1 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $X \times Y \doteqdot \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ обозначает прямое произведение множеств, $\mathbb{R}_+ \doteqdot \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ множество неотрицательных чисел, $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел.

Определение. Пара (X,ρ) называется *метрическим пространством*, если X множество и задана функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$, называемая *метрикой*, для которой выполняются следующие свойства:

a) симметричность: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ при всех $x,y \in X$;

b) неравенство треугольника: $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ при всех $x,y,z \in X$;

c) невырожденность: $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Пусть $\{x_n\}$ последовательность элементов x_n метрического пространства (X,ρ). Она называется *сходящейся* $x_n \to x$ к $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x,x_n) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Она называется *фундаментальной* (или последовательностью Коши́), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$ при всех $n,m \geqslant N$. Если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся, то метрическое пространство (X,ρ) называется *полным*.

Определение. Пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ называется *нормированным пространством* над $\mathbb{F}$, если $\boldsymbol{E}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел и задана функция $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$, называемая *нормой*, для которой выполняются следующие свойства:

a) однородность: $\boldsymbol{p}(\lambda x) = |\lambda| \boldsymbol{p}(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \boldsymbol{E}$;

b) неравенство треугольника: $\boldsymbol{p}(x+y) \leqslant \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{p}(y)$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$;

c) невырожденность: $\boldsymbol{p}(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Норма обычно обозначается через $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$. Метрика $\rho(x,y)$ в нормированном пространстве определяется равенством $\rho(x,y) \doteqdot \|x-y\|$. Поэтому всякое нормированное пространство является метрическим пространством. Полное нормированное пространство называется *ба́наховым пространством*.

Пример 1. Нормированное пространство $\mathbb{F}^n \doteqdot \{x = \{x_k\}_{k=1}^n \mid x_k \in \mathbb{F}\}$ с нормой $\|x\| \doteqdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ называется *конечномерным евклидовым пространством*.

Пример 2. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *ограниченной* на множестве X, если существует число $c > 0$, т.ч. $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in X$. Нормированное пространство $\boldsymbol{B}(X) \doteqdot \{f : X \to \mathbb{F} \mid f \text{ ограничена}\}$, состоящее из ограниченных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством ограниченных функций*.

Пример 3. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *непрерывной* в (X,ρ), если для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$.

Нормированное пространство $\boldsymbol{C}(X) \doteqdot \{f : X \to \mathbb{F} \mid f \text{ ограничена и непрерывна}\}$, состоящее из ограниченных и непрерывных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством непрерывных функций*.

Лемма. *Пространства* $\mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{B}(X)$ *и* $\boldsymbol{C}(X)$ *являются полными.*

Доказательство. Полнота $\mathbb{F}^n$ известна из курса математического анализа. Если $\{f_n\}$ последовательность Коши в $\boldsymbol{B}(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и $n, m \geqslant N$. По критерию Коши $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех $x \in X$ и $n \geqslant N$, т.е. последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$ к функции $f(x)$. Отсюда $\|f_n - f\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Так как $\|f\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_n\|$, то функция f ограничена и значит $f \in \boldsymbol{B}(X)$. Поэтому $\boldsymbol{B}(X)$ полно.

Поскольку равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, то $\boldsymbol{C}(X)$ также будет полным пространством. □

Открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве обозначаются через

$$\boldsymbol{U}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) < r\}, \quad \boldsymbol{S}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) \leqslant r\},$$

Здесь $x \in X$ центр шара, а $r > 0$ радиус шара. Для $A \subset X$ обозначим через

$\mathring{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \subset A\}$ — множество *внутренних* точек;

$\tilde{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A = \{x\}\}$ — множество *изолированных* точек;

$\overline{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A \neq \{\emptyset\}\}$ — множество точек *прикосновения*.

$\mathring{A}$ называются *внутренностью* множества A, а $\overline{A}$ *замыканием* множества A. Их разность $\acute{A} \doteqdot \overline{A} \setminus \mathring{A}$ называется множеством *предельных точек* множества A.

Если $\mathring{A} = A$, то множество A называется *открытым*.
Если $\overline{A} = A$, то множество A называется *замкнутым*.
Если $\overline{A} = X$, то множество A называется *всюду плотным*.
Если $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, то множество A называется *нигде не плотным*.

Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется *сепара́бельным*, если в X существует счётное и всюду плотное подмножество $A \subset X$.

Лемма. *Свойства операции замыкания:*

1. $\overline{A} = \{x \in X \mid \exists x_n \in A,\ \text{т.ч. } x_n \to x\}$.

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Доказательство. Точка $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда существуют $x_n \in A$, т.ч. $x_n \in A \cap \boldsymbol{U}_{1/n}(x)$, что равносильно $\rho(x, x_n) < 1/n$. Отсюда следует, что $x_n \to x$.

Если $x \in \overline{A \cup B}$, то существуют точки $x_n \in A \cup B$, т.ч. $x_n \to x$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset A$, либо $\{x_{n_k}\} \subset B$, т.ч. $x_{n_k} \to x$. Поэтому справедливо включение $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Обратное включение $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ очевидно.

Включение $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ очевидно. Пусть $x \in \overline{\overline{A}}$, тогда существует последовательность точек $x_n \in \overline{A}$, т.ч. $x_n \to x$. Для каждого n найдётся последовательность точек $x_{nm} \in A$, т.ч. $x_{nm} \to x_n$. Выберем подпоследовательность $\{x_{nm_n}\}$, т.ч. $\rho(x_{nm_n}, x_n) < 1/n$. Отсюда в силу неравенства треугольника $\rho(x_{nm_n}, x) \leqslant \rho(x_{nm_n}, x_n) + \rho(x_n, x) \to 0$, т.е. $x \in \overline{A}$. □

Определение. Отображение $F : X \to Y$ метрических пространств (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) называется *непрерывным*, если для каждого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(F(x),F(y)) < \varepsilon$ при всех $y \in X$, $\rho_X(x,y) < \delta$.

Отображение $F : X \to Y$ называется *изометричным*, если для всех $x,y \in X$ имеет место $\rho_Y(F(x),F(y)) = \rho_X(x,y)$. Если, кроме того, образ $F(X) = Y$, то F называется *изометрией* X на Y, а пространства X и Y называются *изометричными*.

Изометричное отображение инъективно и непрерывно. Если $F : X \to Y$ изометрия X на Y, то обратное отображение $F^{-1} : Y \to X$ также будет изометрией.

Теорема (о пополнении). *Для каждого метрического пространства* (X,ρ_X) *существует такое полное метрическое пространство* (Y,ρ_Y) *и изометричное отображение* $F : X \to Y$*, что образ* $F(X) \subset Y$ *является всюду плотным в* Y*. При этом любые два таких пространства* (Y,ρ_Y) *будут изометричны.*

Доказательство. Пусть $f_x(y) \doteqdot \rho_X(x,y) - \rho_X(x_0,y)$, где $x_0 \in X$ фиксирована. По неравенству треугольника $|f_x(y)| \leqslant \rho_X(x,x_0)$, т.е. $f_x \in \boldsymbol{B}(X)$ при всех $x \in X$. Определим отображение $F : X \to \boldsymbol{B}(X)$ по формуле $F(x) \doteqdot f_x$ и положим $Y \doteqdot \overline{F(X)}$. Так как

$$\rho_Y(F(x_1),F(x_2)) = \sup_{y\in X}|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = \sup_{y\in X}|\rho_X(x_1,y) - \rho_X(x_2,y)| = \rho_X(x_1,x_2),$$

то отображение F изометрично. Если существуют два отображения $F : X \to Y$ и $G : X \to Z$, удовлетворяющие условиям теоремы, то для каждого $y \in Y$ найдётся последовательность $x_n \in X$, т.ч. $F(x_n) \to y$. Тогда в силу изометричности $G(x_n) \to z$. Определим отображение $J : Y \to Z$ по формуле $J(y) \doteqdot z$. В силу изометричности F и G оно не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Если $y_1,y_2 \in Y$, то

$$\rho_Y(y_1,y_2) = \lim_{n\to\infty}\rho_Y(F(x_n^1),F(x_n^2)) = \lim_{n\to\infty}\rho_X(x_n^1,x_n^2) = \lim_{n\to\infty}\rho_Z(G(x_n^1),G(x_n^2)) = \rho_Z(z_1,z_2)\,.$$

Следовательно, отображение $J : Y \to Z$ изометрично. Аналогичным образом, проверяется, что обратное отображение $J^{-1} : Z \to Y$ также изометрично. Таким образом, отображение J является изометрией Y на Z. □

Определение. Отображение $F : X \to X$ метрического пространства (X,ρ) в себя называется *сжимающим*, если для некоторого $0 < \lambda < 1$ выполняется неравенство $\rho(F(x),F(y)) \leqslant \lambda\rho(x,y)$ при всех $x,y \in X$.

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Если* (X,ρ) *полное метрическое пространство, то для всякого сжимающего отображения* $F : X \to X$ *существует единственная неподвижная точка* $x \in X$*, т.е.* $F(x) = x$*.*

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in X$ и $x_1 \doteqdot F(x_0), x_2 \doteqdot F(x_1), \ldots$, т.е. $x_n = F^n(x_0)$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим при всех $n < m$

$$\rho(x_n,x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}\rho(x_k,x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{m-1}\rho(F^k(x_0),F^k(x_1)) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}\lambda^k\rho(x_0,x_1) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(x_0,x_1)\,.$$

Поэтому $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Так как $F(x_{n-1}) = x_n$, то, переходя к пределу и используя непрерывность F, получим $F(x) = x$. Если существует еще одна точка $y \in X$, т.ч. $F(y) = y$, то из неравенства $\rho(x,y) = \rho(F(x),F(y)) \leqslant \lambda\rho(x,y)$ следует, что $\rho(x,y) = 0$, т.е. имеет место равенство $x = y$. □

Лемма (о вложенных шарах). *Если в полном метрическом пространстве (X,ρ) задана последовательность замкнутых вложенных шаров $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \supset \boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \supset \dots$ и предел радиусов $\lim r_n = 0$, то их пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$ не пусто.*

Доказательство. Поскольку по условию $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $n < m$ и $\lim r_n = 0$, то $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $m \to \infty$, получим $\rho(x_n,x) \leqslant r_n$. Следовательно, x принадлежит пересечению $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$. □

Определение. Множество $A \subset X$ в метрическом пространстве (X,ρ) называется множеством *первой категории*, если является счётным объединением $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ нигде не плотных множеств $A_n \subset X$. Множество $A \subset X$ называется множеством *второй категории*, если оно не является множеством первой категории.

Теорема (Бэ́ра). *Каждое полное метрическое пространство (X,ρ) является множеством второй категории.*

Доказательство. Предположим обратное, т.е. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества A_n нигде не плотны. Так как множество $X \setminus \overline{A}_1 \neq \emptyset$ не пусто, то существуют $x_1 \in X \setminus \overline{A}_1$, а так как $X \setminus \overline{A}_1$ открыто, то существует шар $\boldsymbol{U}_{r_1}(x_1) \subset X \setminus \overline{A}_1$. Аналогично, существуют $x_2 \in \boldsymbol{U}_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и $\boldsymbol{U}_{r_2}(x_2) \subset \boldsymbol{U}_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и т.д. При этом, уменьшая радиусы шаров $r_n > 0$, можно считать, что шары являются замкнутыми и $\lim r_n = 0$. В результате получим последовательность замкнутых вложенных шаров $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_2) \supset \boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \supset \cdots$. Тогда по лемме существует точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$. Отсюда $x \notin A_n$ при всех n, что невозможно. Таким образом, X не является множеством первой категории. □

Пример 4. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ является множеством первой категории, т.к. каждая точка в $\mathbb{R}$ является нигде не потным множеством, а $\mathbb{Q}$ есть счётное объединение точек. По теореме Бэ́ра множество действительных чисел $\mathbb{R}$ будет множеством второй категории. Отсюда множество иррациональных чисел $\mathbb{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ является множеством второй категории.

2 МЕТРИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathbf{2}^X$ обозначает множество всех подмножеств X, включая пустое множество $\emptyset \in \mathbf{2}^X$. Любое непустое подмножество $\tau \subset \mathbf{2}^X$ называется *системой множеств* X.

Определение. Пара (X,τ) называется *топологическим пространством*, если в множестве X определена система множеств $\tau \subset \mathbf{2}^X$, называемая *топологией*, т.ч.

a) $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$;

b) если $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$, то $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

c) если $\{B_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, то $\bigcap_{i=1}^n B_i \in \tau$.

В топологическом пространстве (X,τ) множества $A \in \tau$ называются *открытыми*, а их дополнения $A' \doteqdot X \setminus A$ называются *замкнутыми*. Всякое открытое множество $O_x \in \tau$, содержащее точку $x \in O_x$, называется *окрестностью* этой точки.

Подсистема $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии* τ, если любое множество $A \in \tau$ можно представить в виде объединения $A = \bigcup_{i\in I} B_i$, где $B_i \in \beta$.

С помощью окрестностей, также как в метрическом пространстве, можно ввести понятия внутренних, предельных, изолированных и точек прикосновения, а также понятия замыкания, всюду плотного и нигде не плотного множества.

1. *В метрическом пространстве* (X,ρ) *система множеств* $\tau_X \doteqdot \{A \subset X \mid \mathring{A} = A\}$ *является топологией. Открытые шары* $\boldsymbol{U}_r(x)$ *образуют базу топологии* τ_X.

В самом деле, если $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, то $x \in A_i$ при некотором $i \in I$. Тогда существует шар $\boldsymbol{U}_r(x) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Если $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i$, то $x \in B_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Тогда существуют шары $\boldsymbol{U}_{r_i}(x) \subset B_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Пусть $r \doteqdot \min_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$, тогда $\boldsymbol{U}_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^n B_i$. Кроме того, по определению открытого множества система всех открытых шаров $\boldsymbol{U}_r(x) \subset X$ образует базу топологии метрического пространства.

2. *Метрика и соответствующая ей топология в произведении* $X = X_1 \times X_2$ *метрических пространств* (X_1, ρ_{X_1}) *и* (X_2, ρ_{X_2}) *определяется по формуле*

$$\rho_X(x,y)) \doteqdot \rho_{X_1}(x_1,y_1) + \rho_{X_2}(x_2,y_2), \quad \text{где } x = (x_1,x_2),\, y = (y_1,y_2) \in X_1 \times X_2 .$$

Метрику в произведении $X = X_1 \times X_2$ можно определить другим эквивалентным способом, например, по формуле $\rho'_X(x,y) \doteqdot \sqrt{\rho^2_{X_1}(x_1,y_1) + \rho^2_{X_2}(x_2,y_2)}$. Применяя элементарные неравенства $\rho_X(x,y)/2 \leqslant \rho'_X(x,y) \leqslant \rho_X(x,y)$, легко показать, что топология в метрике ρ_X совпадает с топологией в метрике ρ'_X.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если для любого $A \in \tau_Y$ прообраз $f^{-1}(A) \in \tau_X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *открытым*, если для любого $A \in \tau_X$ образ $f(A) \in \tau_Y$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно одновременно является биективным, непрерывным и открытым отображением.

Теорема. *Пусть* (X,ρ_X) *и* (Y,ρ_Y) *являются метрическими пространствами. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) *отображение* $f: X\to Y$ *является непрерывным;*

b) *для каждого* $x\in X$ *и для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$*, т.ч. для всех* $y\in X$, $\rho_X(x,y)<\delta$*, выполняется неравенство* $\rho_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$*;*

c) *для любой сходящейся последовательности* $x_n\to x$ *в* X *ее образ является сходящейся последовательностью* $f(x_n)\to f(x)$ *в* Y.

Доказательство. Пусть выполнено условие (a) и $\varepsilon>0$. Тогда для каждого $x\in X$ существует шар $\boldsymbol{U}_\delta(x)\subset f^{-1}(\boldsymbol{U}_\varepsilon(f(x)))$, что равносильно (b). Пусть выполнено (b) и последовательность сходится $x_n\to x$ в X, т.е. для заданного $\delta>0$ существует N, т.ч. $\rho_X(x,x_n)<\delta$ для всех $n\geqslant N$. В силу (b) выполняется $\rho_Y(f(x),f(x_n))<\varepsilon$ для всех $n\geqslant N$. Отсюда $f(x_n)\to f(x)$, т.е. выполнено (c). Пусть $A\subset Y$ замкнутое множество. Если $x_n\in f^{-1}(A)$ и $x_n\to x$, то по условию (c) получим $f(x_n)\to f(x)$ и из замкнутости $f(x)\in A$, т.е. $x\in f^{-1}(A)$. Поэтому прообраз замкнутого множества замкнут. Так как открытые множества являются дополнениями замкнутых множеств, то прообраз любого открытого множества открыт. □

Определение. Пара $(\boldsymbol{E},\rho)$ называется *метрическим линейным пространством*, если $\boldsymbol{E}$ линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, в котором определена метрика $\rho(x,y)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

a) метрика инвариантна $\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)$ при всех $x,y,z\in\boldsymbol{E}$;

b) умножение $f(\lambda,x)\doteqdot\lambda x$ является непрерывным отображением $f:\mathbb{F}\times\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$.

Полное метрическое линейное пространство называется *пространством Фреше*.

Пусть $\|x\|\doteqdot\rho(x,0)$ обозначает *квазинорму* метрики $\rho(x,y)$, тогда $\rho(x,y)=\|x-y\|$. Квазинорма удовлетворяет неравенству треугольника $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, симметрична $\|-x\|=\|x\|$ и не вырождена, т.е. $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$. Однако свойство однородности нормы $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ может не выполняться.

Пример 1. В метрическом линейном пространстве операция сложения $x+y$ будет непрерывным отображением. В самом деле, в силу неравенство треугольника

$$\|(x+y)-(x_0+y_0)\|\leqslant\|x-x_0\|+\|y-y_0\|<\varepsilon \text{ при } \|x-x_0\|<\varepsilon/2 \text{ и } \|y-y_0\|<\varepsilon/2.$$

Каждое нормированное пространство является метрическим линейным пространством. Действительно, в нем метрика $\rho(x,y)=\|x-y\|$ является инвариантной. Для доказательства непрерывности операции умножения λx достаточно использовать следующее неравенство, которое получается из свойств нормы. Тогда

$$\|\lambda x-\lambda_0x_0\|\leqslant|\lambda-\lambda_0|\,\|x-x_0\|+|\lambda-\lambda_0|\,\|x_0\|+|\lambda_0|\,\|x-x_0\|<\varepsilon,$$

если предположить, что выполняются неравенства

$$|\lambda_0|<a,\quad \|x_0\|<b,\quad \|x-x_0\|<\varepsilon/3a,\quad |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon/3b<a.$$

Определение. Отображение $f: X \to Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ при всех $x, y \in X$, $\rho_X(x, y) < \delta$.

Например, метрика $\rho: X \times X \to \mathbb{R}_+$ является равномерно непрерывной функцией, поскольку в силу неравенство треугольника $|\rho(x,y) - \rho(x_0,y_0)| \leqslant |\rho(x,y) - \rho(x_0,y)| + |\rho(x_0,y) - \rho(x_0,y_0)| \leqslant \rho(x,x_0) + \rho(y,y_0) < \varepsilon$, если $\rho(x,x_0) < \varepsilon/2$ и $\rho(y,y_0) < \varepsilon/2$.

Теорема (принцип продолжения по непрерывности)**.** *Пусть $f: A \to Y$ равномерно непрерывно отображает всюду плотное множество $A \subset X$ пространства (X, ρ_X) в полное метрическое пространство (Y, ρ_Y). Тогда существует единственное равномерно непрерывное отображение $g: X \to Y$, т.ч. $g(x) = f(x)$ при всех $x \in A$.*

Доказательство. По определению равномерной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x, y \in A$: $\rho_X(x,y) < \delta$. В силу того, что $A \subset X$ всюду плотно, для каждого $x \in X$ существуют $x_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$. Так как всякая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши, то выберем N, т.ч. $\rho_X(x_n, x_m) < \delta$ при всех $n, m \geqslant N$. Тогда $\rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Поэтому $\{f(x_n)\}$ есть последовательность Коши. Следовательно, в силу полноты Y существует предел $g(x) \doteqdot \lim f(x_n)$.

Если взять другую сходящуюся последовательность $y_n \to x$, то, полагая $z_n \doteqdot x_k$ при $n = 2k-1$ и $z_n \doteqdot y_k$ при $n = 2k$, мы имеем сходящуюся последовательность $z_n \to x$. Тогда $\lim f(z_n) = \lim f(y_n) = \lim f(x_n) = g(x)$. Поэтому $g(x)$ не зависит от выбора сходящейся последовательности и значит определение $g(x)$ корректно.

Пусть $x, y \in X$ и $\rho_X(x,y) < \delta$. Выберем последовательности точек $x_n, y_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Тогда существует N, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < \delta$ при всех $n \geqslant N$. В силу равномерной непрерывности отображения f имеем неравенство $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $\rho_Y(g(x), g(y)) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, отображение $g: X \to Y$ равномерно непрерывно. □

Определение. Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре $\boldsymbol{U}_r(0)$ с центром в нуле, т.е. существует $r > 0$, т.ч. $\|x\| < r$ при всех $x \in A$.

Сходящиеся последовательности $\{x_n\}$ и последовательность Коши $\{x_n\}$ является ограниченными множествами. В самом деле, любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Пусть $d = \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \|x_n\|$. Поэтому, если $n \geqslant N$, то $\|x_n\| \leqslant \|x_N\| + \|x_n - x_N\| < d + \varepsilon$. Отсюда имеем включение $\{x_n\} \subset \boldsymbol{U}_{d+\varepsilon}(0)$.

Определение. Отображение $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ нормированных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *линейным*, если выполняются следующие свойства:

a) аддитивности $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$;

b) однородности $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Определение. Линейное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если образ $f(A) \subset \boldsymbol{F}$ любого ограниченного множества $A \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством в пространстве $\boldsymbol{F}$.

Теорема. *Для линейного отображения $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ нормированных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ следующие условия эквивалентны: отображение непрерывно; отображение равномерно непрерывно; отображение ограничено.*

Доказательство. Непрерывность линейного отображения равносильна непрерывности в одной точке, например, в точке нуль. Если f непрерывно в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| < \varepsilon$ при $\|x-y\| < \delta$, т.е. f является равномерно непрерывны отображением.

Если $A \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством, то $\|x\| < r$ при всех $x \in A$. Отсюда в силу непрерывности f в нуле получим $\|f(\delta x/r)\| < \varepsilon$, т.к. $\|\delta x/r\| < \delta$. Следовательно, $\|f(x)\| < 2r\varepsilon/\delta$ при всех $x \in A$ и значит образ $f(A)$ ограничен.

Пусть $x_n \to 0$. Выберем $n_1 < n_2 < \ldots$, т.ч. $\|x_n\| < 1/k^2$ при всех $n \geqslant n_k$. Если $m_n \doteqdot k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, то $m_n \to \infty$ и $m_n x_n \to 0$, т.к. $\|m_n x_n\| = k\|x_n\| < 1/k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Поэтому $\{m_n x_n\}$ ограничена и по условию $\{f(m_n x_n)\}$ ограничена. Отсюда $\|f(x_n)\| = \|f(m_n x_n)\|/m_n \to 0$, т.е. отображение непрерывно в нуле. □

Определение. Система $\{f_i\}_{i \in I}$ отображений $f_i : X \to Y$ называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$ для всех индексов $i \in I$ и для всех $x, y \in X$, $\rho_X(x,y) < \delta$.

Теорема (принцип равностепенной непрерывности)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ является банаховым, а $\boldsymbol{F}$ нормированным пространством, и множества $M_x \doteqdot \{y = f_i(x) \mid i \in I\}$ ограничены в $\boldsymbol{F}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда система $\{f_i\}_{i \in I}$ непрерывных линейных отображений $f_i : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ является равностепенно непрерывной.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим замкнутые множества

$$E_n \doteqdot \bigcap_{i \in I} \big\{x \in \boldsymbol{E} \big| \, \big\| f_i(x) \big\| \leqslant n\varepsilon/2 \big\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

По условию ограниченности множеств M_x для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|f_i(x)\| < n\varepsilon/2$ при всех $i \in I$. Поэтому мы имеем $\boldsymbol{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

В силу теоремы Бэ́ра некоторое множество E_n содержит некоторый шар $\boldsymbol{U}_r(x_0)$. Тогда выполняется неравенство $\|f_i(y)\| < n\varepsilon/2$ при всех $y \in \boldsymbol{U}_r(x_0)$ и при всех $i \in I$. Применяя неравенство треугольника и линейность отображений, получим

$$\big\|f_i(y)\big\| \leqslant \big\|f_i(y + x_0)\big\| + \big\|f_i(x_0)\big\| < n\varepsilon \text{ при всех } \|y\| < r \text{ и при всех } i \in I.$$

Следовательно, $\|f_i(x+y) - f_i(x)\| = \|f_i(y)\| < \varepsilon$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, при всех $\|y\| < r/n$ и при всех $i \in I$. Таким образом, отображение равностепенно непрерывно. □

3 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть далее (X,ρ) является метрическим пространством.

