\eta\left(\frac{x-x_0}{r_n}\right), \quad \text{где } r_n \searrow 0 \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\,r_n < \infty.$$

Почленно дифференцируя этот ряд k раз, получим равномерно сходящийся ряд, т.к. носитель $\operatorname{supp}\eta \subset [-1,1]$. Поэтому производные $\varphi^{(k)}(x_0) = c_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$. □

Пример 5. *Примеры обобщенных функций из пространства* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Обобщенная функция $\delta(x - x_0) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, т.ч. $\langle\delta(x-x_0), \varphi\rangle \doteqdot \varphi(x_0)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, называется δ-*функцией* в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. В частности, $\langle\delta(x), \varphi\rangle \doteqdot \varphi(0)$.

Обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ называется главным значением $\frac{1}{x}$ и определяется по формуле $\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\rangle \doteqdot \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Тогда имеем

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\varepsilon}^{a} + \int_{-a}^{-\varepsilon}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx,$$

где $\varphi \in \mathscr{D}(-a,a)$. Так как по формуле Лагранжа $\left|\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\rangle\right| \leqslant 2a\,\boldsymbol{p}_1(\varphi)$, где $\boldsymbol{p}_1 \in \mathfrak{P}$ допустимая полунорма, то функционал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ является непрерывным.

Пример 6. Имеет место *формула Сохо́цкого* $\frac{1}{x\pm i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp \pi i\delta(x)$, где обобщенные функции $\frac{1}{x\pm i0}$ определяются по формулам $\langle\frac{1}{x\pm i0}, \varphi\rangle \doteqdot \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x\pm i\varepsilon}\,dx$ при $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

В самом деле, для любой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(-a,a)$ мы имеем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-a}^{a} \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(x) - \varphi(0)\big)\,dx + \varphi(0)\int_{-a}^{a} \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\right) =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx \mp i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-a}^{a} \frac{\varepsilon\,dx}{x^2+\varepsilon^2} = \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx \mp \pi i\varphi(0).$$

12 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним некоторые определения предыдущей лекции. Через $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ обозначается пространство бесконечно дифференцируемых функций φ с компактым носителем $\operatorname{supp}\varphi \Subset X$ и системой полунорм $\mathfrak{P} = \{\boldsymbol{p}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, где $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое множество и $\boldsymbol{p}_k(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha|\leqslant k, x\in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|$. Его подпространство $\mathscr{D}(K) \subset \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ всех функций с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ в компакте $K \Subset X$ является пространством Фреше́.

Локально выпуклое пространство $\mathscr{D}(X) = \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ с системой всех допустимых полунорм $\mathfrak{D}$ называется пространством *основных функций*. При этом полунорма $\boldsymbol{p}$ называется *допустимой*, если для любого компакта $K \Subset X$ существует полунорма $\boldsymbol{p}_k \in \mathfrak{P}$, т.ч. она мажорирует $\boldsymbol{p} \ll \boldsymbol{p}_k$ полунорму $\boldsymbol{p}$ на подпространстве $\mathscr{D}(K)$.

Сопряженное пространство $\mathscr{D}'(X)$, которое состоит из непрерывных линейных функционалов $f : \mathscr{D}(X) \to \mathbb{F}$, определенных на $\mathscr{D}(X)$, называется пространством *обобщенных функций*. Значение обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ (как линейного функционала) на функции $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ обозначается скобкой $\langle f, \varphi\rangle \doteqdot f(\varphi)$.

Множество $M \subset \mathscr{D}(X)$ называется *ограниченным* в пространстве $\mathscr{D}(X)$ основных функций, если $\sup_{\varphi\in M} \boldsymbol{p}(\varphi) < \infty$ для всех допустимых полунорм $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{D}$. Говорят, что последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}(X)$ *сходится к функции* $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, если $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(\varphi_n - \varphi) = 0$ при всех $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{D}$. Говорят, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}(X)$ является *последовательностью Коши*, если $\lim_{n,m\to\infty} \boldsymbol{p}(\varphi_n - \varphi_m) = 0$ при всех $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{D}$.

