1 ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\boldsymbol{E}$ линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Напомним, что полунормой на пространстве $\boldsymbol{E}$ называется неотрицательная функция $\boldsymbol{p}:\boldsymbol{E}\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию однородности $\boldsymbol{p}(\lambda x)=|\lambda|\boldsymbol{p}(x)$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$ и неравенству треугольника $\boldsymbol{p}(x+y)\leqslant\boldsymbol{p}(x)+\boldsymbol{p}(y)$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$.

Определение. Топология τ в пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *локально выпуклой*, если в пространстве $\boldsymbol{E}$ существует система полунорм $\boldsymbol{P}$, т.ч. локальная база $\beta(x)$ топологии τ в точке $x\in\boldsymbol{E}$ состоит из всех окрестностей следующего вида:

$$O(x)\doteq\{y\in\boldsymbol{E}\mid\max_{1\leqslant k\leqslant n}\boldsymbol{p}_k(y-x)<\varepsilon\},\ \text{где}\ \varepsilon>0,\ \boldsymbol{p}_k\in\boldsymbol{P},\ k=1,\ldots,n.$$

Здесь каждая окрестность $O(x)$ локальной базы топологии τ определяется числом $\varepsilon>0$ и конечным набором полунорм $\{\boldsymbol{p}_k\}_{k=1}^n$ множества $\boldsymbol{P}$.

Топология τ называется локально выпуклой, поскольку ее локальная база $\beta(x)$ состоит из выпуклых множеств. Линейное пространство $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{P})$, в котором задана локально выпуклая топология, называется *локально выпуклым пространством*. Операции сложения $x+y$ и умножения на число λx непрерывны в любой локально выпуклой топологии пространства $\boldsymbol{E}$ (см. 2-ю лекцию прошлого семестра).

В локально выпуклом пространстве $\boldsymbol{E}$ множество M называется *ограниченным*, если верхняя грань $\sup_{x\in M}\boldsymbol{p}(x)<\infty$ конечна при всех $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{P}$. Последовательность $\{x_n\}\subset\boldsymbol{E}$ называют *сходящейся к* элементу $x\in\boldsymbol{E}$, если для любых $\varepsilon>0$ и $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{P}$ существует N, т.ч. $\boldsymbol{p}(x_n-x)<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$. Если для любых $\varepsilon>0$ и $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{P}$ существует N, т.ч. $\boldsymbol{p}(x_n-x_m)<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$, то $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши́*. Локально выпуклое пространство $(\boldsymbol{E},\tau)$ называют *полным*, если всякая последовательность Коши́ является сходящейся.

В системе полунорм $\boldsymbol{P}$ введем отношение порядка $\boldsymbol{p}_1\leqslant\boldsymbol{p}_2$, если $\boldsymbol{p}_1(x)\leqslant\boldsymbol{p}_2(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Система полунорм $\boldsymbol{P}$ называется *направленной*, если для любых $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\in\boldsymbol{P}$ найдется $\boldsymbol{p}_3\in\boldsymbol{P}$, т.ч. $\boldsymbol{p}_1\leqslant\boldsymbol{p}_3$ и $\boldsymbol{p}_2\leqslant\boldsymbol{p}_3$. Для всякой системы $\boldsymbol{P}$ введем направленную систему $\vec{\boldsymbol{P}}$ всех полунорм вида $\boldsymbol{p}(x)\doteq\max_{1\leqslant k\leqslant n}\boldsymbol{p}_k(x)$, где $\boldsymbol{p}_k\in\boldsymbol{P}$, $k=1,\ldots,n$. При этом локальная база топологии не изменится.

1. *Линейное отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ локально выпуклых пространств $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{P})$ и $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{Q})$ тогда и только тогда непрерывно, когда для любого $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q}$ найдутся $c>0$ и $\boldsymbol{p}\in\vec{\boldsymbol{P}}$, т.ч. $\boldsymbol{q}(f(x))\leqslant c\boldsymbol{p}(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.*

Действительно, линейное отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в нуле. Поэтому, если f непрерывно в нуле, то для любых $\varepsilon>0$ и $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q}$ найдутся $\delta>0$ и $\boldsymbol{p}\in\vec{\boldsymbol{P}}$, т.ч. $\boldsymbol{q}(f(x))<\varepsilon$ для всех $x\in\boldsymbol{E}$, удовлетворяющих неравенству $\boldsymbol{p}(x)\leqslant\delta$. Следовательно, $\boldsymbol{q}(f(x))<(\varepsilon/\delta)\,\boldsymbol{p}(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{p}(x)=\delta$. В силу однородности полунорм и отображения это неравенство выполнено при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Обратно, если имеет место неравенство $\boldsymbol{q}(f(x))\leqslant c\boldsymbol{p}(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, то отображение f непрерывно в нуле и значит является непрерывным на $\boldsymbol{E}$.

Говорят, что полунорма $\boldsymbol{q}$ *мажорирует* $\boldsymbol{p} \ll \boldsymbol{q}$ полунорму $\boldsymbol{p}$ на пространстве $\boldsymbol{E}$, если существует $c > 0$, т.ч. $\boldsymbol{p}(x) \leqslant c\,\boldsymbol{q}(x)$ для всех $x \in \boldsymbol{E}$. Две системы полунорм $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ на пространстве $\boldsymbol{E}$ называются *эквивалентными* $\boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{Q}$, если для любого $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}$ найдется $\boldsymbol{q} \in \vec{\boldsymbol{Q}}$, т.ч. $\boldsymbol{p} \ll \boldsymbol{q}$, и для любого $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}$ найдется $\boldsymbol{p} \in \vec{\boldsymbol{P}}$, т.ч. $\boldsymbol{q} \ll \boldsymbol{p}$.

2. *Две системы полунорм $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ на пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда эквивалентны $\boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{Q}$, когда они задают одну и ту же топологию в $\boldsymbol{E}$.*

Для доказательства $\boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{Q}$ достаточно применить свойство 1 к тождественному отображению $I : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $I(x) = x$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда каждая окрестность локальной базы для $\boldsymbol{P}$ будет окрестностью локальной базы для $\boldsymbol{Q}$ и наоборот.

Топологическое пространство $(\boldsymbol{E}, \tau)$ называется *хаусдорфовым*, если для любых точек $x, y \in \boldsymbol{E}$, $x \neq y$, существуют непересекающиеся окрестности $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

3. *Локально выпуклое пространство $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P})$ является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда система полунорм $\boldsymbol{P}$ тотальна на пространстве $\boldsymbol{E}$, т.е. из условия $\boldsymbol{p}(x) = 0$ при всех $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}$ следует $x = 0$.*

В самом деле, если $\boldsymbol{p}(x) = 0$ при всех $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}$ и $x \neq 0$, то всякая окрестность $O(0)$ содержит точку x. Поэтому топология не хаусдорфова. Обратно, если $x \neq y$, то существует $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}$, т.ч. $\boldsymbol{p}(x - y) \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда $O(x) = \{z \in \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{p}(z - x) < \varepsilon/2\}$ и $O(y) = \{z \in \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{p}(z - y) < \varepsilon/2\}$ не пересекаются окрестности, т.к. иначе получим $\boldsymbol{p}(x - y) \leqslant \boldsymbol{p}(x - z) + \boldsymbol{p}(z - y) < \varepsilon$ при некотором $z \in O(x) \cap O(y)$.

Теорема (о метризуемости). *Локально выпуклое пространство тогда и только тогда является метрическим линейным пространством, когда его топология может быть задана счетной, тотальной и направленной системой полунорм.*

Доказательство. Необходимость. Если $\boldsymbol{E}$ метрическое линейное пространство, то топология $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P})$ определяется метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$, при этом открытые шары $\boldsymbol{U}_n \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| < 2^{-n}\}$ составляют ее локальную базу в нуле. Так как $\beta(0)$ задает локальную базу в нуле, то существуют окрестности $O_n \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{p}_n(x) < \varepsilon_n\}$, т.ч. $O_n \subset \boldsymbol{U}_n$, где полунормы $\boldsymbol{p}_n \in \vec{\boldsymbol{P}}$ выбраны т.ч. $\boldsymbol{p}_n \leqslant \boldsymbol{p}_{n+1}$. Значит счетная, тотальная и направленная система полунорм $\{\boldsymbol{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяет локальную базу $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P})$.

Достаточность. Пусть $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ счетная, тотальная и направленная система полунорм. Положим $\|x\| \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{\boldsymbol{p}_n(x), 1\}$. Ясно что $\|-x\| = \|x\|$. В силу тотальности из $\|x\| = 0$ следует $x = 0$. Поскольку $\min\{a + b, 1\} \leqslant \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}$ при всех $a, b \geqslant 0$, то имеет место неравенство треугольника $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$. Отсюда функция $\rho(x, y) \doteqdot \|x - y\|$ является метрикой и ее шары $\boldsymbol{U}_n$ составляют локальную базу в нуле метрической топологии $(\boldsymbol{E}, \rho)$. Шары $\boldsymbol{U}_n$ будут открытыми множествами в $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P})$, т.к. квазинорма $\|x\|$ непрерывна в силу непрерывности полунорм $\boldsymbol{p}_n(x)$. Поэтому топология $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P})$ сильнее метрической. С другой стороны, шар $\boldsymbol{U}_{2n}$ содержится в окрестности $O_n \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{p}_n(x) < 2^{-n}\}$, т.к. если $\boldsymbol{p}_n(x) \geqslant 2^{-n}$, то $\|x\| \geqslant 2^{-2n}$. Поэтому топология $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P})$ слабее метрической и, следовательно, топология $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P})$ совпадает с топологией $(\boldsymbol{E}, \rho)$. $\square$

Определение. Подпространство $\boldsymbol{E}'$ пространства всех линейных функционалов $\boldsymbol{E}^*$, состоящее из всех непрерывных линейный функционалов в топологии $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{P})$, называется *сопряженным пространством* к $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{P})$.

Слабая топология τ_w локально выпуклого пространства $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{P})$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_f(x) \doteqdot |f(x)|$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{E}'$.

Слабая топология* τ_{w*} сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_x(f) \doteqdot |f(x)|$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{E}'$.

Сильной топологией $\tau_s = \tau$ локально выпуклого пространства $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{P})$ называют топологию, определяемую системой полунорм $\boldsymbol{P}$.

Сильная топология* τ_{s^*} сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_M(f) = \sup_{x\in M}|f(x)|$, где $f \in \boldsymbol{E}'$ и M ограниченное множество в $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{P})$.

Пусть $\boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ обозначает пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$, определенных на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ с обычной нормой $\|x\| \doteqdot \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\right)^{1/2}$, $x = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m$, а $\boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ его подпространство всех функций с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \Subset \mathbb{R}^m$.

Напомним, что носителем функции $\operatorname{supp}\varphi$ называется замыкание множества тех точек $x \in \mathbb{R}^m$, для которых функция $\varphi(x) \neq 0$ не равна нулю. Далее выражение $\partial^\alpha\varphi(x) \doteqdot \partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_m^{\alpha_m}\varphi(x)$ обозначает дифференциальный оператор $\partial^\alpha \doteqdot \partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_m^{\alpha_m}$ порядка $|\alpha| \doteqdot \alpha_1+\ldots+\alpha_m$, где $\partial_j^{\alpha_j}\varphi(x) \doteqdot \partial^{\alpha_j}\varphi(x)/\partial x_j^{\alpha_j}$ задает частные производные по переменной x_j порядка α_j и $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ является мультииндексом.

Лемма. *Локально выпуклое пространство $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m) = \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ с системой полунорм $\boldsymbol{p}_n(\varphi) \doteqdot \sup_{\|x\|\leqslant n,|\alpha|\leqslant n}|\partial^\alpha\varphi(x)|$, $n \in \mathbb{N}$, является пространством Фреше.*

Доказательство. По теореме метризуемости в $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$ можно ввести квазинорму $\|\varphi\| = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\min\{\boldsymbol{p}_n(\varphi),1\}$ и инвариантную метрику $\rho(\varphi_1,\varphi_2) \doteqdot \|\varphi_1-\varphi_2\|$, при этом метрическая топология в пространстве $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$ будет совпадать с топологией локально выпуклого пространства $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Докажем полноту.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ последовательность Коши в пространстве $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\boldsymbol{p}_n(\varphi_k-\varphi_l) < \varepsilon$ при всех $k,l \geqslant N$. Поэтому в силу критерия Коши последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ сходится равномерно вместе со всеми производными на каждом шаре $\boldsymbol{S}_n \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant n\}$. Отсюда ее предел $\varphi \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ является бесконечно дифференцируемой функцией и значит $\varphi_k \to \varphi$ сходится по указанной системе полунорм пространства $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. □

Следствие. *Локально выпуклые пространства $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$, состоящие из функций $\varphi \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ с носителем в шаре $\boldsymbol{S}_k \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant k\}$ и системой $\boldsymbol{D}_k$ полунорм $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi) \doteqdot \sup_{\|x\|\leqslant k,|\alpha|\leqslant l}|\partial^\alpha\varphi(x)|$, где $l \in \mathbb{N}$, являются пространствами Фреше.*

Эта система полунорм $\boldsymbol{D}_k = \{\boldsymbol{p}_{k,l}\}_{l=1}^\infty$ эквивалентна на подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ системе полунорм пространства $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому пространство $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ является подпространством в $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Кроме того, оно замкнуто в пространстве $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$.

Определение. Пусть $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m) = \boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ есть локально выпуклое пространство с системой $\boldsymbol{D}$ *допустимых полунорм* на пространстве $\boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Полунорма $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{D}$ называется *допустимой*, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ существуют $l \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. выполняется неравенство $\boldsymbol{p}(\varphi) \leqslant c\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$

Заметим, что $\mathscr{D}_1(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{D}_2(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{D}_3(\mathbb{R}^m) \subset \ldots$, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m) = \bigcup_{k=1}^\infty \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$. Поэтому пространство $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ с соответствующей локально выпуклой топологией называют *индуктивным пределом* пространств $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$. Рассмотрим его свойства.

1. *Локально выпуклое пространство $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ является хаусдорфовым.*

В самом деле, если $\boldsymbol{p}(\varphi) = 0$ для любой допустимой полунормы $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{D}$, то, в частности, $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi) = 0$ при всех $k, l \in \mathbb{N}$, и, следовательно, функция $\varphi = 0$.

2. *Ограничение топологии пространства $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ на подпространство $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ совпадает с топологией пространства $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$.*

Каждая допустимая полунорма из $\boldsymbol{D}$ мажорируется на подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ некоторой полунормой из $\boldsymbol{D}_k$ и каждая полунорма из $\boldsymbol{D}_k$ мажорируется некоторой допустимой полунормой из $\boldsymbol{D}$, т.е. система полунорм $\boldsymbol{D}_k$ эквивалентна на подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ системе допустимых полунорм. Следовательно, ограничение на $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ топологии пространства $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ совпадает с топологией $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$.

3. *Линейное отображение $f : \mathscr{D}(\mathbb{R}^m) \to \boldsymbol{E}$ в локально выпуклое пространство $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P})$ в том и только в том случае непрерывно, когда его сужения $f|_{\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)}$ на подпространства $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ непрерывны при всех $k \in \mathbb{N}$.*

Поскольку топология $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ совпадает с ограничением топологии $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, то непрерывность $f|_{\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)}$ следует из непрерывности f. Обратно, если все сужения $f|_{\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)}$ непрерывны, то для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}$ найдутся $c > 0$ и $l \in \mathbb{N}$, т.ч. $\boldsymbol{p}(f(\varphi)) \leqslant c\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\boldsymbol{q}f \in \boldsymbol{D}$ и значит f непрерывно.

4. *Всякое ограниченное множество $\boldsymbol{M} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ и, в частности, всякая последовательность Коши, содержится в некотором подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$.*

Предположим обратное. Тогда существуют последовательности функций $\varphi_k \in \boldsymbol{M}$ и точек $x_k \notin \boldsymbol{S}_k$, т.ч. $\varphi_k(x_k) \neq 0$. Так как любой шар $\boldsymbol{S}_r$ содержит лишь конечное число точек x_k, то полунорма $\boldsymbol{p}(\varphi) \doteqdot \sup_{k \in \mathbb{N}} |k\varphi(x_k)/\varphi_k(x_k)|$ является допустимой, т.е. $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{D}$. При этом $\boldsymbol{p}(\varphi_k) \geqslant k \to \infty$, что противоречит ограниченности $\boldsymbol{M}$.

Далее $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ будем называть *пространством основных функций*. Сходимость последовательности функций относительно системы допустимых полунорм можно определить следующим образом: последовательность $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, если существует $k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\varphi_n \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi_n - \varphi) \to 0$ при всех $l \in \mathbb{N}$ и $n \to \infty$. Иначе говоря, последовательность $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, если она вся содержится в некотором подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ и сходится в этом подпространстве относительно системы полунорм $\boldsymbol{D}_k$.

Пример 1. *Примеры основных функций из пространства* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $e(t) \doteqdot e^{-1/t}$ при всех $t>0$ и $e(t) \doteqdot 0$ при всех $t \leqslant 0$. По правилу Лопита́ля $e(t)$ будет бесконечно дифференцируемой в точке $x=0$. Поэтому $\xi(x) \doteqdot e(1-\|x\|^2)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ является бесконечно дифференцируемой, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ и имеет носитель $\operatorname{supp}\xi = \boldsymbol{S}_1$ в единичном шаре пространства $\mathbb{R}^m$.

Система функции $\vartheta_r(x) \doteqdot c_r\xi(x/r)$ называется *аппроксимативной единицей*, где константы $c_r>0$ выбраны так, чтобы их интегралы $\int_{\mathbb{R}^m}\vartheta_r(x)\,dx=1$. Функции $\vartheta_r(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}^m$ являются бесконечно дифференцируемыми, неотрицательными и имеют носитель $\operatorname{supp}\vartheta_r=\boldsymbol{S}_r$ в шаре радиуса $r>0$ пространства $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим функции $\eta_r(x) \doteqdot \int_{\boldsymbol{S}_{3r/2}}\vartheta_{r/2}(x-y)\,dy$. Тогда $\eta_r(x)=1$ при всех $x\in\boldsymbol{S}_r$ и $\eta_r(x)=0$ при всех $x\notin\boldsymbol{S}_{2r}$. Функции $\eta_r(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}^m$ являются бесконечно дифференцируемыми, $0\leqslant\eta_r(x)\leqslant 1$ и имеют носитель $\operatorname{supp}\eta_r=\boldsymbol{S}_{2r}$.

Определение. Рассмотрим сопряженное пространство $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ всех непрерывных линейных функционалов $f:\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)\to\mathbb{F}$ на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Всякий функционал $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ называется *обобщенной функцией*, а $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ *пространством обобщенных функций*. Значения обобщенной функции $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ на основной функции будем обозначать скобкой $\langle f,\varphi\rangle \doteqdot f(\varphi)$ при всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

По доказанному функционал $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен на каждом подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ и, следовательно, тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности $\varphi_n\to\varphi$ в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ следует сходимость значений функционала $\langle f,\varphi_n\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$ при $n\to\infty$.

Теорема. *Пространство основных функций* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ *является полным. Пространство обобщенных функций* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ *полно в слабой* топологии.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что всякая последовательность Коши́ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ по свойству 4 содержится в некотором подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$, которое является пространством Фреше́.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим последовательность Коши́ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в слабой* топологии $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Тогда существует предел $\langle f_n,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$ при всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, где f будет линейным функционалом. Достаточно проверить его непрерывность на каждом подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$. Так как $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно ограничена, то в силу принципа равностепенной непрерывности в нуле для любого $\varepsilon>0$ существуют $l\in\mathbb{N}$ и $\delta>0$, т.ч. $|\langle f_n,\varphi\rangle|<\varepsilon$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и для всех $\varphi\in\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$, $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi)<\delta$. Переходя к пределу $n\to\infty$, получим, что $|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant\varepsilon$ при всех $\varphi\in\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$, $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi)<\delta$. Отсюда функционал f является непрерывным в нуле и значит будет непрерывным на всем пространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$. □

Пример 2. Обобщенная функция $\delta(x-x_0)$ называется *δ-функцией Дира́ка* и определяется по формуле $\langle\delta(x-x_0),\varphi\rangle\doteqdot\varphi(x_0)$ при всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Ее производные определяются по формуле $\langle\delta^{(\alpha)}(x-x_0),\varphi\rangle\doteqdot(-1)^{|\alpha|}\varphi^{(\alpha)}(x_0)$ при всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

2 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним некоторые определения предыдущей лекции. Через $\boldsymbol{C}^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ обозначается пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$, а через $\boldsymbol{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ подпространство функций с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \Subset \mathbb{R}^m$. Локально выпуклое пространство $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m) = \boldsymbol{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ с системой всех допустимых полунорм $\boldsymbol{D}$, называемое пространством *основных функций*. $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ обозначает его подпространство, состоящее из функций с носителем в шаре $\boldsymbol{S}_k$ и заданной системой полунорм $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi) \doteqdot \sup_{\|x\|\leqslant k, |\alpha|\leqslant l} |\partial^{\alpha}\varphi(x)|$. При этом полунорма $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{D}$ на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ называется *допустимой*, если она непрерывна на каждом подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$, т.е. для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $l \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. выполняется неравенство $\boldsymbol{p}(\varphi) \leqslant c\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$.

По определению последовательность основных функций $\varphi_n \to \varphi$ *сходится* в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, если существует предел $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(\varphi_n - \varphi) = 0$ при всех $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{D}$. Доказано, что в этом случае последовательность содержится в некотором подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ и сходится в нем, т.е. $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi_n - \varphi) \to 0$ при всех $l \in \mathbb{N}$ и $n \to \infty$.

Пример 1. Докажем, что эта сходимость не может быть задана метрикой. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ ненулевая функция с носителем на отрезке $[0,1]$ и $\varphi_{kn}(x) \doteqdot \frac{\varphi(x)}{k} + \frac{\varphi(x-k)}{n}$. Тогда повторный предел $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{kn} = 0$ равен нулю в смысле сходимости в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, т.е. нулевая функция является предельной точкой для множества $M = \{\varphi_{kn}\}_{k,n=1}^{\infty}$. Поэтому множество M не замкнуто в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Однако не существует подпоследовательности $\{\varphi_{k_i n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, сходящейся в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Отсюда множество M секвенциально замкнуто относительно сходимости в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Таким образом, сходимость и топология в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ не могут быть заданы метрикой.

Сопряженное пространство $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, состоящее из всех непрерывных линейных функционалов $f : \mathscr{D}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{F}$, называется пространством *обобщенных функций*. Значение этой обобщенной функции (как линейного функционала) на основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ обозначается скобкой $\langle f, \varphi\rangle \doteqdot f(\varphi)$. Функционал непрерывен, если он непрерывен на каждом подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$, т.е. для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $l \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi|\rangle \leqslant c\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$. Рассмотрим действия с обобщенными функциями $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Определение. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ локально интегрируемая функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$, т.е. интегрируемая по мере Лебега в $\mathbb{R}^m$ на всяком компактном множестве $K \Subset \mathbb{R}^m$. Соответствующий этой функции линейный функционал

$$\langle f, \varphi\rangle \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\,dx, \text{ где } \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m),$$

называется *регулярной обобщенной функцией*. Поскольку $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c \max\limits_{x\in K} |\varphi(x)|$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, где $K = \operatorname{supp}\varphi$ и $c = \int_K |f(x)|\,dx$, то этот линейный функционал непрерывен, т.к. правая часть неравенства является допустимой полунормой.

1. *Производная обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ порядка $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ определяются по формуле $\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle \doteq (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.*

Непрерывность функционала $\partial^\alpha f$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ следует из непрерывности оператора дифференцирования $\partial^\alpha \varphi$ на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.к. $\boldsymbol{p}_{k,l}(\partial^\alpha \varphi) \leqslant \boldsymbol{p}_{k,l+|\alpha|}(\varphi)$. Если функция имеет непрерывную производную $\partial^\alpha f \in \boldsymbol{C}(\mathbb{R}^m)$, то обобщенная производная совпадает с обычной производной, т.к. в силу интегрирования по частям

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial^\alpha f(x)\, \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \partial^\alpha \varphi(x)\, dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m).$$

2. *Произведение обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и функции $g \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ определяется по формуле $\langle gf, \varphi \rangle \doteq \langle f, g\varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.*

Непрерывность функционала $gf \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ вытекает из непрерывности оператора $M_g(\varphi) \doteq g\varphi$ умножения на гладкую функцию $g \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. В самом деле, по формуле Ле́йбница получим при всех $\varphi \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$

$$\boldsymbol{p}_{k,l}(g\varphi) = \sup_{\|x\| \leqslant k, |\alpha| \leqslant l} |\partial^\alpha g(x) \varphi(x)| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant k, |\alpha| \leqslant l} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} g(x)\, \partial^\beta \varphi(x)| \ll \boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi).$$

В случае, когда обобщенная функция регулярна, то произведение совпадает с обычным произведением, т.к. если $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$, то если $gf \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ и

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) f(x)\, \varphi(x)\, dx = \langle f, g\varphi \rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m).$$

3. *Формула Ле́йбница дифференцирования произведения обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и функции $g \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$*

$$\partial^\alpha(gf) = \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}\, \partial^{\alpha-\beta} g\, \partial^\beta f,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_m!$, $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}$ биномиальные коэффициенты, при этом неравенство $\beta \leqslant \alpha$ означает, что $\beta_i \leqslant \alpha_i$ при всех $i = 1, \ldots, m$.

Докажем эту формулу при $m = 1$. Пусть $\partial^1 = \partial/\partial x$. Тогда, применяя обычную формулу Ле́йбница $\partial^1(g\varphi) = (\partial^1 g)\varphi + g\,(\partial^1 \varphi)$, при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ получим

$$\langle \partial^1(gf), \varphi \rangle = -\langle f, g\,(\partial^1 \varphi) \rangle = -\langle f, \partial^1(g\varphi) \rangle + \langle f, (\partial^1 g)\varphi \rangle = \langle g\,(\partial^1 f), \varphi \rangle + \langle (\partial^1 g) f, \varphi \rangle.$$

Следовательно, $\partial^1(gf) = (\partial^1 g) f + g(\partial^1 f)$. Далее по индукции получим

$$\partial^{\alpha+1}(gf) = \partial^\alpha((\partial g) f + g(\partial f)) = \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}\, \partial^{\alpha+1-\beta} g\, \partial^\beta f + \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}\, \partial^{\alpha-\beta} g\, \partial^{\beta+1} f =$$

$$= \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}\, \partial^{\alpha+1-\beta} g\, \partial^\beta f + \sum_{1 \leqslant \beta \leqslant \alpha+1} \tbinom{\alpha}{\beta-1}\, \partial^{\alpha+1-\beta} g\, \partial^\beta f = \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha+1} \tbinom{\alpha+1}{\beta}\, \partial^{\alpha+1-\beta} g\, \partial^\beta f,$$

так как $\binom{\alpha}{\beta} + \binom{\alpha}{\beta-1} = \binom{\alpha+1}{\beta}$ при всех $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, и утверждение доказано.