Определение. Множество $A\subset X$ называется *ε-сетью множества* $M\subset X$, если $M\subset\bigcup_{x\in A}\boldsymbol{S}_\varepsilon(x)$, т.е. для любого $y\in M$ найдется $x\in A$, т.ч. $\rho(x,y)\leqslant\varepsilon$.

Множество $M\subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon>0$ существует конечная ε-сеть $A=\{x_k\}_{k=1}^m$ множества M.

1. *Если M вполне ограничено и $x_0\in X$, то существует $r>0$ т.ч. $M\subset\boldsymbol{S}_r(x_0)$.*

Пусть $A=\{x_k\}_{k=1}^m$ есть 1-сеть M и $r\doteqdot\max_{1\leqslant k\leqslant m}\rho(x_0,x_k)+1$. Тогда для каждого $x\in M$ найдется k, т.ч. $\rho(x_0,x)\leqslant\rho(x_0,x_k)+\rho(x_k,x)\leqslant r$. Отсюда $M\subset\boldsymbol{S}_r(x_0)$.

2. *Если M вполне ограничено, то его замыкание $\overline{M}$ вполне ограничено.*

Пусть $A=\{x_k\}_{k=1}^m$ есть ε-сеть M. Так как $M\subset\bigcup_{k=1}^m\boldsymbol{S}_\varepsilon(x_k)$, то из замкнутости объединения шаров следует, что $\overline{M}\subset\bigcup_{k=1}^m\boldsymbol{S}_\varepsilon(x_k)$, т.е. A есть ε-сеть $\overline{M}$.

3. *Множество $M\subset\mathbb{F}^n$ в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{F}^n$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.*

Необходимость следует из свойства 1. Докажем достаточность в случае $\mathbb{F}^n=\mathbb{R}^n$, поскольку $\mathbb{F}^n=\mathbb{R}^{2n}$, если $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. По условию ограниченности M существует куб $\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|\leqslant a$ с ребром $a>0$, содержащий M. Разобьем этот куб на кубики с ребром $\delta\doteqdot a/k$. Тогда вершины кубиков $\{x_j\}_{j=1}^m$ образуют конечную ε-сеть M, где $m=(k+1)^n$ и $\varepsilon=\sqrt{n}\delta=\sqrt{n}a/k$ величина диагонали кубика.

Теорема. *В метрическом пространстве (X,ρ) следующие свойства, которым удовлетворяет множество $K\subset X$, являются эквивалентными.*

a) **Компактность**: *для всякого открытого покрытия $K\subset\bigcup_{i\in I}A_i$, где $\mathring{A}_i=A_i$, существует конечное подпокрытие $K\subset\bigcup_{k=1}^n A_{i_k}$, где $i_k\in I$.*

b) **Счетная компактность**: *для каждого бесконечного подмножества $A\subset K$ существует предельная точка $x\in\acute{A}$, т.ч. $x\in K$.*

c) **Секвенциальная компактность**: *для каждой последовательности $\{x_n\}\subset K$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k}\to x$, т.ч. $x\in K$.*

d) **Критерий компактности Ха́усдорфа**: *множество K является полным и вполне ограниченным.*

Доказательство. $a)\Rightarrow b)$. Пусть $A\subset K$ бесконечное множество. Если K не имеет предельных точек A, то для любого $x\in K$ найдется $r>0$, т.ч. $\boldsymbol{U}_r(x)\cap A$ конечное множество. Так как шары $\boldsymbol{U}_r(x)$ покрывают K, то, выбирая конечное подпокрытие, получим, что множество A конечно. Получили противоречие.

$b)\Rightarrow c)$. Если последовательность $A=\{x_n\}$ образует бесконечное множество K, то по условию b) существует предельная точка $x\in\acute{A}$, т.ч. $x\in K$. Тогда найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k}\in\boldsymbol{U}_{1/k}(x)$. Отсюда $x_{n_k}\to x$.

$c) \Rightarrow d)$. Если $\{x_n\} \subset K$ последовательность Коши, то из c) она имеет сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K$. Отсюда $\|x - x_n\| \leqslant \|x - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_n\| \to 0$ при всех $n_k \geqslant n \to \infty$, т.е. $x_n \to x$. Следовательно, множество K полно.

Докажем вполне ограниченность. Пусть $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in K$. Тогда существует $x_1 \in K$, т.ч. $\rho(x_1, x_0) > \varepsilon$, иначе $\{x_0\}$ образует ε-сеть K. Аналогично, существует $x_2 \in K$, т.ч. $\rho(x_2, x_0) > \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$, иначе $\{x_0, x_1\}$ образуют ε-сеть K, и т.д. По индукции существует $x_n \in K$, т.ч. $\rho(x_n, x_k) > \varepsilon$ при $k = 1, \ldots, n-1$. Если процесс выбора точек оборвется на некотором шаге n, то $\{x_k\}_{k=1}^n$ конечная ε-сеть K. В противном случае последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

$d) \Rightarrow c)$. Если $\{x_n\} \subset K$, то по условию вполне ограниченности найдется конечное покрытие K шарами $\boldsymbol{S}_{r_1}(y)$ радиуса $r_1 = 1$. Тогда имеется шар $\boldsymbol{S}_{r_1}(y_1)$, содержащий бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$. Аналогично найдется конечное покрытие K шарами радиуса $r_2 = 1/2$ и имеется шар $\boldsymbol{S}_{r_2}(y_2)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$ и т.д. По индукции найдется подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$, которая содержится в шаре $\boldsymbol{S}_{r_k}(y_k)$ радиуса $r_k = 1/k$. Обозначим через $z_n \doteqdot x_n^{(n)}$ диагональную подпоследовательность. Так как по неравенству треугольника $\rho(z_n, z_m) \leqslant \rho(z_n, y_n) + \rho(y_n, z_m) \leqslant 2r_n$ при всех $m > n$, то $\{z_n\}$ последовательность Коши. В силу полноты она имеет предел в K.

$d) \Rightarrow a)$. Пусть задано открытое покрытие $K \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Вначале покажем, что при некотором $\varepsilon > 0$ всякий шар $\boldsymbol{S}_\varepsilon(x)$ содержится в некотором A_i. Иначе для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся точки $x_n \in K$, т.ч. $\boldsymbol{S}_{r_n}(x_n) \not\subset A_i$ при всех $i \in I$, где $r_n = 1/n$. По свойству c) найдется подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K$. Так как x содержится в некотором A_i, то найдется шар $\boldsymbol{S}_{2r}(x) \subset A_i$. Выберем n_k, т.ч. $r_{n_k} < r$ и $\rho(x_{n_k}, x) < r$. Тогда $\boldsymbol{S}_{r_{n_k}}(x_{n_k}) \subset \boldsymbol{S}_r(x_{n_k}) \subset \boldsymbol{S}_{2r}(x) \subset A_i$, что невозможно по предположению.

Пусть теперь $\{y_k\}_{k=1}^m$ конечная ε-сеть K. Тогда в силу доказанного найдется A_{i_k}, т.ч. $\boldsymbol{S}_\varepsilon(y_k) \subset A_{i_k}$. Поэтому получаем $K \subset \bigcup_{k=1}^m \boldsymbol{S}_\varepsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^m A_{i_k}$. □

Следствие. *Замыкание $\overline{M}$ вполне ограниченного множества $M \subset X$ в полном метрическом пространстве (X, ρ) является компактным.*

В полном метрическом пространстве замыкание вполне ограниченного множества является вполне ограниченным и полным. По критерию Ха́усдорфа $\overline{M}$ компактно.

Определение. Множество $M \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется *предкомактным*, если его замыкание $\overline{M}$ компактно.

В силу указанного следствия в полном метрическом пространстве множество вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно предкомпактно.

Замечание. Топологическое пространство называется *хаусдофовым*, если любые две различные его точки имеют непересекающиеся окрестности. Определения компактности, введенные в теореме, можно рассматривать в произвольном хаусдорфовом топологическом пространстве. При этом верными будут только две импликации $a) \Rightarrow b)$ и $c) \Rightarrow b)$. Никакие другие импликации не выполняются.

Пример. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{\ell}_p$, состоящее из всех последовательностей $x = \{x_n\}$ действительных или комплексных чисел $x_n \in \mathbb{F}$, т.ч. $\|x\|_{\ell_p} < \infty$, где

$$\|x\|_{\ell_p} \doteqdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, & \text{если } 0 < p < 1 \text{ (квазинорма)}; \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty \text{ (норма)}; \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|, & \text{если } p = \infty \text{ (норма)}. \end{cases}$$

Если ввести инвариантную метрику $\rho(x,y) \doteqdot \|x-y\|_{\ell_p}$, то $\boldsymbol{\ell}_p$ будет метрическим линейным пространством. При этом выполняются свойства нормы и квазинормы. Свойства однородности и невырожденности очевидно вытекают из определения. В случае $p = 1, \infty$ неравенство треугольника легко проверяется в силу того, что оно выполняется для модуля. В случае $1 < p < \infty$ оно вытекает из соответствующего неравенства для пространства $\boldsymbol{L}_p(X, \mu)$, которое известно из курса действительного анализа. В случае $0 < p < 1$ неравенство треугольника для квазинормы получается из следующего неравенства при $q = 1$.

Лемма 1. $(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q)^{1/q} \leqslant (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ *при всех* $0 < p < q$.

Доказательство. Так как правая и левая части этого неравенства однородны при умножении x_n на $\lambda > 0$, то достаточно доказать его при $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$. Тогда $|x_n| \leqslant 1$ и значит $|x_n|^q \leqslant |x_n|^p$. Следовательно, имеем $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$. □

В частности, из этого неравенства следует, что $\boldsymbol{\ell}_p \subset \boldsymbol{\ell}_q$ при всех $0 < p < q \leqslant \infty$.

Лемма 2. *Пространства $\boldsymbol{\ell}_p$ полно. Поэтому пространство $\boldsymbol{\ell}_p$ при $0 < p < 1$ является пространством Фреше́, а при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ба́наховым пространством.*

Доказательство. Докажем полноту $\boldsymbol{\ell}_p$. Пусть $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}$ есть последовательность Коши, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_{\ell_p} < \varepsilon$ при всех $k, l \geqslant N$. Тогда $|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| < \varepsilon$ при всех $k, l \geqslant N$ и $n \geqslant 1$, т.е. $\{x_n^{(k)}\} \subset \mathbb{F}$ последовательность Коши при каждом $n \geqslant 1$. В силу полноты поля $\mathbb{F}$ существует предел $\lim_{l \to \infty} x_n^{(l)} = x_n$. Полагая $x = \{x_n\}$ и переходя к пределу в неравенстве выше, имеем $\|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} \leqslant \varepsilon$ при всех $k \geqslant N$. Поскольку $\|x\|_{\ell_p} \leqslant \|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} + \|x^{(k)}\|_{\ell_p} \leqslant \varepsilon + \|x^{(k)}\|_{\ell_p}$, то $x \in \boldsymbol{\ell}_p$. Таким образом, последовательность $x^{(k)} \to x$ сходится к $x \in \boldsymbol{\ell}_p$.

Непрерывность операции умножения в $\boldsymbol{\ell}_p$ при $0 < p < 1$ доказывается также, как в любом нормированном пространстве (см. предыдущую лекцию). □

Для каждого $x = \{x_k\}$ обозначим через $y = s_n(x)$ финитную последовательность $y = \{y_k\}$, т.ч. $y_k = x_k$ при $k \leqslant n$ и $y_k = 0$ при $k > n$. Если $0 < p < \infty$ и $n \to \infty$, то $\|x - s_n(x)\|_{\ell_p} \to 0$, т.е. $s_n(x) \to x$ сходится в метрике $\boldsymbol{\ell}_p$. Поэтому множество всех финитных последовательностей всюду плотно в $\boldsymbol{\ell}_p$ при всех $0 < p < \infty$. Поскольку в подпространстве финитных последовательностей всюду плотно множество всех финитных последовательностей с рациональными координатами, то пространство $\boldsymbol{\ell}_p$ является сепарабельным при всех $0 < p < \infty$.

Теорема (критерий предкомпактности в ℓ_p). *Множество $M \subset \ell_p$ предкомпактно, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

a) M ограничено, т.е. существует $c > 0$, т.ч. $\|x\|_{\ell_p} \leqslant c$ при всех $x \in M$.

b) M равностепенно непрерывно, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x - s_n(x)\|_{\ell_p} < \varepsilon$ при всех $x \in M$.

Доказательство. Необходимость. Ограниченность M вытекает из свойства вполне ограниченности. Для доказательства второго условия также используем вполне ограниченность M. Пусть $A = \{x^{(k)}\}_{k=1}^m$ образует $\varepsilon/3$-сеть для M. Для каждого k выберем $n_k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x^{(k)} - s_{n_k}(x^{(k)})\|_{\ell_p} < \varepsilon/3$, и обозначим через $n = \max_{1\leqslant k\leqslant m} n_k$. Так как A задает $\varepsilon/3$-сеть M, то для каждого $x \in M$ найдется k, т.ч. $\|x - x^{(k)}\| \leqslant \varepsilon/3$. Поэтому, применяя неравенство треугольника, получим

$$\|x - s_n(x)\|_{\ell_p} \leqslant \|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} + \|x^{(k)} - s_n(x^{(k)})\|_{\ell_p} + \|s_n(x^{(k)}) - s_n(x)\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

при всех $x \in M$, т.е. выполнено второе условие.

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ и $M_n \doteqdot \{y = s_n(x) \mid x \in M\}$, где n взято из второго условия при $\varepsilon/3$. Так как M_n содержится в подпространстве $\mathbb{F}^n$ и в силу первого условия является ограниченным в метрике ℓ_p, то оно вполне ограничено в ℓ_p. Это доказывается также, как свойство 3 при $p = 2$, используя простые неравенства

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ при } 0 < p < \infty.$$

В силу этих неравенств всякий шар в $\mathbb{F}^n$ в метрике ℓ_p содержится в некотором кубе вида $\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \leqslant a$ и всякий такой куб содержится в некотором шаре.

Обозначим через $A = \{y^{(k)}\}_{k=1}^m$ $\varepsilon/3$-сеть множества M_n, а через $\{x^{(k)}\}_{k=1}^m$ элементы прообраза $s_n(x^{(k)}) = y^{(k)}$ этой сети. Тогда для каждого $x \in M$ существует k, т.ч. $\|s_n(x) - s_n(x^{(k)})\|_{\ell_p} \leqslant \varepsilon/3$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} \leqslant \|x - s_n(x)\|_{\ell_p} + \|s_n(x) - s_n(x^{(k)})\|_{\ell_p} + \|s_n(x^{(k)}) - x^{(k)}\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

при всех $x \in M$. Таким образом, $\{x^{(k)}\}_{k=1}^m$ образует ε-сеть множества M. Поэтому M вполне ограничено и в силу полноты ℓ_p является предкомпактным в ℓ_p. □

Замечание. При $p = \infty$ условия теоремы a) и b) являются достаточными для предкомпактности, однако условие b) не является необходимым. Например, если $e \doteqdot \{1, 1, \ldots\}$, то множество $M = \{e\}$, состоящее из одной точки, компактно в ℓ_∞, при этом M не удовлетворяет условию b), т.к. $\|e - s_n(e)\|_{\ell_\infty} = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Условия a) и b) необходимы и достаточны в подпространстве $c_0 \subset \ell_\infty$, состоящим из всех последовательностей, сходящихся к нулю.

4 КРИТЕРИИ ПРЕДКОМПАКТНОСТИ

Определение. Величина верхней грани $O(f,A) \doteqdot \sup_{x,y\in A}|f(x)-f(y)|$ называется *колебанием функции* $f : X \to \mathbb{F}$ на множестве $A \subset X$. Колебание $O(f,A)$ совпадает с диаметром образа $f(A) \subset \mathbb{F}$ множества A, т.е. $O(f,A) = \operatorname{diam} f(A)$.

Теорема (критерий предкомпактности в $\boldsymbol{B}(X)$)**.** *Множество $M \subset \boldsymbol{B}(X)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда M ограничено и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $X = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, т.ч. $O(f,A_k) \leqslant \varepsilon$ для всех $f \in M$ и $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность $M \subset \boldsymbol{B}(X)$ вытекает из вполне ограниченности. Докажем существование указанного разбиения в X. По условию вполне ограниченности для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\varepsilon/3$-сеть $\{f_i\}_{i=1}^{m}$ множества M, т.е. для каждого $f \in M$ существует i, т.ч. $|f(x) - f_i(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in X$.

Определим отображение $F : X \to \mathbb{F}^m$ по формуле $F(x) \doteqdot \{f_i(x)\}_{i=1}^{m}$. Поскольку множество $F(X) \subset \mathbb{F}^m$ является ограниченным, то оно вполне ограничено. Поэтому существует разбиение $F(X) = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$, т.ч. диаметр $\operatorname{diam} B_k \leqslant \varepsilon/3$ при $k = 1, \ldots, n$. Пусть $A_k \doteqdot F^{-1}(B_k)$, тогда при всех $f \in M$ и при всех $x, y \in A_k$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $O(f,A_k) \leqslant \varepsilon$ при всех $f \in M$ и $1 \leqslant k \leqslant n$.

Достаточность. Пусть $X = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ указанное разбиение для $\varepsilon/2$. Выберем точки $x_k \in A_k$ и для каждой функции $f \in M$ определим простую функцию $h_f(x) \doteqdot y_k$ при $x \in A_k$, где $y_k \doteqdot f(x_k)$. Тогда по условию имеем $\|f - h_f\| \leqslant \varepsilon/2$.

Обозначим через H множество всех таких простых функции $h_f(x)$, где $f \in M$, и рассмотрим отображение $F : H \to \mathbb{F}^n$, т.ч. $F(h_f) = y$, где $y = \{y_k\}_{k=1}^{n}$ и $y_k \doteqdot f(x_k)$. Образ множества $F(H) = Y \subset \mathbb{F}^n$ является ограниченным и значит будет вполне ограниченным. Пусть $\{h_i\}_{i=1}^{m}$ элементы прообраза $\varepsilon/2$-сети множества Y. Тогда для каждой функции $f \in M$ существует i, т.ч. $\|f - h_i\| \leqslant \|f - h_f\| + \|h_f - h_i\| \leqslant \varepsilon$, т.к. $\|h_f - h_i\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n}|y_k - y_k^{(i)}| \leqslant \varepsilon/2$. Таким образом, $\{h_i\}_{i=1}^{m}$ ε-сеть M. □

1. *Каждое непрерывное отображение $F : X \to Y$, определенное на компактном множестве X, является равномерно непрерывным.*

Предположим обратное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < 1/n$ и $\rho_Y(F(x_n), F(y_n)) \geqslant \varepsilon$ при всех n. В силу компактности X найдутся сходящиеся подпоследовательности $x_{n_k} \to x$ и $y_{n_k} \to y$. Так как по условию $\rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$, то $x = y$. В силу непрерывности отображения F существует n_k, т.ч. $\rho_Y(F(x_{n_k}), F(y_{n_k})) \leqslant \rho_Y(F(x_{n_k}), F(x))) + \rho_Y(F(y), F(y_{n_k})) < \varepsilon$. Противоречие.

2. *При непрерывном отображении $F : X \to Y$ компактного множества X его образ $F(X) \subset Y$ является компактным множеством.*

Пусть $\{y_n\} \subset F(X)$ и $y_n = F(x_n)$, где $x_n \in X$. В силу секвенциальной компактности X найдется сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in X$. Тогда из непрерывности получим $y_{n_k} = F(x_{n_k}) \to F(x) \in F(X)$. Поэтому образ $F(X)$ является компактным.

Теорема (критерий предкомпактности в $\boldsymbol{C}(X)$)**.** *Пусть X компактное метрическое пространство. Множество $M \subset \boldsymbol{C}(X)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность $M \subset \boldsymbol{C}(X)$ вытекает из вполне ограниченности. Докажем равностепенную непрерывность. По условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/3$-сеть $\{f_i\}_{i=1}^n$ множества M. Следовательно, для любого $f \in M$ существует i, т.ч. $|f(x) - f_i(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in X$. Так как функции f_i равномерно непрерывны, то существует $\delta_i > 0$, т.ч. $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$ при всех $x, y \in X$, $\rho(x,y) < \delta_i$. Обозначим через $\delta \doteqdot \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i$, тогда имеем

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon$$

при всех $x, y \in K$, $\rho(x,y) < \delta$. Таким образом, M равностепенно непрерывно.

Достаточность. Из условия равностепенной непрерывности M для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ для всех $f \in M$ и $x, y \in X$, $\rho(x,y) \leqslant \delta$. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ является δ-сетью компакта X и $F : M \to \mathbb{F}^n$ обозначает отображение, т.ч. $F(f) \doteqdot y$, где $y = \{y_i\}_{i=1}^n$ и $y_i = f(x_i)$. Поскольку $F(M) \subset \mathbb{F}^n$ ограничено, то оно вполне ограничено. Пусть $\{f_j\}_{j=1}^m \subset M$ обозначает элементы прообраза $\varepsilon/3$-сети множества $F(M)$. Для любого $x \in X$ выберем i, т.ч. $\rho(x, x_i) \leqslant \delta$, и для любого $f \in M$ выберем j, т.ч. $\|F(f) - F(f_j)\| \leqslant \varepsilon/3$. Тогда $|f(x_i) - f_j(x_i)| \leqslant \varepsilon/3$ и мы получим

$$|f(x) - f_j(x)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{f_j\}_{j=1}^m$ является ε-сетью множества M. □

Определение. Нормированные пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называются *изоморфными* $\boldsymbol{E} \simeq \boldsymbol{F}$, если существует линейное биективное отображение $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, т.ч. A и A^{-1} непрерывны. Нормированные пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называются *изометрически изоморфными* (или *эквивалентными*) $\boldsymbol{E} \sim \boldsymbol{F}$, если существует линейное, биективное и изометричное отображение $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, т.е. $\|A(x)\| = \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Если нормированные пространства изоморфны и одно из них является полным (сепарабельным), то другое также будет соответственно полным (сепарабельным).

Теорема. *Всякое конечномерное нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, где $n = \dim \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ базис пространства $\boldsymbol{E}$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует единственный элемент $\lambda \doteqdot \{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{F}^n$, т.ч. $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Определим отображение $A : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$ по формуле $A(x) \doteqdot \lambda$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда отображение A является линейным и биективным. Рассмотрим функцию $f(\lambda) \doteqdot \|x\|$. Применяя неравенство треугольника и неравенство Коши, получим

$$|f(\lambda) - f(\lambda')| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_i') e_i \Big\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\lambda - \lambda'| \, \|e_i\| \leqslant c \|\lambda - \lambda'\|, \text{ где } c = \Big(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \Big)^{1/2}.$$

Поэтому функция $f(\lambda)$ непрерывна. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{F}^n$ величина нижней грани $\inf_{\|\lambda\|=1} f(\lambda) = a$ положительна, а величина верхней грани $\sup_{\|\lambda\|=1} f(\lambda) = b$ конечна. Отсюда по свойству однородности $f(t\lambda) = t\varphi(\lambda)$ при $t > 0$ получим, что $a\|\lambda\| \leqslant f(\lambda) \leqslant b\|\lambda\|$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}^n$. Из этих неравенств вытекает ограниченность, а значит и непрерывность отображений A и A^{-1}. □

Следствие 1. *Всякое конечномерное нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ является банаховым пространством и всякое его ограниченное и замкнутое подмножество $M \subset \boldsymbol{E}$ является компактным.*

Эти утверждения вытекают из полноты конечномерного евклидова пространства $\mathbb{F}^n$ и критерия компактности Хаусдорфа.

Следствие 2. *В конечномерном линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ любые две нормы являются эквивалентными $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$, т.е. существует такое числи $c > 0$, что $c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

По доказанному в теореме $a_1\|\lambda\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant b_1\|\lambda\|$ и $a_2\|\lambda\| \leqslant \|x\|_2 \leqslant b_2\|\lambda\|$. Тогда, полагая $c \doteqdot \max\{b_1 a_2^{-1}, b_2 a_1^{-1}\}$, получим $c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1$.