1. *Для всякого ограниченного множества $M \subset \mathscr{D}(X)$ найдется компакт $K \Subset X$, т.ч. $M \subset \mathscr{D}(K)$ и множество M является ограниченным в $\mathscr{D}(K)$.*

Предположим обратное. Тогда существуют такие последовательности вложенных компактов $K_n \Subset X$, $X = \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{K}_n$, функций $\varphi_n \in M$ и точек $x_n \in X \setminus K_n$, что $\varphi_n(x_n) \neq 0$. Так как любой компакт K_n содержит лишь конечное число точек x_n, то полунорма $\boldsymbol{p}(\varphi) \doteqdot \sup_{n\in\mathbb{N}} |n\varphi(x_n)/\varphi_n(x_n)|$ является допустимой, т.е. $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{D}$. При этом имеет место неравенство $\boldsymbol{p}(\varphi_n) \geqslant n \to \infty$, что противоречит ограниченности M.

2. *Всякая сходящаяся последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является ограниченным множеством в пространстве $\mathscr{D}(X)$.*

Действительно, если последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}(X)$ сходится к функции $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, то $|\boldsymbol{p}(\varphi_n) - \boldsymbol{p}(\varphi)| \leqslant \boldsymbol{p}(\varphi_n - \varphi) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{D}$. Поэтому последовательность чисел $\{\boldsymbol{p}(\varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ ограничена и, следовательно, выполняется неравенство $\sup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{p}(\varphi_n) < \infty$ для всех допустимых полунорм $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{D}$.

3. *Пространство основных функций $\mathscr{D}(X)$ является полным.*

Докажем, что всякая последовательность Коши $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}(X)$ в пространстве основных функций $\mathscr{D}(X)$ является сходящейся. Так как выполняется неравенство $|\boldsymbol{p}(\varphi_n) - \boldsymbol{p}(\varphi_m)| \leqslant \boldsymbol{p}(\varphi_n - \varphi_m)$, то последовательность чисел $\{\boldsymbol{p}(\varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ ограничена, т.е. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{p}(\varphi_n) < \infty$ для всех $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{D}$. По свойству 1 последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ содержится в некотором $\mathscr{D}(K)$ и в силу полноты $\mathscr{D}(K)$ является сходящейся.

Теорема. *Сопряженное пространство $\mathscr{D}'(X)$ полно в слабой* топологии.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ есть последовательность Коши в топологии $\mathscr{D}'(X)$, то существует предел $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Тогда f является линейным функционалом и согласно свойству индуктивного предела $\mathscr{D}(X)$ нам достаточно проверить его непрерывность на каждом подпространстве $\mathscr{D}(K) \subset \mathscr{D}(X)$. Поэтому по принципу равностепенной непрерывности в $\mathscr{D}(K)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $k \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$, т.ч. $|\langle f_n, \varphi\rangle| < \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и для всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$, т.ч. $\boldsymbol{p}_k(\varphi) < \delta$. Переходя к пределу в неравенстве, получим, что $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant \varepsilon$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$, т.ч. $\boldsymbol{p}_k(\varphi) < \delta$. Отсюда f непрерывен на $\mathscr{D}(K)$ и значит непрерывен на $\mathscr{D}(X)$. □

