1 РЕГУЛЯРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним некоторые определения предыдущего семестра. Пусть $\mathscr{E}(X) = \boldsymbol{C}^\infty(X)$ обозначает локально выпуклое пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : X \to \mathbb{F}$ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, с заданной системой полунорм

$$\boldsymbol{p}_{n,K}(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha| \leqslant n, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \text{ где } K \Subset X \text{ произвольный компакт и } n \in \mathbb{Z}_+ .$$

Здесь выражение $\partial^\alpha \varphi(x) \doteqdot \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_m^{\alpha_m} \varphi(x)$ обозначает дифференциальный оператор порядка $|\alpha| \doteqdot \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, где $\partial_j^{\alpha_j} \varphi(x) \doteqdot \partial^{\alpha_j} \varphi(x) / \partial x_j^{\alpha_j}$ частные производные по переменной $x_j \in \mathbb{R}$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ обозначает мультииндекс.

Через $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ обозначается локально выпуклое пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в X и системой полунорм

$$\mathfrak{P} = \{\boldsymbol{p}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}, \text{ где } \boldsymbol{p}_n(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha| \leqslant n, x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)| .$$

Его подпространство $\mathscr{D}(K) \subset \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ функций с носителем на компакте $K \Subset X$ является пространством Фреше́. Носителем функции $\operatorname{supp} \varphi$ называется замыкание множества тех точек $x \in \mathbb{R}^m$, для которых функция $\varphi(x) \neq 0$ не равна нулю.

Локально выпуклое пространство $\mathscr{D}(X) = \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ с системой всех допустимых полунорм $\mathfrak{D}$ называется пространством *основных функций*. При этом полунорма $\boldsymbol{p}$ называется *допустимой*, если для любого компакта $K \Subset X$ существует полунорма $\boldsymbol{p}_k \in \mathfrak{P}$, т.ч. она мажорирует полунорму $\boldsymbol{p} \ll \boldsymbol{p}_k$ на подпространстве $\mathscr{D}(K)$.

Пример 1. *Примеры основных функций из пространства* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $e(t) \doteqdot e^{-1/t}$ при всех $t > 0$ и $e(t) \doteqdot 0$ при всех $t \leqslant 0$. По правилу Лопита́ля $e(t)$ бесконечно дифференцируема в нуле. Поэтому $\xi(x) \doteqdot c(1 - \|x\|^2)$ при некотором $c > 0$ такая бесконечно дифференцируемая функция, что $0 \leqslant \xi(x) \leqslant c$, $\int_{\mathbb{R}^m} \xi(x)\, dx = 1$ и имеет носитель $\operatorname{supp} \xi = \boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant 1\}$ в единичном шаре.

Система функций $\xi_r(x) \doteqdot 1/r^m \xi(x/r)$ называется *аппроксимативной единицей*. Функции $\xi_r(x)$ при всех $r > 0$ и $x \in \mathbb{R}^m$ являются бесконечно дифференцируемыми, неотрицательными $\xi_r(x) \geqslant 0$, их интеграл равен $\int_{\mathbb{R}^m} \xi_r(x)\, dx = 1$ и имеют носитель $\operatorname{supp} \xi_r = \boldsymbol{S}_r \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant r\}$ в шаре радиуса r.

Рассмотрим функцию $\eta(x) \doteqdot \int_{\boldsymbol{S}_{3/4}} \xi_{1/4}(x - y)\, dy$. Ясно, что $\eta(x) = 1$ при $x \in \boldsymbol{S}_{1/2}$ и $\eta(x) = 0$ при $x \notin \boldsymbol{S}$. При этом функция $\eta(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ будет бесконечно дифференцируемой, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ и имеет носитель $\operatorname{supp} \eta = \boldsymbol{S}$ в единичном шаре.

Сопряженное пространство $\mathscr{D}'(X)$, состоящее из всех непрерывных линейных функционалов $f : \mathscr{D}(X) \to \mathbb{F}$ на пространстве $\mathscr{D}(X)$, называется пространством *обобщенных функций*. Значение обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ на основной функций $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ обозначается скобкой $\langle f, \varphi \rangle \doteqdot f(\varphi)$. В прошлом семестре было доказано, что сопряженное пространство $\mathscr{E}'(X)$ является подпространством $\mathscr{D}'(X)$, состоящим из всех обобщенных функций с компактным носителем.

Теорема. *Если обобщенная функция $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ имеет носитель в точке, т.е. $\operatorname{supp} f = \{x_0\}$, то существуют $n \in \mathbb{N}$ и числа $c_\alpha \in \mathbb{F}$ при $|\alpha| \leqslant n$, т.ч.*

$$f(x) = \textstyle\sum_{|\alpha| \leqslant n} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x - x_0).$$

Доказательство. Мы докажем теорему в случае $m = 1$. Можно считать, что $x_0 = 0$. В силу непрерывности функционала $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ на пространстве $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ существует $n \in \mathbb{N}$ и число $c_n > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c_n \boldsymbol{p}_{n,K_n}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$, где полунормы $\boldsymbol{p}_{n,K_n}(\varphi) = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n, x \in K_n} |\varphi^{(k)}(x)|$ и компакт $K_n = [-n, n]$. Представим произвольную функцию $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ по формуле Те́йлора с интегральной формой остатка

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(0)\, \frac{x^k}{k!} + R_n(x)\,, \text{ где } R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n\, \varphi^{(n+1)}(tx)\, dt\,.$$

Тогда $R_n \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ и выполняется неравенство $|R_n^{(l)}(x)| \ll \varepsilon^{n+1-l}$ при всех $|x| < \varepsilon$ и $0 \leqslant l \leqslant n$. Если докажем $\langle f, R_n\rangle = 0$, то, применяя функционал к формуле Те́йлора, получим указанное представление $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \delta^{(k)}(x)$, где $c_k \doteq (-1)^k \langle f, x^k/k!\rangle$.