Определение. Величина $\rho(x,L) \doteqdot \inf_{y\in L}\|x-y\|$ называется *наилучшим приближением* элемента $x \in \boldsymbol{E}$ подпространством $L \subset \boldsymbol{E}$, а $y_0 \in L$, т.ч. $\rho(x,L) = \|x-y_0\|$, называется *элементом наилучшего приближения*.

Теорема (о существовании наилучшего приближения)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ линейное конечномерное подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$. Тогда для всякого $x \in \boldsymbol{E}$ существует элемент $y_0 \in L$ наилучшего приближения.*

Доказательство. Если $x \in \boldsymbol{E}$, то $\rho(x,L) \leqslant \|x\|$. Рассмотрим следующее множество $K_x \doteqdot \{y \in L \mid \|x-y\| \leqslant \|x\|\}$. Поскольку K_x является замкнутым, ограниченным и содержится в конечномерном пространстве L, то в силу следствию 1 K_x компактно. Поэтому непрерывная функция $f_x(y) \doteqdot \|x-y\|$ достигает своей нижней грани на компакте K_x. Следовательно, существует $y_0 \in K_x$, т.ч. $f_x(y_0) = \inf_{y\in K_x} f_x(y)$. □

Определение. Нормированное пространство называется *строго нормированным*, если равенство в неравенстве треугольника $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ выполняется только в том случае, когда $x = \lambda y$ при некотором $\lambda \geqslant 0$.

Теорема (единственности наилучшего приближения)**.** *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ есть линейное подпространство в строго нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, то для любого $x \in \boldsymbol{E}$ существует не более одного элемента наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $\rho(x,L) = \|x-y_0\| = \|x-y_1\|$, где $y_0, y_1 \in L$. Тогда имеем

$$\rho(x,L) \leqslant \left\|x - \frac{y_0+y_1}{2}\right\| = \left\|\frac{x-y_0}{2} + \frac{x-y_1}{2}\right\| \leqslant \left\|\frac{x-y_0}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y_1}{2}\right\| = \rho(x,L).$$

Следовательно, вместо неравенств имеют место равенства. В силу условия строгой нормированности $x - y_1 = \lambda(x-y_0)$ при некотором $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 1$, то $y_0 = y_1$. Если $\lambda \neq 1$, то $x = (y_1 - \lambda y_0)/(1-\lambda) \in L$ и значит $x = y_0 = y_1$. □

Пример. Примерами строго нормированных пространств является евклидовы пространства $\mathbb{F}^n$, а также пространства $\boldsymbol{\ell}_p$ и $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $1 < p < \infty$. Пространство непрерывных функций $\boldsymbol{C}[0,1]$ не является строго нормированным, т.к. если $f(x) = 1$ и $g(x) = x$, то $\|f+g\| = \|f\| + \|g\| = 2$.

Лемма (о почти перпендикуляре). *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым линейным подпространством в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, то для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x \in \boldsymbol{E} \setminus L$, т.ч. $\|x\| = 1$ и $\|x-y\| > 1-\varepsilon$ при всех $y \in L$.*

Доказательство. Если $x_0 \in \boldsymbol{E} \setminus L$, то $d \doteqdot \rho(x_0,L) > 0$. В самом деле, пусть $d = 0$. Тогда по определению $\rho(x_0,L)$ существуют $y_n \in L$, т.ч. $\|x_0 - y_n\| < 1/n$. Поэтому $\lim y_n = x_0 \in L$ в силу замкнутости L. Выберем $y_0 \in L$, т.ч. $\|x_0 - y_0\| < d/(1-\varepsilon)$. Если обозначить через $x \doteqdot (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$, то $\|x\| = 1$ и при всех $y \in L$ получим

$$\|x-y\| = \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \frac{\|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\| y)\|}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon,$$

поскольку элемент $y_1 \doteqdot y_0 + \|x_0 - y_0\| y \in L$. □

Теорема. *Замкнутый единичный шар $\boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ является компактным в том и только в том случае, когда пространство $\boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность $\dim \boldsymbol{E} < \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим обратное $\dim \boldsymbol{E} = \infty$. Если $x_1 \in \boldsymbol{S}$ и $L_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1\}$ задает линейную оболочку x_1, то по лемме существует $x_2 \in \boldsymbol{S} \setminus L_1$, т.ч. $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Аналогично, если $L_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, x_2\}$ задает линейную оболочку x_1 и x_2, то существует $x_3 \in \boldsymbol{S} \setminus L_2$, т.ч. $\|x_3 - x_1\| > 1/2$, $\|x_3 - x_2\| > 1/2$ и т.д. По индукции имеем, если $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$ задает линейную оболочку $\{x_1, \ldots, x_n\}$, то существует $x_{n+1} \in \boldsymbol{S} \setminus L_n$, т.ч. $\|x_{n+1} - x_k\| > 1/2$ при $k = 1, \ldots, n$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. т.е. шар $\boldsymbol{S}$ некомпактный.

Достаточность. Пусть $A : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$ обозначает изоморфизм пространства $\boldsymbol{E}$, где $n = \dim \boldsymbol{E}$. В силу ограниченности и непрерывности отображений A и A^{-1} образ шара $A(\boldsymbol{S}) \subset \mathbb{F}^n$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{F}^n$. Поэтому $A(\boldsymbol{S})$ компактно в $\mathbb{F}^n$ и значит шар $\boldsymbol{S}$ компактный в силу непрерывности A^{-1}. □

5 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Определение. Отображение $A: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *линейным оператором* (или коротко *оператором*), если выполняются следующие свойства:

a) *аддитивность*: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$;

b) *однородность*: $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Норма оператора $A: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, действующего в нормированных пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, определяется следующими формулами:

$$\|A\| \doteqdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \boldsymbol{S}} \|A(x)\|, \text{ где } \boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

Второе равенство получается из первого, применяя свойства однородности нормы и оператора. Из первого равенства следует, что $\|A(x)\| \leqslant \|A\| \, \|x\|$, где $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому оператор A ограничен тогда и только тогда, когда его норма $\|A\| < \infty$ конечна.

Через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ обозначается пространство ограниченных операторов из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$. Пусть $A, B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, тогда сумма операторов $A+B$ и умножение их на число λA определяются по формулам: $(A+B)(x) \doteqdot A(x) + B(x)$ и $(\lambda A)(x) \doteqdot \lambda A(x)$. Очевидно выполняется свойство однородности $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$ и неравенство треугольника

$$\|A+B\| = \sup_{x \in \boldsymbol{S}} \|A(x) + B(x)\| \leqslant \sup_{x \in \boldsymbol{S}} \|A(x)\| + \sup_{x \in \boldsymbol{S}} \|B(x)\| = \|A\| + \|B\|.$$

Следовательно, $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является нормированным пространством.

Теорема. *Если $\boldsymbol{F}$ — ба́нахово пространство, то пространство ограниченных операторов $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является ба́нахowым пространством.*

Доказательство. Докажем полноту. Пусть $\{A_n\}$ последовательность Коши́, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. В силу определения операторной нормы $\|A_n(x) - A_m(x)\| < \varepsilon \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $n, m \geqslant N$. Следовательно, $\{A_n(x)\}$ есть последовательность Коши́ в $\boldsymbol{F}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. В силу полноты существует предел $A(x) \doteqdot \lim_{n \to \infty} A_n(x)$. Ясно, что A линейный оператор. Переходя к пределу в неравенстве выше, получим $\|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $n \geqslant N$, т.е. $\|A_n - A\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Поэтому последовательность $A_n \to A$ сходится по норме. Так как $\|A\| \leqslant \|A_n\| + \|A_n - A\|$, то $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$. □

Теорема (Ба́наха–Штейнгáуза). *Если $\boldsymbol{E}$ — банахово пространство и система ограниченных операторов $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ поточечно ограничена, то система $\{A_i\}_{i \in I}$ равномерно ограничена по норме, т.е. $\sup\limits_{i \in I} \|A_i\| < \infty$.*

Доказательство. В силу поточечной ограниченности системы операторов множества $M_x \doteqdot \{y = A_i(x) \mid i \in I\}$ ограничены в $\boldsymbol{F}$ для всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому по принципу равностепенной непрерывности система $\{A_i\}_{i \in I}$ равностепенно непрерывна, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|A_i(x)\| < \varepsilon$ при всех $\|x\| < \delta$ и $i \in I$. Отсюда следует, что $\|A_i\| = \sup_{\|x/\delta\| \leqslant 1} \|A_i(x/\delta)\| \leqslant \varepsilon / \delta$ при всех $i \in I$. □

Следствие. *Если последовательность операторов* $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *сходится в каждой точке ба́нахова пространства* $\boldsymbol{E}$, *т.е.* $\lim A_n(x) = A(x)$ *для всех* $x \in \boldsymbol{E}$, *то нормы операторов равномерно ограничены, т.е.* $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$.

Так как последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится, то она ограничена при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Определение. Множество X называется *упорядоченным*, если в этом множестве X определено *отношение порядка* $x \leqslant y$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $x \leqslant x$; 2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$; 3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Множество $A \subset X$ называется *цепью*, если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ для всех пар $x, y \in A$. Элемент $y \in X$ называется *мажорантой* множества A, если $x \leqslant y$ при всех $x \in A$. Элемент $x \in X$ называется *максимальным* в X, если из $x \leqslant y$ следует $x = y$.

Например, отношением порядка является *отношение включения* множеств, т.е. $A \leqslant B$, если $A \subset B$. Следующая лемма принимается за аксиому теории множеств.

Лемма (Цо́рна). *Если всякая цепь* $A \subset X$ *упорядоченного множества* X *имеет мажоранту, то в множестве* X *существует максимальный элемент.*

Определение. Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ называется *линейным функционалом* (или коротко *функционалом*) на линейном пространстве $\boldsymbol{E}$, если выполняются следующие свойства: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Функционал f, заданный на нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, ограничен тогда и только тогда, когда норма $\|f\| = \sup_{x \in \boldsymbol{S}} |f(x)|$ конечна. Пространство $\boldsymbol{E}^* = \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \mathbb{F})$ всех ограниченных функционалов называется *сопряженным пространством* к $\boldsymbol{E}$. По теореме о полноте пространства ограниченных операторов сопряженное пространство $\boldsymbol{E}^*$ является ба́наховым пространством.

Функционал $g : M \to \mathbb{F}$ называется *продолжением* функционала $f : L \to \mathbb{F}$, если выполняется включение $L \subset M$ и $g(x) = f(x)$ для всех $x \in L$. Понятие продолжения является отношением порядка и обозначается через $\{f, L\} \leqslant \{g, M\}$.

Полунормой в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ называется функция $p : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$, т.ч. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ и $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. При этом пара $(\boldsymbol{E}, p)$ называется *полунормированным пространством*.

Теорема (Ха́на–Ба́наха). *Если функционал* $f : L \to \mathbb{F}$ *задан на подпространстве* $L \subset \boldsymbol{E}$ *полунормированного пространства* $(\boldsymbol{E}, p)$ *и* $|f(x)| \leqslant p(x)$ *при всех* $x \in L$, *то существует его продолжение* $g : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$, *т.ч.* $|g(x)| \leqslant p(x)$ *при всех* $x \in \boldsymbol{E}$.

Доказательство. Вначале рассмотрим действительный случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Пусть $e_1 \notin L$ и $M_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{L, e_1\}$ обозначает линейную оболочку L и e_1. Так как при всех $x, y \in L$

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x - e_1) + p(y + e_1),$$

то $f(x) - p(x - e_1) \leqslant p(y + e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Поэтому существует $c_1 \in \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - p(x - e_1) \leqslant c_1 \leqslant p(y + e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Заменяя x и y на x/λ, а затем умножая на λ, получим $f(x) \pm \lambda c_1 \leqslant p(x \pm \lambda e_1)$ при всех $\lambda > 0$ и $x \in L$.

Определим на подпространстве M_1 функционал по формуле $g_1(z) \doteqdot f(x)+\lambda c_1$, где $z=x+\lambda e_1$, $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $g_1(x)=f(x)$ при всех $x \in L$ и по доказанному $g_1(z) \leqslant p(z)$ при всех $z \in M_1$. Так как $p(-z)=p(z)$, то $|g_1(z)| \leqslant p(z)$ при всех $z \in M_1$. Таким образом, построили продолжение функционала f на подпространство M_1. Если существует элемент $e_2 \notin M_1$, то аналогично можно доказать существование продолжения функционала g_1 на подпространство $M_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{M_1, e_2\}$ и т.д.

Рассмотрим множество всех продолжений $\{g, M\}$ функционала f на некоторые подпространства $M \subset \boldsymbol{E}$, удовлетворяющих условию теоремы. Определяем в этом множестве отношение порядка, как отношение продолжения. Тогда для каждой цепи таких продолжений $\{g_i, M_i\}_{i \in I}$ существует мажоранта $\{g, M\}$, где $M=\cup_{i \in I} M_i$ и $g|_{M_i}=g_i$. Следовательно, по лемме Цóрна существует максимальное продолжение функционала f. Поскольку по доказанному выше каждый функционал можно продолжить на более широкое подпространство $\boldsymbol{E}$, то максимальное продолжение определено на всем $\boldsymbol{E}$ и удовлетворяет утверждению теоремы.

Переход от действительного к комплексному случаю производится следующим образом. Пусть $f(x)=u(x)+\boldsymbol{i}v(x)$, где $u(x)=\Re f(x)$ и $v(x)=\Im f(x)$. Так как в силу линейности $f(\boldsymbol{i}x)=\boldsymbol{i}f(x)$, то $u(\boldsymbol{i}x)+\boldsymbol{i}v(\boldsymbol{i}x)=\boldsymbol{i}u(x)-v(x)$ и значит $v(x)=-u(\boldsymbol{i}x)$, т.е. $f(x)=u(x)-\boldsymbol{i}u(\boldsymbol{i}x)$. Пусть функционал h определяет продолжение функционала u, удовлетворяющее условию теоремы. Тогда для функционала $g(x) \doteqdot h(x)-\boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)$ выполняется свойство линейности $g(\boldsymbol{i}x)=h(\boldsymbol{i}x)-\boldsymbol{i}h(-x)=\boldsymbol{i}(h(x)-\boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x))=\boldsymbol{i}g(x)$.

Следовательно, функционал g является линейным над полем $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ и задает продолжение функционала f. Докажем неравенство $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если $g(x)=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}|g(x)|$, то $|g(x)|=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}g(x)=g(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x)=h(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) \leqslant p(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x)=p(x)$. Таким образом, функционал g удовлетворяет всем условиям теоремы. □

Следствие. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, то для каждого $f \in L^*$ существует $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g|_L=f$ и $\|g\|=\|f\|_L$.*

Для доказательства определим $p(x) \doteqdot \|f\|_L\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда по теореме существует функционал g, т.ч. $g|_L=f$ и $|g(x)| \leqslant \|f\|_L\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому имеем $\|g\| \leqslant \|f\|_L$, а в силу условия $g|_L=f$ получим равенство $\|g\|=\|f\|_L$.

Определение. Функция $F:[a,b] \to \mathbb{F}$ имеет ограниченную вариацию, если конечна следующая верхняя грань по всем разбиениям $\tau=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(F) \doteqdot \sup_{\tau} \sum_{k=1}^{n} |F(t_k)-F(t_{k-1})| < \infty.$$

Через $\boldsymbol{BV}[a,b]$ обозначается нормированное пространство всех функций ограниченной вариации, в котором норма определяется по формуле $\|F\| \doteqdot |F(a)|+\mathbf{V}_a^b(F)$.

Теорема (Рúсса)**.** *Для каждого функционала $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ существует единственная функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, т.ч. $F(a)=0$, F непрерывна слева в интервале (a,b), ее вариация $\mathbf{V}_a^b(F)=\|\alpha\|$ и $\alpha(f)=\int_a^b f(x)\,dF(x)$ для всех $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$.*

Доказательство. По следствию из теоремы Ха́на–Ба́наха функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ можно считать определенным на пространстве $\boldsymbol{B}[a,b]$ ограниченных функций.

Пусть $u_t(x) \doteqdot \chi_{[a,t)}(x)$ при $a \leqslant t < b$ и $u_b(x) \doteqdot \chi_{[a,b]}(x)$. Положим $F(t) \doteqdot \alpha(u_t)$. Тогда $F(a) = 0$. Рассмотрим разбиение $\tau = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ отрезка $[a,b]$ и пусть $\theta_k \doteqdot \arg\big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big)$. Представим вариационную сумму в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(t_k) - F(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}\big(\alpha(u_{t_k}) - \alpha(u_{t_{k-1}})\big) = \alpha\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}(u_{t_k} - u_{t_{k-1}})\Big).$$

Так как $\|\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}(u_{t_k} - u_{t_{k-1}})\| \leqslant 1$, то $\mathbf{V}_a^b(F) \leqslant \|\alpha\|$, т.е. $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$.

Для всякой функции $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ введем ступенчатые функции следующего вида: $f_\tau(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(u_{t_k}(x) - u_{t_{k-1}}(x))$, где $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Они сходятся равномерно к f на $[a,b]$, когда диаметр разбиения $d_\tau \to 0$, т.к. функция f равномерно непрерывна. Отсюда из непрерывности функционала $\alpha \in \boldsymbol{B}^*[a,b]$ получим

$$\alpha(f) = \lim_{d(\tau)\to 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big) = \int_a^b f\,dF.$$

Следовательно, функционал α совпадает с интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса. Так как для всех функций $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$, т.ч. $\|f\| \leqslant 1$, имеют место неравенства

$$|\alpha(f)| = \Big|\int_a^b f\,dF\Big| \leqslant \sup_\tau \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,|F(t_k) - F(t_{k-1})| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^b(F)\,, \text{ то } \|\alpha\| = \mathop{\mathbf{V}}_a^b(F)\,.$$

Поскольку функция F имеет ограниченную вариацию, то у нее все точки разрыва первого рода и их не более, чем счётно. Интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса от непрерывной функции не зависит от изменения $F(x)$ на счётном множестве точек $x \in (a,b)$. Поэтому мы можем считать функцию F непрерывной слева в (a,b).

Докажем единственность. Рассмотрим $t_n \nearrow t \in (a,b)$ произвольную возрастающую последовательность точек (a,b). Определим функции $g_n \in \boldsymbol{C}[a,b]$, т.ч. $g_n(x) = 1$ при $x \in [a,t_n]$, $g_n(x) = 0$ при $x \in [t,b]$, а в интервале (t_n,t) является линейной. Тогда в силу непрерывности слева функции F получим, что при $n \to \infty$

$$|\alpha(g_n) - F(t_n)| = \Big|\int_{[a,t)} g_n dF - \int_{[a,t_n)} dF\Big| = \Big|\int_{[t_n,t)} g_n dF\Big| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_{t_n}^{t}(F) \to 0\,.$$

Поэтому $\lim \alpha(g_n) = \lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t)$. Кроме того, имеем $F(a) = 0$ и $F(b) = \alpha(1)$. Отсюда следует единственность функции F на отрезке $[a,b]$. □

Теорема (без доказательства). *Для всякого функционала $\alpha \in \boldsymbol{L}_p^*(X,\mu)$ существует единственная функция $g \in \boldsymbol{L}_q(X,\mu)$, т.ч. $\|\alpha\| = \|g\|$ и $\alpha(f) = \int_X f(x)g(x)\,d\mu$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$.*

Замечание. В этой теореме мера μ на множестве X предполагается σ-конечной. В частном случае, когда $X = \mathbb{N}$ и мера $\mu(\{n\}) = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, получаем, что для всякого функционала $\alpha \in \boldsymbol{\ell}_p^*$ существует единственный элемент $y \in \boldsymbol{\ell}_q$, т.ч. $\|\alpha\| = \|y\|$ и $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ при всех $x \in \boldsymbol{\ell}_p$, где $1 \leqslant p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$.

6 СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

Определение. Последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *сходится* (или равномерно сходится), если существует $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, т.ч. $\|A - A_n\| \to 0$.

Последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *сильно сходящейся*, если существует $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, т.ч. $\|A(x) - A_n(x)\| \to 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *слабо сходящейся*, если существует $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, т.ч. $f(A(x) - A_n(x)) \to 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$.

Так как $\|A(x) - A_n(x)\| \leqslant \|A - A_n\|\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то из сходимости следует сильная сходимость. А так как $|f(A(x) - A_n(x))| \leqslant \|f\|\,\|A(x) - A_n(x)\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$, то из сильной сходимости следует слабая сходимость.

Определение. Множество операторов $M \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *ограниченным* (или равномерно ограниченным), если ограничено по норме, т.е. $\sup_{A\in M}\|A\| < \infty$. Множество $\boldsymbol{M}$ называется *сильно ограниченным* (или поточечно ограниченным), если $\sup_{A\in M}\|A(x)\| < \infty$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Множество $\boldsymbol{M}$ называется *слабо ограниченным*, если $\sup_{A\in M}|f(A(x))| < \infty$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$.

Из равномерной ограниченности следует сильная ограниченность, а из сильной ограниченности следует слабая ограниченность. По теореме Ба́наха–Штейнга́уза, если $\boldsymbol{E}$ ба́нахово пространство, то множество сильно ограничено тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено.

Лемма. *Если последовательность $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сходится поточечно, т.е. существует предел $A_n(x) \to A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то $\|A\| \leqslant \underline{\lim}\,\|A_n\|$.*

Доказательство. Выберем индексы n_k, т.ч. $\underline{\lim}\,\|A_n\| = \lim\|A_{n_k}\|$. Тогда при всех $x \in \boldsymbol{S}$ получим $\|A(x)\| = \lim\|A_{n_k}(x)\| \leqslant \lim\|A_{n_k}\| = \underline{\lim}\,\|A_n\|$, т.е. $\|A\| \leqslant \underline{\lim}\,\|A_n\|$. □

Для каждого множества $X \subset \boldsymbol{E}$ в нормированном пространстве существует наименьшее содержащее его линейное подпространство $L = \mathrm{sp}X$, которое называется *линейной оболочкой* X. При этом говорят, что X порождает L. Множество $X \subset \boldsymbol{E}$ называется *тотальным*, если его линейная оболочка $L = \mathrm{sp}X$ всюду плотна в $\boldsymbol{E}$.

Теорема (критерий сильной сходимости)**.** *Последовательность $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ операторов, где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ ба́наховы пространства, тогда и только тогда сильно сходится, когда она ограничена и существует тотальное множество $X \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\{A_n(x)\}$ является последовательностью Коши в $\boldsymbol{F}$ при всех $x \in X$.*

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{E}$ ба́нахово пространство, то необходимость первого условия вытекает из теоремы Ба́наха–Штейнга́уза. Второе условие следует из определения сильной сходимости. Докажем достаточность, используя только то, что $\boldsymbol{F}$ ба́нахово пространство. Каждый элемент линейной оболочки $y \in L \doteqdot \mathrm{sp}X$ является линейной комбинацией $y = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$, где $\lambda_k \in \mathbb{F}$ и $x_k \in X$. Поэтому из линейности операторов A_n следует существование предела $\lim A_n(y) = A(y)$ при всех $y \in L$.

Поскольку линейная оболочка L всюду плотна в пространстве $\boldsymbol{E}$, то для любого $x \in \boldsymbol{E}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in L$, т.ч. $\|x - y\| < \varepsilon/4c$, где $c \doteqdot \sup\|A_n\| > 0$. Для этого элемента $y \in L$ выберем N, т.ч. $\|A_n(y) - A_m(y)\| < \varepsilon/2$ при всех $n, m \geqslant N$. Так как $\|A_n(x) - A_n(y)\| \leqslant \|A_n\| \, \|x - y\| < \varepsilon/4$, то при всех $n, m \geqslant N$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leqslant \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\| < \varepsilon\,.$$

Отсюда $\{A_n(x)\}$ является последовательностью Коши при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и в силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $\lim A_n(x) \doteqdot A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда оператор A является линейным, а по лемме будет ограниченным, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$. □

Определение. Последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}^*$ сопряженного пространства $\boldsymbol{E}^*$ называется *сходящейся* (или сильно сходящейся), если существует $f \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $\|f - f_n\| \to 0$. Последовательность $\{f_n\}$ называется *слабо* сходящаяся*, если существует $f \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Множество функционалов $M \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *ограниченным* (или сильно ограниченным), если оно ограничено по норме, т.е. $\sup_{f \in M} \|f\| < \infty$. Множество $M \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *слабо* ограниченным*, если $\sup_{f \in M} |f(x)| < \infty$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Из сильной сходимости следует слабая* сходимость. Если последовательность сходится сильно (соответственно слабо*), то она является сильно (соответственно слабо*) ограниченной. Если пространство $\boldsymbol{E}$ ба́нахово, то множество $M \subset \boldsymbol{E}^*$ слабо* ограничено тогда и только тогда, когда оно сильно ограничено.