4. *Операторы сдвига $\tau_a f$ и растяжения $\rho_\lambda f$ обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ определяются по формулам $\langle \tau_a f, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle$ и $\langle \rho_\lambda f, \varphi \rangle \doteqdot |\lambda|^m \langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, $a \in \mathbb{R}^m$ и $\lambda \neq 0$, где $\tau_a\varphi(x) \doteqdot \varphi(x-a)$ и $\rho_\lambda\varphi(x) \doteqdot \varphi(\lambda^{-1}x)$.*

Непрерывность функционалов $\tau_a f$ и $\rho_\lambda f$ вытекает из непрерывности операторов сдвига τ_a и растяжения ρ_λ на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Для регулярных обобщенных функций указанные формулы доказываются при помощи замены переменных

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-a)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x+a)\,dx = \langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle\,,$$
$$\langle \rho_\lambda f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda^{-1}x)\varphi(x)\,dx = |\lambda|^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(\lambda x)\,dx = |\lambda|^m \langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi \rangle\,.$$

5. *Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линейное отображение, т.ч. определитель $\det A \neq 0$. Тогда замена переменных $y = A(x)$ обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ определяется по формуле $\langle T_A f, \varphi \rangle \doteqdot |\det A|\, \langle f, T_{A^{-1}}\varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, где $T_A\varphi(y) \doteqdot \varphi(A^{-1}(y))$.*

Непрерывность функционала $T_A f$ на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ вытекает из непрерывности оператора $T_A\varphi = \varphi(A^{-1}(y))$ на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. В случае регулярных обобщенных функций указанная формула доказывается заменой переменных

$$\langle T_A f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(A^{-1}y)\varphi(y)\,dy = |\det A| \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(Ax)\,dx = |\det A|\, \langle f, T_{A^{-1}}\varphi \rangle\,.$$

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое множество и $\mathscr{D}(X)$ множество основных функций с носителем $\operatorname{supp}\varphi \Subset X$. Говорят, что обобщенные функции $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ совпадают $f = g$ на множестве X, если $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Говорят, что обобщенные функции равны $f(x) = g(x)$ в точке $x \in X$, если они совпадают в некоторой окрестности этой точки. Множество $\operatorname{supp} f \doteqdot \mathbb{R}^m \setminus \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = 0\}$ называется *носителем обобщенной функции* $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Лемма. *Если обобщенные функции $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ равны $f(x) = g(x)$ в каждой точке $x \in X$ открытого множества X, то они совпадают на X.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in X$ подберем открытый шар $\boldsymbol{U}_{2r}(x) \subset X$, т.ч. $f = g$ на множестве $\boldsymbol{U}_{2r}(x)$. Поскольку функция $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ имеет компактный носитель $K = \operatorname{supp}\varphi$, то существует конечное покрытие компакта $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \boldsymbol{U}_{r_j}(x_j)$. Определим основные функции $e_i \in \mathscr{D}(X)$ по формуле

$$e_i(x) \doteqdot \vartheta_{r_i}(x-x_i) \Big/ \sum_{j=1}^n \vartheta_{r_j}(x-x_j)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

где $\vartheta_r(x)$ аппроксимативная единица. Так как носитель функции e_i содержится $\operatorname{supp} e_i \subset \boldsymbol{U}_{2r_i}(x_i)$ и их сумма равна $\sum_{i=1}^n e_i(x) = 1$ на множестве K, то

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle f, e_i\varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle g, e_i\varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \text{ для всех } \varphi \in \mathscr{D}(X)\,.$$

Поэтому обобщенные функции совпадают $f = g$ на множестве X. □

Рассмотрим структуру обобщенных функций с компактным носителем. Пусть $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ обозначает сопряженное пространство к локально выпуклому пространству $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m) = \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ с системой полунорм $\boldsymbol{p}_n(\varphi) \doteqdot \sup_{\|x\|\leqslant n, |\alpha|\leqslant n} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, $n \in \mathbb{N}$. Как обычно, в пространствах $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ рассматривается слабая* топология.

Теорема. *Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ имеет компактный носитель в том и только в том случае, когда существует $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $g|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)} = f$, при этом такой функционал g является единственным.*

Доказательство. Необходимость. Выберем $r > 0$, т.ч. носитель $\operatorname{supp} f$ содержится в открытом шаре $\boldsymbol{U}_r$ радиуса r, и рассмотрим основную функцию $\eta_r(x) = 1$ при всех $x \in \boldsymbol{S}_r$ и $\eta_r(x) = 0$ при всех $x \notin \boldsymbol{S}_{2r}$. Затем определим линейный функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$ по формуле $g \doteqdot \eta_r f$, т.е. $\langle g, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \eta_r \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Так как линейный оператор $A\varphi \doteqdot \eta_r\varphi$ является непрерывным на пространстве $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$, то $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$. Поскольку $\operatorname{supp} f \Subset \boldsymbol{U}_r$ и функция $\varphi(x) - \eta_r(x)\varphi(x) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{U}_r$, то $\langle g, \varphi\rangle = \langle f, \eta_r\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle - \langle f, \varphi - \eta_r\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

Достаточность. Если функционал $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ непрерывен, то существует $n \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle g, \varphi\rangle| \leqslant c\boldsymbol{p}_n(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Поскольку $f \doteqdot g|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)}$, то имеет место неравенство $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\boldsymbol{p}_n(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Так как правая часть этого неравенства является допустимой полунормой, то $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Кроме того, имеем $\langle f, \varphi\rangle = 0$ при всех основных функций с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^m \setminus \boldsymbol{S}_n$. Таким образом, носитель $\operatorname{supp} f$ является компактным.

Единственность. Допустим, что существуют $g_1, g_2 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\langle g_1, \varphi\rangle = \langle g_2, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Для каждой функции $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$ полагаем $\varphi_n(x) \doteqdot \eta_n(x)\varphi(x)$. Тогда имеем $\varphi_n \in \mathscr{D}(X)$ и $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{E}(X)$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что имеет место равенство $\langle g_1, \varphi\rangle = \lim\langle g_1, \varphi_n\rangle = \lim\langle g_2, \varphi_n\rangle = \langle g_2, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. □

Следствие. *Отображение $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, которое функционалу $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ ставит в соответствие $f \doteqdot g|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)}$, является непрерывным и инъективным, а его образ состоит из всех обобщенных функций с компактным носителем.*

Инъективность вытекает из единственности. Для доказательства непрерывности рассмотрим слабую* окрестность нуля $U = \{f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m) |\, \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\langle f, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Пусть $V = \{g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m) |\, \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\langle g, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ будет слабой* окрестностью нуля в $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$. Тогда V совпадает с прообразом U указанного отображения.

Теорема (Шва́рца о локальной структуре)**.** *Для каждой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и открытого ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^m$ найдутся функция $g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ и мультииндекс $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, т.ч. $\langle f, \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha g, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.*

Доказательство. Применяя формулу замены переменных, мы можем считать, что замыкание $\overline{X} \subset (0,1)^m$. Так как функционал $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, то непрерывен на каждом подпространстве $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$ и, следовательно, он будет непрерывным подпространстве $\mathscr{D}(X)$ по системе полунорм $\boldsymbol{p}_l(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha|\leqslant l, x\in(0,1)^m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, где $l \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Поэтому существуют $l \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\,\boldsymbol{p}_l(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.

Так как $\varphi(0)=0$, то по формуле Лагра́нжа $\sup_{x\in(0,1)^m}|\varphi(x)|\leqslant\sup_{x\in(0,1)^m}|\partial_i\varphi(x)|$, где $\partial_i=\partial/\partial_{x_i}$, $i=1,\ldots,m$. Отсюда, полагая $D\doteqdot\partial_1\ldots\partial_m$, получим неравенство $\sup_{x\in(0,1)^m}|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant\sup_{x\in(0,1)^m}|D^l\varphi(x)|$ при всех $|\alpha|\leqslant l$ и $\varphi\in\mathscr{D}(X)$. По формуле Ньюто́на–Ле́йбница для функций многих переменных при всех $\varphi\in\mathscr{D}(X)$ имеем

$$\boldsymbol{p}_l(\varphi)\leqslant\sup_{x\in(0,1)^m}|D^l\varphi(x)|=\sup_{x\in(0,1)^m}\left|\int_{[0,x]}D^{l+1}\varphi(y)\,dy\right|\leqslant\int_X|D^{l+1}\varphi(y)|\,dy,$$

где $x=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ и $[0,x]\doteqdot[0,x_1]\times\ldots\times[0,x_m]$ m-мерный отрезок.

Поскольку отображение $D^{l+1}:\mathscr{D}(X)\to\mathscr{D}(X)$ является линейным, непрерывным и биективным, то корректно определен линейный функционал $F(\varphi)\doteqdot\langle f,D^{-l-1}\varphi\rangle$, заданный на пространстве $\mathscr{D}(X)$, где D^{-l-1} обратный оператор к оператору D^{l+1}. В силу доказанного неравенства функционал ограничен по норме $\boldsymbol{L}_1(X)$. Значит по теореме Ха́на–Ба́наха существует непрерывное продолжение функционала на все пространство $\boldsymbol{L}_1(X)$, а в силу теоремы Ри́сса–Штейнга́уза существует функция $F\in\boldsymbol{L}_\infty(X)$, т.ч. $F(\varphi)=\int_X F(x)\varphi(x)\,dx$ при всех $\varphi\in\mathscr{D}(X)$. Пусть функция $F(x)=0$ равна нулю вне множества X, тогда получим при всех $\varphi\in\mathscr{D}(X)$

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^m}F(x)\,D^{l+1}\varphi(x)\,dx=(-1)^{m(l+1)}\langle D^{l+1}F,\varphi\rangle=\langle\partial^\alpha g,\varphi\rangle,$$

где $\partial^\alpha g=(-1)^{m(l+1)}D^{l+1}F$ и функция $g(x)\doteqdot(-1)^{m(l+1)}F(x)\in\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ является локально интегрируемой, а мультииндекс $\alpha\doteqdot(l+1,\ldots,l+1)$. □

Определение. Если существует $l\in\mathbb{Z}_+$, т.ч. для любого $k\in\mathbb{N}$ найдется $c>0$, т.ч. $|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant c\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi)$ при всех $\varphi\in\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$, то говорят, что обобщенная функция $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ имеет *конечный порядок*. Наименьшее такое число $l\in\mathbb{Z}_+$ называется *порядком* обобщенной функции $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Если же такого числа l не существует, то говорят, что $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ имеет *бесконечный порядок*.

В силу теоремы Шварца о локальной структуре всякая обобщенная функция $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ с компактным носителем $\operatorname{supp}f\Subset\mathbb{R}^m$ имеет конечный порядок.

Определение. *Борелевской мерой* μ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ называется σ-аддитивная функция μ, принимающая конечные значения (действительные или комплексные) на каждом компакте $K\Subset\mathbb{R}^m$ и заданная на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ пространства $\mathbb{R}^m$. Обобщенная функция, определенная по формуле

$$\langle\mu,\varphi\rangle\doteqdot\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\,d\mu(x),\ \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m),$$

называется *обобщенной мерой* или просто *мерой* в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Поскольку $|\langle\mu,\varphi\rangle|\leqslant c\max\limits_{x\in K}|\varphi(x)|$ при всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, где $K=\operatorname{supp}\varphi$ и $c=|\mu|(K)$, то этот линейный функционал непрерывен, т.к. правая часть неравенства является допустимой полунормой. Можно доказать, что обобщенная функция тогда и только тогда является мерой, когда она имеет порядок, равный нулю.

3 РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. *Усреднением функции* $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ в смысле Cóболева называется функция $f_r(x)$, определенная при всех $x \in \mathbb{R}^m$ по формуле

$$f_r(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} \vartheta_r(y)\, f(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \vartheta_r(x-y)\, f(y)\, dy,$$

где $\vartheta_r(x), r > 0$ аппроксимативная единица. Система функций $\{f_r\}_{r>0}$ называется *регуляризацией* локально интегрируемой функции $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$.

1. *Функции* $f_r \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ *являются бесконечно дифференцируемыми.*

Поскольку $\vartheta_r \in \boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то, используя формулу Лагранжа и теорему Лебéга о мажорируемой сходимости, можно продифференцировать под знаком интеграла

$$\partial_i^1 f_r(x) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\vartheta(x+te_i-y) - \vartheta(x-y)}{t} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \partial_i^1 \vartheta_r(x-y)\, f(y)\, dy,$$

где $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^m$ стандартный базис в $\mathbb{R}^m$. Таким образом, применяя снова эти рассуждения, имеем $\partial^\alpha f_r(x) = \langle f, \partial_x^\alpha \vartheta_r(x-y)\rangle$ при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\infty$, т.е. $f_r \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$.

2. *Если* $f \in \boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^m)$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *то* $\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$ *при всех* $r > 0$.

Поскольку $\int_{\mathbb{R}^m} \vartheta_r(x)\, dx = 1$, то, используя обобщенное неравенство Минкóвского и инвариантность нормы $\|\tau_y f\|_{\boldsymbol{L}_p} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$ при сдвиге $\tau_y f(x) \doteqdot f(x-y)$, получим

$$\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} = \Big\| \int_{\mathbb{R}^m} \vartheta_r(y) \tau_y f dy \Big\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \vartheta_r(y) \|\tau_y f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy = \int_{\mathbb{R}^m} \vartheta_r(y) \|f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy = \|f\|_{\boldsymbol{L}_p},.$$

Лемма. *Если* $f \in \boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^m)$, *то* $\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ *при* $r \to 0$, *где* $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. В силу обобщенного неравенства Минкóвского имеем (*)

$$\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} = \Big\| \int_{\mathbb{R}^m} \vartheta_r(y)(\tau_y f - f) dy \Big\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \int_{\boldsymbol{S}_r} \vartheta_r(y) \|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant r} \|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p}.$$

Пусть $h = \sum_{k=1}^n c_i \chi_{E_i}$ простая интегрируемая функция. Тогда, применяя неравенство треугольника, свойство 2 и (*), получим неравенство

$$\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|(f-h)_r\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|h_r - h\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|f-h\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant r} \|\tau_y h - h\|_{\boldsymbol{L}_p} + 2\|f-h\|_{\boldsymbol{L}_p}.$$

Так как множество простых функций всюду плотно в $\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^m)$, то $\|f-h\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon$. Поэтому достаточно доказать, что $\|\tau_y h - h\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ при $\|y\| \to 0$. Тогда, применяя неравенство треугольника $\|\tau_y h - h\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \sum_{i=1}^n |c_k|\, \|\tau_y \chi_{E_i} - \chi_{E_i}\|_{\boldsymbol{L}_p}$, достаточно проверить, что $\|\tau_y \chi_E - \chi_E\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ для каждого множеств $E \subset \mathbb{R}^m$ конечной меры.

Используя неравенство $\|\tau_y \chi_E - \chi_E\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|\tau_y \chi_B - \chi_B\|_{\boldsymbol{L}_p} + 2\|\chi_E - \chi_B\|_{\boldsymbol{L}_p}$ и теорему Валлé–Пуссéна, характеристическую функцию χ_E множества E конечной меры мы аппроксимируем $\|\chi_E - \chi_B\|_{\boldsymbol{L}_p} = \mu^{1/p}(E \triangle B) < \varepsilon$ характеристической функцией χ_B конечного объединения интервалов $B = \bigsqcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$. Таким образом, достаточно проверить $\|\tau_y \chi_B - \chi_B\|_{\boldsymbol{L}_p} = \|\sum_{i=1}^n \tau_y \chi_{(a_i,b_i)} - \chi_{(a_i,b_i)}\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \sum_{i=1}^n \|\tau_y \chi_{(a_i,b_i)} - \chi_{(a_i,b_i)}\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ при $\|y\| \to 0$, что очевидно выполняется. $\square$

Замечание. Заметим, что утверждение леммы справедливо также в случае $p=\infty$, если функция $f \in \boldsymbol{C}_0(\mathbb{R}^m)$ непрерывна и имеет компактный носитель $\operatorname{supp} f \Subset \mathbb{R}^m$, при этом сходимость будет равномерной $f_r \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}^m$ (см. (*)).

Теорема (о плотности основных функций)**.** *Если $f \in \boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^m)$ и $1 \leqslant p < \infty$, то существуют $\varphi_n \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ и $\lim_{n\to\infty}\|f-\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_p} = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы Лебега о монотонной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ существует $k > 0$, т.ч. $\int_{\mathbb{R}^m\setminus \boldsymbol{S}_k} |f(x)|^p dx < (\varepsilon/2)^p$. Положим $g(x) = f(x)\,\chi_{\boldsymbol{S}_k}(x)$. Тогда для усреднения этой функции, получим $\operatorname{supp} g_r \Subset \mathbb{R}^m$ и $\|g-g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/2$ при достаточно малых $r > 0$. Следовательно, применяя неравенство треугольника, мы имеем $\|f-g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f-g\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g-g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon$ при $r = 1/k$ и достаточно больших k. Таким образом, функции $\varphi_n(x) \doteqdot g_{1/n}(x)$ удовлетворяют утверждению теоремы. □

Следствие. *Если ограниченная функция $f \in \boldsymbol{L}_\infty(\mathbb{R}^m)$ имеет компактный носитель $\operatorname{supp} f \Subset \mathbb{R}^m$, то существует последовательность функций $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч.* a) $|\varphi_n(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ *при всех $x \in \mathbb{R}^m$;* b) $\varphi_n(x) \to f(x)$ *при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.*

Для доказательства достаточно применить теорему при $p = 1$, а затем выбрать подпоследовательность функций, сходящуюся п.в. на $\mathbb{R}^m$.

В пространстве локально интегрируемых функций $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ система полунорм

$$\boldsymbol{p}_n(f) \doteqdot \int_{\|x\|\leqslant n} |f(x)|\,dx, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

определяет локально выпуклую топологию. При этом соответствующая сходимость последовательности функций совпадает со сходимостью в пространстве $\boldsymbol{L}_1(K)$ на каждом компактном множестве $K \Subset \mathbb{R}^m$. Так как пространство $\boldsymbol{L}_1(K)$ полно при всех $K \Subset \mathbb{R}^m$, то пространство $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ также полно. Следовательно, это локально выпуклое пространство $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ является метрическим линейным пространством с метрикой $\rho(f_1,f_2) \doteqdot \|f_1-f_2\|$, где величина $\|f\| \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\min\{\boldsymbol{p}_n(f),1\}$ задает квазинорму в пространстве $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ образует локально выпуклое пространство Фреше́.

Теорема. *Отображение $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, при котором каждой локально интегрируемой функции $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ соответствует обобщенная функция*

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\,dx, \text{ где } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m),$$

является инъективным и непрерывным.

Доказательство. Докажем инъективность этого отображения. Предположим, что отображение не является инъективным, т.е. существует функция $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$, не эквивалентная нулю $f \not\sim 0$ и выполняется равенство $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ для всех основных функций $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Рассмотрим ограниченную измеримую функцию $g(x)$, определенную на пространстве $\mathbb{R}^m$ по формуле $g(x) = \overline{\operatorname{sign}} f(x) \doteqdot |f(x)|/f(x)$, если $f(x) \neq 0$, и $g(x) = 0$, если $f(x) = 0$.

Применяя следствие к функции $g_k \doteqdot g\chi_{S_k}$, получим функции $\varphi_n \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $|\varphi_n(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ и $\varphi_n(x) \to g_k(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда в силу теоремы Лебéга о мажорируемой сходимости имеем следующее равенство:

$$\int_{\boldsymbol{S}_k} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,g_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\big(g_k(x)-\varphi_n(x)\big)\,dx = 0\,.$$

Поэтому $f(x)=0$ при п.в. на каждом шаре $\boldsymbol{S}_k$ и значит $f(x)=0$ п.в. на $\mathbb{R}^m$.

Для доказательства непрерывности для каждой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ выберем $n \in \mathbb{N}$, т.ч. носитель $K = \operatorname{supp}\varphi \subset \boldsymbol{S}_n$. Тогда имеем неравенство

$$|\langle f,\varphi\rangle| = \Big|\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\,dx\Big| \leqslant c\int_K |f(x)|\,dx \leqslant c\boldsymbol{p}_n(f)\,,$$

где $c = \max|_{x\in\in\mathbb{R}^m}\varphi(x)|$. Таким образом, для каждой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ полунорма $\boldsymbol{p}(f) = |\langle f,\varphi\rangle|$ на пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ мажорируется полунормой $\boldsymbol{p}_n(f)$ на пространстве $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому отображение непрерывно. □

Теорема (регуляризации)**.** *Система функций $f_r(x) \doteqdot \langle f(y), \vartheta_r(x-y)\rangle$, называемых регуляризацией обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, состоит из бесконечно дифференцируемых функций $f_r \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, которые сходится $f_r \to f$ при $r \to 0$ к обобщенной функции f в смысле слабой* сходимости в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. Пусть $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^m$ стандартный базис в $\mathbb{R}^m$. Тогда по формуле Лагрáнжа получим, что функции $\big(\vartheta_r(x+e_it-y)-\vartheta_r(x-y)\big)/t = \partial_i\vartheta_r(x+\tau e_i-y)$, где $0<\tau<t$, при $t\to 0$ сходится равномерно по $y\in\mathbb{R}^m$ к функции $\partial_i\vartheta_r(x-y)$. Кроме того, все их производные по $y\in\mathbb{R}^m$ сходятся равномерно к производной функции $\partial_i\vartheta_r(x-y)$, т.е. при $t\to 0$ функции сходится к функции $\partial_i\vartheta_r(x-y)$ в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому из непрерывности функционала $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ вытекает равенство $\partial_i f_r(x) = \langle f, \partial_i\vartheta_r(x-y)\rangle$. Применяя аналогичные рассуждения к уже доказанной формуле, имеем общую формулу $\partial^\alpha f_r(x) \doteqdot \langle f(y), \partial_x^\alpha\vartheta_r(x-y)\rangle$ при всех $\alpha\in\mathbb{Z}_+^m$.

Поскольку функции $\vartheta_r,\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ имеют компактный носитель, то интеграл от функции $\vartheta_r(x-y)\varphi(x)$ по переменной x является пределом сумм Ри́мана

$$\int_{\mathbb{R}^m}\vartheta_r(x-y)\varphi(x)\,dx = \lim_{t\to+0}\sum_{z\in\mathbb{Z}^m}\vartheta_r(tz-y)\,\varphi(tz)\,t^m\,,$$

где суммирование ведется по прямоугольной сетке $\{tz\}_{z\in\mathbb{Z}^m}$ пространства $\mathbb{R}^m$. По этой формуле суммы Ри́мана сходятся равномерно вместе со всеми производными по переменной $y\in\mathbb{R}^m$ и имеют общий носитель, т. е. они сходятся в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Отсюда, применяя непрерывность функционала $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\langle f_r,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f_r(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m}\langle f(y),\vartheta_r(x-y)\rangle\varphi(x)\,dx = \langle f(y),\int_{\mathbb{R}^m}\vartheta_r(x)\varphi(y-x)\,dx\rangle\,.$$

Последний интеграл при $r\to 0$ сходится равномерно (см. замечание) к функции $\varphi(y)$ вместе со всеми своими производными, т.е. сходится в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, применяя непрерывность функционала f, получим $\lim_{r\to 0}\langle f_r,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$. □

Следствие. *Всякая обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ является слабым* пределом последовательности основных функций.*

Пусть $\eta_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\eta_n(x) = 1$, если $\|x\| \leqslant n$, и $\eta_n(x) = 0$, если $\|x\| \geqslant 2n$. Тогда последовательность основных функций $\varphi_n = \eta_n f_{1/n}$ сходится слабо* к f, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\langle \varphi_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_{1/n}, \eta_n\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_{1/n}, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Определение. Говорят, что функция $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ имеет производную $g \doteqdot \partial^\alpha f$ *в смысле Со́болева* на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, если $g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ и

$$\int_X g(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_X f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X).$$

Производная в смысле Со́болева, если она существует, то определяется однозначно с точностью до эквивалентности функций на множестве X.

Пространства Со́болева $\mathscr{W}_p^k(X)$ состоят из классов эквивалентности функций $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$, у которых производные в смысле Со́болева $\partial^\alpha f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$. Норма функции $f \in \mathscr{W}_p^k(X)$ в этом пространстве определяется по формуле

$$\|f\|_{\mathscr{W}_p^k} \doteqdot \sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_{\boldsymbol{L}_p}, \text{ где } k \in \mathbb{N} \text{ и } 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

В случае $p = 2$ обычно вводится эквивалентная этой эвклидова норма, для которой $\mathscr{W}_2^k(X)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle_{\mathscr{W}_2^k} \doteqdot \sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_X \partial^\alpha f(x)\,\overline{\partial^\alpha g(x)}\,dx, \quad \|f\|_{\mathscr{W}_2^k} \doteqdot \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_X |\partial^\alpha f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Теорема. *Пространства Со́болева $\mathscr{W}_p^k(X)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ являются ба́наховыми пространствами.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ является последовательностью Коши́ в пространстве $\mathscr{W}_p^k(X)$. Тогда $\{\partial^\alpha f_n\}$ будет последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{L}_p(X)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$. Так как $\boldsymbol{L}_p(X)$ полно, то $f_n \to f$ сходится в $\boldsymbol{L}_p(X)$ и все производные $\partial^\alpha f_n \to g_\alpha$ сходятся в $\boldsymbol{L}_p(X)$ при $|\alpha| \leqslant k$. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|\langle f_n - f, \varphi\rangle| \leqslant \int_X |f_n(x) - f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leqslant \|f_n - f\|_{\boldsymbol{L}_p}\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_q} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, где $1/p + 1/q = 1$. Следовательно, $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ и аналогично $\langle \partial^\alpha f_n, \varphi\rangle \to \langle g_\alpha, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Поэтому получаем следующие равенства:

$$\langle g_\alpha, \varphi\rangle = \lim_n\langle \partial^\alpha f_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lim_n\langle f_n, \partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle \text{ при всех}, \ \varphi \in \mathscr{D}(X),$$

т.е. по определению функция $g_\alpha = \partial^\alpha f$ является производной в смысле Со́болева. Таким образом, $f_n \to f$ сходится по норме $\mathscr{W}_p^k(X)$. □

Следствие. *Пространства Со́болева $\mathscr{W}_2^k(X)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ с указанной выше евклидовой нормой являются ги́льбертовыми пространствами.*

Лемма. *Если производная обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ равна $\partial^1 f = 0$ на интервале (a,b), то обобщенная функция равна константе $f = c$ на (a,b).*

Доказательство. Пусть $\vartheta \in \mathscr{D}(a,b)$, т.ч. $\int_a^b \vartheta(x)\,dx = 1$. Всякая функция $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ допускает представление $\varphi(x) = \varphi_1(x) + d\,\vartheta(x)$, где $d = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ и $\int_a^b \varphi_1(x)\,dx = 0$. Тогда функция $\varphi_1(x) = \varphi_0'(x)$ является производной от функции $\varphi_0 \in \mathscr{D}(a,b)$, т.ч. $\varphi_0(x) = \int_a^x \varphi_1(t)\,dt$. Поэтому $\langle f, \varphi_1\rangle = -\langle f', \varphi_0\rangle = 0$. Отсюда для всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi_1 + d\vartheta\rangle = d\,\langle f, \vartheta\rangle = \int_a^b \langle f, \vartheta\rangle\, \varphi(x)\,dx = \langle c, \varphi\rangle\,, \text{ где } c \doteqdot \langle f, \vartheta\rangle\,.$$

Следовательно, обобщенная функция равна константе $f = c$ на (a,b). □

Определение. Функция $F : X \to \mathbb{F}$ называется *локально абсолютно непрерывной* на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$ и обозначается $F \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$, если она абсолютно непрерывна $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ на каждом отрезке $[a,b] \subset X$.

Теорема. *Для того чтобы существовала производная $\partial^1 f$ в смысле Со́болева от функции $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $F \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$, т.ч. $F = f$ п.в. на X.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ имеет производную $\partial^1 f$ в смысле Со́болева на множестве X. Рассмотрим абсолютно непрерывную функцию $g(x) \doteqdot \int_a^x \partial^1 f(t)\,dt$ на отрезке $[a,b] \subset X$. Меняя порядок интегрирования, при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ получим следующее равенство:

$$\int_a^b g(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_a^x \partial^1 f(t)\,dt\right) \varphi'(x)\,dx = -\int_a^b \partial^1 f(t)\varphi(t)\,dt = \int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt\,.$$

Откуда $\int_a^b (g(t) - f(t))\,\varphi'(t)\,dt = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$. Следовательно, по лемме имеет место равенство $f = g + c$ п.в. на отрезке $[a,b] \subset X$. Поэтому существует функция $F = g + c \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$, т.ч. $F = f$ п.в. на множестве X.