В силу доказанных ранее утверждений имеют место следующие свойства:

a) последовательность $\varphi_n \to \varphi$ в том и только в том случае сходится в топологии пространства $\mathscr{D}(X)$, когда 1) существует компакт $K \Subset X$, т.ч. $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и 2) предел $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_k(\varphi_n - \varphi) = 0$ для всех полунорм $\boldsymbol{p}_k \in \mathfrak{P}$;

b) линейный функционал $f : \mathscr{D}(X) \to \mathbb{F}$ тогда и только тогда является непрерывным на пространстве $\mathscr{D}(X)$, т.е. $f \in \mathscr{D}'(X)$, когда из сходимости $\varphi_n \to \varphi$ в пространстве $\mathscr{D}(X)$ следует сходимость $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ в $\mathbb{F}$;

c) линейный оператор $A : \mathscr{D}(X) \to \boldsymbol{E}$, отображающий $\mathscr{D}(X)$ в локально выпуклое пространство $\boldsymbol{E}$, тогда и только тогда является непрерывным, когда из сходимости $\varphi_n \to \varphi$ в пространстве $\mathscr{D}(X)$ следует сходимость $A\varphi_n \to A\varphi$ в $\boldsymbol{E}$;

d) если последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$ слабо* сходится в $\mathscr{D}'(X)$, т.е. если $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ для каждой функции $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, то $f \in \mathscr{D}'(X)$;

e) всякая локально интегрируемая функция $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X, \mu)$ задает обобщенную функцию $f \in \mathscr{D}'(X)$ по формуле $\langle f, \varphi\rangle \doteqdot \int_X f(x)\varphi(x)\,dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.

Действительно, поскольку выполняется неравенство $\left|\int_X f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant c\boldsymbol{p}_0(\varphi)$, где $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, $\operatorname{supp}\varphi \Subset K$, $c = \int_K |f(x)|\,dx$ и полунорма $\boldsymbol{p}_0 \in \mathfrak{P}$ является допустимой, то этот линейный функционал f является непрерывным.

Рассмотрим действия с обобщенными функциями $f \in \mathscr{D}'(X)$.

1. *Произведение обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ на функцию $g \in \boldsymbol{C}^\infty(X)$ определяется по формуле $\langle gf, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, g\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.*

Непрерывность функционала gf на $\mathscr{D}(X)$ вытекает из непрерывности оператора $M_g(\varphi) \doteqdot g\varphi$ умножения на функцию $g \in \boldsymbol{C}^\infty(X)$ на пространстве $\mathscr{D}(X)$.

2. *Операторы сдвига $\tau_a f$ и растяжения $\rho_\lambda f$ обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ определяются по формулам $\langle \tau_a f, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle$ и $\langle \rho_\lambda f, \varphi\rangle \doteqdot |\lambda|^m \langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ и $\lambda \neq 0$, где $\tau_a\varphi(x) \doteqdot \varphi(x-a)$ и $\rho_\lambda\varphi(x) \doteqdot \varphi(\lambda^{-1}x)$.*

Непрерывность функционалов $\tau_a f$ и $\rho_\lambda f$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ вытекает из непрерывности соответствующих операторов сдвига τ_a и растяжения ρ_λ на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

3. *Пусть* $A:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ *линейное отображение, т.ч. определитель* $\det A\neq 0$. *Тогда замена переменных* $y=A(x)$ *обобщенной функции* $f\in\mathscr{D}'(X)$ *определяется по формуле* $\langle T_A f,\varphi\rangle \doteqdot \langle f, |\det A|\, T_{A^{-1}}\varphi\rangle$ *при всех* $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, *где* $T_A\varphi(y)=\varphi(A^{-1}(y))$.

Непрерывность функционала $T_A f$ на пространстве $\mathscr{D}(X)$ следует из непрерывности оператора замены переменных $T_A\varphi$ в пространстве $\mathscr{D}(X)$.

4. *Производные обобщенной функции* $f\in\mathscr{D}'(X)$ *степени* $\alpha\in\mathbb{Z}_+^m$ *определяются по формуле* $\langle\partial^\alpha f,\varphi\rangle\doteqdot(-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha\varphi\rangle$ *для всех* $\varphi\in\mathscr{D}(X)$, *где* $|\alpha|=\sum_{k=1}^m\alpha_k$.