Теорема (критерий слабой* сходимости). *Последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}^*$, где $\boldsymbol{E}$ ба́нахово пространство, в том и только в том случае слабо* сходится, когда она ограничена и найдется тотальная система $X \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\{f_n(x)\}$ является последовательностью Коши при всех $x \in X$.*

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{E}^* = \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \mathbb{F})$, то из критерия сильной сходимости операторов следует критерий слабой* сходимости функционалов. □

Теорема. *Каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ во второе сопряженное пространство $\boldsymbol{E}^{**}$, заданное по формуле $J(x) \doteqdot \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ функционал Дира́ка на $\boldsymbol{E}^*$, является изометричным.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{E}^*$ обозначает единичный шар. Тогда $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $f \in \boldsymbol{S}^*$, т.е. $\|J(x)\| = \|\delta_x\| \leqslant \|x\|$. Докажем, что это неравенство является равенством. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим функционал $f(\lambda x) = \lambda\|x\|$, где $\lambda \in \mathbb{F}$, на линейной оболочке $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x\}$ элемента x. Так как норма $\|f\|_L = 1$, то в силу следствия из теоремы Ха́на–Ба́наха существует функционал $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g(x) = \|x\|$ и $\|g\| = 1$. Отсюда $\delta_x(g) = \|x\|$ и, следовательно, $\|\delta_x\| = \|x\|$. □

Если каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ является сюръективным $J(M) = \boldsymbol{E}^{**}$, то пространство $\boldsymbol{E}$ называется *рефлексивным*. Все конечномерные нормированные пространства рефлексивные. По теореме, сформулированной в конце предыдущей лекции, пространства $\boldsymbol{L}_p(X, \mu)$ являются рефлексивными при всех $1 < p < \infty$.

Определение. Последовательность элементов $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ называется *сходящейся* (или сильно сходящейся), если существует $x \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $\|x - x_n\| \to 0$.

Последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ называется *слабо сходящейся*, если существует $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\lim f(x_n) = f(x)$ для всех $f \in \boldsymbol{E}^*$.

Множество $M \subset \boldsymbol{E}$ называется *ограниченным* (или сильно ограниченным), если оно ограничено по норме, т.е. $\sup_{x\in M}\|x\| < \infty$. Множество $M \subset \boldsymbol{E}$ называется *слабо ограниченным*, если $\sup_{x\in M}|f(x)| < \infty$ при всех $f \in \boldsymbol{E}^*$.

Используя каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$, каждый элемент $x \in \boldsymbol{E}$ можно отождествить с функционалом Ди́рака $\delta_x \in \boldsymbol{E}^{**}$ на пространстве $\boldsymbol{E}^*$. Поэтому из свойств слабой* сходимости вытекают свойства слабой сходимости.

Из сильной сходимости следует слабая сходимость. Если последовательность сходится сильно (соответственно слабо), то она является сильно (соответственно слабо) ограниченной. Так как сопряженное пространство ба́нахово, то множество $M \subset \boldsymbol{E}$ слабо ограничено тогда и только тогда, когда оно сильно ограничено.

Теорема (критерий слабой сходимости)**.** *Последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда слабо сходится, когда она ограничена и найдется тотальная система $X \subset \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $\{f(x_n)\}$ есть последовательность Коши при всех $f \in X$.*

Доказательство. Нужно применить критерий слабой* сходимости функционалов к образу $\delta_{x_n} = J(x_n)$ канонического вложения $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$. □

Пусть $\boldsymbol{E}$ сепарабельное банахово пространство. Тогда в нем существует счетная и всюду плотная система элементов $X = \{x_n\}$. Определим метрику в $\boldsymbol{E}^*$ по формуле

$$\rho(f,g) \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{1 + |f(x_n) - g(x_n)|} \text{ при всех } f, g \in \boldsymbol{E}^*.$$

Проверим свойства метрики. Симметричность $\rho(f,g) = \rho(f,g)$ очевидна. Так как функция $\varphi(t) = t/(t+1)$ возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+$ и является полуаддитивной $\varphi(t+s) \leqslant \varphi(t) + \varphi(s)$ при всех $t, s \in \mathbb{R}_+$, то выполняется неравенство треугольника $\rho(f,g) \leqslant \rho(f,h) + \rho(h,g)$. Пусть $\rho(f,g) = 0$, тогда по определению метрики имеем $f(x_n) = g(x_n)$ при всех n. Так как множество X всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{E}$, то для любого $x \in \boldsymbol{E}$ существует последовательность $x_{n_k} \in X$, т.ч. $x_{n_k} \to x$. Отсюда в силу непрерывности функционалов $f(x) = \lim f(x_{n_k}) = \lim g(x_{n_k}) = g(x)$.

Лемма. *Последовательность $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}^*$ слабо* сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и сходится в метрическом пространстве $(\boldsymbol{E}^*, \rho)$.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность вытекает из слабой сходимости. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем m, т.ч. $1/2^m < \varepsilon/2$. Так как $f_n(x) \to f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то найдется N, т.ч. $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$ при всех $n \geqslant N$ и $k = 1, \ldots, m$. Тогда

$$\rho(f_n, f) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon \text{ при всех } n \geqslant N.$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N, т.ч. $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Тогда для любого k мы получим $|f_n(x_k) - f(x_k)| < 2^k\varepsilon(1 + |f_n(x_k) - f(x_k)|)$ при всех $n \geqslant N$. Отсюда следует, что $|f_n(x_k) - f(x_k)| \leqslant 2^k\varepsilon/(1-2^k\varepsilon)$ при всех $0 < \varepsilon < 1/2^k$ и $n \geqslant N$. Поэтому существует предел $\lim f_n(x_k) = f(x_k)$ при всех $x_k \in X$. Следовательно, используя ограниченность и применяя критерий слабой* сходимости, мы получим, что последовательность слабо* сходится. □

Определение. Множество функционалов $M \subset \boldsymbol{E}^*$ называется слабо* компактным, если всякая последовательность $\{f_n\} \subset M$ содержит слабо* сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, для которой слабый* предел $\lim f_{n_k} = f \in M$.

Множество $M \subset \boldsymbol{E}^*$ называется слабо* замкнутым, если для всякой слабо* сходящейся последовательности $\{f_n\} \subset M$ ее слабый* придел $\lim f_n = f \in M$.

Замерим, что в силу леммы о метризуемости слабой* сходимости и теоремы о равносильности свойств компактности, ограниченное множество $M \subset \boldsymbol{E}^*$ будет слабо* компактным (соответственно слабо* замкнутым) тогда и только тогда, когда оно компактно (соответственно замкнуто) в метрическом пространстве $(\boldsymbol{E}^*, \rho)$.

Теорема (критерий слабой* компактности)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ является сепарабельным банаховым пространством, то множество $M \subset \boldsymbol{E}^*$ слабо* компактно в том и только в том случае, когда оно ограничено и слабо* замкнуто.*

Доказательство. Необходимость. Докажем ограниченность M. Предположим, что M не является ограниченным, т.е. существует $\{f_n\} \subset M$, т.ч. $\|f_n\| \geqslant n$. Тогда у такой последовательности нет слабо* сходящейся подпоследовательности, так как всякая слабо* сходящаяся последовательность (когда $\boldsymbol{E}$ банахово) является ограниченной. Слабая* замкнутость M вытекает из определения слабой* компактности.

Достаточность. Пусть $\{f_n\} \subset M$. Сначала выберем сходящуюся подпоследовательность на всюду плотном множестве $X = \{x_n\}$. Поскольку последовательность чисел $\{f_n(x_1)\}$ является ограниченной, то у ней существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. Поскольку последовательность чисел $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ является ограниченной, то у ней существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$, и т.д. Тогда диагональная последовательность $f_{n_k} = f_k^{(k)}$ сходится на множестве X и в силу критерия слабой* сходимости эта подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится слабо* к $f \in \boldsymbol{E}^*$. Из слабой* замкнутости M следует, что ее предел $f \in M$. □

Теорема (критерий слабой компактности)**.** *Если сопряженное пространство $\boldsymbol{E}^*$ является сепарабельным, то множество $M \subset \boldsymbol{E}$ слабо компактно в том и только в том случае, когда оно ограничено и слабо полно.*

Доказательство. Нужно применить критерий слабой* компактности к образу $J(M)$ канонического вложения $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$. Заметим, что ограниченное множество M слабо полно тогда и только тогда, когда $J(M)$ слабо* замкнуто. □

7 ГИ́ЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение. *Скалярным произведением* в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел называется функция $q : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$, обозначаемая через $\langle x,y\rangle \doteqdot q(x,y)$, которая обладает следующими свойствами:

a) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$;

b) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1,y\rangle + \lambda_2\langle x_2,y\rangle$ при всех $x_1,x_2,y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F}$;

c) $\langle x,x\rangle \geqslant 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\langle x,x\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пространство $\boldsymbol{E}$, в котором введено скалярное произведение $\langle x,y\rangle$, называется *евклидовым пространством*. Функция $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x,x\rangle}$ называется его *евклидовой нормой*, а $\rho(x,y) \doteqdot \|x-y\|$ называется *евклидовой метрикой*.

1. Неравенство Коши́–Буняко́вского: $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ *при всех* $x,y \in \boldsymbol{E}$.

Пусть $z = tx + \lambda y$, где $\lambda \doteqdot \langle x,y\rangle/|\langle x,y\rangle|$ и $\langle x,y\rangle \neq 0$. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\langle z,z\rangle = t^2\langle x,x\rangle + t\big(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\overline{\langle x,y\rangle}\big) + |\lambda|^2\langle y,y\rangle = t^2\|x\|^2 + 2t|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \geqslant 0.$$

Так как дискриминант этого трехчлена неположительный, то $|\langle x,y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$. При этом равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $z = tx + \lambda y = 0$ при некотором $t \in \mathbb{R}$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимы.

2. Неравенство треугольника: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *при всех* $x,y \in \boldsymbol{E}$.

Из неравенства Коши́–Буняко́вского получим неравенство треугольника

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Равенство выполняется в том и только в том случае, когда $\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимыми $x = \lambda y$, где $\mathrm{Re}\,\lambda = |\lambda| \geqslant 0$, и значит $\lambda \geqslant 0$. Поэтому евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным.

3. Равенство параллелограмма: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *при* $x,y \in \boldsymbol{E}$.

Складывая два равенства $\langle x\pm y, x\pm y\rangle = \langle x,x\rangle \pm 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$, получим равенство параллелограмма $\langle x+y,x+y\rangle + \langle x-y,x-y\rangle = 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle$.

Теорема (фон Не́ймана)**.** *Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае является евклидовым пространством, когда в нем выполняется равенство параллелограмма.*

Доказательство достаточности приведено в учебнике Колмого́рова и Фомина́. Например, пространство $\boldsymbol{B}(X)$ ограниченных функций не является евклидовым пространством, если X имеет более одной точки. В самом деле, если $f(x) = \chi_A(x)$ и $g(x) = \chi_B(x)$, где $A \cap B = \emptyset$, то $\|f\| = \|g\| = \|f+g\| = \|f-g\| = 1$. Таким образом, равенство параллелограмма не выполняется в пространстве $\boldsymbol{B}(X)$.

4. Непрерывность скалярного произведения (как функции двух переменных).

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ и $c > 0$, т.ч. $\delta < \min\{c, \varepsilon/3c\}$, $\max(\|x_0\|, \|y_0\|) < c$. Тогда, если $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - y_0\| < \delta$, то по неравенству Коши́–Буняко́вского

$$|\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \leqslant |\langle x-x_0,y_0\rangle| + |\langle x_0,y-y_0\rangle| + |\langle x-x_0,y-y_0\rangle| \leqslant \\ \leqslant \|x-x_0\|\,\|y_0\| + \|x_0\|\,\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\,\|y-y_0\| < \varepsilon\,.$$

5. Неравенство Бе́ппо Ле́ви. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ линейное подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{E}$, то для всех $x,y \in L$ и $z \in \boldsymbol{E}$ выполняется неравенство*

$$\|x-y\| \leqslant \sqrt{\|z-x\|^2 - d^2} + \sqrt{\|z-y\|^2 - d^2},\ \text{где } d = \rho(z,L)\,.$$

Так как $\|z - \frac{tx+y}{t+1}\|^2 \geqslant d^2$, то умножая это неравенство на $(t+1)^2$, получим

$$\|t(z-x) + (z-y)\|^2 \geqslant (t+1)^2 d^2 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Раскрывая левую норму по свойствам скалярного произведения и перенося правую часть влево, мы получим следующее неравенство:

$$t^2(\|z-x\|^2 - d^2) + 2t(\mathrm{Re}\,\langle z-x,z-y\rangle - d^2) + (\|z-y\|^2 - d^2) \geqslant 0 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Поскольку дискриминант этого квадратного трехчлена неположительный, то

$$\|x-y\|^2 = \|(z-x)-(z-y)\|^2 = \|z-x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle z-x,z-y\rangle + \|z-y\|^2 = \\ = \big(\|z-x\|^2 - d^2\big) - 2\big(\mathrm{Re}\,\langle z-x,z-y\rangle - d^2\big) + \big(\|z-y\|^2 - d^2\big) \leqslant \\ \leqslant \big(\|z-x\|^2 - d^2\big) + 2\sqrt{\big(\|z-x\|^2 - d^2\big)\big(\|z-y\|^2 - d^2\big)} + \big(\|z-y\|^2 - d^2\big).$$

Замечая справа полный квадрат, имеем неравенство Беппо́ Ле́ви.

Определение. Элементы $x,y \in \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* $x \perp y$, если их скалярное произведение $\langle x,y\rangle = 0$. Элемент $x \in \boldsymbol{E}$ называется ортогональным $x \perp L$ подпространству $L \subset \boldsymbol{E}$, если $\langle x,y\rangle = 0$ при всех $y \in L$. Подпространства $L \subset \boldsymbol{E}$ и $M \subset \boldsymbol{E}$ называются ортогональными $L \perp M$, если $\langle x,y\rangle = 0$ при всех $x \in L$ и $y \in M$.

Лемма. *Элемент $y \in L$ является наилучшим приближением элемента $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. $\|x-y\| = \rho(x,L)$, тогда и только тогда, когда $x - y \perp L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle x-y,z\rangle \neq 0$ при некотором $z \in L \setminus 0$. Тогда, пологая $u \doteqdot y + \lambda z \in L$, где $\lambda \doteqdot \langle x-y,z\rangle / \langle z,z\rangle$, имеем равенство

$$\|x-u\|^2 = \|(x-y) - \lambda z\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\overline{\lambda}\langle x-y,z\rangle) + |\lambda|^2\langle z,z\rangle = \|x-y\|^2 - |\lambda|^2\|z\|^2.$$

Отсюда следует, что $\|x-u\| < \|x-y\| = \rho(x,L)$, и мы получили противоречие.

Достаточность. Пусть $\langle x-y,z\rangle = 0$ при всех $z \in L$. Тогда при всех $z \in L$ имеем

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y,x-y\rangle = \langle x-y,x-z\rangle \leqslant \|x-y\|\,\|x-z\|.$$

Поэтому $\|x-y\| \leqslant \|x-z\|$ при всех $z \in L$, т.е. $\rho(x,L) = \|x-y\|$. □

Теорема. *Если* $\{x_k\}_{k=1}^n \in \boldsymbol{E}$ *линейно независимая система элементов евклидова пространства* $\boldsymbol{E}$, *то величина наилучшего приближения элемента* $x \in \boldsymbol{E}$ *подпространство* $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^n$ *вычисляется по формуле*

$$\rho(x,L) = \sqrt{\frac{D(x_1,\ldots,x_n,x)}{D(x_1,\ldots,x_n)}},$$

где $D(x_1,\ldots,x_n) \doteqdot \det\{\langle x_i,x_j\rangle\}_{i,j=1}^n$ *обозначает определитель Гра́ма.*

Доказательство. Поскольку евклидово пространство строго нормированное, то по доказанному элемент $y \in L$ наилучшего приближения существует и единственный. Пусть $d^2 \doteqdot \rho(x,L)^2 = \|x-y\|^2 = \langle x-y,x-y\rangle$, где $y \in L$. Поскольку $\langle x-y,y\rangle = 0$, то $\langle y,x\rangle = \langle x,x\rangle - d^2$. Кроме того, из равенств $\langle x-y,x_k\rangle = 0$ следует, что $\langle y,x_k\rangle = \langle x,x_k\rangle$ при $k=1,\ldots,n$. Подставляя в эти равенства выражение $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, мы получим систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1\langle x_1,x_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x_1\rangle &=& \langle x,x_1\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &=& \cdots\cdots \\ \lambda_1\langle x_1,x_n\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x_n\rangle &=& \langle x,x_n\rangle \\ \lambda_1\langle x_1,x\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x\rangle &=& \langle x,x\rangle - d^2. \end{array}\right.$$

По теореме Кро́некера–Капе́лли ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов. Поэтому определитель расширенной матрицы равен нулю. Тогда, записывая последний столбец расширенной матрицы в виде суммы двух столбцов, получим равенство $D(x_1,\ldots,x_n,x) - d^2 D(x_1,\ldots,x_n) = 0$, что и требовалось.

В частности, полагая здесь $x = x_{n+1}$, по индукции заключаем, что $D(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ тогда и только тогда, когда система $x_1,\ldots,x_n$ линейно не зависима. □

Определение. *Ги́льбертовым пространством* $\boldsymbol{H}$ называется полное евклидово пространство относительно евклидовой метрики.

Пример 1. В пространстве $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$ скалярное произведение и евклидова норма определяются по следующим формулам:

$$\langle f,g\rangle \doteqdot \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x), \quad \|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \Big(\int_X |f(x)|^2 d\mu\Big)^{1/2}.$$

Поскольку $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$ является полным нормированным пространством и его норма евклидова, то оно будет ги́льбертовым пространством.

Пример 2. В пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$ последовательностей $x = \{x_n\}$ скалярное произведение и евклидова норма определяются по следующим формулам:

$$\langle x,y\rangle \doteqdot \sum_{n=1}^\infty x_n\overline{y_n}, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \Big(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Так как $\boldsymbol{\ell}_2$ является полным нормированным пространством и его норма евклидова, то оно будет ги́льбертовым пространством.

Теорема (о наилучшем приближении)**.** *Если $L \subset \boldsymbol{H}$ замкнутое подпространство в ги́льбертова пространства $\boldsymbol{H}$, то для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y \in L$ наилучшего приближения подпространством L.*

Доказательство. Пусть $d = \rho(x,L) \doteqdot \inf_{y \in L} \|x-y\|$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $\|x-y_n\|^2 < 1/n^2 + d^2$. В силу неравенства Бе́ппо Ле́ви $\|y_n - y_m\| < 1/n + 1/m$, т.е. $\{y_n\}$ является последовательностью Коши́ в L. Так как пространство $\boldsymbol{H}$ полно, а подпространство L замкнуто, то $\lim y_n = y \in L$. Переходя к пределу в неравенстве $d \leqslant \|x-y_n\| < \sqrt{d^2 + 1/n^2}$, получим равенство $\|x-y\| = \lim \|x-y_n\| = d$.

Таким образом, доказано существование элемента наилучшего приближения. Единственность элемента наилучшего приближения вытекает из ранее доказанной теоремы, т.к. ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ является строго нормированным. $\square$

Теорема (об ортогональном разложении)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ является замкнутым подпространством в ги́льбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда пространство $\boldsymbol{H}$ представляется в виде прямой суммы $\boldsymbol{H} = L \oplus L^{\perp}$ подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid x \perp L\}$.*

Доказательство. В силу теоремы о наилучшем приближении для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует такой единственный элемент $y \in L$, что $\rho(x,L) = \|x-y\|$. Он называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство L. Положим $P(x) \doteqdot y$. Этот оператор отображает $P : \boldsymbol{H} \to L$, является линейным и его норма $\|P\| = 1$. Оператор P называется *ортогональным проектором* на подпространство L.

Пусть $z \doteqdot x - y$. Тогда по лемме $z \in L^{\perp}$. Таким образом, имеем $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$. Докажем единственность этого разложения. Пусть $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, где $y_1, y_2 \in L$ и $z_1, z_2 \in L^{\perp}$. Из этого равенства следует, что $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^{\perp}$. Поэтому $\|y_1 - y_2\| = \|z_1 - z_2\| = 0$, т.е. $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$. $\square$

Следствие. *Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{H}$ всюду плотно в ги́льбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ в том и только в том случае, когда $L^{\perp} = 0$.*

Необходимость. Пусть подпространство $L \subset \boldsymbol{H}$ всюду плотно. Тогда для любого $x \in \overline{L} = \boldsymbol{H}$ существуют $x_n \in L$, т.ч. $x_n \to x$. Если $y \in L^{\perp}$, то $\langle x, y \rangle = \lim \langle x_n, y \rangle = 0$ при всех $x \in \overline{L} = \boldsymbol{H}$ и, следовательно, $y = 0$. Поэтому $L^{\perp} = 0$.

Достаточность. Пусть $L^{\perp} = 0$. Как показано при доказательстве необходимости $\overline{L}^{\perp} = L^{\perp} = 0$. Тогда по теореме об ортогональном разложении $\boldsymbol{H} = \overline{L} \oplus \overline{L}^{\perp} = \overline{L}$, т.е. подпространство L всюду плотно в $\boldsymbol{H}$.

8 ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}$ — евклидово пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ортогональной* в $\boldsymbol{E}$, если $e_n \perp e_m$ при всех $n \neq m$, и называется *ортонормированной*, если является ортогональной и нормированной $\|e_n\| = 1$ при всех n.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *полной* в $\boldsymbol{E}$, если из ортогональности $x \perp e_n$ при всех n следует $x = 0$, т.е. ее ортогональное дополнение равно нулю.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *тотальной* в $\boldsymbol{E}$, если линейная оболочка $L = \mathrm{sp}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотна в $\boldsymbol{E}$. Тотальная ортонормированная система называется *ортонормированным базисом* евклидова пространства $\boldsymbol{E}$.

Для каждого элемента $x \in \boldsymbol{E}$ определяются *коэффициенты Фурье́* $c_n \doteqdot \langle x, e_n \rangle$ по ортонормированной системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Соответствующий ряд $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ обычно называют *рядом Фурье́* элемента x по ортонормированной системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1. Неравенство Бе́сселя. *Если $x \in \boldsymbol{E}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$.*

Так как система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной, то для частичных сумм ряда Фурье́ $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ выполняется следующее равенство:

$$\|x - s_n\|^2 = \langle x - s_n, x - s_n \rangle = \langle x.x \rangle - 2\mathrm{Re}\,\langle x, s_n \rangle + \langle s_n, s_n \rangle = \|x\|^2 - \textstyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает неравенство Бе́сселя.

2. Равенство Парсева́ля. *Ряд Фурье́ элемента $x \in \boldsymbol{E}$ сходится тогда и только тогда, когда, когда выполняется равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.*

По доказанному выше $\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$. Следовательно, $\|x - s_n\| \to 0$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

Теорема (Стекло́ва). *Для того чтобы ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ была тотальной в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ для всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Необходимость. Если система тотальна, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, т.ч. $\|x - y\| < \varepsilon$. Пусть $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{n}$ линейная оболочка системы $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Поскольку $x - s_n \perp L_n$, то элементы s_n будут наилучшим приближением элемента x подпространством L_n. Поэтому имеют место неравенства $\|x - s_m\| \leqslant \|x - s_n\| \leqslant \|x - y\| < \varepsilon$ при всех $m \geqslant n$. Отсюда ряд Фурье́ сходится и значит выполняется равенство Парсева́ля в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда в силу равенства $\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$ для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует m, т.ч. $\|x - s_n\| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant m$. Поэтому система является тотальной в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$. $\square$

Следствие. *Ортонормированная система полна в гильбертовом пространстве тогда и только тогда, когда она тотальна.*

В самом деле, если система является полной, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ линейной оболочки $L = \operatorname{sp} e_n\{\}_{n=1}^{\infty}$ равно нулю. Поэтому в силу следствия теоремы об ортогональном разложении L всюду плотно в $\boldsymbol{E}$, т.е. система тотальна. Обратно, если система тотальна, то выполняется равенство Парсева́ля. Так как из условия $c_n \doteqdot \langle x, e_n\rangle = 0$ при всех n следует $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 0$, то система полна.

Определение. *Носителем* $\operatorname{supp}\varphi$ непрерывной функции $\varphi \in \boldsymbol{C}(a,b)$ называется наименьшее замкнутое множество, вне которого функция $\varphi(x) = 0$ равна нулю. Непрерывная функция называется *финитной* в интервале (a,b), если ее носитель $\operatorname{supp}\varphi \Subset (a,b)$ является компактным множеством в интервале (a,b).