Достаточность. Пусть $f = F$ п.в. на X, где $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ на каждом $[a,b] \subset X$. По формуле Ньюто́на–Ле́йбница $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$. Тогда при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b F(a)\varphi'(x)\,dx + \int_a^b \left(\int_a^x F'(t)\,dt\right) \varphi'(x)\,dx = -\int_a^b F'(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

Следовательно, $\partial^1 f = F'$ является производной в смысле Со́болева от f. □

Пример 1. Докажем, что δ-функция $\delta(x)$ не является регулярной на прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим основную функцию $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1/2$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$ и пусть $\varphi_n(x) \doteqdot \eta(nx)$. Если $\delta(x)$ регулярна, то для некоторой $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ получим $\langle \delta(x), \varphi_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Однако это невозможно, поскольку $\varphi_n(x) \to 0$ при всех $x \neq 0$ и значит интеграл также стремится к нулю.

Обобщенная производная функции Хевиса́йда $\theta(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)$ равна δ-функции $\partial^1 \theta(x) = \delta(x)$, которая нерегулярна на прямой $\mathbb{R}$. Поэтому функция Хевиса́йда $\theta(x)$ не имеет производной в смысле Со́болева.

4 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Определение. *Пространством Шва́рца* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется множество бесконечно дифференцируемых функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, у которых все следующие нормы

$$q_k(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha|\leqslant k, x\in\mathbb{R}^m} \left(1+\|x\|^2\right)^k |\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty, \quad k \in \mathbb{N},$$

принимают конечное значение. Такие функции называются *быстро убывающими*, т.к. $\|x\|^k \partial^\alpha \varphi(x) \rightrightarrows 0$ при $\|x\| \to \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$. Локально выпуклая топология в пространстве Шва́рца определяется системой норм $Q = \{q_k\}_{k=1}^\infty$. В этой топологии пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ образует локально выпуклое пространство Фреше́. Сопряженное пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ вместе с заданной в нем слабой* топологией называется пространством *обобщенных функций медленного роста*.

Лемма. *Множество $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. Выберем основную функцию, $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ т.ч. $\eta(x) = 1$ при $\|x\| \leqslant 1/2$ и $\eta(x) = 0$ при $\|x\| \geqslant 1$. Определим функцию $\varphi_n(x) \doteqdot \eta(x/n)\varphi(x)$ для каждой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тогда $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ и по формуле Ле́йбница имеем

$$\partial^\alpha\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big) = \partial^\alpha\big((\eta(x/n) - 1)\,\varphi(x)\big) = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \tbinom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\big(\eta(x/n) - 1\big)\partial^\beta \varphi(x).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем k, т.ч. $(1+\|x\|^2)^k |\partial^\beta \varphi(x)| < \varepsilon$ при всех $\|x\| \geqslant k$ и $|\beta| \leqslant k$. Так как $\eta(x/n) - 1 = 0$ при всех $\|x\| \leqslant n/2$, то $(1+\|x\|^2)^n |\partial^\alpha\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)| \ll \varepsilon$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $n \geqslant 2k$ и $|\alpha| \leqslant k$. Таким образом, получаем $q_k(\varphi_n - \varphi) \to 0$ при $n \to \infty$ при всех $k \in \mathbb{N}$, т.е. последовательность $\varphi_n \to \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\square$

Теорема. *Отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, которое каждому $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ ставит в соответствие $f \doteqdot g|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, является инъективным и непрерывным.*

Доказательство. Так как $q_k(\varphi) \ll p_{k,k}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^m)$, то все полунормы $q_k \in D$ будут допустимы и, следовательно, вложение $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно. Отсюда $f \doteqdot g|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)}$ является непрерывным функционалом, т.е. $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Докажем инъективность этого отображения. Пусть $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $f \doteqdot g|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)}$, при этом $\langle f, \varphi\rangle = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Применяя лемму, имеем $\langle g, \varphi\rangle = \lim\langle f, \varphi_n\rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и значит отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ инъективно.

Заметим, что полунорма $p_\varphi(f) = |\langle f, \varphi\rangle|$ в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, где $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ заданная функция, совпадает с полунормой $p_\varphi(g) = |\langle g, \varphi\rangle|$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Поэтому отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным. $\square$

Обозначим через $\mathcal{S}_k(\mathbb{R}^m)$ пополнение пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ по норме q_k. Так как $q_k(\varphi) \leqslant q_{k+1}(\varphi)$, то $\mathcal{S}_{k+1}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}_k(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}'_{k+1}(\mathbb{R}^m)$ и выполняется равенство $\bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^m) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, т.к. в силу непрерывности $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ существуют $k \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c q_k(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и значит $f \in \mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^m)$. Поэтому всякая обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ имеет конечный порядок.

Следствие. *Отображение* $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, *при котором функции* $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ *соответствует* $f = g|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, *является инъективным и непрерывным.*

Так как $\boldsymbol{p}_n(\varphi) \leqslant \boldsymbol{q}_n(\varphi)$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно. Также как при доказательстве теоремы $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ непрерывно. Инъективность следует из всюду плотности $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в пространстве $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$.

Пример 1. Функция $f(x) \doteqdot \boldsymbol{e}^{x^2}$ определяет регулярный функционал $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, который не имеет непрерывного продолжения на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, т.е. $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. В самом деле, пусть $\varphi(x) = \boldsymbol{e}^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. По лемме функции $\varphi_n(x) = \eta(x/n)\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ сходятся $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Однако имеем $\langle f, \varphi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e}^{x^2/2} \eta(x/n)\, dx > \int_{-n/2}^{n/2} \boldsymbol{e}^{x^2/2} dx > n \to \infty$.

1. *Локально интегрируемая функция* $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$, *т.ч.* $(1+\|x\|^2)^{-n} f(x) \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ *при некотором* $n \in \mathbb{N}$, *определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ *по следующей формуле:*

$$\langle f, \varphi \rangle \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x)\, dx \quad \text{при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Непрерывность этого функционала $\langle f, \varphi \rangle$ на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ вытекает из очевидного неравенства $|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant c_n \boldsymbol{q}_n(\varphi)$, где $c_n = \|(1+\|x\|^2)^{-n} f(x)\|_{\boldsymbol{L}_1}$

Множество функций $g \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, т.ч. для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ существуют $c_\alpha > 0$ и $n_\alpha \in \mathbb{N}$, для которых $|\partial^\alpha g(x)| \leqslant c_\alpha (1+\|x\|^2)^{n_\alpha}$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$, обозначается через $\Theta(\mathbb{R}^m)$ и называется *пространством функций медленного роста*.

2. *Умножение обобщенной функции* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ *на функцию медленного роста* $g \in \Theta(\mathbb{R}^m)$ *определяется по формуле* $\langle gf, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, g\varphi \rangle$ *при всех* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Непрерывность функционала gf на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ следует из непрерывности оператора $M_g(\varphi) \doteqdot g\varphi$ умножения на функцию g в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Для доказательства непрерывности оператора применяем формулу Лейбница

$$\sup_{|\alpha| \leqslant k, x \in \mathbb{R}^m} (1+\|x\|^2)^k |\partial^\alpha g(x)\varphi(x)| \leqslant \sup_{|\alpha| \leqslant k, x \in \mathbb{R}^m} (1+\|x\|^2)^k \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} g(x)\, \partial^\beta \varphi(x)|.$$

Отсюда $\boldsymbol{q}_k(g\varphi) \ll \boldsymbol{q}_{k+m_k}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, где $m_k = \max_{|\alpha| \leqslant k} n_\alpha$. Умножение на функцию медленного роста можно обосновывать соответствующим равенством для регулярных обобщенных функций медленного роста:

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} (g(x) f(x))\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, (g(x)\varphi(x))\, dx = \langle f, g\varphi \rangle.$$

3. *Производная* $\partial^\alpha f$ *обобщенной функции* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ *определяется по формуле* $\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle \doteqdot (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle$ *для всех функций* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Непрерывность функционала $\partial^\alpha f$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ следует из непрерывности оператора дифференцирования $\partial^\alpha \varphi$ на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, т.к. имеет место неравенство $\boldsymbol{q}_k(\partial^\alpha \varphi) \leqslant \boldsymbol{q}_{k+|\alpha|}(\varphi)$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Определение. Пусть $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^m x_k y_k$ скалярное произведение векторов $x,y\in\mathbb{R}^m$, тогда $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Для всех функций $f\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ полагаем по определению

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy, \quad \varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}.$$

Линейные операторы $\mathcal{F}(f)\doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f)\doteqdot \widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* функции $f\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$.

Пример 2. Функция $\varphi(x) = \boldsymbol{e}^{-x^2/2}$ является собственной функцией оператора Фурье́ с собственным значением 1, т.е. $\mathcal{F}(\varphi)=\varphi$. В самом деле, имеем

$$\widehat{\varphi}(x) = \varkappa\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{-\frac{y^2}{2}-\boldsymbol{i}xy}dy = \varkappa \boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{-\frac{(y+\boldsymbol{i}x)^2}{2}}dy = \varkappa \boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{-\frac{y^2}{2}}dy = \varphi(x),$$

т.к. по теореме Коши́ $\int_{\Im z=x} \boldsymbol{e}^{-z^2/2}dz = \int_{\Im z=0} \boldsymbol{e}^{-z^2/2}dz = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{-y^2/2}dy = \sqrt{2\pi}$.

Теорема. *Оператор Фурье́ $\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в пространстве Шва́рца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным и биективным.*

Доказательство. Поскольку многомерное преобразование Фурье является композицией одномерных преобразований, то нам достаточно доказать непрерывность и биективность при $m=1$. Дифференцируя и интегрируя по частям, имеем

$$\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x) = \mathcal{F}\{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha\varphi(y)\}, \quad \widehat{\partial^\alpha\varphi}(x) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha\mathcal{F}\{\varphi(y)\}, \text{ где } \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Отсюда $(1+x^2)^n\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x) = (1+x^2)^n\mathcal{F}\{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha\varphi(y)\} = \mathcal{F}\{(1-\partial_y^2)^n(-\boldsymbol{i}y)^\alpha\varphi(y)\}$ и значит

$$\boldsymbol{q}_n(\widehat{\varphi}) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant n, x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^n|\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x)| \leqslant \varkappa \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant n}\int_{\mathbb{R}} |(1-\partial_y^2)^n y^\alpha\varphi(y)|\,dy \ll \boldsymbol{q}_{2n+1}(\varphi).$$

Следовательно, $\boldsymbol{q}_n(\widehat{\varphi})\ll \boldsymbol{q}_{2n+1}(\varphi)$ при всех $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, т.е. отображение $\mathcal{F}$ является непрерывным. Для доказательства биективности покажем, что $\widetilde{\widehat{\varphi}}(x)=\varphi(x)$.

$$\widetilde{\widehat{\varphi}}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(y)\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}xy-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}yz}dz\Big)\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}xy-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy =$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\Big(\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}(z-x)y-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy\Big)\,dz = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varkappa^2}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\Big(\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}(\frac{z-x}{\varepsilon})y-\frac{y^2}{2}}dy\Big)\,dz =$$

$$\text{(см. пример 2)}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varkappa}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\,\boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)^2}dz = \lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\varphi(x+\varepsilon t)\boldsymbol{e}^{-\frac{t^2}{2}}dz = \varphi(x).$$

Аналогично имеем $\widehat{\widetilde{\varphi}}(x)=\varphi(x)$. Отсюда композиция операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ совпадает с тождественным оператором, т.е. $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}\cdot\mathcal{F}=\boldsymbol{I}$. Таким образом, преобразование Фурье является биективным в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Определение. Для каждой обобщенной функции $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста по определению полагаем, что $\langle\widehat{f},\varphi\rangle\doteqdot\langle f,\widehat{\varphi}\rangle$ и $\langle\widetilde{f},\varphi\rangle\doteqdot\langle f,\widetilde{\varphi}\rangle$ при всех $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Линейные операторы $\mathcal{F}(f)\doteqdot\widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f)\doteqdot\widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* обобщенной функции $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста.

Непрерывность функционалов $\widehat{f}$ и $\widetilde{f}$ на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ вытекает из выше доказанной теоремы, т.к. функционалы, определенные правой частью указанных равенств, являются непрерывными на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Следовательно, они представляют собой обобщенные функции медленного роста $\widehat{f}, \widetilde{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Теорема. *Оператор Фурье́ $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ в пространстве обобщенных функций медленного роста является биективным и непрерывным.*

Доказательство. Так как преобразование Фурье́ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным, то $\widehat{f}, \widetilde{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, а так как является биективным, то

$$\langle \widetilde{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\widetilde{\varphi}} \rangle = \langle f, \varphi \rangle \text{ и } \langle \widehat{\widetilde{f}}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle f, \varphi \rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Отсюда $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F} = \boldsymbol{I}$ будет тождественным оператором в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и поэтому оператор Фурье́ является биективным в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Заметим, что полунорма $\boldsymbol{p}_{\varphi}(\widehat{f}) = |\langle \widehat{f}, \varphi \rangle|$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ заданная функция, совпадает с полунормой $\boldsymbol{p}_{\widehat{\varphi}}(f) = |\langle f, \widehat{\varphi} \rangle|$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Поэтому оператор Фурье́ $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным. □

Рассмотрим формулы преобразования Фурье́ обобщенных функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

1. *Если $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ и удовлетворяет условию $(1 + \|x\|^2)^{-n} f(x) \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, то ее преобразование Фурье́ вычисляется по формуле*

$$\widehat{f}(x) = \lim_{r\to\infty} \int_{\|x\|\leqslant r} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle} dy, \text{ *где слабый* предел берется в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m).$$

Действительно, функция f определяет регулярный функционал на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\theta(r - \|x\|) f(x) \to f(x)$ сходится слабо* в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ при $r \to \infty$, т.к.

$$\lim_{r\to\infty} \langle \theta(r - \|x\|) f, \varphi \rangle = \lim_{r\to\infty} \int_{\|x\|\leqslant r} f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Из слабой* непрерывности преобразования Фурье следует, что $\mathcal{F}(\theta(r - \|y\|) f(y)) \to \mathcal{F}(f)$ при $r \to \infty$ сходится слабо* в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

2. *Формула сдвига. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x - a)$, где $a \in \mathbb{R}^m$, то*

$$\widehat{\tau_a f}(x) = e^{-i\langle a,x\rangle} \widehat{f}(x), \quad \tau_a \widehat{f}(x) = \widehat{e^{i\langle a,y\rangle} f(y)}.$$

Для всех функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ формулы легко доказываются, применяя замену переменных в интеграле преобразования Фурье́. Используя эти формулы, получим

$$\langle \widehat{\tau_a f}, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \widehat{e^{-i\langle a,y\rangle} \varphi(y)} \rangle = \langle e^{-i\langle a,x\rangle} \widehat{f}(x), \varphi \rangle.$$

Аналогично доказывается вторая формула. Для всех функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\langle \tau_a \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\tau_{-a} \varphi} \rangle = \langle f, e^{i\langle a,x\rangle} \widehat{\varphi}(x) \rangle = \langle \widehat{e^{i\langle a,y\rangle} f(y)}, \varphi \rangle.$$

3. *Формула дифференцирования. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$*

$$\partial^\alpha \widehat{f}(x) = \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha f}(y)\,, \quad \widehat{\partial^\alpha f}(x) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x)\,,$$

где производные берутся в смысле обобщенных функций медленного роста, а $x^\alpha \doteqdot x_1^{\alpha_1}\dots x_m^{\alpha_m}$ при всех $x = (x_1, \dots x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$.

При помощи дифференцирования и интегрирования по частям преобразования Фурье́, эти формулы нетрудно доказать для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому, используя определение производной и преобразования Фурье́, получим

$$\langle \partial^\alpha \widehat{f}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \widehat{\partial^\alpha \varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{\varphi}(x) \rangle = \langle \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha f}(y), \varphi \rangle$$

при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Аналогично доказывается вторая формула при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\langle \widehat{\partial^\alpha f}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha \varphi}(y) \rangle = \langle (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x)), \varphi \rangle\,.$$

4. *Формула для многочлена. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $P(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha x^\alpha$ многочлен и $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha \partial^\alpha$ соответствующий дифференциальный оператор, то*

$$\widehat{Pf}(x) = P(\boldsymbol{i}\partial)\widehat{f}(x)\,, \quad \widehat{P(\partial)\,f}(x) = P(\boldsymbol{i}x)\widehat{f}(x)\,.$$

В силу свойства линейности преобразования Фурье́ $\mathcal{F}$ эти формулы являются простым следствием из доказанных выше формул дифференцирования.

5. *Преобразование Фурье́ $\widehat{f}$ функции $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ есть регулярная обобщенная функция, определяемая функцией $g(x) = \varkappa^m \big\langle f(y), \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \big\rangle$ медленного роста.*

Аппроксимируем интеграл Фурье́ функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ суммами Ри́мана, имеем

$$\widehat{\varphi}(x) = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}\,dy = \varkappa^m \lim_{t\to+0} \sum_{z\in\mathbb{Z}^m} \varphi(tz)) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,tz\rangle} t^m\,.$$

Суммы Ри́мана, как функции от $x \in \mathbb{R}^m$, сходятся равномерно в каждом шаре $\boldsymbol{S}_n \subset \mathbb{R}^m$ вместе со всеми своими производными, т. е. сходятся в $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому в силу непрерывности функционала $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle = \varkappa^m \lim_{t\to+0} \sum_{z\in\mathbb{Z}^m} \varphi(tz)) \big\langle f(x), \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,tz\rangle} \big\rangle t^m = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(x), \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \rangle \varphi(y)\,dy\,.$$

т.е. $\widehat{f}(x) = g(x)$. В силу непрерывности функционала $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ существуют $n \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant c\boldsymbol{p}_n(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Далее по доказанной ранее формулы дифференцирования получим $\partial^\alpha g(x) = \varkappa^m \big\langle f(y), (-\boldsymbol{i}y)^\alpha \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \big\rangle$. Поэтому при всех $x \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$|\partial^\alpha g(x)| = \varkappa^m \big| \big\langle f(y), (-\boldsymbol{i}y)^\alpha \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \big\rangle \big| \leqslant c\varkappa^m \sup_{|\beta|\leqslant n, \|y\|\leqslant n} \big| \partial_y^\beta \big(y^\alpha \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \big) \big| \ll (1 + \|x\|^2)^n\,,$$

т.е. преобразование Фурье́ $\widehat{f} \in \Theta(\mathbb{R}^m)$ является функцией медленного роста.

5 ПРОИЗВЕДЕНИЕ И СВЕРТКА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Лемма. *a) Если $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, то каждой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ соответствует функция $\varphi_1(x) \doteqdot \langle f(y), \varphi(x,y)\rangle \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, ее производная $\partial^\alpha \varphi_1(x) = \langle f(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\rangle$ и эта операция непрерывна из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.*

b) Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, то каждой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ соответствует функция $\varphi_1(x) \doteqdot \langle f(y), \varphi(x,y)\rangle \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ее производная равна $\partial^\alpha \varphi_1(x) = \langle f(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\rangle$ и эта операция непрерывна из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Если $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, то функции $\big(\varphi(x+t,y) - \varphi(x,y)\big)/t$ сходятся при $t \to 0$ к функции $\partial_x \varphi(x,y)$ равномерно вместе со всеми ее производными по $y \in \mathbb{R}$, т.е. сходятся в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, то аналогичным образом они сходятся в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Поэтому, используя непрерывность функционала f, мы получим равенство $\partial \varphi_1(x) = \langle f(y), \partial_x \varphi(x,y)\rangle$. Применяя снова эти рассуждения к полученной формуле, имеем общую формулу для производной $\partial^\alpha \varphi_1(x) \doteqdot \langle f(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\rangle$.

a) Для доказательства непрерывности этой операции оценим полунорму $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi_1)$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ через полунормы $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi)$ из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Поскольку $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, то существуют $n \geqslant l$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\boldsymbol{p}_{k,n}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R})$. Поэтому получаем

$$\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi_1) = \sup_{|x|\leqslant k, \alpha \leqslant l} \big|\partial^\alpha \varphi_1(x)\big| = \sup_{|x|\leqslant k, \alpha \leqslant l} \big|\big\langle f(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big\rangle\big| \ll \sup_{|x|,|y|\leqslant k;\, \alpha,\beta \leqslant n} \big|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)\big|.$$

Отсюда вытекает, что $\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi_1) \leqslant c\boldsymbol{p}_{2k,2n}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}_{2k}(\mathbb{R}^2)$, и, следовательно, указанная операция из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ является непрерывной.

b) Для доказательства непрерывности этой операции оценим полунорму $\boldsymbol{q}_k(\varphi_1)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ через полунормы $\boldsymbol{q}_k(\varphi)$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Поскольку $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, то существуют $n \geqslant k$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\boldsymbol{q}_n(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Поэтому при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\boldsymbol{q}_k(\varphi_1) = \sup_{\alpha \leqslant k, x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^k \big|\big\langle f(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big\rangle\big| \ll \sup_{\alpha,\beta \leqslant n; x,y \in \mathbb{R}} (1+x^2)^n (1+y^2)^n \big|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)\big|.$$

Так как $(1+x^2)^n(1+y^2)^n \leqslant (1+x^2+y^2)^{2n}$, то $\boldsymbol{q}_k(\varphi_1) \leqslant c\boldsymbol{q}_{2n}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ и, следовательно, указанная операция из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ является непрерывной. $\square$

Определение. *Прямым произведением* $f \times g$ обобщенных функций $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ называется функционал $\langle f \times g, \varphi\rangle \doteqdot \big\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle\big\rangle$, где $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$.

В силу леммы это определение прямого произведения является корректным, т.к. a) если $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, то $f \times g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$; b) если $f, g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, то $f \times g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^2)$; c) если $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, то $f \times g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Аналогичным образом можно определить прямое произведение трех и более обобщенных функций $f, g, h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle f \times g \times h, \varphi\rangle \doteqdot \Big\langle f(x), \big\langle g(y), \langle h(z), \varphi(x,y,z)\rangle\big\rangle\Big\rangle, \text{ где } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3).$$

В силу свойств ассоциативности и коммутативности прямого произведения это определение не зависят от порядка множителей при условии, что функционалы $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ действуют по соответствующим переменным функции $\varphi(x,y,z)$.

1. *Ассоциативность* $(f\times g)\times h=f\times g\times h=f\times(g\times h)$.

В самом деле, пусть функция $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$, тогда по определению имеем

$$\langle (f\times g)\times h,\varphi\rangle=\big\langle f(x),\big\langle g(y),\langle h(z),\varphi(x,y,z)\rangle\big\rangle\big\rangle=\langle f\times(g\times h),\varphi\rangle\,.$$

2. *Коммутативность* $f\times g=g\times f$.

Действительно, равенство $f\times g=g\times f$ выполняется на множестве $M\subset\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ всех произведений вида $\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$, где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$, т.к.

$$\big\langle f(x),\langle g(y),\varphi_1(x)\varphi_2(y)\rangle\big\rangle=\langle f,\varphi_1\rangle\,\langle g,\varphi_2\rangle=\big\langle g(y),\langle f(x),\varphi_1(x)\varphi_2(y)\rangle\big\rangle\,.$$

Пусть $\vartheta_r(x,y)=\vartheta_r(x)\vartheta_r(y)$ — произведение аппроксимативных единиц. Поскольку $\langle f(u)\times g(v),\vartheta_r(x-u,y-v)\rangle=\langle g(v)\times f(u),\vartheta_r(x-u,y-v)\rangle$, то, переходя к пределу при $r\to0$, при помощи теоремы регуляризации получим $f\times g=g\times f$.

3. *Дифференцирование* $\partial_x^\alpha\partial_y^\beta(f\times g)=\partial_x^\alpha f(x)\times\partial_y^\beta g(y)$.

Используя определение производной и лемму, при всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ получим

$$\langle\partial_x^\alpha\partial_y^\beta(f\times g),\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\big\langle f,\langle g,\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\varphi\rangle\big\rangle=\big\langle\partial_x^\alpha f,\langle\partial_y^\beta g,\varphi\rangle\big\rangle\,.$$

4. *Умножение на функции* $\varphi,\psi\in\boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R})$ *и операция сдвига, определяемая на основных функциях по формуле* $\tau_{(x_0,y_0)}\varphi(x,y)=\varphi(x-x_0,y-y_0)$,

$$\varphi(x)\psi(y)(f\times g)=\varphi(x)f(x)\times\psi(y)g(y)\,,\quad\tau_{(x_0,y_0)}(f\times g)=\tau_{x_0}f(x)\times\tau_{y_0}g(y)\,.$$

Эти формулы вытекают из определения произведения, умножения и сдвига.

Если $f,g\in\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ и один из следующих интегралов существует при п.в. $x\in\mathbb{R}$

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-y)\,g(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}}f(y)\,g(x-y)\,dy\,,$$

то $f*g$ называется *сверткой* этих функций. Здесь функция $f(x-y)g(y)$ является измеримой по Лебегу, т.к. при отображении $(x,y)\to(x-y,y)$ измеримые множества переходят в измеримые, а измеримость произведения $f(x)g(y)$ нам известна.

Для локальной интегрируемости функции $f*g\in\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ достаточно, например, ограниченности множеств $\Pi_c\doteqdot\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in\operatorname{supp}f,\,y\in\operatorname{supp}g,\,|x+y|\leqslant c\}$ при всех $c>0$. Это так, если носители функций $\operatorname{supp}f$ и $\operatorname{supp}g$ ограничены. В самом деле, если $\operatorname{supp}f\subset[-a,a]$ и $\operatorname{supp}g\subset[-b,b]$, то при любом $c>0$ получим

$$\int_{-c}^{c}\Big|\int_{\mathbb{R}}f(y)\,g(x-y)\,dy\Big|\,dx\leqslant\iint_{\Pi_c}|f(y)g(z)|\,dydz\leqslant\int_{-a}^{a}|f(y)|\,dy\int_{-b}^{b}|g(z)|\,dz.$$

Аналогичным образом, $f*g\in\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$, если носители функций содержатся на полуоси $\operatorname{supp}f,\operatorname{supp}g\subset\mathbb{R}_+$. В самом деле, при любом $c>0$ получим

$$\int_{-c}^{c}\Big|\int_{\mathbb{R}_+}f(y)\,g(x-y)\,dy\Big|\,dx\leqslant\iint_{\Pi_c}|f(y)g(z)|\,dydz\leqslant\int_{\mathbb{R}_+}|f(y)|\,dy\int_{\mathbb{R}_+}|g(z)|\,dz.$$

Определение. *Сверткой* обобщенных функций $f,g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ называется линейный непрерывный функционал $f*g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, определенный по формуле

$$\langle f*g,\varphi\rangle \doteqdot \langle f(x)\times g(y),\varphi(x+y)\rangle = \big\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\big\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Говорят, что свертка $f*g$ существует, если функционал прямого произведения $f\times g$ допускает продолжение на множество функций вида $\varphi(x+y)$, где $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ произвольная функция. Это продолжение должно быть обобщенной функцией, т.е. для любого $k\in\mathbb{N}$ найдутся $l\in\mathbb{N}$ и $c>0$, т.ч. $\langle f(x)\times g(y),\varphi(x+y)\rangle \leqslant c\boldsymbol{p}_{k,l}(\varphi)$ при $\varphi\in\mathscr{D}_k(\mathbb{R})$. Так как прямое произведение не зависит от порядка множителей и все функции вида $\varphi(x+y)$ симметричны по переменным x и y, то это продолжение не должно зависеть от порядка множителей прямого произведения.