Непрерывность функционала $\partial^\alpha f$ в $\mathscr{D}(X)$ вытекает из непрерывности оператора дифференцирования $\partial^\alpha\varphi$ на пространстве $\mathscr{D}(X)$.

5. *Формула Ле́йбница* $\partial_i(gf)=(\partial_i g)f+g(\partial_i f)$, *где* $g\in \boldsymbol{C}^\infty(X)$ *и* $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,\ldots,n$.

В самом деле, применяя обычную формулу Ле́йбница из курса математического анализа, получим при всех $\varphi\in\mathscr{D}(X)$ следующие равенства

$$\langle\partial_i(gf),\varphi\rangle=-\langle f,g\,(\partial_i\varphi)\rangle=\langle f,(\partial_i g)\varphi-\partial_i(g\varphi)\rangle=\langle(\partial_i g)f,\varphi\rangle+\langle g\,(\partial_i f)\varphi\rangle.$$

Определение. Говорят, что обобщенные функции $f,g\in\mathscr{D}'(X)$ совпадают $f=g$ на открытом множестве $Y\subset X$, если $\langle f,\varphi\rangle=\langle g,\varphi\rangle$ для всех $\varphi\in\mathscr{D}(Y)$. Говорят, что обобщенные функции $f,g\in\mathscr{D}'(X)$ совпадают $f(x)=g(x)$ в точке $x\in X$, если они совпадают в некоторой окрестности точки $x\in X$. Замкнутое множество в X

$$\operatorname{supp} f\doteqdot\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}=X\setminus\{x\in X\mid f(x)=0\}$$

называется *носителем обобщенной функции* $f\in\mathscr{D}'(X)$.

Лемма (о локализации). *Если обобщенные функции* $f,g\in\mathscr{D}'(X)$ *совпадают в каждой точке* $x\in Y$ *открытого множества* $Y\subset X$, *то они совпадают на* Y.

Доказательство. Рассмотрим все открытые шары $\boldsymbol{U}_{2r}(x)$, содержащиеся в Y, для которых $f=g$. Так как основная функция $\varphi\in\mathscr{D}(Y)$ имеет компактный носитель $K=\operatorname{supp}\varphi\subset Y$, то существует конечное подпокрытие компакта $K\subseteq\bigcup_{j=1}^n\boldsymbol{U}_{r_j}(x_j)$. Определим основные функции $\varepsilon_i\in\mathscr{D}(X)$ по формуле

$$\varepsilon_i(x)\doteqdot\vartheta_{r_i}(x-x_i)/\textstyle\sum_{j=1}^m\vartheta_{r_j}(x-x_j),\quad i=1,\ldots,n,$$

где $\vartheta_r(x)$ аппроксимативная единица. Так как носитель функции ε_i содержится в шаре $\operatorname{supp}\varepsilon_i\subset\boldsymbol{U}_{2r_i}(x_i)$ и их сумма равна $\sum_{i=1}^n\varepsilon_i(x)=1$ на множестве K, то получаем $\langle f,\varphi\rangle=\sum_{i=1}^n\langle f,\varepsilon_i\varphi\rangle=\sum_{i=1}^n\langle g,\varepsilon_i\varphi\rangle=\langle g,\varphi\rangle$ для всех $\varphi\in\mathscr{D}(Y)$. □

Рассмотрим структуру сопряженного пространства $\mathscr{E}'(X)$ к локально выпуклому пространству $\mathscr{E}(X)=\boldsymbol{C}^\infty(X)$ с системой полунорм $\boldsymbol{p}_{k,K}(\varphi)\doteqdot\sup_{|\alpha|\leqslant k,x\in K}|\partial^\alpha\varphi(x)|$, где $k\in\mathbb{Z}_+$ и $K\Subset X$. Эта система полунорм в $\mathscr{E}(X)$ эквивалентна счетной системе полунорм $\boldsymbol{p}_{n,K_n}$, где $K_n\doteqdot\{x\in X\mid \|x\|\leqslant n,\rho(x,\partial X)\geqslant 1/n\}$ и число $n\in\mathbb{N}$, т.ч. $K_n\neq\emptyset$. Заметим, что $\mathscr{D}(X)\subset\mathscr{E}(X)$ и локально выпуклая топология на $\mathscr{D}(X)$ сильнее его суженной топологии из пространства $\mathscr{E}(X)$, т.к. всякая полупнорма $\boldsymbol{p}_{k,K}$ являются допустимой на пространстве основных функций $\mathscr{D}(X)$.