Лемма. *Множество $\boldsymbol{C}_0(a,b)$ непрерывных финитных функций всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_p(a,b)$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ и $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Из курса действительного анализа известно, что в $\boldsymbol{L}_p(a,b)$ всюду плотно множество простых интегрируемых функций, которые являются линейными комбинациями характеристических функций χ_A множеств конечной меры $\mu(A) < \infty$. В силу измеримости A для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $B = \bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$, где $(a_k, b_k) \subset (a,b)$ т.ч. мера симметрической разности $\mu(A \triangle B) < \varepsilon^p$. Тогда

$$\|\chi_A - \chi_B\|_{\boldsymbol{L}_2} = \left(\int_a^b |\chi_A(x) - \chi_B(x)|^p dx\right)^{1/p} = \big(\mu(A \triangle B)\big)^{1/p} < \varepsilon\,.$$

Заменяя в выражении простой функции характеристические функции χ_A на χ_B, получим ступенчатую функцию, которую можно представить (п.в.) в виде конечной линейной комбинацией характеристических функций интервалов $\chi_{(a_k,b_k)}$. Отсюда множество ступенчатых функций всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_p(a,b)$.

Осталось заметить, что всякую ступенчатую функцию можно аппроксимировать по норме $\boldsymbol{L}_p(a,b)$ некоторой кусочно линейной непрерывной финитной функцией, заменяя в ее выражении характеристические функции интервалов $\chi_{(a_k,b_k)}$ на кусочно линейные непрерывные финитные функции. Таким образом, множество кусочно линейных непрерывных финитных функций всюду плотно в $\boldsymbol{L}_p(a,b)$. $\square$

Теорема. *Тригонометрическая система $e_n(x) \doteqdot \boldsymbol{e}^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, образует тотальную ортонормированную систему в пространстве $\boldsymbol{L}_2([0,2\pi],\mu)$, где $d\mu = dx/2\pi$.*

Доказательство. Система является ортонормированной, т.к.

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{e}^{i(n-m)x} dx = \frac{\boldsymbol{e}^{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)} - 1}{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)} = 0 \ \ (n \neq m)\,, \quad \langle e_n, e_n\rangle = 1\,,$$

Докажем тотальность. По лемме для каждой функции $f \in \boldsymbol{L}_2([0,2\pi],\mu)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $g \in \boldsymbol{C}_0(0,2\pi)$, т.ч. $\|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/2$ и $g(0) = g(2\pi) = 0$. Тогда по теореме Вейерштрасса об аппроксимации существует тригонометрический полином $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \boldsymbol{e}^{ikx}$, т.ч. $\|g - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/2$. Так как $\|g - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|g - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/2$, то

$$\|f - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|g - T\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon.$$

Следовательно, тригонометрическая система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ тотальна в $\boldsymbol{L}_2([0,2\pi],\mu)$. $\square$

Лемма (метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта). *Для всякой тотальной линейно независимой системы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ существует тотальная ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч. ее элементы являются линейными комбинациями $e_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} x_k$.*

Доказательство. Пусть $y_1 = x_1$ и $e_1 \doteqdot y_1/\|y_1\|$. Затем полагаем $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ и определим $e_2 \doteqdot y_2/\|y_2\|$, и т.д. На n-том шаге полагаем $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, e_k\rangle e_k$ и определим $e_n \doteqdot y_n/\|y_n\|$. Поскольку система $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ линейно независима, то $y_n \neq 0$ при всех n. Таким образом, матрица A_n преобразования системы $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ в систему $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ является треугольной

$$\begin{cases} e_1 &= & a_{11}x_1 \\ e_2 &= & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{kk} = 1/\|y_k\| \neq 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Обратная матрица также будет треугольной. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ тотальна тогда и только тогда, когда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тотальна. Нетрудно проверить, что явное выражение элементов e_n имеет следующий вид:

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_{n-1}\rangle & \cdots & \langle x_n, x_{n-1}\rangle \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

где $D_n \doteqdot D(x_1, \ldots, x_n) = \det\{\langle x_i, x_j\rangle\}_{i,j=1}^{n}$ обозначают определители Гра́ма. □

Теорема (Ри́сса-Фи́шера). *Всякое сепарабельное ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ изометрически изоморфно либо конечномерному евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, либо бесконечномерному пространству $\boldsymbol{\ell}_2$ над полем $\mathbb{F}$.*

Доказательство. Пусть задана счетная и всюду плотная в $\boldsymbol{H}$ система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, отбрасывая из этой системы все элементы, которые выражаются линейно через предыдущие, мы получим либо конечную, либо счетную тотальную линейно независимую систему элементов в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$.

Рассмотрим случай, когда эта система является бесконечной, т.е. $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. В случае, когда эта система конечна, т.е. $\dim \boldsymbol{H} < \infty$, доказательство полностью аналогично. Применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, построим счетную и тотальную ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме Стекло́ва всякий элемент $x \in \boldsymbol{H}$ представляется в виде ряда Фурье́ $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, сходящегося к x в пространстве $\boldsymbol{H}$, где $c_n = \langle x, e_n\rangle$ коэффициенты Фурье́ элемента x.

Определим линейный оператор $U : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $U(x) = c$, где $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначает последовательность коэффициентов Фурье́ элемента $x \in \boldsymbol{H}$. Так как в силу теоремы Стекло́ва выполняется равенство Парсева́ля $\|U(x)\| = \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то отображение U является изометричным. Осталось доказать, что образ этого отображения $U(\boldsymbol{H})$ совпадает с пространством $\boldsymbol{\ell}_2$.

Для всякого элемента $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ определим последовательность элементов $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ пространства $\boldsymbol{H}$. Так как в силу ортонормируемости системы

$$\|s_m - s_n\|^2 = \Big\langle \sum_{i=n+1}^{m} c_i e_i, \sum_{j=n+1}^{m} c_j e_j \Big\rangle = \sum_{i=n+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{m} c_i \overline{c_j} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0$$

при $m > n \to \infty$, то $\{s_n\}$ последовательность Коши́. В силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ существует предел $\lim s_n = x$. Применяя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle x, e_n \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle s_m, e_n \rangle = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $U(x) = c$ Таким образом, оператор $U : \boldsymbol{H} \to \ell_2$ задает биективное и изометричное отображение гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$ на пространство ℓ_2. □

Определение. Линейное отображение $U : \boldsymbol{H}_1 \to \boldsymbol{H}_2$ гильбертовых пространств называется *унитарным оператором*, если является биективным и изометричным.

В теореме Ри́сса–Фи́шера построены унитарные операторы $U_n : \boldsymbol{H} \to \mathbb{F}^n$, если размерность $\boldsymbol{H}$ конечна, и $U : \boldsymbol{H} \to \ell_2$, если размерность $\boldsymbol{H}$ бесконечна.

Теорема (Ри́сса о представлении)**.** *Для каждого функционала $f \in \boldsymbol{H}^*$, заданного на гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, существует единственный элемент $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $f(x) = \langle x, y \rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|f\| = \|y\|$.*

Доказательство. Обозначим через $L = \ker f \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid f(x) = 0\}$ ядро функционала. Поскольку $f \in \boldsymbol{H}^*$ является непрерывным функционалом, то L будет замкнутым подпространством в $\boldsymbol{H}$. Если $L^{\perp} = 0$, то из следствия теоремы об ортогональном разложении получим $L = \boldsymbol{H}$, т.е. в этом случае $f = 0$ и элемент $y = 0$.

Рассмотрим случай, когда $L^{\perp} \neq 0$, т.е. $L \neq \boldsymbol{H}$. Тогда найдется элемент $z \in L^{\perp}$, т.ч. $\|z\| = 1$. Для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ положим $u \doteqdot f(x)z - f(z)x$. Тогда $u \in L$, т.к. $f(u) = 0$, и выполняется равенство $\langle u, z \rangle = f(x)\langle z, z \rangle - f(z)\langle x, z \rangle = f(x) - \langle x, y \rangle = 0$, где $y \doteqdot \overline{f(z)}\, z$. Таким образом, имеем представление $f(x) = \langle x, y \rangle$ для всех $x \in \boldsymbol{H}$.

Для доказательства единственности представления допустим, что $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Отсюда $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и значит $y_1 - y_2 = 0$.

Из неравенства Коши́–Буняко́вского вытекает, что $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. При этом, если $x = y/\|y\|$, то $|f(x)| = \|y\|$. Поэтому норма $\|f\| = \|y\|$. □

Замечание. Пространства $\boldsymbol{H}^*$ и $\boldsymbol{H}$ изометричны, но не являются изометрически изоморфными над полем комплексных чисел $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. В самом деле, построенное отображение $A : \boldsymbol{H}^* \to \boldsymbol{H}$, определенное по формуле $A(f) \doteqdot \overline{f(z)}\, z$, где $z \in L^{\perp}$ и $\|z\| = 1$, не является линейным, т.к. имеет место равенство $A(\lambda f) = \overline{\lambda} A(f)$. Таким образом, A не является унитарным оператором над полем $\mathbb{C}$.

9 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ́

Определение. *Прямым* и *обратным* преобразованием Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ называются операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$, определенные по формулам

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-ixy} dy\,, \ \ \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{ixy} dy\,, \ \text{ где } \varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}\,.$$

Функции $\widehat{f}(x)$ и $\widetilde{f}(x)$ непрерывны и ограничены, т.к. $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{C}} = \|\widetilde{f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}$.

Лемма (Ри́мана-Лебе́га). *Преобразование Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ является равномерно непрерывной функцией, т.ч.* $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим оператор сдвига $\tau_t f(x) \doteqdot f(x-t)$. Тогда имеем

$$|\widehat{f}(x) - \tau_t \widehat{f}(x)| = \varkappa \Big| \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(e^{-ixy} - e^{i(x+t)y} \right) dy \Big| \leqslant 2\varkappa \int_{\mathbb{R}} \Big| f(y) \sin \frac{ty}{2} \Big| dy\,.$$

По теореме Лебе́га последний интеграл стремится к нулю при $t \to 0$. Поэтому функция $\widehat{f}(x)$ равномерно непрерывна. Так как $\widehat{\tau_t f}(x) = -\widehat{f}(x)$, если $t \doteqdot \pi/x$, то

$$|2\widehat{f}(x)| = \big| \big(\widehat{f - \tau_t f}\big)(x) \big| \leqslant \varkappa \big\| f - \tau_t f \big\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant \varkappa \Big(\|f-g\|_{\boldsymbol{L}_1} + \|g - \tau_t g\|_{\boldsymbol{L}_1} + \|\tau_t (g-f)\|_{\boldsymbol{L}_1} \Big)\,.$$

Для $\varepsilon > 0$ выберем непрерывную финитную функцию $g \in \boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$ и $\delta > 0$, т.ч.

$$\|f-g\|_{\boldsymbol{L}_1} = \|\tau_t(f-g)\|_{\boldsymbol{L}_1} < \varepsilon\,, \ \|g - \tau_t g\|_{\boldsymbol{L}_1} < \varepsilon \ \text{ при всех } |t| = |\pi/x| < \delta\,.$$

Тогда получим, что $|2\widehat{f}(x)| < 3\varkappa\varepsilon$ при всех $|x| > \pi/\delta$. □

Теорема (условие Ди́ни). *Если $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и в точке $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$\textit{условие Ди́ни} \ \int_{-\delta}^{\delta} \Big| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \Big| dt < \infty, \ \textit{ то } \ \lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = f(x)\,.$$

Доказательство. Меняя порядок интегрирования по теореме Фуби́ни, имеем

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \Big(\int_{-n}^{n} e^{i(x-z)y} dy \Big)\, dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{x-z}\, dz\,.$$

Поэтому, полагая $t = x - z$ и используя известное равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$, получим

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{\sin nt}{t}\, dt - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{|t|\leqslant\delta} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt\, dt - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|t|>n\delta} \frac{\sin t}{t}\, dt\,.$$

Первые два интеграла стремятся к нулю при $n \to \infty$ по лемме Ри́мана–Лебе́га, а последний интеграл стремится к нулю в силу его сходимости в бесконечности. □

Рассмотрим свойства оператора Фурье́ $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$.

1. Формулы умножения. *Для всех $f,g\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ выполняются равенства*

$$\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x)\,g(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx\,,\quad \int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}(x)\,g(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\widetilde{g}(x)\,dx\,.$$

В самом деле, применяя теорему Фуби́ни, получаем равенство

$$\varkappa\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}f(y)\,\boldsymbol{e}^{\pm ixy}dy\Big)\,g(x)\,dx=\varkappa\int_{\mathbb{R}}f(y)\,\Big(\int_{\mathbb{R}}g(x)\,\boldsymbol{e}^{\pm ixy}dx\Big)\,dy\,.$$

2. Формулы дифференцирования. *Если функция $f\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и $xf(x)\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, то производная преобразования Фурье́ $\widehat{f}^{(1)}(x)=\widehat{(-\boldsymbol{i}y)f(y)}$. Если функция $f\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, абсолютно непрерывна $f\in \boldsymbol{AC}[a,b]$ на каждом конечном отрезке и $f^{(1)}\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье́ производной $\widehat{f^{(1)}}(x)=(\boldsymbol{i}x)\widehat{f}(x)$.*

Первая формула получается дифференцированием под знаком интеграла Лебе́га. Доказательство второй формулы доказывается интегрирования по частям, так как $\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$ (подробное доказательство см. в учебнике Колмогорова и Фомина).

3. Формула свертки. *Если $f,g\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, то их свертка $f*g(x)\doteqdot\int_{\mathbb{R}}f(y)\,g(x-y)\,dy$ принадлежит $f*g\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f*g}(x)=\varkappa^{-1}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}$.*

Линейное преобразование $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, заданное по формуле $A(x,y)=(y,x-y)$, отображает измеримые множества в измеримые. Поэтому из измеримости функции $f(x)g(y)$ вытекает измеримость функции $f(y)g(x-y)$. Применяя теорему Фуби́ни и замену переменных, получим $\|f*g\|_{\boldsymbol{L}_1}\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_1}\|g\|_{\boldsymbol{L}_1}$. Таким образом, $f*g\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Переставляя порядок интегрирования при помощи теоремы Фуби́ни, имеем

$$\varkappa\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}f(z)g(y-z)\,dz\Big)\,\boldsymbol{e}^{-ixy}dy=\varkappa\int_{\mathbb{R}}f(z)\boldsymbol{e}^{-ixz}\Big(\int_{\mathbb{R}}g(y-z)\,\boldsymbol{e}^{-ix(y-z)}dy\Big)\,dz\,.$$

Производя здесь замену переменных, получим указанное равенство.

Лемма. *Если преобразование Фурье финитной функции $\varphi\in \boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$ является неотрицательной функцией $\widehat{\varphi}(x)\geqslant 0$, то $\varphi(0)=\varkappa\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(x)\,dx$.*

Доказательство. Поскольку преобразование Фурье функции $\boldsymbol{e}^{-\varepsilon x^2}$ при $\varepsilon>0$ равно $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$ (см. примеры преобразований Фурье́ в учебнике Колмого́рова и Фомина́), то, применяя теорему Фубини и теорему Лебега, получим следующие равенства:

$$\varkappa\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\varepsilon x^2}\widehat{\varphi}(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-ixy-\varepsilon x^2}\varphi(y)\,dydx=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-ixy-\varepsilon x^2}dx\Big)\varphi(y)\,dy=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\boldsymbol{e}^{-y^2/4\varepsilon}\varphi(y)\,dy=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{2}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-y^2}\varphi(2\sqrt{\varepsilon}y)\,dy=\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-y^2}dy\Big)\varphi(0)=\varphi(0)\,.$$

В последнем равенстве мы использовали известный интеграл $\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$. $\square$

Теорема (Планшере́ля)**.** *Существует унитарный оператор* $\mathcal{F}: \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}) \to \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ *в пространстве* $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$*, однозначно определяемый условием, что он совпадает с преобразованием Фурье́ на подпространстве* $\boldsymbol{L}_{1,2}(\mathbb{R}) \doteqdot \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}) \cap \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Единственность такого унитарного оператора вытекает из принципа продолжения по непрерывности, т.к. $\boldsymbol{L}_{1,2}(\mathbb{R})$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Докажем его существование. Если $\varphi \in \boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$ и $\varphi_1(x) = \overline{\varphi(-x)}$, то преобразование Фурье $\widehat{\varphi_1}(x) = \overline{\widehat{\varphi}(x)}$. Поэтому преобразование Фурье свертки $\varphi_2(x) \doteqdot \varphi * \varphi_1(x)$ является неотрицательной функцией $\widehat{\varphi_2}(x) = \varkappa^{-1}|\widehat{\varphi}(x)|^2$. Применяя лемму, получим

$$\|\widehat{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}_2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(x)|^2 dx = \varkappa \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_2}(x)\, dx = \varphi_2(0) = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx = \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_2}^2.$$

Если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, то существуют финитные функции $\varphi_n \in \boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$, т.ч. $\|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$. Так как $\{\varphi_n\}$ есть последовательность Коши́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, то по доказанному выше $\{\widehat{\varphi}_n\}$ есть последовательность Коши́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Тогда существует предел $\widehat{\varphi}_n \to \widehat{f}$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и из непрерывности нормы следует $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{\varphi}_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Таким образом, полагая $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$, получим изометричный оператор. Так как $\boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, то он совпадает с преобразованием Фурье на $\boldsymbol{L}_{1,2}(\mathbb{R})$. При этом образ оператора $\operatorname{Im}\mathcal{F}$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. В силу формулы сопряжения $(\operatorname{Im}\mathcal{F})^{\perp} = 0$. Отсюда имеет место равенство $\operatorname{Im}\mathcal{F} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. □

Рассмотрим свойства оператора Фурье́ $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Полагая $\mathcal{F}^{-1}(f) = \widetilde{f}$, где $\widetilde{f}(x) = \widehat{f}(-x)$, мы получим унитарный оператор в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, который на подпространстве $\boldsymbol{L}_{1,2}(\mathbb{R})$ совпадает с обратным преобразованием Фурье́.

1. Формула сопряжения. *Если* $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$*, то* $\langle \widehat{f}, g\rangle = \langle f, \widetilde{g}\rangle$.

Если $f_n \doteqdot f\chi_{(-n,n)}$ и $g_n \doteqdot g\chi_{(-n,n)}$, то $f_n, g_n \in \boldsymbol{L}_{1,2}(\mathbb{R})$ и $f_n \to f$, $g_n \to g$ сходятся в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Тогда, применяя формулу умножения в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и непрерывность скалярного произведения, получим $\langle \widehat{f}, g\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle \widehat{f_n}, g_n\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n, \widetilde{g_n}\rangle = \langle f, \widetilde{g}\rangle$.

2. Формула обращения. *Если* $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$*, то* $\widetilde{\widehat{f}} = \widehat{\widetilde{f}} = f$.

Так как кусочно линейные непрерывные финитные функции будут удовлетворять условию Ди́ни, то для них справедлива формула обращения, а так как они всюду плотны в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ (по лемме из предыдущей лекции), то формула обращения имеет место во всем пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

3. Формула свертки. *Если функции* $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ *и* $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$*, то их свертка принадлежит* $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ *и* $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-1}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ *п.в.* $x \in \mathbb{R}$.

По неравенству Коши́–Буняко́вского $|f * g(x)|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, |g(x-y)|^2 dy$. Интегрируя по x, а затем делая замену переменных, имеем $\|f * g\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_1} \|g\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Поэтому $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и свертка непрерывна по второму аргументу в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Если $g_n \doteqdot g\chi_{(-n,n)}$, то $g_n \in \boldsymbol{L}_{1,2}(\mathbb{R})$ и $g_n \to g$ сходится в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Тогда, применяя формулу свертки в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, получим $\widehat{f * g} = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f * g_n} = \varkappa^{-1} \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f}\,\widehat{g_n} = \varkappa^{-1} \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Определение. Функции $h_n(x) \doteqdot c_n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ называются *функциями Эрми́та*, где $n \in \mathbb{Z}_+$ и $H_n(x) = c_n(-2x)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ *многочлены Эрми́та*.

Интегрируя по частям n раз, при всех $n > k$ получим следующее равенство:

$$\int_{\mathbb{R}} h_k(x)\, h_n(x)\, dx = c_n \int_{\mathbb{R}} H_k(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = c_n (-1)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} H_k(x)\, dx = 0.$$

При $k = n$ этот интеграл равен $c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}$. Поэтому при $c_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$ система функций Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной.

Лемма. *Если функция $\varphi_0(x)$ непрерывна и $0 < |\varphi_0(x)| \leqslant a e^{-b|x|}$, где $a, b > 0$, то система функций $\varphi_n(x) \doteqdot x^n \varphi_0(x)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, полна в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Докажем, что если функция $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ ортогональна $f \perp \varphi_n$ всем функциям φ_n при $n \in \mathbb{Z}_+$, то $f(x) = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что функция

$$F(z) \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \overline{\varphi_0(t)}\, e^{-itz} dt\,, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}\,,$$

голоморфна в полосе $|\mathrm{Im}\, z| < b$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ее производные в нуле

$$F^{(n)}(z)|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \overline{\varphi_0(t)}\, (-it)^n e^{-itz} dt|_{z=0} = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \overline{\varphi_n(t)}\, dt = 0\,.$$

Поэтому функция $F(z) = 0$ при всех $|\mathrm{Im}\, z| < b$. В частности, $F(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. В силу изометричности оператора Фурье́ получим, что $f(x) = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. □

Теорема. *Система функций Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье́, т.е. $\widehat{h_n}(x) = \lambda_n h_n(x)$, где $\lambda_n = (-i)^n$ собственные числа оператора Фурье́.*

Доказательство. Так как функции Эрми́та имеют представление $h_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$, то их полнота вытекает из леммы, если положить $\varphi_n(x) = x^n \varphi_0(x)$, где $\varphi_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Докажем, что h_n являются собственными функциями оператора Фурье́.

$$\begin{aligned}
\widehat{h_n}(x) &= \varkappa \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} h_n(y)\, dy = \varkappa c_n \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{\frac{y^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} dy = \varkappa c_n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} dy = \\
&= \varkappa c_n (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}} dy = \varkappa c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}} dy = \\
&= c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{x^2}{2}} \Big(\varkappa \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2} - ixy} dy \Big) = c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-i)^n h_n(x).
\end{aligned}$$

Здесь мы применили интегрирование по частям, замену переменных дифференцирования и преобразование Фурье́ функции $e^{-\frac{y^2}{2}}$, равное $\mathcal{F}(e^{-\frac{y^2}{2}}) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ □

10 СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ нормированные пространства и $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ограниченным оператором. Линейные подпространства $\ker A \subset \boldsymbol{E}$ и $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{F}$, где

$$\ker A \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid A(x) = 0\}, \quad \operatorname{Im} A \doteqdot \{y \in \boldsymbol{F} \mid y = A(x), x \in \boldsymbol{E}\},$$

называются соответственно *ядром* и *образом* оператора A. Ядро $\ker A$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{E}$. Для того чтобы оператор A был биективеным отображением $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, необходимо и достаточно, чтобы $\ker A = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$.

Определение. *Произведением операторов* $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ и $B : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ называется оператор $BA : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{G}$, определенный по формуле $BA(x) \doteqdot B(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то $BA \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\|BA\| \leqslant \|B\|\,\|A\|$. В самом деле, имеем $\|BA(x)\| \leqslant \|B\|\,\|A(x)\| \leqslant \|B\|\,\|A\|\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Определение. Оператор $A^{-1} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ называется *обратным* оператору $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, если $A^{-1}A = \boldsymbol{I_E}$ и $AA^{-1} = \boldsymbol{I_F}$, где $\boldsymbol{I_E}$ и $\boldsymbol{I_F}$ тождественные операторы в $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$.

Существование обратного оператора A^{-1} равносильно биективности A. При этом условие $A^{-1}A = \boldsymbol{I_E}$ будет равносильно условию $\ker A = 0$, а условие $AA^{-1} = \boldsymbol{I_F}$ будет равносильно условию $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$. Для доказательства линейности оператора A^{-1} положим $A^{-1}(u) = x$, $A^{-1}(v) = y$, $\lambda \in \mathbb{F}$, тогда получим

$$A^{-1}(u+v) = A^{-1}(Ax+Ay) = A^{-1}A(x+y) = x+y = A^{-1}(u)+A^{-1}(v),$$
$$A^{-1}(\lambda u) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}(u).$$

Определение. Оператор $A^* : \boldsymbol{F}^* \to \boldsymbol{E}^*$ называется *сопряженным к оператору* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, если $A^*(f) = g$, где $f \in \boldsymbol{F}^*$ и $g(x) \doteqdot f(Ax)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ ограниченные операторы, то $(BA)^* = A^*B^*$, т.к. $(BA)^*g(x) = g(BAx) = B^*g(Ax) = A^*B^*g(x)$ при всех $g \in \boldsymbol{G}^*$ и $x \in \boldsymbol{E}$. В частности, если A является биективным и $A, A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Теорема. *Если* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, *то* $A^* \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$ *и* $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство. Покажем, что сопряженный оператор A^* является линейным. Пусть $f, g \in \boldsymbol{F}^*$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, тогда по определению сопряженного оператора

$$A^*(f+g) = (f+g)(Ax) = f(Ax)+g(Ax), \quad A^*(\lambda f) = (\lambda f)(Ax) = \lambda f(Ax),$$

т.е. имеют место равенства $A^*(f+g) = A^*f + A^*g$ и $A^*(\lambda f) = \lambda A^*f$.