Аналогичным образом, определяется свертка трех и более обобщенных функций

$$\langle f*g*h,\varphi\rangle \doteqdot \langle f(x)\times g(y)\times h(z),\varphi(x+y+z)\rangle = \Big\langle f(x),\big\langle g(y),\langle h(z),\varphi(x+y+z)\rangle\big\rangle\Big\rangle,$$

где $f,g,h\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ и $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$. При этом продолжение прямого произведения $f(x)\times g(y)\times h(z)$ на множество функций вида $\varphi(x+y+z)$ должно быть линейным, непрерывным и не зависеть от порядка множителей. Кроме того, из определения вытекает, что необходимым условием для существования свертки трех функций $f*g*h$ является существование сверток из двух функций $f*g$, $f*h$, $g*h$.

Лемма. *a) Свертка обобщенной $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ и основной $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ функций есть бесконечно дифференцируемой функция $\varphi_1(x)\doteqdot\langle f(y),\varphi(x-y)\rangle\in\boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R})$, при этом ее производная $\partial^\alpha\varphi_1(x)=\langle f(y),\partial^\alpha\varphi(x-y)\rangle$ и, если $f\in\mathscr{E}'(\mathbb{R})$, то $\varphi_1\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$.*

b) Свертка обобщенной функции $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста и быстро убывающей функцией $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ является функцией $\varphi_1(x)\doteqdot\langle f(y),\varphi(x-y)\rangle\in\Theta(\mathbb{R})$ медленного роста, при этом ее производная $\partial^\alpha\varphi_1(x)=\langle f(y),\partial^\alpha\varphi(x-y)\rangle$ и, если $f\in\mathscr{E}'(\mathbb{R})$, то функция $\varphi_1\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ является быстро убывающей.

Доказательство. Для доказательства того, что свертка обобщенной $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ и основной $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ функций определяется функцией $(f*\varphi)(x)\doteqdot\langle f(y),\varphi(x-y)\rangle$, используем замену переменных в интеграле, а также непрерывность функционала, из которого следует, что функционал f можно занести под знак интеграла Ри́мана (см. предыдущие лекции). Тогда при всех $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ получим

$$\langle f(y)\times\varphi(z),\psi(y+z)\rangle = \langle f(y),\int_{\mathbb{R}}\varphi(x-y)\psi(x)\,dx\rangle = \int_{\mathbb{R}}\langle f(y),\varphi(x-y)\rangle\,\psi(x)\,dx.$$

Утверждения a) и b) о том, что свертка является бесконечно дифференцируемой функцией φ_1 и ее производная выражается формулой $\partial^\alpha\varphi_1(x)=\langle f(y),\partial_x^\alpha\varphi(x-y)\rangle$, вытекают непосредственно из доказательства предыдущей леммы.

Докажем последнее утверждение a). Носителем функции $\varphi(x-y)$ по переменной y является множество $x-\operatorname{supp}\varphi$. Если пересечение $\operatorname{supp}f\cap(x-\operatorname{supp}\varphi)=\emptyset$ пусто, т.е. если $x\notin\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}\varphi$, то $\varphi_1(x)=0$. Отсюда, т.к. носители $\operatorname{supp}f$ и $\operatorname{supp}\varphi$ компактны, то носитель свертки $\operatorname{supp}\varphi_1\subset\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}\varphi$ будет компактным.

Для доказательства того, что $\varphi_1 \in \Theta(\mathbb{R})$ является функцией медленного роста, используем неравенство $1+(x+y)^2 \leqslant 2(1+x^2)(1+y^2)$. Тогда в силу непрерывности функционала $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ существуют $k \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\boldsymbol{q}_k(\varphi)$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Поэтому, производя замену $z = x-y$, получим неравенство

$$|\varphi_1(x)| \leqslant c \sup_{\alpha \leqslant k;\, z \in \mathbb{R}} (1+(x-z)^2)^k \left|\partial^\alpha \varphi(z)\right| \leqslant c\, 2^k (1+x^2)^k \boldsymbol{q}_k(\varphi).$$

Следовательно, $\varphi_1 \in \Theta(\mathbb{R}^m)$. Для доказательства того, что функция $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ будет быстро убывающей, если $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, используем указанное выше неравенство и формулу $\partial^\alpha \varphi_1(x) = \langle f(y), \partial^\alpha \varphi(x-y)\rangle$. Тогда в силу непрерывности функционала $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ существуют $n \geqslant k$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\boldsymbol{p}_n(\varphi)$ для всех функций $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$. Так как при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ носитель функционала содержится $\operatorname{supp} f \subset (-n, n)$, то, производя замену $z = x-y$, получим

$$\boldsymbol{q}_k(\varphi) = \sup_{\alpha \leqslant k;\, x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^k \left|\partial^\alpha \varphi_1(x)\right| \leqslant c \sup_{\alpha,\beta \leqslant n;\, |y| \leqslant n;\, z \in \mathbb{R}} (1+(y+z)^2)^n \left|\partial^{\alpha+\beta} \varphi(z)\right| < \infty.$$

Таким образом, функция $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ является быстро убывающей. □

Теорема. *Светка обобщенных функций $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ существует в следующих двух случаях: a) если $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ и $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, то свертка $f * g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$; b) если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, то свертка $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

Доказательство. По доказанному ранее обобщенная функция $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}$. Выберем функцию $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, т.ч. $\eta(y) = 1$ в окрестности носителя $\operatorname{supp} g$. В силу равенства функционалов $g = \eta g$ получим $\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f * \eta g, \varphi\rangle = \langle f(x) \times g(y), \eta(y)\varphi(x+y)\rangle$. Поскольку $\eta(y)\varphi(x+y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, то последняя формула определяет продолжение функционала $f \times g$.

Для доказательства a) в силу доказанной ранее леммы имеем $f \times g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2m})$. Следовательно, достаточно показать, что операция $\varphi(z) \to \psi(x,y) \doteqdot \eta(y)\varphi(x+y)$ является непрерывной из $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Применяя формулу Лейбница и полагая $z = x+y$, получим следующее неравенство при всех $\varphi \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R})$:

$$\boldsymbol{p}_{k,l}(\psi) = \sup_{\|(x,y)\| \leqslant k;\, |\alpha| \leqslant l} |\partial^\alpha_{(x,y)} \eta(y)\varphi(x+y)| \ll \sup_{|z| \leqslant 2k;\, \alpha \leqslant 2l} |\partial^\alpha_z \varphi(z)| = \boldsymbol{p}_{2k,2l}(\varphi)$$

где константа зависит от функции η и ее производных до порядка l.

Для доказательства b) в силу доказанной ранее леммы имеем $f \times g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, достаточно показать, что операция $\varphi(z) \to \psi(x,y) \doteqdot \eta(y)\varphi(x+y)$ является непрерывной из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Применяя формулу Лейбница и полагая $z = x+y$, получим следующее неравенство при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\boldsymbol{q}_k(\psi) = \sup_{|\alpha| \leqslant k;\, x,y \in \mathbb{R}} (1+x^2+y^2)^k |\partial^\alpha_{(x,y)} \eta(y)\varphi(x+y)| \ll \sup_{\alpha \leqslant 2k;\, z \in \mathbb{R}} (1+z^2)^k |\partial^\alpha_z \varphi(z)| = \boldsymbol{q}_{2k}(\varphi),$$

т.к. $1+x^2+y^2 \ll 1+(x+y)^2$, если $|y| \ll 1$. Таким образом, $\boldsymbol{q}_k(\psi) \ll \boldsymbol{q}_{2k}(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, где константа зависит от функции η и ее производных до порядка k. □

1. *Коммутативность* $f*g = g*f$.

Это свойство вытекает из коммутативности прямого произведения.

2. *Ассоциативность* $f*(g*h) = (f*g)*h$, *если существует свертка* $f*g*h$.

Это свойство вытекает из ассоциативности прямого произведения.

3. *Свертка с* δ*-функцией* $f*\delta = \delta*f = f$.

Так как выполняются равенства $\langle f*\delta,\varphi\rangle = \big\langle f(x),\langle\delta(y),\varphi(x+y)\rangle\big\rangle = \langle f(x),\varphi(x)\rangle$.

4. *Дифференцирование свертки* $\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g = f*(\partial^\alpha g)$.

По свойству дифференцирования прямого произведения обобщенных функций

$$\langle\partial^\alpha(f*g),\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f(x)\times g(y),\partial_x^\alpha\varphi(x+y)\rangle = \langle\partial_x^\alpha f(x)\times g(y),\varphi(x+y)\rangle\,.$$

5. *Сдвиг свертки* $\tau_{x_0}(f*g) = (\tau_{x_0}f)*g = f*(\tau_{x_0}g)$, *где* $\tau_{x_0}\varphi(x) = \varphi(x-x_0)$.

Из свойства сдвига произведения обобщенных функций имеет место равенство

$$\langle\tau_{x_0}(f*g),\varphi\rangle = \langle f(x)\times g(y),\tau_{-x_0}\varphi(x+y)\rangle = \langle\tau_{x_0}f(x)\times g(y),\varphi(x+y)\rangle = \langle(\tau_{x_0}f)*g,\varphi\rangle\,.$$

6. *Операция свертки* $f*g$ *является билинейным отображением на множестве обобщенных функций, для которых свертка существует.*

Это свойство непосредственно следует из определения свертки и билинейности операции прямого произведения обобщенных функций.

7. *Если* $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *и* $g\in\mathscr{E}'(\mathbb{R})$, *то операция свертки* $f*g$ *непрерывна по каждому аргументу соответственно в слабой* топологии* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *и* $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$.

В самом деле, если, например, последовательность $f_n\to f$ сходится слабо*, то по лемме $\varphi_1(x) = \langle g(y),\varphi(x+y)\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Поэтому, переходя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n*g,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f*g,\varphi\rangle\,.$$

8. *Преобразование Фурье́ свертки обобщенных функций* $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *и* $g\in\mathscr{E}'(\mathbb{R})$ *вычисляется по формуле* $\widehat{f*g} = \varkappa^{-1}\widehat{f}\,\widehat{g}$, *где* $\widehat{g}(z) = \varkappa\langle g(y),e^{-iyz}\rangle\in\Theta(\mathbb{R})$.

В самом деле, пусть $\eta\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\eta(y)=1$ в окрестности носителя $\operatorname{supp} g\Subset\mathbb{R}$. Используя определения преобразования Фурье́, свертки и прямого произведения, а также формулу преобразования Фурье́ обобщенной функции $g\in\mathscr{E}'(\mathbb{R})$, имеем

$$\langle\widehat{f*g},\varphi\rangle = \langle f(x)\times\eta(y)g(y),\widehat{\varphi}(x+y)\rangle = \varkappa\Big\langle f(x),\Big\langle g(y),\eta(y)\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\,e^{-i(x+y)z}dz\Big\rangle\Big\rangle =$$

$$= \varkappa\Big\langle f(x),\int_{\mathbb{R}}\Big\langle g(y),\eta(y)\,e^{-iyz}\Big\rangle\,\varphi(z)\,e^{-ixz}dz\Big\rangle = \varkappa^{-1}\Big\langle f,\widehat{\widehat{g}\varphi}\Big\rangle = \varkappa^{-1}\Big\langle\widehat{f}\,\widehat{g},\varphi\Big\rangle\,.$$

Произведение $\widehat{f}\,\widehat{g}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, т.к. $\widehat{g}\in\Theta(\mathbb{R})$ функция медленного роста.

6 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ́ В $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$

Обозначим через $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ подпространство всех обобщенных функций $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ с носителем $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_+$ в множестве $\mathbb{R}_+$ неотрицательных действительных чисел.

Теорема. *Если $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$, то свертка существует и $f * g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$. При этом свертка непрерывна по каждому аргументу свертки, в том смысле, что если $f_n \to f$ сходится слабо*, то $f_n * g \to f * g$ сходится слабо*.*

Доказательство. Выберем функцию $\eta \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R})$, т.ч. $\eta(x) = 1$ при $x > -a$ и $\eta(x) = 0$ при $x < -2a$, где $a > 0$. В силу равенства функционалов $f = \eta f$ и $g = \eta g$

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle \eta f * \eta g, \varphi \rangle = \langle f(x) \times g(y), \eta(x)\eta(y)\varphi(x+y) \rangle, \ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Поскольку $\eta(x)\eta(y)\varphi(x+y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, то последняя формула определяет нужное нам продолжение функционала $f \times g$ на множество всех функций вида $\varphi(x+y)$, где $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ произвольная функция. При этом, если последовательность основных функций $\varphi_n \to 0$ сходится в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, то $\eta(x)\eta(y)\varphi_n(x+y) \to 0$ сходится в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Так как носитель свертки $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$, то $f * g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Для доказательства непрерывности свертки положим $\varphi_-(x) \doteqdot \varphi(-x)$, тогда мы имеем равенство $\langle f_n * g, \varphi \rangle = \langle f_n, (g * \varphi_-)_- \rangle = \langle f_n, \eta(g * \varphi_-)_- \rangle$. Поскольку по свойству носителя свертки $\operatorname{supp}(g * \varphi_-)_- \subset \operatorname{supp} \varphi - \operatorname{supp} g$, то функция $\eta(g * \varphi_-)_- \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ является основной. Поэтому, переходя к пределу, получим при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n * g, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \eta(g * \varphi_-)_- \rangle = \langle f, \eta(g * \varphi_-)_- \rangle = \langle f * g, \varphi \rangle.$$

Таким образом, если $f_n \to f$ сходится слабо*, то $f_n * g \to f * g$ сходится слабо*. $\square$

Следствие. *Пространство $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ является коммутативной и ассоциативной алгеброй относительно операции свертки обобщенных функций.*

Определение. *Прямым* и *обратным* преобразованием Фурье́ функций из $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ называются операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$, определенные по формулам

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy} dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}xy\rangle} dy, \quad \text{где } \varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}.$$

Из определения преобразования Фурье́ вытекают неравенства

$$\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{C}} \doteqdot \sup_{x\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)| \leqslant \varkappa \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy = \varkappa \|f\|_{\boldsymbol{L}_1} \quad \text{и} \quad \|\widetilde{f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}.$$

Лемма (Ри́мана–Лебе́га)**.** *Если $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье́ $\widehat{f} \in \boldsymbol{C}(\mathbb{R})$ является равномерно непрерывной функцией, т.ч. $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\tau_a f(x) \doteqdot f(x-a)$, тогда при $a \to 0$ получим

$$|\tau_a \widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)| = \varkappa \Big| \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}(x-a)y} - \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy} \right) dy \Big| \leqslant \varkappa \int_{\mathbb{R}} \Big| f(y) \left(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle} - 1 \right) \Big| dy \to 0$$

по теореме Лебе́га о мажарируемой сходимости. Поэтому функция $\widehat{f}$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что

$$\widehat{\tau_a f}(x) = \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y-a) e^{-ixy} dy = \varkappa e^{-ixa} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy = -\widehat{f}(x),$$

если $a \doteqdot \pi/x$. Отсюда следует равенство $\widehat{f}(x) = (\widehat{f}(x) - \widehat{\tau_a f}(x))/2$. Поэтому имеем

$$|\widehat{f}(x)| = \frac{1}{2} \left|\widehat{f}(x) - \widehat{\tau_a f}(x)\right| \leqslant \frac{\varkappa}{2} \left\|f - \tau_a f\right\|_{L_1} \to 0, \text{ если } |a| = \pi/|x| \to 0$$

(см. доказательство леммы в лекции 3). Итак, $\widehat{f}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. □

Теорема (условие Ди́ни). *Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Дини в точке $x \in \mathbb{R}$, т.е. при некотором $\delta > 0$ следующий интеграл конечный*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty, \quad \textit{то} \quad \lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = f(x).$$

Доказательство. По теореме Фуби́ни, меняя порядок интегрирования, получим

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \Big(\int_{-n}^{n} e^{i(x-z)y} dy \Big)\, dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{x-z}\, dz.$$

Применяя замену переменных и используя равенство $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 1$, имеем

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin nt}{t}\, dt - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt\, dt.$$

Последнее выражение запишем в виде суммы трех интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{|t| \leqslant \delta} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t| > \delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt\, dt - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|t| > n\delta} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Здесь первые два интеграла стремятся к нулю при $n \to \infty$ по лемме Ри́мана–Лебе́га, а последний интеграл достаточно мал в силу его сходимости в бесконечности. □

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $L_1(\mathbb{R})$.

1. *Формула умножения. Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то выполняются равенства*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widetilde{g}(x)\, dx.$$

В самом деле, применяя теорему Фуби́ни, получаем равенство

$$\varkappa \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-ixy} dy \Big)\, g(x)\, dx = \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y) \Big(\int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-ixy} dx \Big)\, dy.$$

В частности, отсюда вытекает, что преобразование Фурье́ любой интегрируемой функции из $L_1(\mathbb{R})$ совпадает п.в. с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если функция и преобразование Фурье́ $f,\widehat{f} \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, то выполняются равенства $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.*

Применяя формулы умножения и обращения для функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, получим

$$\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\widehat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Поэтому $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Аналогично $\widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

3. *Формулы дифференцирования. Если функция $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и $x^k f(x) \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, то $\partial^\alpha \widehat{f}(x) = \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha f}(y)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $1 \leqslant \alpha \leqslant k$. Если функция $f \in \mathscr{W}_1^k(\mathbb{R})$, то $\widehat{\partial^\alpha f}(x) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $1 \leqslant \alpha \leqslant k$.*

Первая формула доказывается дифференцированием под знаком интеграла Лебе́га. Для доказательства второй формулы при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ имеем

$$\langle \widehat{\partial^\alpha f}, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha \widehat{\varphi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha \varphi}(y)\rangle = \langle (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x), \varphi\rangle$$

Отсюда следует равенство $\widehat{\partial^\alpha f}(x) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

4. *Формула свертки. Свертка $f * g(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy$ функций $f,g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ принадлежит $f*g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f*g}(x) = \varkappa^{-1}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.*

Линейное преобразование $A(x,y) = (y, x-y)$ отображает биективно измеримые множества в $\mathbb{R}^2$ в измеримые в $\mathbb{R}^2$. Поэтому из измеримости функции $f(x)g(y)$ следует измеримость функции $f(y)g(x-y)$. При помощи обобщенного неравенства Минко́вского имеем неравенство $\|f*g\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}\|g\|_{\boldsymbol{L}_1}$. Поэтому $f*g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Применяя теорему Фуби́ни, мы получим равенство

$$\varkappa\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(z)g(y-z)\,dz\Big)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy}dy = \varkappa\int_{\mathbb{R}} f(z)\Big(\int_{\mathbb{R}} g(y-z)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}x(y-z)}dy\Big)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xz}dz\,.$$

Делая замену переменных во внутреннем интеграле, заключаем, что повторный интеграл равен произведению интегралов.

Теорема (Планшере́ля)**.** *Если функция $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, то ее преобразование Фурье́ принадлежит $\widehat{f} \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и имеет место равенство $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$.*

Доказательство. В силу формул умножения и обращения преобразования Фурье́ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\widehat{\varphi}}(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x)\overline{\widehat{\varphi}(x)}dx = \|\widehat{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}_2}^2\,.$$

Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ получим

$$|\langle \widehat{f}, \varphi\rangle| = |\langle f, \widehat{\varphi}\rangle| = \Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widehat{\varphi}(x)\,dx\Big| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}\|\widehat{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_2}\,.$$

Поскольку $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, то норма функционала $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. По теореме Ри́сса о представлении существует функция функция $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, т.ч.

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{g(x)}\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Следовательно, функционал $\widehat{f}$ является регулярным и функция $\widehat{f}(x) = \overline{g(x)} \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Поскольку $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$, то $\|\widehat{\widehat{f}}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Наконец, из неравенства $\|\widehat{\widehat{f}}\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ следует равенство $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. □

Замечание. В силу теоремы Планшере́ля преобразование Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ является *унитарным оператором*, т.е. задает биективное и изометричное отображение пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. При этом прямое и обратное преобразование Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ можно вычислить по формулам

$$\widehat{f}(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} f(y)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy}dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} f(y)\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}xy}dy,$$

где пределы берутся в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. В самом деле, рассмотрим функции $f_n(x) \doteq f(x)\chi_{(-n,n)}(x)$ из пространства $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, где $\chi_{(-n,n)}(x)$ характеристическая функция интервала $(-n,n)$. Преобразование Фурье этих функций вычисляется по обычным формулам

$$\widehat{f_n}(x) = \varkappa \int_{-n}^{n} f(y)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy}dy, \quad \widetilde{f_n}(x) = \varkappa \int_{-n}^{n} f(y)\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}xy}dy.$$

При этом по теореме $\|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widetilde{f} - \widetilde{f_n}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f - f_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

1. *Формула умножения. Если $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, то выполняются равенства*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widetilde{g}(x)\,dx.$$

Эти равенства доказываются предельным переходом $f_n \to f$ и $g_n \to g$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ из соответствующих равенств для функций $f_n, g_n \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Отсюда преобразование Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ совпадает с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, то $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.*

Из формул умножения и обращения преобразования Фурье́ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ получим

$$\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\widehat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Отсюда $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Аналогично $\widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

3. *Формула свертки. Свертка функций $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ принадлежит $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и выполняется равенство $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-1}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.*

В силу обобщенного неравенства Минко́вского $\|f*g\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{L_1}\|g\|_{L_2}$. Отсюда свертка $f*g \in L_2(\mathbb{R})$ и непрерывна по второму аргументу в $L_2(\mathbb{R})$. Поскольку $g_n \to g$ в $L_2(\mathbb{R})$, где $g_n \in L_1(\mathbb{R})$, то, применяя формулу свертки в $L_1(\mathbb{R})$, получим

$$\langle \widehat{f*g}, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \widehat{f*g_n}, \varphi\rangle = \varkappa^{-1}\lim_{n\to\infty}\langle \widehat{f}\,\widehat{g_n}, \varphi\rangle = \varkappa^{-1}\langle \widehat{f}\,\widehat{g}, \varphi\rangle$$

для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Таким образом, $\widehat{f*g}(x) = \varkappa^{-1}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

Определение. *Функциями Эрми́та* называются следующие функции:

$$h_n(x) \doteqdot c_n e^{x^2/2}\big(e^{-x^2}\big)^{(n)} = H_n(x)e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где функции $H_n(x) = c_n(-2x)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ называются *многочленами Эрми́та*.

Функции Эрми́та обладают свойством ортогональности в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. В самом деле, интегрируя по частям n раз, получим при всех $m<n$

$$\int_{\mathbb{R}} h_m(x)\,h_n(x)\,dx = c_n\int_{\mathbb{R}} H_m(x)\big(e^{-x^2}\big)^{(n)}dx = c_n(-1)^n\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\big(H_m(x)\big)^{(n)}dx = 0.$$

В случае $m=n$ имеем $\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x)\,dx = c_n^2 2^n n!\sqrt{\pi}$. Таким образом, при $c_n = 1/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$ система функций Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной системой.

Теорема. *Система функций Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье́ с собственными значениями $\lambda_n = (-i)^n$, т.е. $\mathcal{F}(h_n) = \lambda_n h_n$ при $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Доказательство. Пусть функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ ортогональна $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,h_n(t)\,dt = 0$ всем функциям Эрми́та. Заметим, что функция $F(z) \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-\frac{t^2}{2}-itz}dt$ является целой в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и все ее производные в нуле равны нулю

$$F^{(n)}(z)|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,(-it)^n e^{-\frac{t^2}{2}-itz}dt|_{z=0} = (-i)^n\int_{\mathbb{R}} f(t)\,t^n e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0 \text{ при } n \in \mathbb{Z}_+,$$

т.к. функция $t^n e^{-t^2/2} = \sum_{k=0}^{n} b_k h_k(t)$ выражается линейной комбинацией функций Эрми́та. Поэтому $F(z)=0$ при всех $z\in\mathbb{C}$. В частности, $F(x)=0$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Отсюда по формуле обращения преобразования Фурье́ получим, что $f(t)=0$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. Таким образом, система функций Эрми́та полна в $L_2(\mathbb{R})$.

Докажем, что функции Эрми́та являются собственным преобразования Фурье́. Для этого используем простые преобразования и интегрирование по частям

$$\widehat{h_n}(x) = \varkappa\int_{\mathbb{R}} h_n(y)\,e^{-ixy}dy = \varkappa c_n\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{y^2-2ixy}{2}}\big(e^{-y^2}\big)^{(n)}dy = \varkappa c_n e^{\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}}\big(e^{-y^2}\big)^{(n)}dy =$$

$$\varkappa c_n(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\Big(e^{\frac{(y-ix)^2}{2}}\Big)_y^{(n)}dy = \varkappa c_n(-i)^n e^{\frac{x^2}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}e^{\frac{(y-ix)^2}{2}}dy\Big)_x^{(n)} = (-i)^n h_n(x).$$

В последнем равенстве мы использовали то, что функция $h_0(x) = e^{-x^2/2}$ является собственной функцией оператора Фурье́ с собственным значением 1. $\square$

7 ТЕОРЕМЫ О ГОМОМОРФИЗМЕ И О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ

Пусть $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ — пространство ограниченных линейных операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, действующих в нормированных пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, с нормой $\|A\| \doteqdot \sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|Ax\|$.

Определение. Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *гомоморфизмом*, если он является непрерывным и открытым отображением. Напомним, что линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ *непрерывен*, если прообраз $A^{-1}(U)\subset\boldsymbol{E}$ любой окрестности нуля $U\subset\boldsymbol{F}$ является окрестностью нуля в $\boldsymbol{E}$, и является *открытым*, если образ $A(U)\subset\boldsymbol{F}$ любой окрестности нуля $U\subset\boldsymbol{E}$ является окрестностью нуля в $\boldsymbol{F}$.

Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *почти открытым*, если замыкание образа $\overline{A(U)}$ любой окрестности нуля $U\subset\boldsymbol{E}$ содержит окрестностью нуля в $\boldsymbol{F}$.

Лемма (о почти открытом отображении). *Если $\boldsymbol{E}$ банахово пространство, то всякий почти открытый оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является открытым.*

Доказательство. По определению почти открытого оператора для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\overline{A(\boldsymbol{U}_\varepsilon)}\supset\boldsymbol{U}_{2\delta}$, где $\boldsymbol{U}_\varepsilon$ открытый шар радиуса ε в $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{U}_{2\delta}$ открытый шар радиуса 2δ в $\boldsymbol{F}$. Умножая это включение на $1/2^n$ и используя линейность оператора A, получим $\overline{A(\boldsymbol{U}_{\varepsilon_n})}\supset\boldsymbol{U}_{\delta_n}$, где $\varepsilon_n=\varepsilon/2^n$ и $\delta_n=\delta/2^{n-1}$.

Если $y\in\boldsymbol{U}_{\delta_1}$, то существует $x_1\in\boldsymbol{U}_{\varepsilon_1}$, т.ч. $\|y-Ax_1\|<\delta_2$. Поскольку $y-Ax_1\in\boldsymbol{U}_{\delta_2}$, то существует $x_2\in\boldsymbol{U}_{\varepsilon_2}$, т.ч. $\|y-Ax_1-Ax_2\|<\delta_3$, и т.д. Определим по индукции последовательность $\{x_k\}$, т.ч. $x_k\in\boldsymbol{U}_{\varepsilon_k}$ и $\|y-\sum_{k=1}^n Ax_k\|<\delta_{n+1}$. Поскольку частичные суммы $s_n\doteqdot\sum_{k=1}^n x_k$ удовлетворяют неравенству $\|s_m-s_n\|\leqslant\sum_{k=n+1}^m\|x_k\|<\varepsilon/2^n$ при всех $m>n$, то в силу полноты $\boldsymbol{E}$ ряд $x\doteqdot\sum_{k=1}^\infty x_k$ сходится и $\|x\|\leqslant\sum_{k=1}^\infty\|x_k\|<\varepsilon$. Поэтому из непрерывности оператора A следует равенство $Ax=\sum_{k=1}^\infty Ax_k=y$.