Теорема. *Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(X)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда существует $g \in \mathscr{E}'(X)$, т.ч. $g|_{\mathscr{D}(X)} = f$. При этом такой функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$ является единственным.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим основные функции $\eta_n \in \mathscr{D}(X)$, где

$$\eta_n(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} \theta_{1/4n}(x-y)\chi_{K_{4n/3}}(y)\,dy = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in K_n; \\ 0, \text{ если } x \notin K_{2n}. \end{cases}$$

Определим линейный функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$ по формуле $\langle g, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \eta_n\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(X)$, где число $n \in \mathbb{N}$ выбрано, т.ч. $\operatorname{supp} f \subset K_n$. Так как линейный оператор $A_n\varphi \doteqdot \eta_n\varphi$ является непрерывным в пространстве $\mathscr{E}(X)$, то $g \in \mathscr{E}'(X)$. Поскольку $\operatorname{supp} f \subset K_n$ и функция $\varphi(x) - \eta_n(x)\varphi(x) = 0$ при всех $x \in K_n$, то

$$\langle g, \varphi\rangle = \langle f, \eta_n\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle - \langle f, \varphi - \eta_n\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X).$$

Достаточность. Если функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$, то $f \doteqdot g|_{\mathscr{D}(X)}$ будет непрерывным линейным функционалом на пространстве $\mathscr{D}(X)$, так как индуктивная топология $\mathscr{D}(X)$ сильнее суженной топологии из пространства $\mathscr{E}(X)$. Поскольку функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$ непрерывен, то найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $c_n > 0$, т.ч. $|\langle g, \varphi\rangle| \leqslant c_n \boldsymbol{p}_{n,K_n}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(X)$. Следовательно, имеем $\langle g, \varphi\rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, т.ч. $\operatorname{supp}\varphi \subset X \setminus K_n$. Таким образом, носитель $\operatorname{supp} f \subset K_n$ является компактным.

Единственность. Допустим, что существуют $g_1, g_2 \in \mathscr{E}(X)$, т.ч. $\langle g_1, \varphi\rangle = \langle g_2, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Для каждой функции $\varphi \in \mathscr{E}(X)$ полагаем $\varphi_n(x) \doteqdot \eta_n(x)\varphi(x)$. Тогда имеем $\varphi_n \in \mathscr{D}(X)$ и $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{E}(X)$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что имеет место равенство $\langle g_1, \varphi\rangle = \lim\langle g_1, \varphi_n\rangle = \lim\langle g_2, \varphi_n\rangle = \langle g_2, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(X)$. □

Следствие. *Отображение $\mathscr{E}'(X) \hookrightarrow \mathscr{D}'(X)$, которое каждой $f \in \mathscr{E}'(X)$ ставит в соответствие $g \doteqdot f|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)}$, является непрерывным и инъективным, а его образ состоит из всех обобщенных функций с компактным носителем.*

Инъективность следует из единственности. Для доказательства непрерывности возьмем $U = \{f \in \mathscr{D}'(X) |\, \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\langle f, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ слабую* окрестность нуля в $\mathscr{D}'(X)$, тогда $V = \{g \in \mathscr{E}'(X) |\, \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\langle g, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ является слабой* окрестностью нуля в $\mathscr{E}'(X)$. Так как $V \subset U$, то указанное отображение непрерывно.