Докажем равенство норм. Так как $A^*f(x) = f(Ax)$, то по свойству произведения операторов имеем$\|A^*f\| \leqslant \|f\|\,\|A\|$, т.е. $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ по теореме Ха́на–Ба́наха существует $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. он равен $f(\lambda Ax) = \lambda\|Ax\|$ на линейной оболочке $\operatorname{sp}\{Ax\}$ и $\|f\| = 1$. Поэтому $\|Ax\| = A^*f(x) \leqslant \|A^*f\|\,\|x\| \leqslant \|A^*\|\,\|x\|$. Отсюда $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Следовательно, имеет место равенство $\|A^*\| = \|A\|$. $\square$

Определение. Оператор $A^*: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ называется *эрмитово-сопряженным* к оператору $A: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, заданному в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, если выполняется равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$.

Теорема. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$, то эрмитово-сопряженный $A^* \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство. Рассмотрим функционал $f(x) \doteqdot \langle Ax, y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, получим $|f(x)| \leqslant \|Ax\|\,\|y\| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$. Отсюда $f \in \boldsymbol{H}^*$ и $\|f\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Поэтому по теореме Ри́сса существует элемент $z \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $f(x) = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|f\| = \|z\|$. Следовательно, $A^*y = z$ и $\|A^*y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Отсюда $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Так как эрмитово-сопряженный к A^* совпадает с A, то $A^{**} = A$. Тогда $\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|$. Следовательно, имеет место равенство $\|A\| = \|A^*\|$. $\square$

Определение. Пусть $V \subset \boldsymbol{E}$ и $W \subset \boldsymbol{E}^*$ некоторые множества. Тогда множества

$$V^\perp \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}^* \mid f(x) = 0, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_\perp \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = 0, f \in W\}$$

называются соответственно *аннулятором** V и *аннулятором* W. Они образуются пересечением ядер ограниченных функционалов $W_\perp = \bigcap_{f \in W} \ker f$ и $V^\perp = \bigcap_{x \in V} \ker \delta_x$, где $\delta_x(f) = f(x)$ — функционал Дира́ка, определенный на $\boldsymbol{E}^*$. Поэтому аннуляторы $W_\perp$ и $V^\perp$ будут замкнутыми подпространствами в $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}^*$ соответственно.

Лемма (о бианнуляторе)**.** *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ является линейным подпространством, то $(L^\perp)_\perp = \overline{L}$. В частности, условие $L^\perp = 0$ равносильно $\overline{L} = \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Включение $L \subset (L^\perp)_\perp$ очевидно. Поэтому $\overline{L} \subset (L^\perp)_\perp$. Если $x \notin \overline{L}$, то $\rho(x, L) \neq 0$. Определим функционал f на линейной оболочке $M \doteqdot \mathrm{sp}\{x, L\}$ по формуле $f(\lambda x + y) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y \in L$. Он имеет конечную норму на M, т.к.

$$\|f\|_M = \sup_{z \in M} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{\lambda \in \mathbb{F}, y \in L} \frac{|\lambda|}{\|\lambda x + y\|} = \sup_{y \in L} \frac{1}{\|x - y\|} = \frac{1}{\rho(x, L)}\,.$$

По теореме Ха́на–Ба́наха существует функционал $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g|_M = f$ и $\|g\| = \|f\|$. Тогда имеем $g \in L^\perp$ и $g(x) = 1$, т.е. $x \notin (L^\perp)_\perp$. Следовательно, $(L^\perp)_\perp = \overline{L}$. $\square$

Теорема. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, то имеют место следующие свойства:*

$$1)\ \ker A = (\mathrm{Im} A^*)_\perp; \qquad 3)\ \mathrm{Im} A \subset (\ker A^*)_\perp;$$
$$2)\ \ker A^* = (\mathrm{Im} A)^\perp; \qquad 4)\ \mathrm{Im} A^* \subset (\ker A)^\perp.$$

Доказательство. 1) Если $x \in \ker A$, то $Ax = 0$. Поэтому $A^*f(x) = f(Ax) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.е. $x \in (\mathrm{Im} A^*)_\perp$. Обратно, если $x \in (\mathrm{Im} A^*)_\perp$, то $A^*f(x) = f(Ax) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}^*$. По теореме Ха́на–Ба́наха, если $Ax \neq 0$, то существует $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $f(Ax) \neq 0$, что невозможно. Следовательно, имеем $Ax = 0$, т.е. $x \in \ker A$.

2) Если $f \in \ker A^*$, то $A^*f = 0$. Поэтому $A^*f(x) = f(Ax) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и значит $f \in (\mathrm{Im} A)^\perp$. Обратно, если $f \in (\mathrm{Im} A)^\perp$, то $A^*f(x) = f(Ax) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. имеем $A^*f = 0$. Отсюда следует включение $f \in \ker A^*$.

3) Если $y \in \mathrm{Im}A$, то существует $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $y = Ax$. Поэтому $f(y) = A^*f(x) = 0$ при всех $f \in \ker A^*$. Следовательно, выполняется включение $y \in (\ker A^*)_\perp$.

4) Если $g \in \mathrm{Im}A^*$, то существует $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $A^*f = g$. Поэтому $g(x) = f(Ax) = 0$ при всех $x \in \ker A$. Следовательно, выполняется включение $g \in (\ker A)^\perp$. $\square$

Замечание. Если образ оператора $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{E}$ замкнут, то по лемме о бианнуляторе (см. ниже) и свойству 2) получаем, что включение 3) является равенством, т.к. $(\ker A^*)_\perp = \big((\mathrm{Im}A)^\perp\big)_\perp = \mathrm{Im}A$. Далее будет показано, что если в условиях теоремы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами и образ оператора $\mathrm{Im}A$ замкнут, то включение 4) также является равенством.

Определение. Оператор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ называется *проектором* на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, если выполняются равенства $P^2 = P$ и $\mathrm{Im}P = L$.

Заметим, что ограничение проектора $P|_L$ на подпространство $L = \mathrm{Im}P$ является тождественным оператором I_L, т.к. если $y = Px \in L$, то $Py = P^2x = Px = y$.

Оператор $Q = I - P$ является проектором на подпространство $M = \ker P$, ядро которого $\ker Q = L$. В самом деле, имеем $Q^2 = I - 2P + P^2 = I - P = Q$. При этом, $y \in \mathrm{Im}Q$, тогда и только тогда, когда $y = x - Px$, $Py = Px - P^2x = 0$, т.е. $y \in M$.

Пространство является прямой суммой $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. Действительно, т.к. $I = P + Q$, то $\boldsymbol{E} = L + M$. Если $y \in L \cap M$, то имеет место равенство $y = Px = Qx$, т.е. $Px = x - Px$. Отсюда $2Px = x$ и, применяя P, имеем $Px = 2Px$. Поэтому $y = 0$.

Определение. Подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ называется *дополняемым* в $\boldsymbol{E}$, если оно является замкнутым и существует замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Например, по теореме об ортогональном разложении гильбертова пространства $\boldsymbol{H} = L \oplus L^\perp$ всякое его замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{H}$ является дополняемым.

Теорема. *Подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ банахова пространства $\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае является дополняемым в $\boldsymbol{E}$, когда существует ограниченный проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ прямая сумма замкнутых подпространств. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют единственные элементы $y \in L$ и $z \in M$, т.ч. $x = y + z$. Полагая $Px \doteqdot y$, получим проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$. Докажем, что он имеет замкнутый график $\mathrm{gr}P = \{(x,y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \mid y = Px\}$. Если $x_n \to x$ и $Px_n = y_n \to y$, то $z_n = x_n - y_n \to x - y = z$. Так как в силу замкнутости подпространств L и M мы имеем $y \in L$ и $z \in M$, то из единственности разложения $x = y + z$ в прямой сумме мы получим $Px = y$. Поэтому график замкнут. По теореме о замкнутом графике (которая доказана в следующей лекции) оператор P является ограниченным.

Достаточность. Поскольку проекторы P и $Q = I - P$ непрерывны, то $L = \ker Q$ и $M = \ker P$ будут замкнутыми подпространствами, для которых $L \cap M = 0$. Так как $I = P + Q$, то $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ прямая сумма (здесь полнота $\boldsymbol{E}$ не использовалась). $\square$

Определение. Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ следует, что $\lambda_i = 0$ при $i = 1, \ldots, n$.

Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ следует, что $\lambda_j = 0$ при $j = 1, \ldots, n$.

Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ и система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *биортогональными*, если $f_j(e_i) = 0$ при всех $i \neq j$ и $f_i(e_i) = 1$.

Лемма. *Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$ тогда и только тогда имеет биортогональную систему элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$, когда линейно независима.*

Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда имеет биортогональную систему функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$, когда линейно независима.

Доказательство. Докажем необходимость первого утверждения. Предположим, что имеет место равенство $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда в силу свойства биортогональности, полагая $x = e_j$, получим $\lambda_j = 0$ при $j = 1, \ldots, n$.

Достаточность. При $n = 1$ имеем $f_1 \neq 0$. Поэтому найдется $e_1 \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_1(e_1) = 1$. По индукции предположим, что для $n-1$ утверждение верно. Тогда существуют $x_i \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_j(x_i) = 0$ при $i \neq j$ и $f_i(x_i) = 1$, где $i, j = 1, \ldots, n-1$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ положим $y \doteqdot x - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) x_i$. Тогда элемент $y \in \boldsymbol{E}$ удовлетворяет условию $f_j(y) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $j = 1, \ldots, n-1$. В силу линейной независимости функционалов найдется $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_n(y) \neq 0$. Взяв $e_n \doteqdot y / f_n(y)$ и $e_i \doteqdot x_i - f_n(x_i) e_n$ при $i = 1, \ldots, n-1$, мы получим биортогональную систему элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ во второе сопряженное пространство, заданное по формуле $J(x) \doteqdot \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ есть функционал Дирака $\delta_x \in \boldsymbol{E}^{**}$. Так как система функционалов $\{\delta_{e_i}\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}^{**}$ линейно независима тогда и только тогда, когда $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейно независима, то по доказанному выше существует биортогональная система $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$. $\square$

Теорема. *Если подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность $\dim L = n$, то оно дополняемое. Если замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$ имеет конечную коразмерность $\operatorname{codim} M \doteqdot \dim \boldsymbol{E}/M = m$, то оно дополняемое.*

Доказательство. Выберем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ подпространства L, а затем определим к нему биортогональную систему $\{f_j\}_{j=1}^n$. Тогда оператор $P(x) \doteqdot \sum_{i=1}^n f_i(x)\, e_i$ является ограниченным проектором на подпространство $L = \operatorname{Im} P$, т.к. $P(e_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, и значит $P^2(x) = P(x)$. Поэтому L дополняемое подпространство.

Рассмотрим базис $\{\widehat{e}_i\}_{i=1}^m$ факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/M$, а затем определим к нему биортогональную систему $\{\widehat{f}_j\}_{j=1}^m$. Тогда оператор $Q(x) \doteqdot x - \sum_{i=1}^m \widehat{f}_i(\widehat{x})\, e_i$ будет ограниченным проектором на подпространство $M = \operatorname{Im} Q$, т.к. $Q(e_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, и значит $Q^2(x) = Q(x)$. Поэтому M дополняемое подпространство. $\square$

11 ТЕОРЕМЫ БА́НАХА

Пусть $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F} \doteqdot \{(x,y)\mid x\in\boldsymbol{E}, y\in\boldsymbol{F}\}$ обозначает прямое произведение нормированных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Введем операции сложения, умножения и норму:

a) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \doteqdot (x_1+x_2, y_1+y_2)$ при всех $(x_1,y_1), (x_2,y_2)\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$;

b) $\lambda(x,y) \doteqdot (\lambda x, \lambda y)$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$ и $(x,y)\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$;

c) $\|(x,y)\| \doteqdot \|x\|+\|y\|$ при всех $(x,y)\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$.

Поэтому $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ превращается в нормированное пространство над $\mathbb{F}$. Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами, то их прямое произведение будет банаховым пространством. Действительно, пусть $\{(x_n,y_n)\}$ последовательность Коши́. Тогда по определению нормы $\{x_n\}\subset\boldsymbol{E}$ и $\{y_n\}\subset\boldsymbol{F}$ являются последовательностями Коши́. Так как существуют пределы $x_n\to x$ и $y_n\to y$, то $(x_n,y_n)\to(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$.

Определение. Линейное подпространство $\mathrm{gr}A \doteqdot \{(x,y)\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}\mid Ax=y\}$ прямого проиведения $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ называется графиком оператора $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$.

Обозначим через $\boldsymbol{S}_r(x)\doteqdot\{y\in\boldsymbol{E}\mid \|x-y\|\leqslant r\}$ шар радиуса $r>0$ и $\boldsymbol{S}_r\doteqdot\boldsymbol{S}_r(0)$.

Лемма. *Если оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ определен в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$, то существуют $r>0$ и $k>0$, т.ч. $\boldsymbol{S}_r\subset\overline{E_k}$, где $E_k\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid \|Ax\|\leqslant k\}$.*

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{E}=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, то по теореме Бэра одно из множеств E_k не является нигде не плотным, т.е. существуют $r>0$ и $x\in\boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{S}_r(x)\subset\overline{E_k}$. Так как множество $E_k=-E_k$ симметрично, то, кроме того, имеем $\boldsymbol{S}_r(-x)\subset\overline{E_k}$.

Покажем, что $\boldsymbol{S}_r\subset\overline{E_k}$. Пусть $y\in\boldsymbol{S}_r$, тогда $y\pm x\in\boldsymbol{S}_r(\pm x)$. Поэтому существуют последовательности $\{x_n^{\pm}\}\subset E_k$, т.ч. $x_n^{\pm}\to y\pm x$. В силу того, что $x_n\doteqdot(x_n^{+}+x_n^{-})/2\to y$ и $x_n\in E_k$, мы получим $y\in\overline{E_k}$. Таким образом, доказано включение $\boldsymbol{S}_r\subset\overline{E_k}$. □

Теорема (Ба́наха о замкнутом графике)**.** *Если оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, заданный в ба́наховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, имеет замкнутый график $\mathrm{gr}A\subset\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$, то он является ограниченным, т.е. $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

Доказательство. По лемме $\boldsymbol{S}_r\subset\overline{E_k}$ при некоторых $r>0$ и $k>0$. Пусть $r_n=r/2^n$ и $k_n=k/2^n$, тогда мы получим $\boldsymbol{S}_{r_n}\subset\overline{E_{k_n}}$. Возьмем произвольный элемент $x\in\boldsymbol{S}_r$. Поскольку $\boldsymbol{S}_r\subset\overline{E_k}$, то существует элемент $x_0\in E_k$, т.ч. $\|x-x_0\|<r_1$. Поскольку $\boldsymbol{S}_{r_1}\subset\overline{E_{k_1}}$, то существует элемент $x_1\in E_{k_1}$, т.ч. $\|x-x_0-x_1\|<r_2$ и т.д. Поэтому по индукции существуют элементы $x_i\in E_{k_i}$, т.ч. $\|x-\sum_{i=0}^n x_i\|<r_{n+1}$.

Таким образом, частичные суммы ряда $s_n=\sum_{i=0}^n x_i$ сходятся в пространстве $\boldsymbol{E}$ к элементу x, т.е. $x=\sum_{i=0}^{\infty}x_i$. Полагая $y_n\doteqdot As_n$ и применяя неравенство треугольника, мы получим, что при всех $m>n$ выполняется неравенство

$$\|y_m-y_n\|=\Big\|\sum_{i=n+1}^{m}Ax_i\Big\|\leqslant\sum_{i=n+1}^{m}\|Ax_i\|\leqslant\sum_{i=n+1}^{m}\frac{k}{2^i}<\frac{k}{2^n}.$$

Следовательно, $\{y_n\} \subset \boldsymbol{F}$ является последовательностью Коши́ и в силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $y = \lim y_n$. Тогда $y = Ax$ по условию замкнутости графика $\mathrm{gr}A$. Применяя неравенство треугольника и свойство непрерывности нормы, получим

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{i=0}^{n} Ax_i\Big\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\|Ax_i\| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\frac{k}{2^i} = 2k.$$

Таким образом, $\|Ax\| \leqslant 2k$ при всех $x \in \boldsymbol{S}_r$. Отсюда $\|Ax\| \leqslant 2k/r$ при всех $x \in \boldsymbol{S}_1$. Поэтому норма оператора оценивается величиной $\|A\| \leqslant 2k/r$. □

Теорема (Ба́наха об обратном операторе)**.** *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ограниченным и биективным отображением $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ ба́наховых пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то обратный оператор $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ является ограниченным.*

Доказательство. Поскольку A ограниченный оператор, определенный в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$, то его график $\mathrm{gr}A$ замкнут, т.к. если $x_n \to x$ и $y_n = Ax_n \to y$, где $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $y_n \in \boldsymbol{F}$, то $Ax = y$. В силу биективности оператора A получим, что если $y_n \to y$ и $x_n = A^{-1}y_n \to x$, где $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $y_n \in \boldsymbol{F}$, то $A^{-1}y = x$. Таким образом, график $\mathrm{gr}A^{-1}$ обратного оператора A^{-1} замкнут и, следовательно, по теореме о замкнутом графике обратный оператор $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ является ограниченным. □

Определение. Оператор $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ *левый* (*правый*) обратный к $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, если $BA = I_{\boldsymbol{E}}$ ($AB = I_{\boldsymbol{F}}$), где $I_{\boldsymbol{E}}$ и $I_{\boldsymbol{F}}$ тождественные операторы. Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ имеет левый и правый обратный $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, то A называется *обратимым*.

Теорема. *Предположим, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются банаховыми пространствами.*

Для того чтобы оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ имел левый обратный $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, необходимо и достаточно, чтобы его ядро $\ker A = 0$ и его образ $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{F}$ был дополняемым подпространством.

Для того чтобы оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ имел правый обратный $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, необходимо и достаточно, чтобы его образ $\mathrm{Im}A = \boldsymbol{F}$ и его ядро $\ker A \subset \boldsymbol{E}$ было дополняемым подпространством.

Доказательство. Пусть $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ является левым обратным к A, т.е. $BA = I_{\boldsymbol{E}}$. Если $Ax = 0$, то $BAx = x = 0$, т.е. $\ker A = 0$. Пусть $P = AB$, тогда $P^2 = ABAB = AB = P$. Поэтому P является ограниченным проектором и, следовательно, подпространство $\mathrm{Im}P = \mathrm{Im}A$ будет дополняемым. Обратно, если ядро $\ker A = 0$ и образ $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{F}$ является дополняемым подпространством, то существует ограниченный проектор $P : \boldsymbol{F} \to \mathrm{Im}A$ на подпространство $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{F}$. В силу теоремы Ба́наха об обратном операторе оператор $A^{-1} : \mathrm{Im}A \to \boldsymbol{E}$ будет ограниченным. Таким образом, оператор $B = A^{-1}P \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ является левым обратным к оператору A.

Пусть $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ является правым обратным к A, т.е. $AB = I_{\boldsymbol{F}}$. Если $y \in \boldsymbol{F}$, то $ABy = y$ и значит $\mathrm{Im}A = \boldsymbol{F}$. Пусть $P = BA$, тогда $P^2 = BABA = BA = P$. Поэтому P является ограниченным проектором. Если $By = 0$, то $ABy = y = 0$, т.е. $\ker B = 0$. Следовательно, $\ker P = \ker A$ и значит подпространство $\ker A$ будет дополняемым.

Обратно, если $\mathrm{Im} A = \boldsymbol{E}$ и ядро $\ker A \subset \boldsymbol{E}$ дополняемое подпространство, то $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus \boldsymbol{M}$ прямая сумма, где $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство. Поскольку ограничение оператора $A|_M : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{F}$ будет биективным оператором, то по теореме Ба́наха обратный оператор $B = A|_M^{-1} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{M}$ ограничен. Таким образом, оператор $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ является правым обратным к оператору A. □

Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ — замкнутое подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$ обозначает факторпространство по подпространству L. Всякий элемент $\widehat{\boldsymbol{E}}$ записывается в виде $\widehat{x} \doteqdot x + L$, где $x \in \boldsymbol{E}$. При этом факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}}$ является линейным пространством относительно операций: сложения $\widehat{x} + \widehat{y} \doteqdot \widehat{x+y}$ и уножение на число $\lambda \widehat{x} \doteqdot \widehat{\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbb{F}$. Факторнорма определяется по формуле

$$\|\widehat{x}\| \doteqdot \inf_{y \in L} \|x + y\| = \rho(x, L), \text{ где } \widehat{x} = x + L \in \widehat{\boldsymbol{E}}.$$

Проверим свойства нормы. По определению получаем следующие соотношения:

$$\|\lambda \widehat{x}\| = \|\widehat{\lambda x}\| = \inf_{y \in L} \|\lambda x + y\| = |\lambda| \inf_{y \in L} \|x + y\| = |\lambda| \|\widehat{x}\|;$$

$$\|\widehat{x+y}\| = \inf_{u, v \in L} \|x + y + u + v\| \leqslant \inf_{u \in L} \|x + u\| + \inf_{v \in L} \|y + v\| = \|\widehat{x}\| + \|\widehat{y}\|.$$

Пусть $\|\widehat{x}\| = \inf_{y \in L} \|x + y\| = 0$. Тогда найдутся $y_n \in L$, т.ч. $x + y_n \to 0$. Так как $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство, то $x = -\lim y_n \in L$. Поэтому $\widehat{x} = \widehat{0}$.

Лемма. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство ба́нахова пространства $\boldsymbol{E}$, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$ является ба́наховым.*

Доказательство. Докажем полноту факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Пусть $\{\widehat{x_n}\}$ является последовательностью Коши́. Выберем последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$, т.ч. $\|\widehat{x_n} - \widehat{x_m}\| < 1/2^k$ при всех $n, m \geqslant n_k$. По определению нормы $\widehat{\boldsymbol{E}}$ найдутся $y_{n_k} \in L$, т.ч. $z_k \doteqdot x_{n_k} + y_{n_k} \in \widehat{x_{n_k}}$ и $\|z_{k+1} - z_k\| < 1/2^k$. Отсюда ряд $z_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (z_{k+1} - z_k) = \lim z_k$ сходится по норме. Поэтому, если $z = \lim z_k$, то при всех $n \geqslant n_k$

$$\|\widehat{z} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|\widehat{z} - \widehat{x_{n_k}}\| + \|\widehat{x_{n_k}} - \widehat{x_n}\| < \|z - z_k\| + \frac{1}{2^k} \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \|z_{i+1} - z_i\| + \frac{1}{2^k} < \frac{3}{2^k}.$$

Таким образом, существует предел $\lim \widehat{x_n} = \widehat{z} \in \widehat{\boldsymbol{E}}$. □

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *гомоморфизмом*, если он является непрерывным и открытым отображением.

Рассмотрим факторотображение $\pi : \boldsymbol{E} \to \widehat{\boldsymbol{E}}$, определенное по формуле $\pi(x) \doteqdot \widehat{x}$. Его ограниченность вытекает из неравенства $\|\widehat{x}\| \leqslant \|x\|$. Поэтому π непрерывное отображение. Из неравенства $\|\widehat{x}\| \leqslant \|x\|$ следует, что образ $\pi(\boldsymbol{U}_r)$ открытого шара содержится в шаре $\widehat{\boldsymbol{U}}_r$ того же радиуса $r > 0$. Если $\|\widehat{x}\| < r$, то существует $y \in L$, т.ч. $\|\widehat{x}\| \leqslant \|x + y\| < r$, и значит $\pi(x + y) = \pi(x) = \widehat{x}$. Таким образом, образ $\pi(\boldsymbol{U}_r) = \widehat{\boldsymbol{U}}_r$ совпадает с открытым шаром. Поэтому образ любого открытого множества будет открытым и, следовательно, факторотображение π является гомоморфизмом.