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. выполняется включение $A(\boldsymbol{U}_\varepsilon)\supset\boldsymbol{U}_\delta$, и, следовательно, оператор A является открытым отображением. □

Теорема (Ба́наха о гомоморфизме). *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ — банаховы пространства и оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сюръективный, то A является гомоморфизмом.*

Доказательство. Покажем, что оператор A является почти открытым. В силу его сюръективности $\boldsymbol{F}=\bigcup_{n=1}^\infty A(\boldsymbol{U}_n)$. Поскольку по теореме Бэра одно из множеств $A(\boldsymbol{U}_n)$ не является нигде не плотным, то его замыкание $\overline{A(\boldsymbol{U}_n)}\supset\boldsymbol{U}_r(y_0)$ содержит некоторый шар $\boldsymbol{U}_r(y_0)$. В силу симметричности множества $\overline{A(\boldsymbol{U}_n)}\supset\boldsymbol{U}_r(-y_0)$.

Пусть $y\in\boldsymbol{U}_r$, тогда $y=\frac{(y+y_0)+(y-y_0)}{2}\in\frac{\boldsymbol{U}_r(y_0)+\boldsymbol{U}_r(-y_0)}{2}\subset\overline{A(\boldsymbol{U}_n)}$ в силу выпуклости множества $\overline{A(\boldsymbol{U}_n)}$, т.е. $y\in\overline{A(\boldsymbol{U}_n)}$. Поэтому $\overline{A(\boldsymbol{U}_n)}\supset\boldsymbol{U}_r$. Умножая это включение на ε/n, получим $\overline{A(\boldsymbol{U}_\varepsilon)}\supset\boldsymbol{U}_\delta$ при всех $\varepsilon>0$ и $\delta=\varepsilon r/n$. Значит оператор A является почти открытым отображением. По лемме A будет открытым отображением. □

Замечание. Множество $M\subset\boldsymbol{E}$ называется *выпуклым*, если $(1-t)x+ty\in M$ при всех $x,y\in M$ и $0<t<1$. Если $x,y\in\overline{M}$, то $x_n\to x$ и $y_n\to y$, где $x_n,y_n\in M$. Поэтому $(1-t)x_n+ty_n\to(1-t)x+ty$ и значит $(1-t)x+ty\in\overline{M}$ при всех $0<t<1$. Таким образом, замыкание выпуклого множества является выпуклым множеством.

Определение. *Произведением операторов* $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ и $B : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ называется их композиция, т.е. $BA : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{G}$ определен по формуле $BA(x) \doteqdot B(Ax)$ при $x \in \boldsymbol{E}$.

Оператор $A^{-1} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ называется *обратным* к оператору $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, если имеют место равенства $A^{-1}A = \boldsymbol{I}$ и $AA^{-1} = \boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{I}(x) = x$ тождественный оператор.

Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ называется *обратимым*, если обратный $A^{-1} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ существует и является ограниченным $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$. Для того чтобы существовал обратный оператор, необходимо и достаточно, чтобы отображение $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ было биективным. Если два оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ являются ограниченными, то их произведение BA будет ограниченным оператором $BA \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{G})$ и его норма удовлетворяет неравенству

$$\|BA\| \leqslant \|B\| \, \|A\| \,, \text{ т.к. } \|BA\| = \sup_{x \in \boldsymbol{S}_1} \|B(Ax)\| \leqslant \|B\| \sup_{x \in \boldsymbol{S}_1} \|Ax\| = \|B\| \, \|A\| \,.$$

1. *Если линейным оператор* $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *является биективным отображением, то его обратный оператор* $A^{-1} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ *является линейным.*

Докажем линейность оператора A^{-1}. Пусть $A^{-1}(u) = x$, $A^{-1}(v) = y$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, тогда

$$A^{-1}(u+v) = A^{-1}(Ax+Ay) = A^{-1}A(x+y) = x+y = A^{-1}(u) + A^{-1}(v) \,,$$
$$A^{-1}(\lambda u) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}(u) \,.$$

Ядро $\ker A$ и образ $\operatorname{Im} A$ линейного оператора определяются по формулам

$$\ker A \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid Ax = 0\} \,, \quad \operatorname{Im} A \doteqdot \{y \in \boldsymbol{F} \mid y = Ax, x \in \boldsymbol{E}\} \,.$$

2. *Линейный оператор* $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *тогда и только тогда будет биективным, когда его ядро* $\ker A = 0$ *и образ* $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$.

Если A является биективным, то $\ker A = A^{-1}(0) = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$. Обратно, если $\ker A = 0$, то из равенства $Ax = Ay$ следует, что $A(x-y) = 0$ и значит $x-y = 0$. Отсюда оператор A является биективным отображением $\boldsymbol{E}$ на свой образ $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$.

3. *Если линейный оператор* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *ограничен, то ядро* $\ker A \subset \boldsymbol{E}$ *является замкнутым подпространством, а образ* $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{F}$ *линейным подпространством.*

Пусть $x, y \in \ker A$, тогда $A(x+y) = Ax + Ay = 0$ и $A(\lambda x) = \lambda Ax = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $x+y \in \ker A$ и $\lambda x \in \ker A$. Если $x = \lim x_n$ и $x_n \in \ker A$, тогда в силу непрерывности оператора $Ax = \lim Ax_n = 0$, т.е. $x \in \ker A$. Пусть $u, v \in \operatorname{Im} A$, тогда $u + v = Ax + Ay = A(x+y) \in \operatorname{Im} A$ и $\lambda u = \lambda Ax = A(\lambda x) \in \operatorname{Im} A$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $u+v, \lambda u \in \operatorname{Im} A$.

Теорема (Ба́наха об обратном операторе)**.** *Если* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{F}$ *ба́наховы пространства и оператор* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *является ограниченным и биективным отображением, то его обратный оператор* $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ *является ограниченным.*

Доказательство. Это вытекает из теоремы о гомоморфизме, поскольку оператор A^{-1} линейный, а так как оператор A открытый, то A^{-1} будет ограниченным. □

Рассмотрим замкнутое подпространство $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{E}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и *факторпространство* $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/\boldsymbol{L}$ по подпространству $\boldsymbol{L}$. Всякий элемент $\widehat{x} \in \widehat{\boldsymbol{E}}$ можно записать в виде $\widehat{x} \doteqdot x + \boldsymbol{L}$, где $x \in \boldsymbol{E}$. Факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}}$ является линейным пространством над $\mathbb{F}$ относительно операций сложения $\widehat{x} + \widehat{y} \doteqdot \widehat{x+y}$, где $x, y \in \boldsymbol{E}$, и умножение на число $\lambda\widehat{x} \doteqdot \widehat{\lambda x}$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Функция $\|\widehat{x}\| \doteqdot \inf_{y \in \boldsymbol{L}} \|x + y\| = \rho(x, \boldsymbol{L})$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, называется *нормой в факторпространстве* $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Проверим, что она обладает свойствами нормы.

$$\|\lambda\widehat{x}\| = \|\widehat{\lambda x}\| = \inf_{y \in \boldsymbol{L}} \|\lambda x + y\| = |\lambda| \inf_{y \in \boldsymbol{L}} \|x + y\| = |\lambda| \|\widehat{x}\|;$$

$$\|\widehat{x+y}\| = \inf_{z \in \boldsymbol{L}} \|x + y + z\| \leqslant \inf_{u \in \boldsymbol{L}} \|x + u\| + \inf_{v \in \boldsymbol{L}} \|y + v\| = \|\widehat{x}\| + \|\widehat{y}\|.$$

Если $\|\widehat{x}\| = \inf_{y \in \boldsymbol{L}} \|x + y\| = 0$, то существуют $y_n \in \boldsymbol{L}$, т.ч. $x + y_n \to 0$. Следовательно, т.к. подпространство $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{E}$ замкнуто, то $x = -\lim y_n \in \boldsymbol{L}$ и значит $\widehat{x} = \widehat{0}$.

Лемма. *Если $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство ба́нахова пространства $\boldsymbol{E}$, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/\boldsymbol{L}$ является ба́наховым пространством.*

Доказательство. Докажем полноту $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Пусть $\{\widehat{x_n}\} \subset \widehat{\boldsymbol{E}}$ последовательность Коши́. Выберем $n_1 < n_2 < \ldots$, т.ч. $\|\widehat{x_n} - \widehat{x_m}\| < 1/2^k$ при всех $n, m \geqslant n_k$. Тогда существуют $y_{n_k} \in \boldsymbol{L}$, т.ч. $z_k \doteqdot x_{n_k} + y_{n_k} \in \widehat{x_{n_k}}$ и $\|z_{k+1} - z_k\| < 1/2^k$. Отсюда существует предел $z = \lim z_k$ и, следовательно, ряд $z = z_1 + \sum_{i=1}^{\infty}(z_{i+1} - z_i)$ сходится. Поэтому при $n \geqslant n_k$

$$\|\widehat{z} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|\widehat{z - x_{n_k}}\| + \|\widehat{x_{n_k}} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|z - z_k\| + \frac{1}{2^k} \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k},$$

т.к. $z - z_k = \sum_{i=k}^{\infty}(z_{i+1} - z_i)$. Таким образом, существует предел $\lim \widehat{x_n} = \widehat{z} \in \widehat{\boldsymbol{E}}$. □

Следствие. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство ба́нахова пространства $\boldsymbol{E}$, то факторотображение $\pi : \boldsymbol{E} \to \widehat{\boldsymbol{E}}$, определенное по формуле $\pi(x) \doteqdot \widehat{x}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, является гомоморфизмом.*

Сюръективность π вытекает из определения, а его непрерывность следует из неравенства $\|\widehat{x}\| \leqslant \|x\|$. Заметим, что по лемме о почти перпендикуляре $\|\pi\| = 1$.

Теорема (о трех гомоморфизмах). *Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ банаховы пространства, операторы $A_1 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}_1)$ и $A_2 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}_2)$ являются гомоморфизмами и, кроме того, удовлетворяют условию* $\ker A_1 \subset \ker A_2$. *Тогда существует гомоморфизм $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$, т.ч. $A_2 = BA_1$.*

Доказательство. Определим оператор $B : \boldsymbol{F}_1 \to \boldsymbol{F}_2$ по формуле $By = A_2x$ при всех $y = A_1x$ и $x \in \boldsymbol{E}$. Если $y = A_1x = A_1x'$, то $x - x' \in \ker A_1 \subset \ker A_2$. Отсюда $A_2x = A_2x'$. Поэтому оператор B определен корректно. Так как для каждого $z \in \boldsymbol{F}_2$ найдется $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $z = A_2x$, то $By = z$ при $y = A_1x$. Поэтому оператор B будет сюръективным. Докажем его линейность. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y = A_1x$ и $y' = A_1x'$, тогда получим

$$B(\lambda y) = B(\lambda A_1(x)) = B(A_1(\lambda x)) = A_2(\lambda x) = \lambda A_2(x) = \lambda B(y),$$
$$B(y + y') = B(A_1(x + x')) = A_2(x + x') = A_2(x) + A_2(x') = B(y) + B(y').$$

Докажем непрерывность оператора B. Если $U \subset \boldsymbol{F}_2$ образует окрестность нуля, то $A_2^{-1}(U) = A_1^{-1}(B^{-1}(U))$ будет открытым множеством. Тогда $B^{-1}(U) = A_1(A_2^{-1}(U))$ также будет открытым множеством, т.к. A_1 является открытым отображением.

Докажем, что оператор B является открытым. Если $V \subset \boldsymbol{F}_1$ образует окрестность нуля, то $A_1^{-1}(V) = U$ будет открытым множеством. Тогда $B(V) = BA_1(U) = A_2(U)$ также будет открытым множеством, т.к. A_2 является открытым отображением. $\square$

Пусть $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \doteqdot \{(x,y) \mid x \in \boldsymbol{E},\ y \in \boldsymbol{F}\}$ прямое произведение линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Определим в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ операции сложения и умножения по формулам

$$\lambda(x,y) \doteqdot (\lambda x, \lambda y) \quad \text{и} \quad (x_1,y_1) + (x_2,y_2) \doteqdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $(x,y), (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Тогда мы получим прямую сумму $\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F} \doteqdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ линейных подпространств $\boldsymbol{E} \times 0$ и $0 \times \boldsymbol{F}$. Кроме того, если данные пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются нормированными, то норма в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ определяется по евклидовой формуле $\|(x,y)\| \doteqdot \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ при всех $(x,y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Свойства нормы легко проверяются также как на евклидовой плоскости.

Лемма. *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами, то их прямое произведение $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ будет банаховым пространством.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Пусть $\{(x_n, y_n)\}$ образует последовательность Коши́ в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|(x_n,y_n) - (x_m,y_m)\| = \sqrt{\|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2} < \varepsilon$ при всех $n,m \geqslant N$. Тогда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются последовательностями Коши́ и в силу полноты $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ существуют пределы $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$. Отсюда $\lim(x_n, y_n) = (x,y)$ сходится в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. $\square$

В приложениях для линейного оператора часто указывается его естественная область определения, которая может не быть банаховым пространством.

Предположим, что линейный оператор $A : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$ определен на линейном подпространстве $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{E}$ банахова пространства $\boldsymbol{E}$ и принимает значения в банаховом пространстве $\boldsymbol{F}$. Подпространство $\boldsymbol{L} \doteqdot \mathrm{dom} A$ называется *областью определения* оператора A, а подпространство $\mathrm{gr} A \doteqdot \{(x,y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \mid x \in \boldsymbol{L}, y = Ax\}$ *графиком* оператора A в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. График оператора $\mathrm{gr} A$ образует линейное подпространство прямого произведения $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, но, вообще говоря, незамкнутое.

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$ называется *замкнутым*, если его график $\mathrm{gr} A$ является замкнутым подпространством в пространстве $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$.

Замкнутость графика $\mathrm{gr} A$ линейного оператора $A : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$ равносильна условию: если последовательность элементов $(x_n, y_n) \in \mathrm{gr} A$ сходится $(x_n, y_n) \to (x,y)$ по норме прямого произведения $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, то элемент $(x,y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ принадлежит графику $(x,y) \in \mathrm{gr} A$. Таким образом, это равносильно следующему условию: если $x_n \in L$ сходится $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$, то $x \in \boldsymbol{L}$ и $Ax = y$.

Теорема (Ба́наха о замкнутом графике)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ ба́наховы пространства, то оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ замкнут тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим отображение $P: \mathrm{gr}A \to \boldsymbol{E}$, заданное по формуле $P(x,y) \doteqdot x$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, $y = Ax$. Отображение P является линейным, биективным и ограниченным, т.к. $\|x\| \leqslant \|(x,y)\|$ при всех $(x,y) \in \mathrm{gr}A$. По теореме об обратном операторе существует $c > 0$, т.ч. $\|(x,y)\| \leqslant c\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, $y = Ax$. Отсюда $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$, т.е. оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ будет ограниченным.

Достаточность. Пусть теперь оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограничен. Если последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ сходится $x_n \to x$, то ее предел $x \in \boldsymbol{E}$ и в силу непрерывности A имеет место $Ax_n \to Ax$. Поэтому, если $(x_n,y_n) \in \mathrm{gr}A$ и сходится $(x_n,y_n) \to (x,y)$ в пространстве $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, то $(x,y) \in \mathrm{gr}A$. Таким образом, график $\mathrm{gr}A$ замкнут. □

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ — банаховы пространства. Замыканием линейного оператора $A: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$, заданного на линейном подпространстве $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{E}$, называется замкнутый оператор $\overline{A}: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{F}$, заданный на линейном подпространстве $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}$, график которого совпадает с замыканием $\mathrm{gr}\overline{A} = \overline{\mathrm{gr}A}$ графика оператора A.

Линейный оператор $A: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$ в том и только в том случае имеет замыкание, если из сходимости всякой последовательности $x_n \to 0$ и $Ax_n \to y$ следует, что $y = 0$. В самом деле, это условие необходимо, т.к. в силу линейности оператора $\overline{A}(0) = 0$. Обратно, при выполнении этого условия можно определить замкнутый оператор $\overline{A}: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{F}$, полагая $\overline{A}x = y$, если существуют $x_n \in \boldsymbol{L}$, т.ч. $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$.

Ограниченный линейный оператор $A: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$ тогда и только тогда замкнут в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, когда область определения $\mathrm{dom}A = \boldsymbol{L}$ является замкнутым подпространством в пространстве $\boldsymbol{E}$. Следовательно, замыканием $\overline{A}$ ограниченного линейного оператора является его продолжение по непрерывности на замкнутое подпространство $\overline{\boldsymbol{L}} \subset \boldsymbol{E}$. При этом норма не изменится $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

Пример. Пусть $Af(x) \doteqdot a(x)f(x)$ оператор умножения на измеримую функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Докажем, что если оператор A ограничен, то функция $a(x)$ в существенном ограничена, т.е. $a \in \boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$. В самом деле, если $\|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \infty$, то существуют множества $E_n \subset X$ положительной меры $\mu(E_n) > 0$, т.ч. $|a(x)| > n$ при всех $x \in E_n$. Тогда, полагая $f_n(x) = \chi_{E_n}(x)$, получим $\|Af_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \geqslant n\|f_n\|_{\boldsymbol{L}_p}$. Отсюда $\|A\| = \infty$, т.е. оператор A является неограниченным.

Докажем, что норма оператора $\|A\| = \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Так как имеет место неравенство

$$\|Af\|_{\boldsymbol{L}_p} = \left(\int_X |a(x)f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty}\left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} = \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p},$$

то $\|A\| \leqslant \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Аналогично в случае $p = \infty$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset X$ положительной меры $\mu(E) > 0$, т.ч. $|a(x)| > \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon$ для всех $x \in E$. Тогда, полагая $f(x) = \chi_E(x)$, получим

$$\|Af\|_{\boldsymbol{L}_p} = \left(\int_E |a(x)|^p d\mu\right)^{1/p} > (\|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon)\left(\mu(E)\right)^{1/p} = (\|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon)\|f\|_{\boldsymbol{L}_p},$$

т.е. $\|A\| \geqslant \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$. Аналогично доказывается в случае $p = \infty$. Таким образом, имеет место равенство $\|A\| = \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

8 СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ и $M \subset \boldsymbol{E}'$ обозначают линейные подпространства нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и его сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$. Подпространства

$$L^{\perp} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' \mid f(x) = 0, x \in L\} \quad \text{и} \quad M_{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = 0, f \in M\}$$

называются соответственно *аннулятором** L и *аннулятором* M. Поскольку $L^{\perp}$ совпадает с пересечением ядер $\ker \delta_x$, где $x \in L$, слабо* непрерывных функционалов $\delta_x(f) = f(x)$, а $M_{\perp}$ совпадает с пересечением ядер $\ker f$, где $f \in M$, непрерывных функционалов, то аннулятор* $L^{\perp}$ является слабо* замкнутым подпространством в $\boldsymbol{E}'$, а аннулятор $M_{\perp}$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{E}$.

Лемма (о бианнуляторах)**.** *Бианнулятор $(L^{\perp})_{\perp}$ совпадает с замыканием $\overline{L}$, а бианнулятор* $(M_{\perp})^{\perp}$ совпадает со слабым* замыканием $\overline{M}^{*}$.*

Доказательство. Так как $L \subset (L^{\perp})_{\perp}$ и бианнулятор замкнут, то $\overline{L} \subset (L^{\perp})_{\perp}$. Пусть $x \notin \overline{L}$. Определим функционал $f(z) \doteqdot \lambda$ на линейной оболочке $Z = \mathrm{sp}\{x, \overline{L}\}$, где $z = \lambda x + y$, $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y \in \overline{L}$. Тогда $|f(z)| = |\lambda| = \|z\|/\|z/\lambda\| \leqslant \|z\|/d$, т.е. $\|f\| \leqslant 1/d$, где $d \doteqdot \rho(x, \overline{L}) = \inf_{y \in \overline{L}} \|x - y\|$. По теореме Ха́на–Ба́наха существует $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g|_Z = f$ и $\|g\| \leqslant 1/d$. Отсюда мы получим $g \in L^{\perp}$ и $g(x) = 1$, т.е. $x \notin (L^{\perp})_{\perp}$.

Поскольку $M \subset (M_{\perp})^{\perp}$ и бианнулятор* слабо* замкнут, то $\overline{M}^{*} \subset (M_{\perp})^{\perp}$. Пусть $f \notin \overline{M}^{*}$. Определим функционал $\alpha(h) \doteqdot \lambda$ на линейной оболочке $H = \mathrm{sp}\{f, \overline{M}^{*}\}$, где $h = \lambda f + g$, $\lambda \in \mathbb{F}$ и $g \in \overline{M}^{*}$. Пусть $O(f) \doteqdot \{g \in \boldsymbol{E}' \mid \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon\}$ есть слабая* окрестность точки $f \in \boldsymbol{E}'$, которая не пересекается с подпространством $\overline{M}^{*}$. Введем полунорму $\boldsymbol{p}(g) \doteqdot \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |g(x_i)|$. Тогда $|\alpha(h)| = \boldsymbol{p}(h)/\boldsymbol{p}(h/\lambda) \leqslant \boldsymbol{p}(h)/\varepsilon$, т.к. $\boldsymbol{p}(f - g) \geqslant \varepsilon$ при всех $g \in \overline{M}^{*}$. По теореме Ха́на–Ба́наха существует $\beta \in \boldsymbol{E}''$, т.ч. $\beta|_H = \alpha$ и $|\beta(g)| \leqslant \boldsymbol{p}(g)/\varepsilon$ при всех $g \in \boldsymbol{E}'$. Поскольку $\boldsymbol{p}(g)$ слабо* непрерывна, то функционал $\beta \in \boldsymbol{E}''$ слабо* непрерывен. Поэтому существует $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\beta = \delta_x$. Следовательно, т.к. $\beta|_M = 0$, то $x \in M_{\perp}$ и $\delta_x(f) = f(x) = 1$. Значит $f \notin (M_{\perp})^{\perp}$. $\square$

Следствие. *Слабое замыкание любого линейного подпространства $L \subset \boldsymbol{E}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ совпадает с его замыканием $\overline{L}$.*

В самом деле, по теореме замыкание $\overline{L} = (L^{\perp})_{\perp} = \bigcap_{f \in L^{\perp}} \ker f$ есть пересечение слабо замкнутых подпространств $\ker f$ и значит будет слабо замкнутым.

Определение. Пусть $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ заданный линейный оператор, определенный в нормированных пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Линейный оператор $A' : \boldsymbol{F}' \to \boldsymbol{E}'$ называется *сопряженным* к A, если $A'f = g$, где $f \in \boldsymbol{F}'$ и $g(x) = f(Ax)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Естественная область определения $\mathrm{dom} A'$ сопряженного оператора A' состоит из функционалов $f \in \boldsymbol{F}'$, т.ч. функционал $g(x) = f(Ax)$ принадлежит $\boldsymbol{E}'$. Обозначая значение функционала скобкой, имеем равенство $\langle A'f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

1. *Если линейный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ ограничен, то сопряженный оператор $A' \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{E}')$ является линейным и ограниченным и его норма $\|A'\| = \|A\|$.*

Докажем, что A' является линейным оператором. Пусть $f,g \in \boldsymbol{F}'$ и $A'(f+g)=h$. Тогда имеем $h(x)=(f+g)(Ax)=f(Ax)+g(Ax)$, т.е. $A'(f+g)=A'f+A'g$. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $A'(\lambda f)=h$, тогда получим $h(x)=(\lambda f)(Ax)=\lambda f(Ax)$, т.е. $A'(\lambda f)=\lambda A'f$.

Так как $|A'f(x)|=|f(Ax)|\leqslant \|f\|\,\|Ax\|\leqslant \|f\|\,\|A\|\,\|x\|$, то $\|A'f\|\leqslant \|f\,\|A\|$. Поэтому $\|A'\|\leqslant \|A\|$. С другой стороны, для каждого $x\in \boldsymbol{E}$ в силу следствия из теоремы Ха́на–Ба́наха существует функционал $f\in \boldsymbol{F}'$, т.ч. $f(Ax)=\|Ax\|$ и $\|f\|=1$. Поэтому $\|Ax\|=f(Ax)=A'f(x)\leqslant \|A'f\|\,\|x\|\leqslant \|A'\|\,\|x\|$ и значит $\|A'\|=\|A\|$.

2. *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ банаховы пространства и естественная область определения* $\mathrm{dom}A'$ *тотальна в $\boldsymbol{F}'$, то операторы $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $A'\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F}',\boldsymbol{E}')$ ограничены.*

По теореме о замкнутом графике достаточно показать, что график $\mathrm{gr}A$ замкнут. В самом деле, пусть $x_n\to x$, $Ax_n\to y$ и $f\in\mathrm{dom}A'$. Тогда мы получим $f(Ax_n)\to f(y)$ в силу непрерывности $f\in\boldsymbol{F}'$ и $fA(x_n)\to fA(x)$ в силу непрерывности $fA\in\boldsymbol{E}'$. Так как $f(y)=f(Ax)$ при всех $f\in\mathrm{dom}A'$, то из тотальности следует $y=Ax$.

3. *Если операторы $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ ограничены, то $(BA)'=A'B'$. В частности, если оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обратимый, то $(A^{-1})'=(A')^{-1}$.*

В самом деле, $(BA)'g(x)=g(BAx)=B'g(Ax)=A'B'g(x)$ при $g\in\boldsymbol{G}'$ и $x\in\boldsymbol{E}$. Второе утверждение следует из определения обратимого оператора $A^{-1}\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, т.к. если $AA^{-1}=A^{-1}A=\boldsymbol{I}$, то по доказанному $(A^{-1})'A'=A'(A^{-1})'=\boldsymbol{I}$.

Лемма (соотношения ядра и образа оператора)**.** *Если $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то*

$$\ker A=(\mathrm{Im}A')_\perp,\ \ \ker A'=(\mathrm{Im}A)^\perp,\ \ (\ker A')_\perp=\overline{\mathrm{Im}A},\ \ (\ker A)^\perp=\overline{\mathrm{Im}A'}^{*}.$$

где $\overline{\mathrm{Im}A}$ замыкание образа $\mathrm{Im}A$*, а $\overline{\mathrm{Im}A'}^{*}$ слабое* замыкание образа* $\mathrm{Im}A'$.

Доказательство. Если $x\in\boldsymbol{E}$ по следствию теоремы Ха́на–Ба́наха найдется $f\in\boldsymbol{F}'$, т.ч. $f(Ax)=\|Ax\|$ и $\|f\|=1$. Отсюда $x\in\ker A$ тогда и только тогда, когда имеет место $A'f(x)=f(Ax)=0$ при всех $f\in\boldsymbol{F}'$, что равносильно включению $x\in(\mathrm{Im}A')_\perp$. Поэтому первое равенство доказано. Для доказательства второго имеем $f\in\ker A'$ тогда и только тогда, когда $A'f(x)=f(Ax)=0$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, что равносильно включению $f\in(\mathrm{Im}A)^\perp$. Таким образом, второе равенство доказано.