Теорема (Шва́рца о локальной структуре)**.** *Для всякой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ и каждого компактного множества $K \Subset X$ существуют непрерывная функция $g \in \boldsymbol{C}(X)$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, т.ч. $\langle f, \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha g, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$.*

Доказательство. Применяя формулу замены переменных, мы можем считать, что $K \subset [0,1]^m \subset X$. Если функционал $f \in \mathscr{D}'(X)$ является непрерывным, то он будет непрерывным на подпространстве $\mathscr{D}(K) \subset \mathscr{D}(X)$ по системе полунорм

$$\boldsymbol{p}_k(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha| \leqslant k,\, x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \text{ где } k \in \mathbb{Z}_+ \text{ и } \varphi \in \mathscr{D}(K).$$

Поэтому существуют $k \in \mathbb{Z}_+$ и $c_k > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c_k \boldsymbol{p}_k(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. Так как $\varphi(0) = 0$, то по формуле Лагра́нжа получим $\sup_{x\in K}|\varphi(x)| \leqslant \sup_{x\in K}|\partial_j\varphi(x)|$ при всех $j = 1, \ldots, m$. Из этого неравенства, полагая $D \doteqdot \partial_1 \ldots \partial_m$, мы имеем

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi(x)| \leqslant \sup_{x\in K}|D^k\varphi(x)|, \text{ где } |\alpha| \leqslant k \text{ и } \varphi \in \mathscr{D}(K).$$

По формуле Ньюто́на–Ле́йбница для функций многих переменных мы получим

$$\varphi(x) = \int_{[0,x]} D\varphi(y)\,dy, \text{ где } [0,x] \subset [0,1]^m \text{ и } x \in \mathbb{R}^m. \text{ Следовательно, имеем}$$

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c_k \boldsymbol{p}_k(\varphi) \leqslant c_k \sup_{x\in K}|D^k\varphi(x)| \leqslant c_k \int_K |D^{k+1}\varphi|\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(K).$$

Поскольку линейное отображение $D^{k+1} : \mathscr{D}(K) \to \mathscr{D}(K)$ является непрерывным и взаимно однозначным на пространстве $\mathscr{D}(K)$, то корректно определен линейный функционал $F_k(\varphi) \doteqdot \langle f, D^{-k-1}\varphi\rangle$ на образе оператора D^{k+1}. В силу доказанного выше неравенства функционал непрерывен в метрике $\boldsymbol{L}_1(K,\mu)$. По теореме Ха́на–Ба́наха существует непрерывное продолжение функционала F_k на пространство $\boldsymbol{L}_1(K.\mu)$, а в силу теоремы Штейнга́уза существует функция $f_k \in \boldsymbol{L}_\infty(K,\mu)$, т.ч. $F_k(\varphi) = \int_K f_k(x)\varphi(x)\,dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. Пусть $f_k(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]^m \setminus K$. Тогда, интегрируя по частям, мы получим при всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{[0,1]^m} f_k(x) D^{k+1}\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{[0,1]^m} g(x)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx = \langle\partial^\alpha g, \varphi\rangle,$$

где функция $g(x) \doteqdot (-1)^{m(k+1)}\int_{[0,x]} f_k(y)\,dy$ является непрерывной на отрезке $[0,1]^m$ и мультииндекс равен $\alpha \doteqdot (k+2, \ldots, k+2)$. □

Если существует такое $n \in \mathbb{Z}_+$, что для любого компакта $K \Subset Y$ найдется $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\,p_n(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$, то говорят, что обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(X)$ имеет порядок не выше n на множестве $Y \subset X$. Наименьшее такое число n называется *порядком обобщенной функции* $f \in \mathscr{D}'(X)$ на множестве $Y \subset X$. Если же такого числа n не существует, то говорят, что $f \in \mathscr{D}'(X)$ имеет *бесконечный порядок* на множестве $Y \subset X$. По теореме Шварца о локальной структуре на всяком компакте $K \Subset X$ обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(X)$ имеет конечный порядок.