Теорема (Ба́наха о гомоморфизме). *Если ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ определяет сюръективное отображение банаховых пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то он является гомоморфизмом.*

Доказательство. Так как ядро $L \doteqdot \ker A$ является замкнутым подпространством $\boldsymbol{E}$, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$ будет банаховым пространством. Определим оператор $\widehat{A} : \widehat{\boldsymbol{E}} \to \boldsymbol{F}$, полагая $\widehat{A}(\widehat{x}) \doteqdot Ax$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Заметим, что оператор $\widehat{A}$ определен корректно, т.к. если $\widehat{x} = \widehat{y}$, то $x - y \in \ker A$ и значит $Ax = Ay$.

Легко видеть, что оператор $\widehat{A} : \widehat{\boldsymbol{E}} \to \boldsymbol{F}$ является линейным, его ядро равно нулю $\ker\widehat{A} = \{\widehat{x} \in \widehat{\boldsymbol{E}} \mid Ax = 0\} = \widehat{0}$, а его образ равен $\mathrm{Im}\widehat{A} = \mathrm{Im}A = \boldsymbol{F}$. Поэтому $\widehat{A}$ задает биективное отображение. Докажем, что нормы $\|\widehat{A}\| = \|A\|$. совпадают.

$$\|\widehat{A}(\widehat{x})\| = \|Ax\| = \inf\nolimits_{y \in L} \|A(x+y)\| \leqslant \|A\| \inf\nolimits_{y \in L} \|x+y\| = \|A\|\,\|\widehat{x}\|.$$

Следовательно, выполняется неравенство $\|\widehat{A}\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, в силу неравенства $\|Ax\| = \|\widehat{A}(\widehat{x})\| \leqslant \|\widehat{A}\|\,\|\widehat{x}\| \leqslant \|\widehat{A}\|\,\|x\|$ справедливо равенство $\|\widehat{A}\| = \|A\|$. Таким образом, по теореме Банаха об обратном операторе $\widehat{A}$ будет гомоморфизмом. Поскольку оператор $A = \widehat{A} \cdot \boldsymbol{\pi}$ является произведением двух гомоморфизмов, то он также будет гомоморфизмом пространства $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{F}$. □

Теорема (о тройке). *Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ являются банаховыми пространствами, $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ сюръективный оператор, а оператор $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{G})$ удовлетворяет условию $\ker A \subset \ker B$. Тогда существует оператор $C \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$, т.ч. $B = CA$.*

Доказательство. Зададим оператор $C : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ по формуле $Cy = Bx$, если $y = Ax$ и $x \in \boldsymbol{E}$. Если $y = Ax_1 = Ax_2$, то $x_1 - x_2 \in \ker A \subset \ker B$. Отсюда получаем, что $Bx_1 = Bx_2$. Следовательно, оператор C определен корректно. Докажем его линейность.

Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y = Ax$, то $C(\lambda y) = C(A(\lambda x)) = B(\lambda x) = \lambda B(x) = \lambda C(y)$. Если $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$, то $C(y_1 + y_2) = C(A(x_1 + x_2)) = B(x_1 + x_2) = B(x_1) + B(x_2) = C(y_1) + C(y_2)$. Поэтому оператор C является линейным отображением.

Пусть $L = \ker A$, тогда оператор $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\widehat{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{F})$ биективен и при всех $y = Ax = \widehat{A}(\widehat{x})$

$$\|Cy\| = \|Bx\| = \inf_{z \in L} \|B(x+z)\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{x}\| = \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}y\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}\|\,\|y\|.$$

Таким образом, $\|C\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}\|$. Так как по теореме Банаха об обратном операторе оператор $\widehat{A}^{-1}$ ограничен, то оператор $C \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ является ограниченным. □

Следствие. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, заданный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, имеет замкнутый образ, то $\mathrm{Im}A = (\ker A^*)_\perp$ и $\mathrm{Im}A^* = (\ker A)^\perp$.*

В силу доказанных ранее соотношений между ядром и образом $\ker A^* = (\mathrm{Im}A)^\perp$. Применяя лемму об бианнуляторе, получим $(\ker A^*)_\perp = ((\mathrm{Im}A)^\perp)_\perp = \mathrm{Im}A$.

В силу доказанных ранее соотношений между ядром и образом $\mathrm{Im}A^* \subset (\ker A)^\perp$. Если функционал $f \in (\ker A)^\perp$, то $\ker A \subset \ker f$. Применяя теорему о тройке, а затем теорему Ха́на–Ба́наха, получим функционал $g \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $f(x) = g(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому $f = A^*g \in \mathrm{Im}A^*$ и, следовательно, $\mathrm{Im}A^* = (\ker A)^\perp$.

12 СПЕКТР ОПЕРАТОРА

Пусть $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ пространство ограниченных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, действующих в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным значением* оператора A, если у оператора $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ существует ограниченный обратный $A_\lambda^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$.

Множество всех регулярных значений обозначается через $\rho(A)$. Его дополнение $\sigma(A) \doteqdot \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* оператора A. Обратный оператор $R_\lambda \doteqdot A_\lambda^{-1}$, определенный при всех $\lambda \in \rho(A)$, называется *резольвентой* оператора A.

Лемма. *Если $\|A\| < |\lambda|$, то $\lambda \in \rho(A)$ и $R_\lambda = \sum_{n=0}^\infty A^n/\lambda^{n+1}$.*

Доказательство. Пусть $B_n \doteqdot \sum_{k=0}^n A^k/\lambda^{k+1}$ и $r = \|A\|/|\lambda| < 1$. В силу неравенства треугольника $\|B_m - B_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^m \|A^k\|/|\lambda|^{k+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^m r^k/|\lambda| \leqslant r^{n+1}/|\lambda|(1-r)$, т.е. $\{B_n\}$ последовательность Коши́ в ба́наховом пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и, следовательно, существует предел $\lim B_n \doteqdot B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} A^n/\lambda^n = 0$, то

$$A_\lambda B = \lim_{n\to\infty} A_\lambda B_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \left(A^k/\lambda^k - A^{k+1}/\lambda^{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(I - A^{n+1}/\lambda^{n+1}\right) = I.$$

Аналогично получим $BA_\lambda = I$. Таким образом, оператор $B = A_\lambda^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. □

Определение. Функция $f : \Omega \to \boldsymbol{E}$, определенная в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *голоморфной* в Ω, если для каждого $z_0 \in \Omega$ существуют $r > 0$ и $c_n \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f(z) = \sum_{n=0}^\infty (z-z_0)^n c_n$ при $z \in D_r(z_0)$, где $D_r(z_0) \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ обозначает открытый круг радиуса r в Ω.

Здесь радиус сходимости степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^\infty (z-z_0)^n c_n$ вычисляется по формуле Коши́–Адама́ра $1/r = \overline{\lim}\sqrt[n]{\|c_n\|}$. Ее доказательство аналогично случаю $\boldsymbol{E} = \mathbb{C}$ в курсе комплексного анализа. Если функция $f(z)$ голоморфна в Ω, то этот радиус равен расстоянию $d = \inf_{z\in\partial\Omega} |z_0 - z|$ от точки $z_0 \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Теорема (о резольвенте). *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то множество $\rho(A)$ открыто в $\mathbb{C}$, резольвента $R_\lambda : \rho(A) \to \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ голоморфна в каждой связной компоненте $\rho(A)$ и норма $\|R_\lambda\| \geqslant 1/d_\lambda$, где $d_\lambda \doteqdot \inf_{z\in\sigma(A)} |\lambda - z|$ расстояние от точки λ до $\sigma(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(A)$, тогда $A_z = A_\lambda - (\lambda - z)I = A_\lambda(I - (\lambda - z)R_\lambda)$. Если $z \in \mathbb{C}$, т.ч. $|z - \lambda|\,\|R_\lambda\| < 1$, то по лемме имеем сходящийся по норме ряд

$$R_z = (I - (\lambda - z)R_\lambda)^{-1} R_\lambda = \sum_{n=0}^\infty (\lambda - z)^n R_\lambda^{n+1}.$$

Поэтому $z \in \rho(A)$ и резольвента $R_z \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным оператором. Кроме того, множество регулярных значений $\rho(A)$ является открытым и функция R_λ голоморфна на каждой связной компоненте $\rho(A)$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то в силу доказанного выполняется неравенство $\|R_\lambda\| \geqslant |\lambda - z|^{-1}$ при всех $z \in \sigma(A)$. Поэтому, взяв нижнею грань модуля по $z \in \sigma(A)$, получим неравенство $\|R_\lambda\| \geqslant 1/d_\lambda$. □

Теорема (о спектре). *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то спектр $\sigma(A)$ является замкнутым, ограниченным и непустым множеством в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Так как множество $\rho(A)$ открыто, то спектр $\sigma(A)$ замкнут. Если $\|A\| < |\lambda|$, то по лемме $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$. Поэтому $R_\lambda \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $\lim_{\lambda\to\infty}\|R_\lambda\| = 0$. Следовательно, спектр лежит в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \|A\|\}$ радиуса $\|A\|$.

Если $A = 0$, то спектр $\sigma(0) = \{0\}$. Пусть $A \neq 0$, тогда по теореме Ха́на–Ба́наха существует $f \in \mathscr{L}^*(\boldsymbol{E})$ такой ограниченный функционал на $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, что $f(A) \neq 0$. Если спектр $\sigma(A) = \emptyset$ является пустым множеством, то $\rho(A) = \mathbb{C}$ и по теореме о резольвенте функция $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(A^n)/\lambda^{n+1}$ голоморфна всюду в $\mathbb{C}$, что невозможно, т.к. $\lambda = 0$ является особой точкой функции F. □

Теорема (об отображении спектра). *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ многочлен с коэффициентами $a_k \in \mathbb{C}$, то $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $a_n \neq 0$. Уравнение $\lambda - P(z)$ имеет n решений с учетом кратности, т.е. $\lambda - P(z) = (-1)^{n+1}a_n(\lambda_1 - z)\ldots(\lambda_n - z)$. Следовательно, имеем

$$\lambda I - P(A) = (-1)^{n+1}a_n(\lambda_1 I - A)\ldots(\lambda_n I - A).$$

Если оператор $\lambda I - P(A)$ обратим, то умножая это равенство справа и слева на обратный оператор, получим, что операторы $\lambda_k I - A$ обратимы при всех $1 \leqslant k \leqslant n$, так как они коммутируют. Наоборот, из обратимости операторов $\lambda_k I - A$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$ следует обратимость оператора $\lambda I - P(A)$. Следовательно, $\lambda \in \rho(P(A))$ в том и только в том случае, когда $\lambda_k \in \rho(A)$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$.

Поэтому $\lambda \in \sigma(P(A))$ тогда и только тогда, когда существует k, т.ч. $\lambda_k \in \sigma(A)$. Последнее условие равносильно тому, что выполняется $\lambda \in P(\sigma(A))$. В самом деле, если такое k существует, то $\lambda = P(\lambda_k) \in P(\sigma(A))$. Наоборот, если $\lambda \in P(\sigma(A))$, то $\lambda = P(z)$ при некотором $z \in \sigma(A)$, т.е. $z = \lambda_k \in \sigma(A)$ при некотором $1 \leqslant k \leqslant n$. □

Теорема (о спектральном радиусе). *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, где $r(A) \doteqdot \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$ спектральный радиус оператора A.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. По теореме об отображении спектра $\lambda^n \in \sigma(A^n)$. Поэтому, применяя лемму, мы получим неравенство $|\lambda|^n \leqslant \|A^n\|$ и, следовательно, спектральный радиус $r(A) \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Кроме того, в силу леммы имеет место разложение в ряд резольвенты $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$ при всех $|\lambda| > \|A\|$.

Если $f \in \mathscr{L}^*(\boldsymbol{E})$ ограниченный функционал на $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda)$ является голоморфной функцией в каждой связной компоненте $\rho(A)$. Поэтому степенной ряд $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(A^n)/\lambda^{n+1}$ сходится при всех $|\lambda| > r(A)$ и значит $\sup_n |f(A^n/\lambda^n)| < \infty$ при всех $|\lambda| > r(A)$. Так как из слабой ограниченности множества $\{A^n/\lambda^n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ вытекает сильная ограниченность, то существует $c_\lambda > 0$, т.ч. $\|A^n/\lambda^n\| \leqslant c_\lambda$ при всех $n \geqslant 0$. Отсюда имеем $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant |\lambda|$ при всех $|\lambda| > r(A)$. Следовательно, выполняется неравенство $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A)$. Таким образом, существует предел $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, который совпадает со спектральным радиусом. □

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* оператора A, если существует ненулевой вектор $e \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $Ae = \lambda e$. Следующие множества

$\sigma_p(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$, состоящее из собственных значений A;

$\sigma_c(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0,\ \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \boldsymbol{E},\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq \boldsymbol{E}\}$;

$\sigma_r(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0,\ \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}$,

называются соответственно *точечным*, *непрерывным* и *остаточным* спектром A. В силу теоремы Ба́наха об обратном операторе $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *обобщенным собственным значением* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если существует *последовательность Вейля* $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_\lambda x_n\| = 0$. Множество обобщенных собственных значений

$$\sigma_l(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}$$

назыается *предельным спектром* оператора A. Дополнительное множество в $\sigma(A)$

$$\sigma_d(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda = \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}$$

называется *дефектным спектром* оператора A.

Лемма. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то предельный спектр $\sigma_l(A)$ является замкнутым, содержит $\sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A)$ и имеет место равенство $\sigma(A) = \sigma_l(A) \sqcup \sigma_d(A)$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \sigma_l(A)$, то существует последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_\lambda x_n\| = 0$. Если бы $\lambda \in \rho(A)$, то $\|x_n\| = \|R_\lambda A_\lambda x_n\| \leqslant \|R_\lambda\| \, \|A_\lambda x_n\| \to 0$, что невозможно. Отсюда $\sigma_l(A) \subset \sigma(A)$. При этом очевидно $\sigma_p(A) \subset \sigma_l(A)$.

Пусть $\lambda_n \to \lambda$, где $\lambda_n \in \sigma_l(A)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$. Выберем элементы $x_n \in \boldsymbol{E}$, $\|x_n\| = 1$, т.ч. $\|A_{\lambda_n} x_n\| < \varepsilon$. Тогда $\|A_\lambda x_n\| \leqslant \|A_\lambda x_n - A_{\lambda_n} x_n\| + \|A_{\lambda_n} x_n\| < |\lambda - \lambda_n| + \varepsilon < 2\varepsilon$. Поэтому $\lambda \in \sigma_l(A)$, т.е. спектр $\sigma_l(A)$ замкнут.

Пусть $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_l(A)$. Тогда существует $c > 0$, т.ч. $\|A_\lambda x\| \geqslant c\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Отсюда $\ker A_\lambda = 0$. Рассмотрим сходящуюся последовательность $y_n = A_\lambda x_n \in \operatorname{Im} A_\lambda$, т.ч. $y_n \to y$. Так как $c\|x_n - x_m\| \leqslant \|A_\lambda x_n - A_\lambda x_m\| \leqslant \|y_n - y\| + \|y_m - y\| \to 0$, то $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{E}$ и значит существует предел $\lim x_n = x$. В силу непрерывности оператора имеем $A_\lambda x = y$, т.е. образ $\operatorname{Im} A_\lambda = \overline{\operatorname{Im} A_\lambda}$ замкнут. Таким образом, $\sigma(A) \setminus \sigma_l(A) \subset \sigma_d(A)$ и поэтому $\sigma_c(A) \subset \sigma_l(A)$. С другой стороны, если $\lambda \in \sigma_d(A)$, то по теореме Ба́наха оператор $A_\lambda : \boldsymbol{E} \to \operatorname{Im} A$ имеет ограниченный обратный, т.е. $\lambda \notin \sigma_l(A)$. Отсюда следует $\sigma_d(A) \subset \sigma(A) \setminus \sigma_l(A)$. $\square$

Теорема (о границе спектра)**.** *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то граница спектра содержится в предельном спектре, т.е. $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \partial\sigma(A)$, то существует последовательность $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, т.ч. $\lambda_n \to \lambda$. Поэтому $d_{\lambda_n} \doteqdot \inf_{z\in\sigma(A)} |\lambda_n - z| \leqslant |\lambda_n - \lambda| \to 0$. Поскольку $A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = I$, то операторы $B_n \doteqdot r_n R_{\lambda_n}$, где $r_n = 1/\|R_{\lambda_n}\|$, удовлетворяет соотношению

$$A_\lambda B_n = (A_\lambda - A_{\lambda_n}) B_n + A_{\lambda_n} B_n = (\lambda - \lambda_n) B_n + r_n I.$$

Поскольку $\|B_n\| = 1$, то существует последовательность $\{y_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|B_n y_n\| > 1/2$. Полагая $x_n \doteqdot s_n B_n y_n$, где $s_n = 1/\|B_n y_n\|$, и применяя указанное выше соотношение к элементу $s_n y_n$, мы получим следующее равенство:

$$A_\lambda x_n = A_\lambda B_n(s_n y_n) = (\lambda - \lambda_n) B_n(s_n y_n) + r_n I(s_n y_n) = (\lambda - \lambda_n) x_n + r_n s_n y_n.$$

Так как по построению $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $s_n \leqslant 2$ и по теореме о резольвенте $r_n \leqslant d_{\lambda_n}$, то $\|A_\lambda x_n\| \leqslant |\lambda - \lambda_n| + 2d_{\lambda_n} \leqslant 3|\lambda - \lambda_n| \to 0$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_l(A)$. □

Определение. Операторы $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F})$, действующие в пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, называются *эквивалентными* $A \sim B$ (или подобными), если существует обратимый оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, т.ч. $TA = BT$.

Если, кроме того, оператор T является изометричным отображением $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{F}$, то операторы называются *изометрически эквивалентными* $A \approx B$. В гильбертовых пространствах такие операторы называются *унитарно эквивалентными*.

1. *Если $A \sim B$ эквивалентны, то $\sigma(A) = \sigma(B)$, $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$, $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$, $\sigma_l(A) = \sigma_l(B)$, $\sigma_d(A) = \sigma_d(B)$.*

Поскольку $A_\lambda = \lambda I - A$ и $B_\lambda = \lambda I - B$, то $B_\lambda T = T A_\lambda$. Поэтому операторы $A_\lambda \sim B_\lambda$ эквивалентны. Следовательно, A_λ обратим тогда и только тогда, когда B_λ обратим. При этом имеют место равенства $\ker B_\lambda = T \ker A_\lambda$ и $\operatorname{Im} B_\lambda = T \operatorname{Im} A_\lambda$ при $\lambda \in \rho(A)$. Отсюда легко вытекают указанные равенства спектров.

2. *Если $A \approx B$ изометрически эквивалентны, то $\|A\| = \|B\|$.*

Так как в силу изометричности $B = TAT^{-1}$ и $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, то имеют место неравенства $\|B\| \leqslant \|A\|$ и $\|A\| \leqslant \|B\|$. Откуда следует, что $\|A\| = \|B\|$.

3. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то спектр сопряженного оператора $\sigma(A^*) = \sigma(A)$.*

Так как $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$, то $A^*_\lambda = \lambda I - A^*$. Поскольку для ограниченного обратимого оператора выполняется равенство $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, то $(R_\lambda)^* = (A^{-1}_\lambda)^* = (A^*_\lambda)^{-1} = R^*_\lambda$. Следовательно, множества регулярных значений $\rho(A^*) = \rho(A)$ совпадают.

4. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$, то спектр эрмитово-сопряженного оператора $\sigma(A^*) = \overline{\sigma}(A)$.*

По определению эрмитово-сопряженного оператора имеют место равенства

$$\langle A_\lambda x, y \rangle = \langle \lambda x - Ax, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} y - A^* y \rangle = \langle x, (A^*)_{\bar{\lambda}}\, y \rangle, \quad \text{т.е. } (A_\lambda)^* = (A^*)_{\bar{\lambda}}.$$

Отсюда $(R_\lambda)^* = (A^{-1}_\lambda)^* = (A^*_{\bar{\lambda}})^{-1}$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\rho(A^*) = \overline{\rho}(A)$.

13 КОМПАКТНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами над полем $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

Определение. Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называется *компактным*, если образ $A(M)\subset\boldsymbol{F}$ каждого ограниченного множества $M\subset\boldsymbol{E}$ является предкомпактным в $\boldsymbol{F}$. Обозначим через $\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ пространство всех компактных операторов, действующих из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$ и $\mathscr{K}(\boldsymbol{E})\doteqdot\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$.

1. *Оператор $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный тогда и только тогда, когда образ $A(\boldsymbol{S})\subset\boldsymbol{F}$ единичного шара $\boldsymbol{S}\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid\|x\|\leqslant 1\}$ является предкомпактным.*

В самом деле, по определению множество $M\subset\boldsymbol{E}$ ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре $\boldsymbol{S}_r\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid\|x\|\leqslant r\}$, где $r>0$.

2. *Компактный оператор $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ограниченным.*

Поскольку всякое предкомпактное множество является ограниченным.

3. *Если $A,B\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактные, то их сумма $A+B\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактна.*

Действительно, пусть $\{x_n\}\subset\boldsymbol{S}$. Тогда существует $\{n_k\}$, т.ч. $Ax_{n_k}\to y\in\boldsymbol{F}$, и существует $\{n_{k_i}\}$, т.ч. $Bx_{n_{k_i}}\to z\in\boldsymbol{F}$. Отсюда $(A+B)x_{n_{k_i}}=Ax_{n_{k_i}}+Bx_{n_{k_i}}\to y+z\in\boldsymbol{F}$. Таким образом, множество $A(\boldsymbol{S})\subset\boldsymbol{F}$ является предкомпактным.

4. *Если $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\dim\boldsymbol{E}<\infty$ или $\dim\boldsymbol{F}<\infty$, то $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный.*

Действительно, всякое ограниченное множество в пространстве конечной размерности является предкомпактным. Так как в обоих случаях размерность образа оператора $\dim\operatorname{Im}A<\infty$ конечна, то оператор компактный.

5. *Если $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, а $B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то оператор $BA\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный. Если $B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, а $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то оператор $AB\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный.*

Это следует из того, что всякий ограниченный оператор переводит ограниченные множества в ограниченные, а предкомпактные множества в предкомпактные.

6. *Пусть оператор $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный. Тогда, если $\dim\boldsymbol{E}=\infty$, то A не имеет левого обратного, а если $\dim\boldsymbol{F}=\infty$, то A не имеет правого обратного.*

Если существует левый обратный $B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, т.ч. $BA=I_{\boldsymbol{E}}$, то тождественный оператор $I_{\boldsymbol{E}}$ является компактным, что невозможно, т.к. единичный шар $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{E}$ не является предкомпактным. Аналогичное доказательство для правого обратного.

7. *Пространство компактных операторов $\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является замкнутым, т.е. если $A_n\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $A_n\to A$ сходится по норме, то $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

По условию для любого $\varepsilon>0$ найдется n, т.ч. $\|A_nx-Ax\|<\varepsilon/2$ при всех $x\in\boldsymbol{S}$. Так как $A_n(\boldsymbol{S})$ предкомпактно, то существует $\varepsilon/2$-сеть $\{y_k\}_{k=1}^m$ множества $A_n(\boldsymbol{S})$. Тогда для каждого $x\in\boldsymbol{S}$ найдется k, т.ч. $\|y_k-Ax\|\leqslant\|y_k-A_nx\|+\|A_nx-Ax\|<\varepsilon$. Поэтому $\{y_k\}_{k=1}^m$ является ε-сетью $A(\boldsymbol{S})$ и значит $A(\boldsymbol{S})$ предкомпактно.

Теорема (Ша́удера). *Оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, действующий в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, является компактным $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ тогда и только тогда, когда его сопряженный оператор $A^* \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$ компактный.*

Доказательство. Необходимость. По условию замкнутый образ единичного шара $K \doteqdot \overline{A(\boldsymbol{S})}$ является компактным. Пусть M множество всех функций $g \in \boldsymbol{C}(K)$, т.ч. $g(y) \doteqdot f(y)$ при $y \in K$, где $f \in \boldsymbol{S}^*$ из единичного шара в $\boldsymbol{F}^*$. Поскольку

$$\sup_{y\in K}|g(y)| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|f(Ax)\| \leqslant \|A\|, \quad |g(y_1)-g(y_2)| = |f(y_1-y_2)| \leqslant \|y_1-y_2\|,$$

то множество $M \subset \boldsymbol{C}(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По критерию предкомпактности в $\boldsymbol{C}(K)$ множество M является предкомпактным. Заметим, что M изометрично $A^*(\boldsymbol{S}^*)$, т.к. $\|A^*f\| = \sup_{x\in\boldsymbol{S}}|f(Ax)| = \sup_{y\in K}|g(y)| = \|g\|_{\boldsymbol{C}}$. Поэтому образ шара $A^*(\boldsymbol{S}^*) \subset \boldsymbol{E}^*$ является предкомпактным.