Для доказательства третьего и четвертого равенств достаточно применить лемму о бианнуляторах соответственно ко второму и первому равенству. В самом деле, имеем $(\ker A')_\perp=(\mathrm{Im}A^\perp)_\perp=\overline{\mathrm{Im}A}$ и $(\ker A)^\perp=(\mathrm{Im}A'_\perp)^\perp=\overline{\mathrm{Im}A'}^{*}$. □

Теорема. *Если оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, заданный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, имеет замкнутый образ $\mathrm{Im}A\subset\boldsymbol{F}$, то $(\ker A')_\perp=\mathrm{Im}A$ и $(\ker A)^\perp=\mathrm{Im}A'$.*

Доказательство. Первое равенство вытекает из леммы. Докажем второе. Ясно, что $\mathrm{Im}A'\subset(\ker A)^\perp$. Если $f\in(\ker A)^\perp$, то $\ker A\subset\ker f$. Применяя теорему о трех гомоморфизмах к оператору A и функционалу f , построим функционал $g\in(\mathrm{Im}A)'$, т.ч. $f(x)=g(A(x))$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, а затем продолжим этот функционал на все пространство $\boldsymbol{F}$ по теореме Ха́на–Ба́наха. Тогда функционал $f=A'g\in\mathrm{Im}A'$ и, следовательно, имеет место равенство $\mathrm{Im}A'=(\ker A)^\perp$. □

Определение. Пусть $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ заданный линейный оператор в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Оператор $A^* : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ называется *эрмитово-сопряженным* к A, если $A^*y = z$ и имеет место равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$.

Естественная область определения $\mathrm{dom} A^*$ эрмитово-сопряженного оператора A^* состоит из всех $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. существует $z \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Существование такого элемента $z \in \boldsymbol{H}$ в силу теоремы Ри́сса–Фреше́ равносильно тому, что функционал $\alpha(x) \doteqdot \langle Ax, y\rangle$, заданный в $\boldsymbol{H}$, является ограниченным.

1. *Эрмитово-сопряженный оператор является линейным.*

Если равенства $\langle Ax, y_1\rangle = \langle x, z_1\rangle$ и $\langle Ax, y_2\rangle = \langle x, z_2\rangle$ выполняются при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то равенство $\langle Ax, y_1 + y_2\rangle = \langle x, z_1 + z_2\rangle$ имеет место при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Отсюда следует, что $A^*(y_1 + y_2) = A^*y_1 + A^*y_2$. Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ выполняется при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то $\langle Ax, \lambda y\rangle = \langle x, \lambda z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Поэтому $A^*(\lambda y) = \lambda A^* y$.

2. *Эрмитово-сопряженный оператор является замкнутым.*

Определим в прямом произведении $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ оператор $U(x, y) = (-y, x)$ и скалярное произведение $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle \doteqdot \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle$. Тогда равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ равносильно соотношению ортогональности $U(x, Ax) \perp (y, A^*y)$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Поэтому график $\mathrm{gr} A^* = (U\,\mathrm{gr} A)^\perp$ является замкнутым.

3. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ ограничен, то эрмитово-сопряженный оператор $A^* \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ является ограниченным и его норма $\|A^*\| = \|A\|$.*

Рассмотрим линейный функционал $\alpha(x) \doteqdot \langle Ax, y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем $|\alpha(x)| \leqslant \|Ax\|\,\|y\| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$. Поэтому норма функционала $\|\alpha\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Отсюда по теореме Ри́сса–Фреше́ существует $z \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x) = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|z\| = \|\alpha\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Так как $A^*y = z$, то $\|A^*y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$, т.е. $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Поскольку $\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то A^{**} совпадает с A. Отсюда $\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|$ и значит $\|A\| = \|A^*\|$.

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{H}$ называется *симметрическим*, если область определения $\boldsymbol{L}$ всюду плотна в $\boldsymbol{H}$ и $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ при всех $x, y \in \boldsymbol{L}$.

Линейный оператор $A : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{H}$ называется *самосопряженным*, если он является симметрическим и область определения A совпадает с областью определения A^*.

Линейный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ называется *эрмитовым*, если $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ при всех $x, y \in \boldsymbol{H}$, и обозначается через $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$.

Из определения следует, что самосопряженный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, заданный на всем гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, является эрмитовым и наоборот.

Теорема (Хе́ллингера–Тёплица). *Каждый эрми́товый оператор $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ является ограниченным, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$.*

Доказательство. Если оператор $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ является эрмитовым, то выполняется равенство $A = A^*$. Поскольку по свойству 2 оператор A^* замкнут, то по теореме о замкнутом графике оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ является ограниченным. $\square$

Построение теории голоморфных функций $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$, определенных в области Ω комплексной плоскости со значениями в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{C}$, опирается на понятие криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл от непрерывной функции $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ по непрерывной спрямляемой кривой $\gamma\colon[a,b]\to\Omega$, т.е. $\gamma\in\boldsymbol{C}[a,b]\cap\boldsymbol{BV}[a,b]$, определяется следующими равенствами:

$$\alpha\Bigl(\oint_\gamma f(z)\,dz\Bigr)=\oint_\gamma \alpha f(z)\,dz=\int_a^b \alpha f(\gamma(t))\,d\gamma(t)\ \text{ при всех }\ \alpha\in\boldsymbol{E}'.$$

Так как аналогичное равенство верно для интегральных сумм Римана–Стилтьеса и интеграл есть слабый предел таких сумм, то в силу тотальности сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$ интеграл $\oint_\gamma f(z)\,dz\in\boldsymbol{E}$ определен однозначно в $\boldsymbol{E}$.

Определение. Функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$, определенная в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *сильно голоморфной*, если для каждого $z\in\Omega$ существует предел $\lim_{h\to0}\bigl(f(z+h)-f(z)\bigr)/h=f'(z)$ по норме пространства $\boldsymbol{E}$.

Функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$, определенная в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *слабо голоморфной*, если для каждого функционала $\alpha\in\boldsymbol{E}'$ функция $\alpha f:\Omega\to\mathbb{C}$ голоморфна в области Ω в обычном смысле.

Теорема (Данфорда)**.** *Функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае сильно голоморфна в области $\Omega\subset\mathbb{C}$, когда она является слабо голоморфной.*

Доказательство. Необходимость. Если функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ сильно голоморфна в области Ω, то в силу непрерывности функционала $\alpha\in\boldsymbol{E}'$ имеет место равенство $\lim_{h\to0}\bigl(\alpha f(z+h)-\alpha f(z)\bigr)/h=(\alpha\cdot f)'(z)$ при всех $z\in\Omega$. Следовательно, из сильной голоморфности следует слабая голоморфность.

Достаточность. Пусть окружность $\gamma\subset\Omega$ ограничивает некоторую область в Ω, содержащую замкнутый круг $\boldsymbol{S}_r(z)\Subset\Omega$. Если обозначить $\Delta_h f(z)\doteqdot f(z+h)-f(z)$, то по формуле Коши́ для голоморфной функции $g(z)=\alpha f(z)$ получим

$$\alpha\bigl(\Delta_h f(z)/h\bigr)=\Delta_h g(z)/h=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-h)}\,d\zeta\,,\quad\text{где }\ z+h\in\boldsymbol{S}_r(z)\,.$$

Для любого $\alpha\in\boldsymbol{E}'$ правая часть следующего равенства равномерно ограничена

$$\alpha\Bigl(\frac{\Delta_{h_1}f(z)/h_1-\Delta_{h_2}f(z)/h_2}{h_1-h_2}\Bigr)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-h_1)(\zeta-z-h_2)}\,d\zeta$$

при $z+h_1,z+h_2\in\boldsymbol{S}_r(z)$. Значит функция в скобках является слабо ограниченной и по принципу равномерной ограниченности будет сильно ограниченной, т.е. имеем $\|\Delta_{h_1}f(z)/h_1-\Delta_{h_2}f(z)/h_2\|\leqslant c\,|h_1-h_2|$ при всех $z+h_1,z+h_2\in\boldsymbol{S}_r(z)$. В силу полноты пространства $\boldsymbol{E}$ существует предел $\lim_{h\to0}\Delta_h f(z)/h=f'(z)$ при всех $z\in\Omega$. □

Далее функции сильно и слабо голоморфные будем называть голоморфными.

1. *Если функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ голоморфна в ограниченной области Ω, непрерывна в ее замыкании $\overline{\Omega}$, а ее граница $\partial\Omega$ состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких жордановых кривых, то интеграл по границе $\oint_{\partial\Omega}f(z)\,dz=0$.*

В силу непрерывности функции в замыкании области $\overline{\Omega}$ существует интеграл от функции по границе этой области $\partial\Omega$. Поэтому по определению интеграла от функции со значениями в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и по теореме Коши

$$\alpha\Big(\oint_{\partial\Omega} f(z)\,dz\Big) = \oint_{\partial\Omega} \alpha\cdot f(z)\,dz = 0 \text{ для любого } \alpha\in\boldsymbol{E}'.$$

Тогда в силу тотальности сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$ интеграл $\oint_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$. Таким образом, справедлива *обобщенная теорема Коши́*.

2. *Если функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ удовлетворяет условиям предыдущего свойства, то справедлива обобщенная интегральная формула Коши́*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,, \quad z\in\Omega.$$

Пусть $\Omega_r \doteqdot \Omega\setminus D_r(z)$, где $D_r(z)$ замкнутый круг радиуса $r>0$ с центром в точке z, содержащийся в области Ω. Функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ является голоморфной в области Ω_r и непрерывная в ее замыкании $\overline{\Omega_r}$. Так как граница $\gamma_r = \partial D_r(z)$ ориентирована в области Ω_r по часовой стрелки, то по обобщенной теореме Коши́

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = 0.$$

В силу непрерывности $f(z)$ для любого $\varepsilon>0$ найдется $r>0$, т.ч. $\|f(\zeta)-f(z)\|<\varepsilon$ при всех $|\zeta - z| = r$. Тогда, поскольку $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta = 1$, то мы получим

$$\Big\|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - f(z)\Big\| = \Big\|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\Big\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_r}\frac{\|f(\zeta)-f(z)\|}{|\zeta-z|}\,|d\zeta| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $r\to 0$, имеем обобщенную интегральную формулу Коши́.

3. *Если функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ голоморфная в области Ω, то для всякой точке $z_0\in\Omega$ ряд Те́йлора функции f сходится равномерно в каждом круге $D_r(z_0)$ с центром в точке z_0, целиком лежащим внутри области Ω, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n, \quad \textit{где}\ c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \ \textit{ и }\ \gamma_r = \partial D_r(z_0).$$

Чтобы получить это разложение в ряд Те́йлора, разложим ядро интегральной формулы Коши́ в геометрическую прогрессию по степеням $(z-z_0)^n$, т.е.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-z_0)\big(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\big)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

Далее умножим это выражение на $f(\zeta)/2\pi i$, а затем проинтегрируем почленно по $\zeta\in\gamma_r$. Так как $|z-z_0|/r = q < 1$, то прогрессия сходится абсолютно и равномерно по $\zeta\in\gamma_r$. Равномерность не нарушится при умножении на непрерывную функцию. Поэтому почленное интегрирование законно и мы получим указанную формулу.

9 СПЕКТР ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Закончим построение теории голоморфных функций со значениями в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{C}$, которое мы начали в конце предыдущей лекции.

1. *Если функция $f:\mathbb{C}\to\boldsymbol{E}$ голоморфная во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена по норме, то она является константой.*

По доказанному ранее функция разлагается в степенной ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$. Пусть γ_r окружность радиуса $r>0$ с центром в нуле и $\boldsymbol{S}_1'$ единичный шар в $\boldsymbol{E}'$ с центром в нуле. Так как по следствию теоремы Xáна–Бáнаха $\|x\|=\sup_{\alpha\in\boldsymbol{S}_1'}|\alpha(x)|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и функция ограничена $\|f(z)\|\leqslant c$, то для любого $r>0$

$$\|c_n\|=\sup_{\alpha\in\boldsymbol{S}_1'}|\alpha(c_n)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sup_{\alpha\in\boldsymbol{S}_1'}\oint_{\gamma_r}\frac{|\alpha(f(\zeta))|}{|\zeta^{n+1}|}|d\zeta|\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_r}\frac{\|f(\zeta)\|}{|\zeta|^{n+1}}|d\zeta|\leqslant\frac{c}{r^n}.$$

Переходя к пределу при $r\to\infty$, мы получим $c_n=0$ при всех $n\neq0$. Таким образом, имеет место *обобщенная теорема Лиувúлля.*

2. *Радиус сходимости степенного ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ вычисляется по обобщенной формуле Кошú–Адамáра $1/r=\overline{\lim}\sqrt[n]{\|c_n\|}$.*

В самом деле, рассмотрим случай конечного $r\neq0$. Пусть $|z-z_0|<1/\overline{\lim}\sqrt[n]{\|c_n\|}$. Это неравенство мы перепишем в виде $\overline{\lim}\sqrt[n]{|z-z_0|^n\|c_n\|}<1$. Откуда на основании признака Кошú вытекает сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\|c_n\|\,|z-z_0|^n$ и значит указанный ряд сходится по норме $\boldsymbol{E}$. С другой стороны, если $|z-z_0|>1/\overline{\lim}\sqrt[n]{\|c_n\|}$, то мы имеем $\overline{\lim}\sqrt[n]{|z-z_0|^n\|c_n\|}>1$. Поэтому величина $|z-z_0|^n\|c_n\|\nrightarrow0$ не стремится к нулю и значит общий член ряда не стремится к нулю, т.е. ряд расходится. Случаи $r=0,\infty$ рассматриваются аналогично. При этом в случае $r=\infty$ ряд $f(z)$ сходится во всей комплексной плоскости, а в случае $r=0$ только в точке z_0.

3. *Степенной ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ представляет собой голоморфную функцию внутри круга сходимости радиуса $r=1/\overline{\lim}\sqrt[n]{\|c_n\|}$.*

Действительно, для любого $\alpha\in\boldsymbol{E}'$, $\alpha\neq0$, радиус сходимости степенного ряда $\alpha f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha(c_n)(z-z_0)^n$ не меньше радиуса сходимости исходного ряда, так как имеет место неравенство $\overline{\lim}\sqrt[n]{|\alpha(c_n)|}\leqslant\overline{\lim}\sqrt[n]{\|\alpha\|\,\|c_n\|}=\overline{\lim}\sqrt[n]{\|c_n\|}$. Поэтому $\alpha f(z)$ является голоморфной функцией внутри круга сходимости ряда $f(z)$. По теореме Дáнфорда функция f будет голоморфной внутри своего круга сходимости.

Через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})\doteqdot\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$, действующих в бáнаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{C}$.

Определение. $\lambda\in\mathbb{C}$ называется *регулярным числом* оператора $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если существует обратный оператор A_λ^{-1} к оператору $A_\lambda\doteqdot\lambda I-A$. Множество $\rho(A)$ всех регулярных чисел называется *резольвентным множеством*. Дополнительное множество $\sigma(A)\doteqdot\mathbb{C}\setminus\rho(A)$ называется *спектром* оператора A. Обратный оператор $R_\lambda\doteqdot A_\lambda^{-1}$ при всех $\lambda\in\rho(A)$ называется *резольвентой* оператора A.

Так как оператор $A_\lambda \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то в силу теоремы Ба́наха об обратном операторе резольвента $R_\lambda = A_\lambda^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ также будет ограниченным оператором при всех $\lambda \in \rho(A)$. Далее мы докажем, что резольвентное множество $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ является открытым множеством комплексной плоскости, а резольвента R_λ образует голоморфную функцию в каждой связной компоненте $\rho(A)$. Этот факт позволяет использовать при изучении спектра оператора комплексный анализ и таким способом получать информацию о заданном операторе A.

Лемма. *Если $\|A\| < 1$, то оператор $B \doteqdot I - A$ имеет обратный $B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Доказательство. Пусть $C_n \doteqdot \sum_{k=0}^{n} A^k$ и $\|A\| = r < 1$. Так как $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$, то по неравенству треугольника имеем $\|C_m - C_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|A\|^k < r^{n+1}/(1-r)$. Поэтому $\{C_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́наховом пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Тогда существует предел $\lim C_n \doteqdot C \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Так как $\lim A^{n+1} = 0$, то из равенства

$$BC = \lim BC_n = \lim \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \lim (I - A^{n+1}) = I$$

следует $BC = I$. Аналогично $CB = I$, т.е. $C = B^{-1}$ является обратным к B. □

Теорема (о резольвенте)**.** *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то множество $\rho(A)$ открыто, резольвента R_λ является голоморфной функцией параметра $\lambda \in \rho(A)$ и удовлетворяет уравнению $R_\lambda - R_{\lambda_0} = -(\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}$. При этом ее норма удовлетворяет неравенству $d_\lambda \geqslant \|R_\lambda\|^{-1}$, где $d_\lambda \doteqdot \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda - z|$ обозначает расстояние от точки $\lambda \in \rho(A)$ до спектра $\sigma(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(A)$, тогда $A_z = A_\lambda - (\lambda - z)I = A_\lambda (I - (\lambda - z)R_\lambda)$. Если $|z - \lambda|\,\|R_\lambda\| < 1$, то по лемме получим $R_z = (I - (\lambda - z)R_\lambda)^{-1} R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - z)^n R_\lambda^{n+1}$ сходящийся ряд в силу полноты пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Следовательно, круг радиуса $r = \|R_\lambda\|^{-1}$ с центором в точке λ содержится в резольвентном множестве. Отсюда множество $\rho(A)$ открыто и функция R_λ является голоморфной на множестве $\rho(A)$. Для доказательства резольвентного уравнения Ги́льберта имеем равенство

$$R_\lambda = R_\lambda A_{\lambda_0} R_{\lambda_0} = R_\lambda A_\lambda R_{\lambda_0} - R_\lambda (A_\lambda - A_{\lambda_0}) R_{\lambda_0} = R_{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}.$$

Кроме того, поскольку по доказанному выполняется неравенство $|\lambda - z| \geqslant \|R_\lambda\|^{-1}$ при всех $z \in \sigma(A)$, т.е. имеет место неравенство $d_\lambda \geqslant \|R_\lambda\|^{-1}$. □

Теорема (о спектре)**.** *Спектр ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является непустым, замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы резольвентное множество $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ будет открытым, а спектр $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ замкнут. Если число $|\lambda| > \|A\|$, то, применяя лемму, получим разложение $R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$. Следовательно, резольвента $R_\lambda \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным оператором при всех $|\lambda| > \|A\|$ и, кроме того, ее норма $\|R_\lambda\| \to 0$ стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

Поэтому спектр $\sigma(A)$ находится в круге радиуса $\|A\|$ центром в нуле. Если спектр $\sigma(A) = \emptyset$ является пустым множеством, то по предыдущей теореме резольвента R_λ является голоморфной функцией во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда по обобщенной теореме Лиувилля $R_\lambda = 0$, что невозможно. $\square$

Теорема (о спектральном радиусе). *Спектральный радиус* $r(A) \doteq \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$ *ограниченного оператора* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ *вычисляется по формуле* $r(A) = \lim \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Доказательство. Пусть число $\lambda \in \sigma(A)$ принадлежит спектру оператора A. Так как по теореме Безу́ $\lambda^n - z^n = (\lambda - z)P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$, то выполняются равенства $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)P_{n-1}(A) = P_{n-1}(A)(\lambda I - A)$. Если оператор $\lambda^n I - A^n$ является обратимым, то, умножая указанное равенство справа и слева на его обратный, мы получим, что оператор $\lambda I - A$ обратим. Поскольку это противоречит нашему предположению, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$. Отсюда $|\lambda|^n \leqslant \|A^n\|$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, имеет место неравенство $r(A) \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

С другой стороны, ранее было получено разложение $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$ при всех $|\lambda| > \|A\|$. Радиус сходимости этого ряда Лора́на в бесконечности вычисляется по формуле Коши́–Адама́ра и равен $r \doteq \overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Поэтому ряд $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$ сходится при всех $|\lambda| > r$. Отсюда имеем $r = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} < |\lambda|$ при всех $|\lambda| > r(A)$, т.е. выполняется неравенство $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A)$. Таким образом, существует предел $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$ и равен спектральному радиусу $r(A)$. $\square$

Свойства спектра сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

1. *Если* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ *ограниченный оператор, то резольвента для сопряженного оператора* $R_\lambda(A') = R'_\lambda(A)$ *при всех* $\lambda \in \rho(A)$ *и спектр* $\sigma(A') = \sigma(A)$.

Поскольку $\langle (A_\lambda)'\alpha, x\rangle = \langle \alpha, A_\lambda x\rangle = \langle (A')_\lambda \alpha, x\rangle$ при $\alpha \in \boldsymbol{E}'$ и $x \in \boldsymbol{E}$, то $(A_\lambda)' = (A')_\lambda$. Используя известное нам свойство обратимого оператора $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, получим $R'_\lambda(A) = (A_\lambda^{-1})' = ((A_\lambda)')^{-1} = ((A')_\lambda)^{-1} = R_\lambda(A')$. Отсюда следует $\rho(A') = \rho(A)$.

2. *Если* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ *ограниченный оператор в гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{H}$, *то резольвента эрмитово-сопряженного оператора* $R_{\bar\lambda}(A^*) = R^*_\lambda(A)$ *при* $\lambda \in \rho(A)$ *и спектр* $\sigma(A^*) = \overline{\sigma}(A)$ *равен комплексно-сопряженному спектру оператора* A.

По определению эрмитово-сопряженного оператора $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$. Поэтому

$$\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle \lambda x - Ax, y\rangle = \langle x, \bar\lambda y - A^*y\rangle = \langle x, (A^*)_{\bar\lambda}\, y\rangle, \text{ т.е. } (A_\lambda)^* = (A^*)_{\bar\lambda}.$$

Тогда $R^*_\lambda(A) = (A_\lambda^{-1})^* = ((A_\lambda)^*)^{-1} = (A^*_{\bar\lambda})^{-1} = R_{\bar\lambda}(A^*)$ при $\lambda \in \rho(A)$ и $\rho(A^*) = \overline{\rho}(A)$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным числом* для оператора A, если существует $e \in \boldsymbol{E}\setminus 0$, т.ч. $Ae = \lambda e$. Следующие множества называются

$\sigma_p(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$ точечным спектром оператора A;

$\sigma_c(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda \neq \boldsymbol{E}, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \boldsymbol{E}\}$ непрерывным спектром A;

$\sigma_r(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}$ остаточным спектром оператора A.

Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то в силу теоремы Ба́наха об обратном операторе имеет место равенство $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$. Эти три множества составляют *структуру спектра* оператора A.

Число $\lambda \in \sigma_p(A)$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение $A_\lambda x = 0$ имеет ненулевое решение, т.е. λ является собственным числом для оператора A. Число $\lambda \in \sigma_c(A)$ тогда и только тогда, когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ будет плотно разрешимым, т.е. существует единственное решение для всюду плотного множества элементов $y \in \boldsymbol{E}$. Число $\lambda \in \sigma_r(A)$ тогда и только тогда , когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ не является плотно разрешимым, т.е. существует единственное решение для множества элементов $y \in \boldsymbol{E}$, которое не является всюду плотным.

Для того чтобы линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы $\ker A = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{E}$. При этом условие $\ker A = 0$ равносильно существованию левого обратного $B : \operatorname{Im} A \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $BA = I$, а условие $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{E}$ равносильно существованию правого обратного $C : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $AC = I$.

Лемма. *Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ в банаховом пространстве имеет ограниченный левый обратный оператор $B \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} A, \boldsymbol{E})$, в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих условий:*

a) *оператор A ограничен снизу, т.е. $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| > 0$;*

b) *ядро $\ker A = 0$ и образ $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым.*

Доказательство. Если $B \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} A, \boldsymbol{E})$ левый обратный, то $\|x\| = \|BAx\| \leqslant \|B\| \|Ax\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|B\|^{-1} > 0$. Предположим теперь, что $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, где $c > 0$. Если $y_n = Ax_n \to y$ сходится, то $\|x_n - x_m\| \leqslant \|y_n - y_m\|/c \to 0$. Отсюда $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́нaховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и существует предел $\lim x_n = x$. В силу непрерывности оператора $Ax = y \in \operatorname{Im} A$. Таким образом, оператор имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} A$ и его ядро $\ker A = 0$. По теореме Ба́наха об обратном операторе существует $B \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} A, \boldsymbol{E})$, т.ч. $BA = I$. □

Определение. $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *полурегулярным* числом оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ имеет ограниченный левый обратный $B_\lambda \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, \boldsymbol{E})$. Множество полурегулярных чисел обозначается через $\rho_l(A)$, а его дополнительное множество $\sigma_l(A) = \mathbb{C} \setminus \rho_l(A)$ называется *предельным спектром* оператора A.

Так как по определению, если $\lambda \in \sigma_l(A)$, то оператор A_λ не имеет ограниченного обратного оператора и значит $\sigma_l(A) \subset \sigma(A)$. При этом в силу леммы *предельный спектр* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ совпадает с множеством

$$\sigma_l(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}.$$

Дополнительное множество $\sigma_d(A) \doteqdot \sigma(A) \setminus \sigma_l(A)$ называют *дефектным спектром*. Из леммы получаем, что дефектный спектр содержится в остаточном спектре

$$\sigma_d(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda = \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\} \subset \sigma_r(A)$$

В самом деле, если $\lambda \notin \sigma_l(A)$, то $\lambda \in \rho_l(A)$ и, как показано в лемме, ядро будет равно $\ker A_\lambda = 0$, а образ $\mathrm{Im} A_\lambda$ является замкнутым, т.е. $\overline{\mathrm{Im} A_\lambda} = \mathrm{Im} A_\lambda$.

Число $\lambda \in \rho_l(A)$ тогда и только тогда является полурегулярным, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *корректно разрешимо*, т.е. существует ограниченный обратный оператор $B_\lambda : \mathrm{Im} A_\lambda \to \boldsymbol{E}$ на подпространстве $\mathrm{Im} A_\lambda$. Поэтому $\lambda \in \sigma_l(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ не является корректно разрешимым.

Теорема (о границе спектра). *Пусть $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ ограниченный оператор. Тогда граница спектра $\partial\sigma(A)$ содержится в предельном спектре $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \partial\sigma(A)$, то существует $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, т.ч. $\lambda_n \to \lambda$. Тогда имеем $d_{\lambda_n} \doteqdot \inf_{z\in\sigma(A)} |\lambda_n - z| \leqslant |\lambda_n - \lambda| \to 0$. Так как $A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = I$, то имеет место

$$A_\lambda R_{\lambda_n} = (\lambda - \lambda_n) R_{\lambda_n} + A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = (\lambda - \lambda_n) R_{\lambda_n} + I.$$

По определению нормы оператора R_{λ_n} существует последовательность $\{y_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|R_{\lambda_n} y_n\| > \|R_{\lambda_n}\|/2$. Поэтому, полагая $x_n \doteqdot R_{\lambda_n} y_n / \|R_{\lambda_n} y_n\|$ и применяя указанное выше соотношение, получим следующее равенство:

$$A_\lambda x_n = A_\lambda R_{\lambda_n}\big(y_n/\|R_{\lambda_n} y_n\|\big) = (\lambda - \lambda_n) x_n + y_n/\|R_{\lambda_n} y_n\|.$$

Поскольку $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и по теореме о резольвенте $\|R_{\lambda_n} y_n\| > \|R_{\lambda_n}\|/2 \geqslant 1/2d_{\lambda_n}$, то $\|A_\lambda x_n\| \leqslant |\lambda - \lambda_n| + 2d_{\lambda_n} \leqslant 3|\lambda - \lambda_n| \to 0$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_l(A)$. $\square$

Теорема (об отображении спектра). *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ ограниченный оператор и $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ многочлен с коэффициентами $a_k \in \mathbb{C}$, то $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $a_n \neq 0$. Уравнение $\lambda - P(z)$ имеет n решений с учетом кратности, т.е. $\lambda - P(z) = (-1)^{n+1} a_n (\lambda_1 - z) \ldots (\lambda_n - z)$. Следовательно, имеем

$$\lambda I - P(A) = (-1)^{n+1} a_n (\lambda_1 I - A) \ldots (\lambda_n I - A).$$

Если оператор $\lambda I - P(A)$ обратим, то умножая это равенство справа и слева на обратный оператор, получим, что операторы $\lambda_k I - A$ обратимы при всех $1 \leqslant k \leqslant n$, так как они коммутируют. Наоборот, из обратимости операторов $\lambda_k I - A$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$ следует обратимость оператора $\lambda I - P(A)$. Следовательно, $\lambda \in \rho(P(A))$ в том и только в том случае, когда $\lambda_k \in \rho(A)$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$.