Пример 1. Докажем, что пространство основных функций $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ неметризуемо и значит имеет несчетную систему допустимых полунорм.

Рассмотрим функцию $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ с носителем на отрезке $[-1,1]$, которая была построена на предыдущей лекции, и положим $\varphi_{n,m}(x) = \frac{1}{n}\xi(\frac{x}{m})$. Тогда ее производные $\varphi_{n,m}^{(k)} \rightrightarrows 0$ равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$ для каждого фиксированного $m \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность функций $\varphi_{n,m} \to 0$ при $n \to \infty$ сходится к нулю в топологии пространства основных функций $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ при всех $m \in \mathbb{N}$.

Если топология $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ метризуема некоторой метрикой $\rho(\varphi, \psi)$, то существует последовательность чисел $\{m_n\}_{n=1}^\infty$, т.ч. $\rho(\varphi_{n,m_n}, 0) < \frac{1}{n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность $\varphi_{n,m_n} \to 0$ сходится к нулю в топологии метрики и, следовательно, сходится к нулю в топологии $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Однако это невозможно, т.к. носители функций $\operatorname{supp}\varphi_{n,m_n} = [-m_n, m_n]$ не содержатся на одном компакте. Таким образом, топология пространства основных функций $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ является неметризуемой. В силу теоремы о меризуемости локально выпуклого пространства система допустимых полунорм является несчетной. Аналогичным образом, легко можно доказать, что пространство основных функций $\mathscr{D}(X)$ также является неметризуемым, где $X \subset \mathbb{R}^m$ непустое открытое множество евкидова пространства $\mathbb{R}^m$.

Пример 2. Обобщенные функции, которые представляются в интегральном виде $\langle f, \varphi\rangle = \int_X f(x)\varphi(x)\,dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, где $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X,\mu)$ локально интегрируемая функция по мере Лебега μ на множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, называются *регулярными*. Рассмотрим примеры нерегулярных обобщенных функций. Пусть

$$\left\langle \frac{1}{x \pm \boldsymbol{i}0}, \varphi \right\rangle \doteqdot \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x \pm \boldsymbol{i}\varepsilon}\,dx \ \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Поскольку функции $\frac{1}{x \pm \boldsymbol{i}\varepsilon} \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ являются локально интегрируемыми на $\mathbb{R}$ при каждом $\varepsilon > 0$, то они определяют регулярные обобщенные функции. По теореме о слабой* полноте пространства обобщенных функций, функционалы, заданные по указанной выше формуле, определяют обобщенные функции из пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Предположим, что они являются регулярными. Тогда существуют локально интегрируемые функции $f_\pm \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R},\mu)$, т.ч. имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}} f_\pm(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x \pm \boldsymbol{i}\varepsilon}\,dx \ \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Если носитель $\operatorname{supp}\varphi$ не содержит нуля, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости этом равенстве можно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$. Тогда имеем

$$\int_{\mathbb{R}} f_\pm(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \ \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}\setminus 0).$$

Следовательно, $f_\pm(x) = \frac{1}{x}$ п.в. на $\mathbb{R}$. Отсюда получим $f_\pm \notin \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$, т.к. $\frac{1}{x} \notin \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$. Таким образом, обобщенные функции $\frac{1}{x\pm \boldsymbol{i}0}$ не являются регулярными.

Пример 3. При помощи определенных выше обобщенных функций дадим другое доказательство формулы Сохóцкого $\frac{1}{x\pm \boldsymbol{i}0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp \boldsymbol{\pi i \delta}(x)$.