Достаточность. Так как $A^* \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$, то по доказанному $A^{**} \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}^{**},\boldsymbol{F}^{**})$. Пусть $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ обозначает каноническое вложение $\boldsymbol{E}$ во второе сопряженное пространство $\boldsymbol{E}^{**}$. Так как $(Jx)(f) = f(x)$, то при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$ получим

$$(A^{**}(Jx))(f) = (Jx)(A^*f) = (A^*f)(x) = f(Ax) = (J(Ax))(f),$$

т.е. $A^{**}J = JA$. Отсюда $JA(\boldsymbol{S})) = A^{**}J(\boldsymbol{S}) \subset A^{**}(\boldsymbol{S}^{**})$, т.к. $J(\boldsymbol{S}) \subset \boldsymbol{S}^{**}$. Поскольку в силу необходимости $A^{**}(\boldsymbol{S}^{**})$ предкомпактно, то $A(\boldsymbol{S})$ будет предкомпактным. □

Рассмотрим свойства спектра компактного оператора. Напомним, что число λ принадлежит предельному спектру $\lambda \in \sigma_l(A)$ оператора A, если $\inf_{\|x\|=1}\|A_\lambda x\| = 0$.

1. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и размерность $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то $\sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.*

По свойству 6 имеем $0 \in \sigma_l(A)$. Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$ и $\lambda \neq 0$, тогда существует $\{x_n\}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \to 0$. В силу компактности A найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to e \in \boldsymbol{E}$. Поскольку $\lambda x_{n_k} = A_\lambda x_{n_k} + Ax_{n_k}$, то $\lambda x_{n_k} \to e$. Поэтому в силу непрерывности оператора $\lambda A x_{n_k} \to Ae$. Отсюда имеем $Ae = \lambda e$, т.е. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

2. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, то вне любого круга $D_\varepsilon \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, может находится только конечное число собственных значений оператора A.*

Предположим, что найдется последовательность $|\lambda_n| > \varepsilon$ различных собственных значений. Рассмотрим последовательность $\{e_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|e_n\| = 1$ и $Ae_n = \lambda_n e_n$, и обозначим через $L_n = \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^n$ линейную оболочку. Поскольку $\{e_n\}$ линейно независимы, то $L_{n-1} \neq L_n$. По лемме Рисса о почти перпендикуляре существуют $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Представим эти элементы в виде $y_n \doteqdot c_n e_n + x_n$, где $x_n \in L_{n-1}$. Тогда $Ay_n = c_n\lambda_n e_n + Ax_n = \lambda_n y_n - \lambda_n x_n + Ax_n$, где $\lambda_n x_n - Ax_n \in L_{n-1}$. Так как $\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то получим

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m)\| > |\lambda_n|/2 > \varepsilon/2.$$

т.е. последовательность $\{Ay_n\} \subset A(\boldsymbol{S})$ не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.

Теорема (Ри́сса–Ша́удера). *Если компактный оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ действует в банаховом пространстве бесконечной размерности* $\dim \boldsymbol{E} = \infty$*, то спектр* $\sigma(A)$ *состоит из собственных значений и нуля* $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ *и все ненулевые собственные значения* $\lambda \neq 0$ *конечной кратности* $\dim E_\lambda < \infty$*, где* $E_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$.

Доказательство. В силу свойства 1 спектра компактного оператора и теоремы о границе спектра выполняется включение $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Поскольку в силу свойства 2 вне любого круга D_ε имеется лишь конечное число собственных значений, то там нет других точек спектра $\sigma(A)$. Действительно, если множество $\mathbb{C} \setminus D_\varepsilon$ имеет точки спектра, которые не являются собственными значениями, то в множестве $\mathbb{C} \setminus D_\varepsilon$ можно провести прямую, содержащую точки спектра, которая идет в бесконечность и не проходит через собственные значения. Тогда последняя точка спектра на этой прямой была бы граничный точкой, что невозможно в силу сказанного выше. Поэтому ненулевые точки спектра совпадают с собственными значениями оператора A и выполняется равенство $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Поскольку сужение оператора $A|_{E_\lambda} = \lambda I|_{E_\lambda}$ на собственное подпространство E_λ, соответствующее ненулевому собственному значению $\lambda \neq 0$, является компактным обратимым оператором, то по свойству 6 размерность $\dim E_\lambda < \infty$ конечна. □

Определение. Оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ называется *эрмитовым* (или *самосопряженным*) в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, если $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для всех $x, y \in \boldsymbol{H}$. Множество всех эрмитовых операторов обозначается через $\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$.

Рассмотрим свойства спектра эрмитова оператора $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$. Заметим, что его собственные значения $\lambda \in \sigma_p(A)$ действительны, а собственные подпространства $H_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$ ортогональны $H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В самом деле, если $Ae = \lambda e$ и $\|e\| = 1$, то $\lambda = \langle Ae, e\rangle = \langle e, Ae\rangle = \overline{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$. Если $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ и $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, то $\lambda_1\langle e_1, e_2\rangle = \langle Ae_1, e_2\rangle = \langle e_1, Ae_2\rangle = \lambda_2\langle e_1, e_2\rangle$, т.е. $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Теорема (критерий Ве́йля). *Спектр эрмитова оператора $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ совпадает с его предельным спектром, т.е.* $\sigma(A) = \sigma_l(A)$.

Доказательство. Поскольку дополнительное множество к предельному спектру $\sigma(A) \setminus \sigma_l(A) \subset \sigma_r(A)$ содержится в остаточном спектре, то достаточно показать, что остаточный спектр $\sigma_r(A)$ является пустым. Предположим обратное, т.е. $\ker A_\lambda = 0$ и существует $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $y \neq 0$ и $y \perp \operatorname{Im} A_\lambda$. Тогда $\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle x, A_{\overline{\lambda}} y\rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Отсюда следует, что $A_{\overline{\lambda}} y = 0$, т.е. $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A)$. Так как собственные значения действительны, то $A_\lambda y = 0$, что противоречит предположению $\ker A_\lambda = 0$. □

1. *Если $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ является действительным.*

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\beta \neq 0$, то $A_\lambda x = A_\alpha x + i\beta x$ и справедливо равенство

$$\|A_\lambda x\|^2 = \langle A_\alpha x, A_\alpha x\rangle - i\beta\langle A_\alpha x, x\rangle + i\beta\langle x, A_\alpha x\rangle + \beta^2\langle x, x\rangle = \|A_\alpha x\|^2 + \beta^2\|x\|.$$

Поэтому $\inf_{\|x\|=1}\|A_\lambda x\| \geqslant |\beta| > 0$ и, следовательно, по критерию Ве́йля $\lambda \notin \sigma(A)$.

2. *Если $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то спектральный радиус равен норме $r(A) = \|A\|$.*

Так как $A^2 = AA$, то $\|A^2\| \leqslant \|A\|^2$. В силу неравенства Коши́–Буняко́вского

$$\|A^2\| = \sup_{x\in\boldsymbol{S}} \|A^2x\| \geqslant \sup_{x,y\in\boldsymbol{S}} \langle A^2x, y\rangle = \sup_{x,y\in\boldsymbol{S}} \langle Ax, Ay\rangle \geqslant \sup_{x\in\boldsymbol{S}} \langle Ax, Ax\rangle = \sup_{x\in\boldsymbol{S}} \|Ax\|^2 = \|A\|^2,$$

где $\boldsymbol{S} = \{x \in \boldsymbol{H} \mid \|x\| \leqslant 1\}$. Поэтому $\|A^2\| = \|A\|^2$ и, следовательно, $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. По теореме о спектральном радиусе $r(A) = \lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim \sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|} = \|A\|$.

3. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{H}) \cap \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то A имеет собственные значения, т.е. $\sigma_p(A) \neq \emptyset$.*

Пусть $\sigma_p(A) = \emptyset$. Так как $\sigma(A) \neq \emptyset$, то по теореме Ри́сса–Ша́удера $\sigma(A) = \{0\}$. Поэтому по свойству 2 получим $r(A) = \|A\| = 0$, т.е. $A = 0$, что невозможно.

Теорема (Ги́льберта–Шми́дта). *Пусть оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{H}) \cap \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ является компактным и эрмитовым в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда существует полная ортонормированная система, состоящая из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. В случае $\dim \boldsymbol{H} < \infty$ эта теорема доказывается в курсе линейной алгебры. Пусть $\boldsymbol{H}$ бесконечномерное гильбертово пространство, т.е. $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. Так как оператор A является компактным, то множество $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$ его собственных значений не более, чем счетно. При этом ненулевые собственные значения $\lambda_n \neq 0$ имеют конечную кратность $\dim H_{\lambda_n} < \infty$, где $H_{\lambda_n} \doteqdot \ker A_{\lambda_n}$. Поскольку оператор A является эрмитовым, то все его собственные значения действительны $\lambda_n \in \mathbb{R}$, а их собственные подпространства ортогональны $H_{\lambda_n} \perp H_{\lambda_m}$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Выберем в каждом подпространстве H_{λ_n} ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов с собственным значением λ_n. Тогда объединение всех этих ортонормированных систем образует ортонормированную систему $\{e_n\}$ в $\boldsymbol{H}$. Пусть $L \doteqdot \overline{\mathrm{sp}}\{e_n\}$ замкнутая линейная оболочка системы $\{e_n\}$. Тогда L является инвариантным подпространством оператора A, т.е. $A : L \to L$. В силу эрмитовости оператора A ортогональное дополнение $L^\perp$ будет инвариантным подпространством оператора A, т.е. $A : L^\perp \to L^\perp$. В самом деле, если $y \in L^\perp$, то $0 = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ при всех $x \in L$, т.е. $Ay \in L^\perp$. Следовательно, по свойству 3 подпространство $L^\perp$ должно иметь собственный вектор, что невозможно по построению. Таким образом, $L^\perp = 0$ и по теореме об ортогональном разложении получим, что $\boldsymbol{H} = L \oplus L^\perp = L$. $\square$

14 ФРЕДГО́ЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются банаховыми пространствами.

Определение. Оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *фредго́льмовым*, если ядро $\ker A$ имеет конечную размерность $\dim\ker A$, а образ $\operatorname{Im} A$ имеет конечную коразмерность $\operatorname{codim}\operatorname{Im} A$. Разность этих размерностей $\operatorname{ind} A \doteqdot \dim\ker A - \operatorname{codim}\operatorname{Im} A$ будем называть *индексом* фредго́льмова оператора A. Множество всех фредго́льмовых операторов обозначается через $\mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

Лемма. *Если оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ фредго́льмовый, то его образ замкнут.*

Доказательство. Пусть $\{\widehat{y}_k\}_{k=1}^m$ — базис факторпространства $\widehat{\boldsymbol{F}} \doteqdot \boldsymbol{F}/\operatorname{Im} A$. Так как всякий элемент $z \in \boldsymbol{F}$ допускает представление $z = y_0 + \sum_{k=1}^m c_k y_k$, где $y_0 \in \operatorname{Im} A$, то $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A + M$, где $M \doteqdot \operatorname{sp}\{y_k\}_{k=1}^m$ обозначает линейную оболочку. Рассмотрим оператор $B : \boldsymbol{E} \times M \to \boldsymbol{F}$, определенный по формуле $B(x,y) \doteqdot Ax + y$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $y \in \boldsymbol{M}$. Так как оператор B является ограниченным и сюръективным, то он гомоморфизм. Поэтому образ $B(\boldsymbol{E} \times 0) = \operatorname{Im} A$ замкнутого подпространства $\boldsymbol{E} \times 0$ замкнут. □

Пример 1. Всякий биективный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является фредгольмовым. Компактный оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ не является фредгольмовым, если $\dim \boldsymbol{E} = \infty$ или $\dim \boldsymbol{F} = \infty$. В самом деле, иначе по теореме о гомоморфизме образ единичного шара $A(\boldsymbol{U})$ является окрестностью нуля в $\operatorname{Im} A$ и в силу предкомпактности имеет конечную размерность $\dim A(\boldsymbol{S}) < \infty$. Поэтому размерность образа $\dim\operatorname{Im} A < \infty$ и значит в силу фредгольмости $\dim \boldsymbol{F} < \infty$ и $\dim \boldsymbol{E} < \infty$, что невозможно.

Теорема (о каноническом операторе Фредго́льма)**.** *Если оператор $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный, то оператор $A \doteqdot I - K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})$ фредго́льмовый.*

Доказательство. Так как ядро $\ker A$ имеет конечную размерность, то $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$, где $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство. Докажем, что образ $\operatorname{Im} A$ замкнут. Заметим, что оператор $B \doteqdot A|_L$ имеет тот же образ $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A$ и его ядро $\ker B = 0$.

Покажем, что существует $c > 0$, т.ч. $\|Bx\| \geqslant c\|x\|$ при всех $x \in L$. В противном существуют $x_n \in L$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $Bx_n \to 0$. В силу компактности K найдется подпоследовательность $Kx_{n_i} \to e$. Тогда имеем $x_{n_i} = Bx_{n_i} + Kx_{n_i} \to e$ и $Bx_{n_i} \to Be = 0$. Из замкнутости L вытекает $e \in L$, $\|e\| = 1$ и $Be = 0$, что невозможно.

Пусть $y \in \overline{\operatorname{Im} B}$, тогда найдутся $x_k \in L$, т.ч. $Bx_k \to y$ и $\|x_k - x_l\| \leqslant \|B(x_k - x_l)\|/c \to 0$ при $k,l \to \infty$. Поэтому $\{x_k\}$ будет последовательностью Коши́ и значит существует предел $\lim x_k = x \in L$. В силу непрерывности оператора $Bx_k \to Bx = y \in \operatorname{Im} B$.

Поскольку образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} A = (\ker A^*)_\perp$. Так как по теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A^*$ имеет конечную размерность m, то обозначим через $\{g_k\}_{k=1}^m$ базис ядра, а через $\{y_k\}_{k=1}^m$ биортогональную систему. Тогда $\operatorname{Im} A = \bigcap_{k=1}^m \ker g_k$. Если $M \doteqdot \operatorname{sp}\{y_k\}_{k=1}^m$ обозначает линейную оболочку, то всякий элемент $z \in \boldsymbol{E}$ допускает разложение $z = x + y$, где $y = \sum_{k=1}^m g_k(z) y_k \in \boldsymbol{M}$ и

$x = z - y \in \mathrm{Im}A$. Таким образом, получаем разложение в прямую сумму $\boldsymbol{E} = \mathrm{Im}A \oplus M$ и значит коразмерность образа $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}A = \dim M = m$. □

Из курса линейной алгебры известна *альтернатива Фредго́льма*: либо система n линейных уравнений с n неизвестными однозначно разрешима, либо соответствующая однородная система имеет ненулевое решение. Теоремы Фредго́льма в бесконечномерном банаховом пространстве устанавливают аналогичные связи между решениями однородного и неоднородного уравнений.

В формулировках теорем Фредгольма оператор $A \doteqdot I - K$ является *каноническим оператором Фредгольма* в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$, где $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ обозначает компактный оператор, а оператор $A^* \doteqdot I - K^*$ является сопряженным. По теореме Ри́сса–Ша́удера ядра имеют конечную размерность $\dim\ker A = n$ и $\dim\ker A^* = m$.

Теорема (I теорема Фредго́льма)**.** *Пусть $\{g_k\}_{k=1}^m$ базис решений однородного сопряженного уравнения $A^*f = 0$. Тогда неоднородное уравнение $Ax = y$ в том и только в том случае имеет решение, когда $g_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Так как образ $\mathrm{Im}A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле имеем $\mathrm{Im}A = (\ker A^*)_\perp$. Отсюда получим $\mathrm{Im}A = \bigcap_{k=1}^m \ker g_k$ и, следовательно, $y \in \mathrm{Im}A$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $g_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$. □

Теорема (II теорема Фредго́льма)**.** *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ базис решений однородного уравнения $Ax = 0$. Тогда неоднородное сопряженное уравнение $A^*f = g$ в том и только в том случае имеет решение, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Так как образ $\mathrm{Im}A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле имеем $\mathrm{Im}A^* = (\ker A)^\perp$. Отсюда образ $\mathrm{Im}A^* = \bigcap_{k=1}^n \ker \delta_{x_k}$, где $\delta_{x_k} \in \boldsymbol{E}^{**}$ обозначают функционалы Дирака, определенные по формуле $\delta_{x_k}(f) \doteqdot f(x_k)$ при $f \in \boldsymbol{E}^*$. Таким образом, $g \in \mathrm{Im}A^*$ тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. □

Теорема (III теорема, альтернатива Фредго́льма)**.** *Для того чтобы неоднородное уравнение $Ax = y$ было разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $Ax = 0$ имело только нулевое решение.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует элемент $x_1 \neq 0$, т.ч. $Ax_1 = 0$. Обозначим через $L_n \doteqdot \ker A^n$ ядро оператора A^n. Тогда включения этих подпространств $L_{n-1} \subset L_n$ являются строгими при всех $n = 2, 3, \ldots$ Действительно, по условию теоремы существуют $x_n \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $Ax_n = x_{n-1}$ при $n = 2, 3, \ldots$ Отсюда следует равенство $A^{n-1}x_n = x_1 \neq 0$, и значит $x_n \in L_n \setminus L_{n-1}$.

В силу леммы Ф. Рисса о почти перпендикуляре существуют элементы $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Поскольку имеют место равенства $Ky_n - Ky_m = y_n - (Ay_n + y_m - Ay_m)$ и элемент $Ay_n + y_m - Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то $\|Ky_n - Ky_m\| > 1/2$ при $n > m$, что противоречит компактности оператора K.

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = 0$ допускает только нулевое решение. Тогда по второй теореме неоднородное сопряженное уравнение $A^*f = g$

разрешимо при всех $g \in \boldsymbol{E}^*$ и значит по доказанной необходимости однородное сопряженное уравнение $A^*f = 0$ имеет только нулевое решение. Поэтому в силу первой теоремы неоднородное уравнение $Ax = y$ разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$. □

Теорема (о индексе канонического оператора Фредго́льма)**.** *Ядра канонического оператора Фредгольма* $A = \boldsymbol{I} - K$ *и его сопряженного* $A^* = \boldsymbol{I} - K^*$ *имеют равную размерность* $\dim\ker A = \dim\ker A^*$*, т.е. его индекс* $\operatorname{ind} A = 0$.

Доказательство. Пусть далее $\{x_i\}_{i=1}^n$ задает базис подпространства $\ker A$ и $\{f_i\}_{i=1}^n$ соответствующая биортогональная система функционалов из $\boldsymbol{E}^*$. Пусть $\{g_j\}_{j=1}^m$ задает базис подпространства $\ker A^*$ и $\{y_j\}_{i=1}^m$ соответствующая биортогональная система элементов из $\boldsymbol{E}$. Докажем, что следующие два случая невозможны.

a) $n < m$. Определим операторы $K_n x \doteqdot Kx + \sum_{i=1}^n f_i(x)\, y_i$ при $x \in \boldsymbol{E}$ и $A_n \doteqdot \boldsymbol{I} - K_n$. Докажем, что ядро $\ker A_n = 0$. В самом деле, пусть $x \in \ker A_n$, т.е. $Ax = \sum_{i=1}^n f_i(x)\, y_i$. Так как $g_j \in \ker A^*$, то $A^*g_j(x) = g_j(Ax) = f_j(x) = 0$ при $j = 1, \ldots, n$. Тогда $Ax = 0$ и, следовательно, $x = \sum_{i=1}^n f_i(x)\, x_i = 0$, т.е. $\ker A_n = 0$. Поскольку оператор K_n является компактным, то по теореме III существует $z \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $A_n z = y_m$. Так как $g_m \in \ker A^*$, то $0 = A^*g_m(z) = g_m(Az) = g_m(A_n z) = g_m(y_m) = 1$, что невозможно.

b) $n > m$. Рассмотрим оператор $K_m^* f \doteqdot K^* f + \sum_{j=1}^m f(y_j)\, f_j$ при $f \in \boldsymbol{E}^*$, который является сопряженным к оператору $K_m x \doteqdot Kx + \sum_{j=1}^m f_j(x)\, y_j$. Положим $A_m^* = \boldsymbol{I} - K_m^*$. Докажем, что $\ker A_m^* = 0$. В самом деле, пусть $f \in \ker A_m^*$, т.е. $A^* f = \sum_{j=1}^m f(y_j)\, f_j$. Так как $x_i \in \ker A$, то $A^* f(x_i) = f(Ax_i) = f(y_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, m$. Тогда $A^* f = 0$ и, следовательно, $f = \sum_{j=1}^m f(y_j)\, g_j = 0$, т.е. $\ker A_m^* = 0$. Поскольку оператор K_m^* является компактным, то по теореме III существует $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $A_m^* g = f_n$. Так как $x_n \in \ker A$, то $0 = g(Ax_n) = g(A_m x_n) = A_m^* g(x_n) = f_n(x_n) = 1$, что невозможно. □

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ называется *почти обратимым*, если существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{E}} - K_1$ и $AT = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{F}} - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ компактные операторы.

Теорема (Никольского)**.** *Ограниченный оператор* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *тогда и только тогда является почти обратимым, когда он фредго́льмовый.*

Доказательство. Необходимость. Так как по условию $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами, то по доказанной выше теореме операторы $TA = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{E}} - K_1$ и $AT = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{F}} - K_2$ являются фредго́льмовыми. Поскольку $\ker A \subset \ker TA$ и $\operatorname{Im} AT \subset \operatorname{Im} A$, то оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ также будет фредго́льмовым.

Достаточность. Так как размерность ядра $\ker A$ конечна, то существует замкнутое подпространство L, т.ч. $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$. Так как образ $\operatorname{Im} A$ замкнут и имеет конечную коразмерность, то существует замкнутое подпространство M, т.ч. $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A \oplus M$.

Обозначим через $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ проектор на L, а через $Q : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ проектор на $\operatorname{Im} A$, и положим $P_1 \doteqdot \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{E}} - P$ и $Q_1 \doteqdot \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{F}} - Q$. Так как L и $\operatorname{Im} A$ замкнутые подпространства, то P и Q ограниченные проекторы. При этом проекторы P_1 и Q_1 имеют конечномерные образы $\operatorname{Im} P_1 = \ker A$ и $\operatorname{Im} Q_1 = M$, а значит являются компактными операторами.

Поскольку оператор $B \doteqdot A|_L : L \to \mathrm{Im}A$ биективный, то по теореме Бáнаха его обратный $B^{-1} : \mathrm{Im}A \to L$ является ограниченным. Пусть $T \doteqdot PB^{-1}Q$, тогда имеют место равенства $TA = PB^{-1}A = P = I_{\boldsymbol{E}} - P_1$ и $AT = AB^{-1}Q = Q = I_{\boldsymbol{F}} - Q_1$. □

Замечание. Оператор $T \in \mathscr{F}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$, введенный в теореме, является фредгольмовым и его индекс вычисляется по формуле $\mathrm{ind}\,T = \dim\ker Q - \dim\ker P = -\,\mathrm{ind}A$.

Определение. Оператор $A+K$, называется *компактным возмущение* оператора A, если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ ограниченный оператор, а $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный оператор.

Теорема (об устойчивости при компактных возмущениях)**.** *Если* $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *и* $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$*, то* $A+K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *и индекс* $\mathrm{ind}(A+K) = \mathrm{ind}A$.

Доказательство. В силу теоремы Никольского существует оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами. Тогда имеют место следующие равенства:

$$T(A+K) = I - (K_1 - TK), \quad (A+K)T = I - (K_2 - KT),$$

где $K_1 - TK \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 - KT \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$. Поэтому оператор $A+K \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ почти обратим и значит является фредгóльмовым. В силу замечания при доказательстве теоремы Никольского его индекс равен $\mathrm{ind}(A+K) = -\,\mathrm{ind}\,T = \mathrm{ind}A$. □

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *несущественным значением* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ является фредгóльмовым. Множество всех несущественных значений обозначается через $\rho_e(A)$.

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *существенным значением* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ не является фредгóльмовым. Множество всех существенных значений обозначается через $\sigma_e(A)$ и называется *существенным спектром*.

Так как всякий обратимый оператор является фредгóльмовым, то $\sigma_e(A) \subset \sigma(A)$. Спектр оператора является объединением двух множеств $\sigma(A) = \sigma_e(A) \sqcup \sigma_i(A)$,

$$\sigma_e(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \notin \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\}, \quad \sigma_i(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\},$$

где $\sigma_i(A)$ называется *несущественным спектром* A. По теореме об устойчивости существенный и несущественный спектры ограниченного оператора не изменяются при компактных возмущениях оператора A.