Поэтому $\lambda \in \sigma(P(A))$ тогда и только тогда, когда существует k, т.ч. $\lambda_k \in \sigma(A)$. Последнее условие равносильно тому, что выполняется $\lambda \in P(\sigma(A))$. В самом деле, если такое k существует, то $\lambda = P(\lambda_k) \in P(\sigma(A))$. Наоборот, если $\lambda \in P(\sigma(A))$, то $\lambda = P(z)$ при некотором $z \in \sigma(A)$, т.е. $z = \lambda_k \in \sigma(A)$ при некотором $1 \leqslant k \leqslant n$. $\square$

10 КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *компактным*, если образ $A(M) \subset \boldsymbol{E}$ каждого ограниченного множества $M \subset \boldsymbol{E}$ является предкомпактным. Далее через $\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ обозначается множество всех компактных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$.

1. *Оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ тогда и только тогда является компактным, когда образ $A(\boldsymbol{S}_1) \subset \boldsymbol{E}$ единичного шара $\boldsymbol{S}_1 \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ предкомпактный.*

В самом деле, необходимость следует из определения. Обратно, если множество $M \subset \boldsymbol{E}$ ограничено, то оно содержится в некотором шаре $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant r\}$. Так как $A(\boldsymbol{S}_r) = rA(\boldsymbol{S}_1)$ предкомпактно, то $A(M) \subset A(\boldsymbol{S}_r)$ также будет предкомпактным.

2. *Всякий компактный оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ ограничен, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$.*

Действительно, так как образ единичного шара $A(\boldsymbol{S}_1)$ является предкомпактным, то он будет ограниченным множеством и значит норма $\|A\| = \sup_{x \in \boldsymbol{S}_1} \|Ax\| < \infty$.

3. *Если $A, B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактны, то их сумма $A + B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактна.*

Действительно, пусть $\{x_n\} \subset \boldsymbol{S}_1$. Тогда существует $\{n_k\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to y \in \boldsymbol{F}$, и существует $\{n_{k_i}\}$, т.ч. $Bx_{n_{k_i}} \to z \in \boldsymbol{E}$. Отсюда $(A+B)x_{n_{k_i}} = Ax_{n_{k_i}} + Bx_{n_{k_i}} \to y + z \in \boldsymbol{E}$. Таким образом, множество $(A+B)(\boldsymbol{S}_1) \subset \boldsymbol{E}$ является предкомпактным.

4. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то операторы $AB, BA \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактны.*

Это следует из того, что всякий ограниченный оператор переводит ограниченные множества в ограниченные и предкомпактные множества в предкомпактные.

5. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $\dim(\mathrm{Im} A) < \infty$, то оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный.*

Поскольку оператор ограниченный, то $A(\boldsymbol{S}_1) \subset \mathrm{Im} A$ ограниченное множество в подпространстве $\mathrm{Im} A$ конечной размерности. Поэтому будет предкомпактным.

6. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный, то его образ $\mathrm{Im} A$ сепарабельный.*

Поскольку множество $A(\boldsymbol{S}_m)$ является предкомпактным, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует конечная $1/n$-сеть $\{y_{mnk}\}_{k=1}^{m_n}$ в множестве $A(\boldsymbol{S}_m)$. Взяв объединение этих сетей, получим счетное и всюду плотное множество в $\mathrm{Im} A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A(\boldsymbol{S}_m)$.

7. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный и $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то A не имеет ограниченного левого обратного и значит необратим.*

Если существует левый обратный $B \in \mathscr{L}(\mathrm{Im} A, \boldsymbol{E})$, то оператор $BA = I$ является компактным, что невозможно, т.к. единичный шар $\boldsymbol{S}_1 \subset \boldsymbol{E}$ в бесконечномерном нормированном пространстве не является предкомпактным.

8. *Если в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ последовательность операторов $A_n \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ сходится по норме к $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}$, то $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор.*

По условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется n, т.ч. $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon/2$ при всех $x \in \boldsymbol{S}_1$. Так как $A_n(\boldsymbol{S}_1)$ предкомпактно, то существует $\varepsilon/2$-сеть $\{y_k\}_{k=1}^m$ множества $A_n(\boldsymbol{S}_1)$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{S}_1$ найдется k, т.ч. $\|y_k - Ax\| \leqslant \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$, т.е. $\{y_k\}_{k=1}^m$ есть ε-сеть $A(\boldsymbol{S}_1)$. По теореме Ха́усдорфа $A(\boldsymbol{S}_1)$ предкомпактно.

Напомним, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит предельному спектру $\lambda \in \sigma_l(A)$, если $\inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0$, т.е. существуют $x_n \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \to 0$.

Лемма. *Если оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный и размерность $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то $\sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ и при любом $r > 0$ вне круга $D_r \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant r\}$ может находится лишь конечное число собственных значений оператора A.*

Доказательство. По определению $\sigma_p(A) \subset \sigma_l(A)$ и из свойства 7 имеем $0 \in \sigma_l(A)$. Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$ и $\lambda \neq 0$, тогда существуют $x_n \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \to 0$. В силу компактности A найдется $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to e \in \boldsymbol{E}$. Поскольку $\lambda x_{n_k} = A_\lambda x_{n_k} + Ax_{n_k}$, то $\lambda x_{n_k} \to e$. Из непрерывности оператора $A(\lambda x_{n_k}) \to Ae = \lambda e$, т.е. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Допустим, что существует последовательность $|\lambda_n| > r$ различных собственных значений. Пусть $\{e_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $Ae_n = \lambda_n e_n$, $\|e_n\| = 1$. Обозначим через $L_n = \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^n$ линейную оболочку. Так как $L_{n-1} \subset L_n$, то в силу леммы Рисса о почти перпендикуляре существуют $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Пусть $y_n \doteqdot c_n e_n + x_n$, где $x_n \in L_{n-1}$, тогда $Ay_n = \lambda_n c_n e_n + Ax_n = \lambda_n y_n - \lambda_n x_n + Ax_n$, где $\lambda_n x_n - Ax_n \in L_{n-1}$. Так как при $n > m$ элемент $\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m \in L_{n-1}$, то

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m)\| > |\lambda_n|/2 > r/2.$$

Таким образом, последовательность $\{Ay_n\} \subset A(\boldsymbol{S}_1)$ не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A. □

Теорема (Ри́сса–Ша́удера)**.** *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то его спектр $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ состоит из собственных значений и нуля, при этом его ненулевые собственные значения $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$ имеют конечную кратность $n_\lambda \doteqdot \dim E_\lambda$, где $E_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$.*

Доказательство. По лемме и теореме о границе спектра выполняется включение $\partial \sigma(A) \subset \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Так как вне круга D_r имеется лишь конечное число собственных значений $\lambda \in \sigma_p(A)$, то там нет других точек спектра. В самом деле, предположим, что область $\mathbb{C} \setminus D_r$ содержит точки спектра $\sigma(A)$, не являющиеся собственными значениями. Ясно, что существует прямая в этой области, идущая в бесконечность, содержащая точки спектра и не проходящая через собственные значения. Тогда последняя точка спектра на этой прямой будет граничной точкой спектра, т.е. собственным значением, что невозможно. Отсюда спектр компактного оператора совпадает предельным спектром $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Поскольку сужение оператора $A|_{E_\lambda} = \lambda I|_{E_\lambda}$ на собственное подпространство E_λ, соответствующее собственному значению $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$, является компактным и обратимым оператором, то по свойству 7 размерность $\dim E_\lambda < \infty$. □

Теорема (Ша́удера)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ банахово пространство и $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Для того чтобы этот оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ был компактным, необходимо и достаточно, чтобы его сопряженный $A' \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}')$ был компактным.*

Доказательство. Необходимость. По условию компактности оператора замкнутый образ единичного шара $K \doteqdot \overline{A(\boldsymbol{S}_1)}$ является компактным в $\boldsymbol{E}$. Обозначим через M множество непрерывных функций $f \in \boldsymbol{C}(K)$, т.ч. $f(y) \doteqdot \alpha(y)$ при всех $y \in K$, где $\alpha \in \boldsymbol{S}_1' \subset \boldsymbol{E}'$ линейный функционал с нормой $\|\alpha\| \leqslant 1$. Поскольку

$$\sup_{y\in K}|f(y)| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}_1}|\alpha(Ax)\| \leqslant \|A\| \text{ и } |f(y_1)-f(y_2)| = |\alpha(y_1-y_2)| \leqslant \|y_1-y_2\|,$$

то множество $M \subset \boldsymbol{C}(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Арцела́–Аско́ли множество M является предкомпактным. Заметим, что M изометрично образу $A'(\boldsymbol{S}_1')$ сопряженного единичного шара $\boldsymbol{S}_1'$, поскольку

$$\|A'\alpha\| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}_1}|A'\alpha(x)| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}_1}|\alpha(Ax)| = \sup_{y\in K}|f(y)| = \|f\|_C \text{ при всех } \alpha \in \boldsymbol{S}_1'.$$

Поэтому образ единичного шара $A'(\boldsymbol{S}_1')$ является предкомпактным $\boldsymbol{E}'$.

Достаточность. Если сопряженный оператор $A' \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}')$ компактный, то по доказанному оператор $A'' \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}'')$ будет компактным. Пусть $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}''$ обозначает каноническое вложение, а скобки обозначают значение функционала. Полагая, что $J(x) = \delta_x$, при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\alpha \in \boldsymbol{E}'$ получим следующие равенства:

$$\langle A''J(x), \alpha\rangle = \langle J(x), A'\alpha\rangle = \langle \delta_x, A'\alpha\rangle = \langle A'\alpha, x\rangle = \langle \alpha, Ax\rangle = \langle \delta_{Ax}, \alpha\rangle = \langle J(Ax), \alpha\rangle,$$

т.е. $A''J = JA$. Значит $JA(\boldsymbol{S}_1)) = A''J(\boldsymbol{S}_1) \subset A''(\boldsymbol{S}_1'')$. Так как $A''(\boldsymbol{S}_1'')$ предкомпактно, то $A(\boldsymbol{S}_1)$ предкомпактно в силу изометричности канонического вложения J. □

Определение. Линейный оператор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ называется *проектором* на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, если выполняются равенства $P^2 = P$ и $\operatorname{Im} P = L$.

Рассмотрим свойства проекторов P, заданных в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$.

1) Ограничение проектора на подпространство $L = \operatorname{Im} P$ является тождественным оператором $P|_L = I$. Действительно, если $y = Px$, то $Py = P^2x = Px = y$.

2) Справедливы равенства $\ker(I-P) = \operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Im}(I-P) = \ker P$. В самом деле, если $x \in \ker(I-P)$, то $x - Px = 0$, т.е. $x \in \operatorname{Im} P$. Если $y = Px \in \operatorname{Im} P$, то получаем $(I-P)y = (P-P^2)x = 0$, т.е. $y \in \ker(I-P)$. Аналогично, для второго равенства.

3) Пространство $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ является прямой суммой собственных подпространств проектора $L = \operatorname{Im} P$ и $M = \ker P$. Действительно, т.к. $I = P + (I-P)$, то $\boldsymbol{E} = L + M$. Если $y \in L \cap M$, то $y = Px = x - Px$, т.е. $x = 2Px$. Применяя к этому равенству P, получим $Px = 2Px$ и, следовательно, $y = Px = 0$.

Определение. Линейные подпространства L и M называются *дополнительными* в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, если они замкнуты и $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. При этом говорят, что L является *дополняемым* подпространством в $\boldsymbol{E}$.

Теорема (критерий дополняемости). *Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда является дополняемым в банаховом пространству $\boldsymbol{E}$, когда существует ограниченный проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L.*

Доказательство. Необходимость. Если $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ прямая сумма двух замкнутых подпространств L и M, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют единственные элементы $y \in L$ и $z \in M$, т.ч. $x = y + z$. Поэтому, полагая $Px \doteqdot y$, мы получим проектор P на подпространство $L = \operatorname{Im} P$. Если $x_n \to x$ и $Px_n = y_n \to y$, то $z_n = x_n - y_n \to z = x - y$. Так как $y \in L$ и $z \in M$ в силу замкнутости подпространств, то из единственности разложения $x = y + z$ вытекает $Px = y$. Следовательно, оператор P имеет замкнутый график и по теореме о замкнутом графике он является ограниченным.

Достаточность. Поскольку проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L является ограниченным, то $L = \operatorname{Im} P = \ker(I - P)$ и $M = \ker P = \operatorname{Im}(I - P)$ являются замкнутыми подпространствами. Так как $I = P + (I - P)$, то имеет место $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. $\square$

Лемма. *Замкнутые подпространства конечной размерности $n = \dim L$ или конечной коразмерности $m \doteqdot \dim \boldsymbol{E}/L$ являются дополняемыми.*

Доказательство. Выберем базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в подпространстве L, а затем определим $M \doteqdot \bigcap_{k=1}^n \ker \alpha_k$, где функционалы $\alpha_k \in \boldsymbol{E}'$ образуют сопряженную систему к $\{e_k\}_{k=1}^n$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим $y \doteqdot \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)\, e_k$ и $z \doteqdot x - y$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Рассмотрим базис $\{\widehat{e}_k\}_{k=1}^m$ для факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$, а затем обозначим через $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{E}$ найдутся $\lambda_k \in \mathbb{F}$, т.ч. $\widehat{x} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \widehat{e}_k$. Определим $z \doteqdot \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ и $y \doteqdot x - z$. Тогда $\widehat{y} = 0$ и значит $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. $\square$

Определение. Операторы $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F})$ называются (*изометрически*) *эквивалентными* и обозначают $A \sim B$ ($A \approx B$), если существует (изометрический) изоморфизм $T : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, т.ч. $BT = TA$. В случае, когда $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ будут гильбертовыми пространствами, операторы $A \approx B$ называются *унитарно эквивалентными*.

1. *Если операторы $A \sim B$ эквивалентны, то имеет место равенство спектров $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$, $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$, $\sigma_l(A) = \sigma_l(B)$, $\sigma_d(A) = \sigma_d(B)$.*

Поскольку $A_\lambda = \lambda I - A$, $B_\lambda = \lambda I - B$ и $BT = TA$, то $B_\lambda T = TA_\lambda$. Поэтому операторы $A_\lambda \sim B_\lambda$ эквивалентны. Следовательно, A_λ обратим тогда и только тогда, когда B_λ обратим. При этом имеют место равенства $\ker B_\lambda = T \ker A_\lambda$ и $\operatorname{Im} B_\lambda = T \operatorname{Im} A_\lambda$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Отсюда легко выводятся указанные равенства спектров, используя свойства изоморфизма отображения $T : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$.

2. *Если операторы $A \approx B$ изометрически эквивалентны, то, кроме выполнения равенство спектров, имеет место равенство норм $\|A\| = \|B\|$.*

В силу изометричности $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$. Поскольку $B = TAT^{-1}$ и $A = TBT^{-1}$, то имеют место неравенства $\|B\| \leqslant \|A\|$ и $\|A\| \leqslant \|B\|$. Откуда следует $\|A\| = \|B\|$.

Пример 1. Выясним структуру спектра оператора свертки $Af = K * f$ с функцией $K \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, определенного следующими формулами:

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\, f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} K(y)\, f(x-y)\, dy \quad \text{при всех } f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}).$$

Применяя обобщенное неравенство Минко́вского и замену переменных, получим

$$\|Af\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \int_{\mathbb{R}} \big|K(y)\big| \Big(\int_{\mathbb{R}} \big|f(x-y)\big|^2 dx \Big)^{1/2} dy = \|K\|_{\boldsymbol{L}_1} \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Отсюда $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}))$. В качестве унитарной эквивалентности возьмем преобразование Фурье́. Применяя формулу свертки для преобразования Фурье́, получим $\widehat{Af}(x) = a(x)\, \widehat{f}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$, где $a(x) \doteq \sqrt{2\pi}\, \widehat{K}(x)$. По лемме Ри́мана–Лебе́га функция $a(x)$ непрерывна и стремится к нулю $a(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Поэтому функцию $a(x)$ можно считать определенной на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ и непрерывной там, если положить $a(\pm\infty) \doteq 0$.

Пусть $\widehat{A} f(x) \doteq a(x)\, f(x)$ задает оператор умножения на непрерывную функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Поскольку оператор $\widehat{A}_\lambda f(x) = (\lambda - a(x))\, f(x)$, то резольвента $\widehat{R}_\lambda f(x) = f(x)/(\lambda - a(x))$. Так как резольвента будет ограниченным оператором в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда верхняя грань $\sup_{x\in\mathbb{R}} 1/|\lambda - a(x)|$ конечна, то спектр $\sigma(\widehat{A}) = a(\overline{\mathbb{R}})$, а поскольку операторы $A \approx \widehat{A}$ являются унитарно эквивалентными, то выполняются следующие свойства:

1) норма оператора $\|A\| = \|\widehat{A}\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |a(x)|$;

2) спектр оператора $\sigma(A) = \sigma(\widehat{A}) = a(\overline{\mathbb{R}}) \doteq \{\lambda = a(x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$;

3) точечный спектр $\sigma_p(A) = \sigma_p(\widehat{A}) = \{\lambda \in a(\overline{\mathbb{R}}) \mid \text{мера } \mu(a^{-1}(\lambda)) > 0\}$;

4) непрерывный спектр $\sigma_c(A) = \sigma_c(\widehat{A}) = \{\lambda \in a(\overline{\mathbb{R}}) \mid \text{мера } \mu(a^{-1}(\lambda)) = 0\}$;

5) предельный спектр $\sigma_l(A) = \sigma_l(\widehat{A}) = \sigma_p(\widehat{A}) \sqcup \sigma_c(\widehat{A}) = a(\overline{\mathbb{R}})$.

В самом деле, если мера $\mu(a^{-1}(\lambda)) > 0$ положительна, то функция $e(x) \doteq \chi_M(x)$, где $M \subset \varphi^{-1}(\lambda)$ множество положительной меры $\mu(M) > 0$, является собственной функцией оператора $\widehat{A}$, т.е. $\widehat{A} e(x) = \lambda e(x)$. Значит $\lambda \in \sigma_p(\widehat{A})$ собственное число.

Докажем теперь, что если $\mu(a^{-1}(\lambda)) = 0$, то замыкание образа $\overline{\operatorname{Im} \widehat{A}_\lambda} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим открытое множество $O_\varepsilon \doteq \{x \in \mathbb{R} \mid |\lambda - a(x)| < \varepsilon\}$, содержащее $a^{-1}(\lambda)$. Для каждой функции $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ определим следующую функцию: $f_\varepsilon(x) \doteq 0$ при всех $x \in O_\varepsilon$; $f_\varepsilon(x) \doteq f(x)/(\lambda - a(x))$ при всех $x \notin O_\varepsilon$. Так как $|f_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon |f(x)|$, то $f_\varepsilon \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебе́га получим

$$\|f - \widehat{A}_\lambda f_\varepsilon\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \int_{\mathbb{R}} \big|f(x) - (\lambda - a(x)) f_\varepsilon(x)\big|^2 dx = \int_{O_\varepsilon} |f(x)|^2 dx \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Поэтому $\lambda \in \sigma_c(\widehat{A})$ принадлежит непрерывному спектру $\widehat{A}$. Поскольку предельный спектр содержит точечный и непрерывный, то $\sigma_l(\widehat{A}) = \sigma_p(\widehat{A}) \sqcup \sigma_c(\widehat{A}) = \sigma(\widehat{A})$.

11 ФРЕДГО́ЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ банаховы пространства. Через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначается пространство ограниченных линейных операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})\doteqdot\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$, а через $\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ пространство компактных линейных операторов. Напомним, что *коразмерностью* подпространства называется размерность факторпространства $\operatorname{codim} L\doteqdot\dim\boldsymbol{E}/L$.

Определение. Оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *фредго́льмовым*, если его ядро $\ker A$ конечной размерности $\dim(\ker A)=n$, а образ $\operatorname{Im}A$ конечной коразмерности $\operatorname{codim}(\operatorname{Im}A)=m$. *Индексом оператора* A называется $\operatorname{ind}A\doteqdot n-m$. Множество фредго́льмовых операторов обозначается через $\mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, $\mathscr{F}(\boldsymbol{E})\doteqdot\mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$.

Лемма. *Если оператор $A\in\mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ фредго́льмовый, то образ* $\operatorname{Im}A$ *замкнут.*

Доказательство. Пусть $\{\widehat{e}_k\}_{k=1}^m$ образует базис факторпространства $\widehat{\boldsymbol{F}}\doteqdot\boldsymbol{F}/\operatorname{Im}A$. Пространство $\boldsymbol{F}=\operatorname{Im}A\oplus M$ является прямой суммой образа $\operatorname{Im}A$ и линейной оболочки $M\doteqdot\operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$, т.к. всякий элемент $z\in\boldsymbol{F}$ имеет представление $z=x+y$, где $x\in\operatorname{Im}A$ и $y=\sum_{k=1}^m c_k e_k$,. Пусть $B:\boldsymbol{E}\times M\to\boldsymbol{F}$ линейный оператор, заданный по формуле $B(x,y)\doteqdot Ax+y$. Так как $\|Bx\|\leqslant\|A\|\,\|x\|+\|y\|\leqslant\sqrt{\|A\|^2+1}\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$, то оператор B ограниченный и сюръективный. Поэтому по теореме о гомоморфизме образ $B(\boldsymbol{E}\times 0)=\operatorname{Im}A$ замкнутого подпространства является замкнутым в $\boldsymbol{F}$. $\square$

Пример 1. Всякий биективный оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является фредго́льмовым. Если $\dim\boldsymbol{E}=\infty$, то компактный оператор $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ не является фредго́льмовым. Предположим обратное, тогда по теореме о гомоморфизме образ $A(\boldsymbol{U})$ открытого единичного шара будет окрестностью нуля в замкнутом подпространстве $\operatorname{Im}A$. В силу предкомпактности $A(\boldsymbol{U})$ и теоремы Ри́сса размерность $\dim(\operatorname{Im}A)<\infty$ является конечной. Поэтому в силу фредго́льмовости размерность пространства $\dim\boldsymbol{E}<\infty$ является конечной, что невозможно по предположению.

Теорема (о каноническом операторе Фредго́льма)**.** *Если оператор $K\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный, то оператор $A\doteqdot I-K\in\mathscr{F}(\boldsymbol{E})$ фредго́льмовый.*

Доказательство. Так как по теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A$ имеет конечную размерность, то оно дополняемое. Значит существует замкнутое подпространство $L\subset\boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E}=\ker A\oplus L$. Докажем, что оператор $B\doteqdot A|_L$ имеет замкнутый образ.

Покажем, что B ограничен снизу. В самом деле, иначе существует $\{x_n\}\subset L$, т.ч. $\|x_n\|=1$ и $Ax_n\to 0$. В силу компактности K найдется подпоследовательность, т.ч. $Kx_{n_i}\to x$ сходится по норме. Так как $x_{n_i}=Ax_{n_i}+Kx_{n_i}\to x$, то $Ax_{n_i}\to Ax=0$. Тогда из замкнутости L следует, что $x\in L$, $\|x\|=1$ и $Ax=0$. Таким образом, ядро $\ker B\neq 0$, что противоречит выбору L. В силу леммы, доказанной ранее, из ограниченности снизу оператора B вытекает, что он имеет замкнутый образ $\operatorname{Im}B=\operatorname{Im}A$.

Поэтому из доказанных ранее соотношений ядра и образа получаем равенство $(\ker A')_\perp=\operatorname{Im}A$. Поскольку сопряженный оператор A' компактный, то по теореме Ри́сса–Ша́удера его ядро $\ker A'$ имеет конечную размерность m.

Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ базис ядра $\ker A'$ и $\{e_k\}_{k=1}^m$ соответствующая ему система, для которой $\{f_k\}_{k=1}^m$ является сопряженной. Тогда имеем $\mathrm{Im} A = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Обозначим $L \doteqdot \mathrm{Im} A$ и $M \doteqdot \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$. Тогда всякий элемент $z \in \boldsymbol{E}$ имеет разложение $z = x + y$, где $y = \sum_{k=1}^m f_k(z)\, e_k \in M$ и $x = z - y \in L$. Таким образом, $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ и коразмерность образа $\mathrm{codim}(\mathrm{Im} A) = \dim(\ker A') = m$ равна размерности ядра $\ker A'$. □

Замечание. Из леммы и последнего абзаца доказательства теоремы получается, что оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда является фредго́льмовым $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})$, когда образ $\mathrm{Im} A$ является замкнутым и ядра $\ker A$ и $\ker A'$ имеют конечную размерность, при этом $\dim(\ker A') = \mathrm{codim}(\mathrm{Im} A)$.

В курсе линейной алгебры доказывается следующая альтернатива Фредго́льма: либо система n линейных уравнений с n неизвестными однозначно разрешима для любой правой части, либо однородная система имеет ненулевое решение. Теоремы Фредго́льма в бесконечномерном банаховом пространстве устанавливают аналогичные связи между решениями однородного и неоднородного уравнений.

Для доказательств теорем Фредго́льма предположим, что оператор $A \doteqdot I - K$ является каноническим оператором Фредго́льма в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$, где $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор, при этом $A' \doteqdot I - K'$ является его сопряженным оператором. По теореме Ри́сса–Ша́удера ядра этих операторов $\ker A$ и $\ker A'$ имеют конечную размерность $\dim(\ker A) = n$ и $\dim(\ker A') = \mathrm{codim}(\mathrm{Im} A) = m$.

Теорема (теорема Фредго́льма I). *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ базис решений однородного сопряженного уравнения $A'f = 0$. Неоднородное уравнение $Ax = y$ имеет решение тогда и только тогда, когда $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Поскольку образ $\mathrm{Im} A$ замкнут, то в силу соотношений ядра и образа $\mathrm{Im} A = (\ker A')_\perp = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Поэтому $y \in \mathrm{Im} A$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$. □

Теорема (теорема Фредго́льма II). *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ базис решений однородного уравнения $Ax = 0$. Неоднородное сопряженное уравнение $A'f = g$ имеет решение тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Так как образ $\mathrm{Im} A'$ замкнут, то из соотношений ядра и образа $\mathrm{Im} A' = (\ker A)^\perp = \bigcap_{k=1}^n \ker \delta_{x_k}$, где $\delta_{x_k}(f) \doteqdot f(x_k)$ при $f \in \boldsymbol{E}'$ функционал Дирака. Отсюда $g \in \mathrm{Im} A'$ тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. □

Теорема (теорема Фредго́льма III). *Для того чтобы неоднородное уравнение $Ax = y$ являлось разрешимым при всех $y \in \boldsymbol{E}$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $Ax = 0$ имело только нулевое решение.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует элемент $x_1 \neq 0$, т.ч. $Ax_1 = 0$. Обозначим через $L_n \doteqdot \ker A^n$ ядро оператора A^n. Тогда включения $L_{n-1} \subset L_n$ являются строгими. В самом деле, по условию существуют $x_n \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $Ax_n = x_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Поэтому $x_n \in L_n$ и $A^{n-1}x_n = x_1 \neq 0$, т.е. $x_n \in L_n \setminus L_{n-1}$.