Рассмотрим обобщенные функции $\ln(x \pm \boldsymbol{i}0)$, определенные по формуле

$$\left\langle \ln(x \pm \boldsymbol{i}0), \varphi \right\rangle \doteqdot \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbb{R}} \ln(x \pm \boldsymbol{i}\varepsilon)\varphi(x)\,dx \ \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Поскольку при каждом $\varepsilon > 0$ функции $\ln(x \pm \boldsymbol{i}\varepsilon) \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ локально интегрируемы на $\mathbb{R}$, то они определяют регулярные обобщенные функции. По теореме о слабой* полноте пространства обобщенных функций, функционалы, заданные по указанной выше формуле, определяют обобщенные функции из пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Из курса комплексного анализа нам известно, что $\ln(x\pm i\varepsilon)=\ln\sqrt{x^2+\varepsilon^2}+i\arg(x\pm i\varepsilon)$, где аргумент комплексного числа выбирается из условия $|\arg(x\pm i\varepsilon)|<\pi$. Так как

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\arg(x\pm i\varepsilon)=\begin{cases}0, \text{ если } x>0;\\ \pm\pi, \text{ если } x<0;\end{cases}$$

то получаем, что $\ln(x\pm i0)=\ln|x|\pm i\theta(-x)$, где локально интегрируемая функция

$$\theta(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x>0;\\ 0, \text{ если } x<0;\end{cases}$$

называется *функцией Хевиса́йда*. Так как функции $\ln|x|$ и $\theta(-x)$ локально интегрируемы, то они задают регулярные обобщенные функции. Поэтому обобщенная функция $\ln(x\pm i0)$ также регулярна. Вычислим ее обобщенную производную $\ln|x|$

$$\langle\ln(x\pm i0)',\varphi\rangle=-\langle\ln(x\pm i0),\varphi'\rangle=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}}\ln(x\pm i\varepsilon)\,\varphi'(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{(x\pm i\varepsilon)}\,dx.$$

Следовательно, $\ln(x\pm i0)'=\frac{1}{x\pm i0}$. Теперь вычислим обобщенную производную

$$\langle\ln|x|',\varphi\rangle=-\langle\ln|x|,\varphi'\rangle=-\int_{\mathbb{R}}\ln|x|\,\varphi'(x)\,dx=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\ln|x|\,\varphi'(x)\,dx=$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\ln\varepsilon(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))+\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\Big)=\Big\langle\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\Big\rangle.$$

Таким образом, мы получаем, что обобщенная производная $\ln|x|'=\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Наконец, вычислим обобщенную производную функции Хевиса́йда $\theta(-x)$

$$\langle\theta(-x)',\varphi\rangle=-\langle\theta(-x),\varphi'\rangle=-\int_{-\infty}^{0}\varphi'(x)\,dx=-\varphi(0)=-\langle\delta(x),\varphi\rangle.$$

Отсюда $\theta(-x)'=-\delta(x)$. Таким образом, поскольку $\ln(x\pm i0)'=\ln|x|'\pm i\theta(-x)'$, то мы получаем формулу Сохо́цкого $\frac{1}{x\pm i0}=\mathcal{P}\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x)$.

Пример 4. Доказать, что предел обобщенных функций $\frac{1}{\varepsilon^m}f(\frac{x}{\varepsilon})$ при $\varepsilon\to+0$ равен

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon^m}f\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)=c\,\delta(x),\ \text{где } f\in L_1(\mathbb{R}^m,\mu) \text{ и } c=\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx.$$

Для доказательства заметим, что функции $\frac{1}{\varepsilon^m}f(\frac{x}{\varepsilon})$ интегрируемы на $\mathbb{R}$ при всех $\varepsilon>0$. Поэтому, производя замену переменных в интеграле Лебега, мы получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Big\langle\frac{1}{\varepsilon^m}f\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),\varphi\Big\rangle=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{\mathbb{R}}f\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\varphi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}}f\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\varphi(x)\,d\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\varphi(\varepsilon x)\,dx=\varphi(0)\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx=\langle c\,\delta(x),\varphi\rangle.$$

При переходе к пределу под знаком интеграла мы использовали теорему Лебега о мажорируемой сходимости.