В силу леммы Ф. Рисса о почти перпендикуляре существуют элементы $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Поскольку имеют место равенства $Ky_n - Ky_m = y_n - (Ay_n + y_m - Ay_m)$ и элемент $Ay_n + y_m - Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то $\|Ky_n - Ky_m\| > 1/2$ при $n > m$, а значит последовательность Ky_n не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора K.

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = 0$ допускает только нулевое решение. Тогда по второй теореме неоднородное сопряженное уравнение $A'f = g$ разрешимо при всех $g \in \boldsymbol{E}'$. Поэтому из доказанной необходимости однородное сопряженное уравнение $A'f = 0$ имеет только нулевое решение. Таким образом, по первой теореме неоднородное уравнение $Ax = y$ разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$. □

Теорема (о индексе канонического оператора Фредго́льма)**.** *Уравнения* $Ax = 0$ *и* $A'f = 0$ *имеют равное число линейно независимых решений, т.е.* $\mathrm{ind}A = n - m = 0$.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ базис подпространства $\ker A$ и $\{f_i\}_{i=1}^n$ сопряженная система функционалов из $\boldsymbol{E}'$. Пусть $\{g_j\}_{j=1}^m$ базис подпространства $\ker A'$ и $\{y_j\}_{i=1}^m$ система элементов из $\boldsymbol{E}$, для которой $\{g_j\}_{j=1}^m$ будет сопряженной функционалов из $\boldsymbol{E}'$. Докажем, что следующие два случая невозможны.

a) $n < m$. Определим компактные операторы $K_n x \doteqdot Kx + \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$ при $x \in \boldsymbol{E}$ и положим $A_n \doteqdot I - K_n$. Докажем, что его ядро $\ker A_n = 0$. Если элемент $x \in \ker A_n$, то получаем равенство $Ax = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$. Поскольку $A'g_j = 0$ при $j = 1, \ldots, m$, то $A'g_j(x) = g_j(Ax) = f_j(x) = 0$ при $j = 1, \ldots, n < m$. Тогда из равенства имеем $Ax = 0$. Разлагая элемент $x \in \ker A$ по базису, получим $x = \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i = 0$.

Применяя теперь к оператору A_n третью теорему Фредго́льма, заключаем, что существует $z \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $A_n z = y_m$. Отсюда $1 = g_m(y_m) = g_m(A_n z) = g_m(Az) = A'g_m(z) = 0$, т.к. $g_m \in \ker A'$. Таким образом, мы получили противоречие.

b) $m < n$. Рассмотрим компактный оператор $K'_m f \doteqdot K'f + \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$ при $f \in \boldsymbol{E}'$, который является сопряженным к компактному оператору $K_m x \doteqdot Kx + \sum_{j=1}^m f_j(x)y_j$. Положим $A'_m = I - K'_m$. Докажем, что его ядро $\ker A'_m = 0$. Если элемент $f \in \ker A'_m$, то получаем равенство $A'f = \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$. Поскольку $Ax_i = 0$ при $i = 1, \ldots, n$, то $f(Ax_i) = A'f(x_i) = f(y_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, m < n$, Тогда из равенства имеем $A'f = 0$. Разлагая элемент $f \in \ker A'$ по базису, получим $f = \sum_{j=1}^m f(y_j) g_j = 0$.

Применяя теперь к оператору A'_m третью теорему Фредго́льма, заключаем, что существует $h \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $A'_m h = f_n$. Отсюда $1 = f_n(x_n) = A'_m h(x_n) = h(A_m x_n) = h(Ax_n) = 0$, т.к. $x_n \in \ker A$. Таким образом, мы получили противоречие. □

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ называется *конечномерным оператором* или *оператором конечного ранга*, если образ $\mathrm{Im}A$ имеет конечную размерность. Множество конечномерных операторов обозначается через $\mathscr{N}(\boldsymbol{E})$.

Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ будем называть *обратимым по модулю конечномерных операторов*, если найдется ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$, т.ч. выполняются равенства $TA = I - N_1$ и $AT = I - N_2$, где $N_1 \in \mathscr{N}(\boldsymbol{E})$ и $N_2 \in \mathscr{N}(\boldsymbol{F})$ являются конечномерными операторами.

Аналогичным образом, ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ мы будем называть *обратимым по модулю компактных операторов*, если существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами.

Теорема (Никольского). *Пусть $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченный оператор, заданный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) оператор A обратим по модулю конечномерных операторов;

b) оператор A обратимым по модулю компактных операторов;

c) оператор A является фредго́льмовым.

Доказательство. Поскольку конечномерный оператор является компактным, то из того, что оператор обратимым по модулю конечномерных операторов, следует, что он обратимым по модулю компактных операторов.

Пусть $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ ограниченный оператор, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ компактные операторы. По доказанной теореме о каноническом операторе Фредго́льма операторы $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$ являются фредго́льмовыми. Так как выполняются включения $\ker A \subset \ker TA$ и $\operatorname{Im} AT \subset \operatorname{Im} A$, то оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ также будет фредго́льмовым.

Пусть теперь оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ фредго́льмовый. Так как размерность ядра $\ker A$ является конечной, то существует замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$. Так как коразмерность образа $\operatorname{Im} A$ является конечной, то существует замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{F}$, т.ч. $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A \oplus M$. Пусть $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ обозначает проектор на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, а $Q : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ обозначает проектор на подпространство $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{F}$. Полагая $P_1 \doteqdot I - P$ и $Q_1 \doteqdot I - Q$, получим конечномерные проекторы P_1 и Q_1, т.к. выполняются равенства $\operatorname{Im} P_1 = \ker A$ и $\operatorname{Im} Q_1 = M$.

Поскольку оператор $B \doteqdot A|_L : L \to \operatorname{Im} A$ биективный, то по теореме Ба́наха его обратный $B^{-1} : \operatorname{Im} A \to L$ является ограниченным. Пусть $T \doteqdot PB^{-1}Q$, тогда имеют место равенства $TA = PB^{-1}A = P = I - P_1$ и $AT = AB^{-1}Q = Q = I - Q_1$, где проекторы $P_1 \in \mathscr{N}(\boldsymbol{E})$ и $Q_1 \in \mathscr{N}(\boldsymbol{F})$ конечномерны. Заметим еще, что ядро $\ker T = \ker Q$ и образ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} P$. Поэтому оператор $T \in \mathscr{F}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ является фредго́льмовым и его индекс вычисляется по формуле $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} A$. □

Теорема (об устойчивости при компактных возмущениях). *Если $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ фредго́льмовый, а $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный, то их сумма $A + K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ будет фредго́льмовым оператором и его индекс* $\operatorname{ind}(A+K) = \operatorname{ind} A$.

Доказательство. В силу теоремы Никольского существует оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где операторы $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными. Тогда имеют место следующие равенства:

$$T(A+K) = I - (K_1 - TK), \quad (A+K)T = I - (K_2 - KT),$$

где операторы $K_1 - TK \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 - KT \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными. Отсюда оператор $A+K \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ обратим по модулю компактных операторов и значит в силу теоремы Никольского является фредго́льмовым. Кроме того, по замечанию, указанному в конце доказательства теоремы Никольского, индекс оператора $A+K$ равен $\operatorname{ind}(A+K) = -\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} A$ индексу оператора A. □

Определение. Множество всех чисел $\lambda \in \mathbb{C}$. т.ч. оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ является фредго́льмовым, называется *несущественным множеством* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и обозначается через $\rho_e(A)$. Дополнительное множество $\sigma_e(A) \doteqdot \mathbb{C} \setminus \rho_e(A)$ называется *существенным спектром* ограниченного оператора A.

Поскольку фредго́льмовый оператор имеет замкнутый образ, то непрерывный спектр содержится в существенном, т.е. $\sigma_c(A) \subset \sigma_e(A)$, а поскольку обратимый оператор является фредго́льмовым, то существенный спектр содержится в спектре, т.е. $\sigma_e(A) \subset \sigma(A)$. Поэтому спектр ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является объединением двух непересекающихся множеств $\sigma(A) = \sigma_e(A) \sqcup \sigma_i(A)$, где

$$\sigma_e(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \notin \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\} \quad \text{и} \quad \sigma_i(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\}.$$

Множество $\sigma_i(A)$ называется *несущественным спектром* A. Непосредственным следствием этого определения и теоремы об устойчивости является инвариантность существенного спектра при компактном возмущении оператора.

Следствие. *Существенный спектр не изменится при добавлении к оператору $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ компактного оператора $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, т.е. $\sigma_e(A+K) = \sigma_e(A)$.*

Теорема (Ве́йля о компактных возмущениях)**.** *Если разность $K = A - B$ двух ограниченных операторов $A, B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является компактным оператором, т.е. $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, то $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subset \sigma(B)$.*

Доказательство. Требуется доказать, что если оператор $A_\lambda = \lambda I - A$ необратим и его ядро $\ker A_\lambda = 0$, то оператор $B_\lambda = \lambda I - B$ также необратим. Для доказательства предположим, что оператор B_λ обратим. Тогда мы имеем следующие равенства:

$$A_\lambda = B_\lambda + (B - A) = B_\lambda(I - B_\lambda^{-1}(A - B)) = B_\lambda(I - B_\lambda^{-1}K).$$

Поскольку оператор A_λ необратим, то $\lambda = 1$ является собственным числом для компактного оператор $B_\lambda^{-1}K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$. Так как $B_\lambda^{-1}K = B_\lambda^{-1}(B_\lambda - A_\lambda) = I - B_\lambda^{-1}A_\lambda$, то существует ненулевой вектор $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $x - B_\lambda^{-1}A_\lambda x = x$. Откуда $B_\lambda^{-1}A_\lambda x = 0$, т.е. $A_\lambda x = 0$, и мы получили противоречие с предположением, что $\ker A_\lambda = 0$. □

Следствие. *Если разность $K = A - B$ операторов $A, B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ компактна, то их спектры совпадают с точностью до множества собственных значений, т.е. имеет место равенство $\sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)) = \sigma(B) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_p(B))$.*

12 ЭРМИ́ТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Линейный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым*, если $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для всех $x, y \in \boldsymbol{H}$. Множество всех эрмитовых операторов $\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ образует действительное линейное подпространство в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ ограниченных операторов.

1. *Если $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то собственные числа $\lambda \in \sigma_p(A)$ действительны $\lambda \in \mathbb{R}$, а собственные подпространства $H_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$ ортогональны $H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

Пусть $Ae = \lambda e$ и $\|e\| = 1$, тогда по свойству эрмитовости $\lambda = \langle Ae, e\rangle = \langle e, Ae\rangle = \overline{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому, если $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ и $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$\lambda_1\langle e_1, e_2\rangle = \langle Ae_1, e_2\rangle = \langle e_1, Ae_2\rangle = \lambda_2\langle e_1, e_2\rangle, \text{ т.е. } \langle e_1, e_2\rangle = 0.$$

Теорема (Ве́йля)**.** *Эрмитовый оператор $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ не имеет остаточного спектра и его спектр совпадает с предельным спектром $\sigma(A) = \sigma_l(A)$.*

Доказательство. Поскольку дополнительное множество к предельному спектру содержится в остаточном спектре $\sigma(A) \setminus \sigma_l(A) \subset \sigma_r(A)$, то достаточно показать, что остаточный спектр $\sigma_r(A)$ является пустым. Предположим обратное, т.е. $\ker A_\lambda = 0$ и существует $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $y \neq 0$ и $y \perp \operatorname{Im} A_\lambda$. Тогда $\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle x, A_{\overline{\lambda}} y\rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Отсюда следует, что $A_{\overline{\lambda}} y = 0$, т.е. $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A)$. Так как собственные значения действительны, то $A_\lambda y = 0$, что противоречит предположению $\ker A_\lambda = 0$. □

2. *Если $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ является действительным и норма резольвенты удовлетворяет оценке $\|R_\lambda\| \leqslant 1/|\Im\lambda|$ при всех $\Im\lambda \neq 0$.*

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\beta \neq 0$, то $A_\lambda = A_\alpha + i\beta I$ и справедливо следующее равенство:

$$\|A_\lambda x\|^2 = \langle A_\alpha x, A_\alpha x\rangle - i\beta\langle A_\alpha x, x\rangle + i\beta\langle x, A_\alpha x\rangle + \beta^2\langle x, x\rangle = \|A_\alpha x\|^2 + \beta^2\|x\|^2.$$

Поэтому $\inf_{\|x\|=1}\|A_\lambda x\| \geqslant |\beta|$, т.е. оператор A_λ ограничен снизу и значит $\lambda \notin \sigma_l(A)$. По критерию Ве́йля получим $\lambda \notin \sigma(A)$. Поскольку $\|A_\lambda x\| \geqslant |\beta|\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то по определению резольвенты $\|R_\lambda y\| \leqslant 1/|\beta|\,\|y\|$ при всех $y \in \boldsymbol{H}$.

3. *Если $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то спектральный радиус равен норме $r(A) = \|A\|$.*

Так как $A^2 = AA$, то $\|A^2\| \leqslant \|A\|^2$. В силу неравенства Коши́–Буняко́вского

$$\|A^2\| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}_1}\|A^2x\| = \sup_{x,y\in \boldsymbol{S}_1}\langle A^2x, y\rangle = \sup_{x,y\in \boldsymbol{S}_1}\langle Ax, Ay\rangle \geqslant \sup_{x\in \boldsymbol{S}_1}\langle Ax, Ax\rangle = \|A\|^2,$$

Поэтому $\|A^2\| = \|A\|^2$ и, следовательно, $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. По теореме о спектральном радиусе $r(A) = \lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim \sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|} = \|A\|$.

4. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{H}) \cap \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то точечный спектр $\sigma_p(A) \neq \emptyset$ не пуст.*

Пусть $\sigma_p(A) = \emptyset$. Так как $\sigma(A) \neq \emptyset$, то по теореме Ри́сса–Ша́удера $\sigma(A) = \{0\}$. Поэтому по свойству 3 получим $r(A) = \|A\| = 0$, т.е. $A = 0$, что невозможно.

Теорема (Ги́льберта–Шми́дта). *Если оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{H}) \cap \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ действует в сепарабельном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, то существует полная ортонормированная система в $\boldsymbol{H}$, состоящая из собственных векторов A.*

Доказательство. Если $\dim \boldsymbol{H} < \infty$ это известное утверждение из курса линейной алгебры. Пусть $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. Так как A компактный, то множество $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственных чисел не более, чем счетно, а ненулевые собственные числа $\lambda_n \neq 0$ имеют конечную кратность $\dim H_{\lambda_n} < \infty$, где $H_{\lambda_n} \doteqdot \ker A_{\lambda_n}$. Так как A эрмитовый, то $\lambda_n \in \mathbb{R}$ и собственные подпространства ортогональны $H_{\lambda_n} \perp H_{\lambda_m}$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Выберем в каждом подпространстве H_{λ_n} ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов. Их объединение образует ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\boldsymbol{H}$. Пусть $L \doteqdot \overline{\text{sp}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнутая линейная оболочка этой системы. Тогда L является инвариантным подпространством оператора A, а в силу эрмитовости ортогональное дополнение $L^{\perp}$ будет инвариантным подпространством оператора A, т.к. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = 0$ при всех $x \in L$ и $y \in L^{\perp}$. Тогда по свойству 4 подпространство $L^{\perp}$ имеет собственный вектор, что невозможно. Значит $L^{\perp} = 0$. В силу теоремы об ортогональном разложении получим $\boldsymbol{H} = L \oplus L^{\perp} = L$. $\square$

Следствие. *Если оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{H}) \cap \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то его норма $\|A\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$.*

В силу полноты собственных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеем разложение в ряд Фурье́ $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ax, e_n\rangle\, e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle\, e_n$. Используя равенство Парсева́ля, получим

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \max_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \max_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 \|x\|^2 .$$

Отсюда $\|A\| \leqslant \max_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$. Выбрав k, т.ч. $|\lambda_k| = \max_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$, имеем $\|Ae_k\| = |\lambda_k|$.

Определение. Интегральным оператором *Ги́льберта–Шми́дта* в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ называется линейный оператор, определенный по формуле

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy, \quad f \in \boldsymbol{L}_2[a,b],$$

где его ядро $K(x,y)$ удовлетворяет условиям $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$ и $K(x,y) \in \boldsymbol{L}_2[a,b]^2$.

Из рассмотренных примеров на семинарах следует, что оператор Ги́льберта–Шми́дта является эрмитовым и компактным. Обозначим через $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора A с собственными числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Докажем следующие три теоремы Шми́дта.

Теорема (сходимости). *Ряд Фурье́ функции $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n\rangle\, e_n$, где $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, сходиться в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$, а если $\int_a^b |K(x,y)|^2 dy \leqslant C$ при п.в. $x \in [a,b]$, то этот ряд сходится в пространстве $\boldsymbol{L}_{\infty}[a,b]$.*

Доказательство. Поскольку функция $Af \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, то сходимость ее ряда Фурье в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ вытекает из полноты системы собственных функций $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. последнюю лекцию прошлого семестра).

Для доказательства сходимости в $\boldsymbol{L}_\infty[a,b]$ рассмотрим частичные суммы ряда Фурье́ $s_n = \sum_{k=1}^n \langle f, e_n\rangle e_n$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, получим

$$|Af(x) - As_n(x)|^2 \leqslant \int_a^b |K(x,y)|^2 dy \int_a^b |f(y) - s_n(y)|^2 dy \leqslant C\,\|f - s_n\|^2_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Поэтому из сходимости $\|f - s_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$ следует сходимость $\|Af - As_n\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \to 0$. □

Теорема (разложения ядра). *Двумерный ряд Фурье́ ядра $K(x,y)$ интегрального оператора Ги́льберта–Шми́дта сходится в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$, т.е.*

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n e_n(x)\overline{e_n(y)} \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 < \infty.$$

Доказательство. Вычисляя коэффициенты Фурье́ функции $K(x,y)$ относительно двумерной ортонормированной системы $\omega_n(x,y) = e_n(x)\overline{e_n(y)}$ в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$ получим

$$\langle K, \omega_n\rangle = \int_a^b \int_a^b K(x,y)\,\overline{e_n(x)}e_n(y)\,dxdy = \langle Ae_n, e_n\rangle = \lambda_n.$$

Так как функция $K(x,y) \in \boldsymbol{L}_2[a,b]^2$, то ее ряд Фурье́ сходится к некоторой функции $F(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n w_n(x,y)$. Используя теорему Фуби́ни можно доказать, что система функций вида $h(x,y) = f(x)\overline{g(y)}$, где $f, g \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, полна в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Поэтому, т.к.

$$\langle K, h\rangle = \langle Ag, f\rangle = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle g, e_n\rangle\,\langle e_n, f\rangle = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle w_n, h\rangle = \Big\langle \sum_{n=1}^\infty \lambda_n w_n, h\Big\rangle = \langle F, h\rangle$$

при всех $h(x,y)$, то $K(x,y) = F(x,y)$ п.в. и значит ряд Фурье́ $K(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n w_n(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. В силу равенства Парсева́ля имеем $\|K\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 < \infty$. □

Теорема (представления резольвенты). *Резольвента интегрального оператора Ги́льберта–Шми́дта имеет следующее представление для всех $g \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$*

$$R_\lambda g(x) = \frac{1}{\lambda} g(x) + \frac{1}{\lambda}\int_a^b K_\lambda(x,y)\,g(y)\,dy,$$

где $\lambda \in \rho(A)$ и ряд Фурье́ $K_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(x)\overline{e_n(y)}$ сходится в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$.

Доказательство. Вычислим коэффициенты Фурье́ функции $g = A_\lambda f$, $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$,

$$\langle g, e_n\rangle = \langle A_\lambda f, e_n\rangle = \langle f, A_\lambda e_n\rangle = (\lambda - \lambda_n)\langle f, e_n\rangle, \text{ т.е. } \langle f, e_n\rangle = \frac{\langle g, e_n\rangle}{\lambda - \lambda_n}.$$

Поэтому резольвента $R_\lambda g = f$ имеет при всех $\lambda \in \rho(A)$ представление

$$R_\lambda g(x) = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} Af = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle g, e_n\rangle e_n = \frac{1}{\lambda} g(x) + \frac{1}{\lambda}\int_a^b K_\lambda(x,y)\,g(y)\,dy,$$

где ряд Фурье́ $K_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(x)\overline{e_n(y)}$. Так как $\lambda \in \rho(A)$, то существует $\delta > 0$, т.ч. $|\lambda - \lambda_n| \geqslant \delta$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеем $\|K_\lambda\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 < \infty$. Таким образом, ряд Фурье́ функции K_λ сходится в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. □

Пусть функция $p \in \boldsymbol{C}^{(1)}[a,b]$ является непрерывно дифференцируемой и положительной $p(x) > 0$, а функция $q \in \boldsymbol{C}[a,b]$ непрерывна и принимает действительные значения. Рассмотрим дифференциальный оператор Шту́рма–Лиуви́лля

$$Lu(x) = -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) \text{ при п.в. } x \in [a,b].$$

Область определения $\mathrm{dom}L$ состоит из функций пространства Соболева $\mathscr{W}_2^{(2)}[a,b]$, таких, что первая производная абсолютно непрерывна $u' \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, а вторая производная $u'' \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, при этом должны еще выполняться граничные условия

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0 \text{ и } \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0$$

с действительными коэффициентами, т.ч. $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ и $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Заметим, что подпространство $\mathrm{dom}L$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$ и оператор L является симметрическим, т.е. $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ для всех $u, v \in \mathrm{dom}L$. В самом деле, интегрируя по частям, получим следующие равенства:

$$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = \int_a^b (Lu)\overline{v} - u(L\overline{v})dx = -\int_a^b \overline{v}\,d(pu') + \int_a^b u\,d(p\overline{v}') = p(u\overline{v}' - u'\overline{v})\big|_a^b = 0,$$

где последнее равенство вытекает из граничных условий, т.к. определители

$$\det\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \overline{v}(a) & \overline{v}'(a) \end{vmatrix} = 0, \quad \det\begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \overline{v}(b) & \overline{v}'(b) \end{vmatrix} = 0.$$

В силу симметричности оператора L его собственные числа действительны, а его собственные функции с различными собственными числами ортогональны.

Рассмотрим *задачу Шту́рма–Лиуви́лля*, которая включает, во-первых, вопрос о существовании решения уравнения $Lu = f$, где $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, а во-вторых, вопрос о существовании полной в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ системы собственных функций оператора L. Вначале докажем существование функции Гри́на для задачи Шту́рма–Лиуви́лля.

Лемма. *Если ядро* $\ker L = 0$*, то существует, так называемая, функция Гри́на* $G(x,y)$*, которая определяется следующими условиями:*

a) *функция* $G(x,y)$ *действительная, симметричная и непрерывная на* $[a,b]^2$*;*

b) *функция* $G(x,y)$ *дважды непрерывно дифференцируема при* $y \neq x$*;*

c) *удовлетворяет уравнению* $L_y G(x,y) = 0$ *и граничным условиям при* $y \neq x$*;*

d) *первая производная* $G'_y(x,y)$ *по переменной* y *имеет разрыв первого рода при* $y = x \in (a,b)$ *с величиной скачка* $G'_y(x,x+0) - G'_y(x,x-0) = -1/p(x)$.

Доказательство. Так как $\ker L = 0$, то существуют два действительных и линейно независимых решения u_1 и u_2 уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничным условиям. Поэтому их определитель Вро́нского $\Delta \doteqdot u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$ не равен нулю. Так как $(p\Delta)' = u_1(pu_2')' - u_2(pu_1')' = u_1 q u_2 - u_2 q u_1 = 0$, то функция $p\Delta \doteqdot p(u_1 u_2' - u_1' u_2) = c_0$ является константой $c_0 \neq 0$.

Определим функцию $G(x,y) \doteqdot c_1u_1(y)$ при $y \leqslant x$ и $G(x,y) \doteqdot c_2u_2(y)$ при $y \geqslant x$. Выберем $c_1 = c_1(x)$ и $c_2 = c_2(x)$ так, чтобы функция $G(x,y)$ была непрерывной на отрезке $[a,b]$ и ее производная $G'_y(x,y)$ имела указанный скачок в точке $y = x$, т.е. $c_1u_1(x) - c_2u_2(x) = 0$ и $c_1u'_1(x) - c_2u'_2(x) = 1/p(x)$. Поскольку $c_0 = p(u_1u'_2 - u'_1u_2) \neq 0$, то, полагая $c_1 \doteqdot -u_2(x)/c_0$ и $c_2 \doteqdot -u_1(x)/c_0$, мы получим функцию

$$G(x,y) \doteqdot -\frac{1}{c_0}\begin{cases} u_1(y)\,u_2(x), & \text{при } a \leqslant y \leqslant x \leqslant b; \\ u_1(x)\,u_2(y), & \text{при } a \leqslant x \leqslant y \leqslant b; \end{cases}$$

которая будет удовлетворять всем указанным условиям леммы. □

Теорема (существования решения). *Если* $\ker L = 0$ *и* $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$*, то функция* $u \in \operatorname{dom} L$ *тогда и только тогда удовлетворяет уравнению* $Lu = f$*, когда*

$$u(x) = Af(x) \doteqdot \int_a^b G(x,y)\,f(y)\,dy \ \text{при всех } x \in [a,b],$$

где $G(x,y)$ *есть функция Гри́на задачи Шту́рма–Лиуви́лля.*

Доказательство. Пусть $f = Lu$, где $u \in \operatorname{dom} L$. Интегрируя по частям и используя свойства функции Гри́на по переменной y, а также граничные условия, получим

$$\int_a^b G f\,dy = \int_a^b G\,(Lu) - (L_yG)\,u\,dy = \int_a^x G\,(Lu) - (L_yG)\,u\,dy + \int_x^b G\,(Lu) - (L_yG)\,u\,dy =$$
$$= p\,(u\,G'_y - u'G)\,\Big|_a^{x-0} + p\,(u\,G'_y - u'G)\,\Big|_{x+0}^{b} = p\,(u\,G'_y - u'G)\,\Big|_{x+0}^{x-0} = p\,u\,G'_y\,\Big|_{x+0}^{x-0} = u(x)\,.$$

Следовательно, имеет место равенство $ALu = u$ при всех $u \in \operatorname{dom} L$.

Теперь докажем равенство $LAf = f$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Так как $Af \in \operatorname{dom} L$, то в силу симметричности операторов L и A получим $\langle LAf, u\rangle = \langle f, ALu\rangle = \langle f, u\rangle$ для всех $u \in \operatorname{dom} L$. В силу плотности подпространства $\operatorname{dom} L \subset \boldsymbol{L}_2[a,b]$ получим $LAf = f$ п.в. на $[a,b]$. Таким образом, оператор A, определенный на пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ со значениями в $\operatorname{dom} L$, является обратным к оператору L. □

Теорема (о полноте собственных функций). *Существует полная система в* $\boldsymbol{L}_2[a,b]$*, состоящая из собственных функций оператора Шту́рма-Лиуви́лля.*

Доказательство. Пусть $\ker L = 0$. Тогда существование полной ортонормированной системы собственных функций вытекает из теоремы Ги́льберта–Шми́дта, так как собственные функции оператора L будут собственными функциями интегрального оператора A, ядром которого является функция Гри́на.

Пусть $\ker L \neq 0$. В силу симметричности оператора L его собственные функции с различными собственными числами будут ортогональны. В силу сепарабельности $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ ортонормированная система не более, чем счетна, и множество собственных чисел не более, чем счетно. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ не является собственным числом оператора L. Тогда оператор $L_0 = L - \lambda_0 I$ удовлетворяет условию $\ker L_0 = 0$. Так как собственные функции операторов L_0 и L совпадают, то оператор L одновременно с оператором L_0 обладает полной в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ системой собственных функций. □