Рассмотрим основную функцию $\eta_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где функция $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1/2$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$. Отсюда имеем $|\eta_\varepsilon^{(k)}(x)| \ll \varepsilon^{-k}$ при всех $|x| < \varepsilon$. Используя далее формулу Лейбница, получим следующее неравенство:

$$\boldsymbol{p}_n(\eta_\varepsilon R_n) = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n, |x| \leqslant \varepsilon} |(\eta_\varepsilon(x)\, R_n(x))^{(k)}| \ll \sum_{k+l \leqslant n} \sup_{|x| < \varepsilon} |\eta_\varepsilon^{(k)}(x)\, R_n^{(l)}(x)|\,.$$

Поэтому $\boldsymbol{p}_n(\eta_\varepsilon R_n) \ll \varepsilon$. Так как функционал f имеет носитель в точке $x_0 = 0$, то $\langle f, R_n\rangle = \langle f, \eta_\varepsilon R_n\rangle$ при всех $\varepsilon > 0$. Отсюда $|\langle f, R_n\rangle| = |\langle f, \eta_\varepsilon R_n\rangle| \ll \boldsymbol{p}_n(\eta_\varepsilon R_n) \ll \varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$. Таким образом, имеет место равенство $\langle f, R_n\rangle = 0$. □

Определение. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ всех локально интегрируемых функций на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, т.е. интегрируемых по Лебегу на любом компакте $K \Subset X$. *Усреднением функции* $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ в смысле Со́болева называется следующая система функций, определенных на пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$f_r(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^m} \xi_r(y)\, f(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \xi_r(x-y)\, f(y)\, dy \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^m \text{ и } r > 0,$$

где $\xi_r(x)$ аппроксимативная единица и мы полагаем $f(x) = 0$ при всех $x \notin X$.

1. *Функция $f_r \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ является бесконечно дифференцируемой и ее носитель содержится в множестве $Y_r \doteq \{y \in \mathbb{R}^m \mid \rho(y, X) \leqslant r\}$, где $\rho(y, X) \doteq \inf_{x \in X} |y - x|$.*

Поскольку $\xi_r \in \boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то в силу теоремы Лебе́га о мажорируемой сходимости усреднение $f_r(x)$ можно дифференцировать под знаком интеграла Лебега

$$\partial^\alpha f_r(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \partial^\alpha \xi_r(x-y)\, f(y)\, dy \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^m \text{ и } r > 0.$$

Так как носитель $\operatorname{supp} \xi_r \subset \boldsymbol{S}_r$, то $f_r(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$, т.ч. $\rho(x, X) > r$.

2. *Если $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то выполняется неравенство $\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$.*

Поскольку $\int_{\mathbb{R}^m} \xi_r(x)\,dx = 1$, то, применяя обобщенное неравенство Минко́вского и инвариантность нормы $\|\tau_y f\|_{\boldsymbol{L}_p} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$ при сдвиге $\tau_y f(x) \doteqdot f(x-y)$, получим

$$\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \xi_r(y)\|\tau_y f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy = \int_{\mathbb{R}^m} \xi_r(y)\|f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy = \|f\|_{\boldsymbol{L}_p},.$$

3. *Если $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ и $1 \leqslant p < \infty$, то $\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ при $r \to 0$.*

В силу равенства $\int_{\boldsymbol{S}_r} \xi_r(x)\,dx = 1$ имеем $f_r(x) - f(x) = \int_{\boldsymbol{S}_r} \xi_r(y)\big(\tau_y f(x) - f(x)\big)\,dy$. Как известно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon$ при всех $\|y\| \leqslant r < \delta$. Поэтому, применяя обобщенное неравенство Минко́вского, получим

$$\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \int_{\boldsymbol{S}_r} \xi_r(y)\,\|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy \leqslant \sup_{\|y\| \leqslant r} \|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon\,.$$

Теорема (о плотности основных функций). *Если $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ и $1 \leqslant p < \infty$, то существуют $\varphi_n \subset \mathscr{D}(X)$, т.ч. $\|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ и $\lim_{n\to\infty}\|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_p} = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим компакты $K \doteqdot \{x \in X \mid \|x\| \leqslant k, \rho(x, \partial X) \geqslant 1/k\} \Subset X$ в множестве X. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое $k > 0$, что $\int_{X\setminus K} |f(x)|^p dx < (\varepsilon/2)^p$, а затем положим $g(x) = f(x)\,\chi_K(x)$. Для усреднения этой функции имеем $\operatorname{supp} g_r \Subset X$ и $\|g - g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/2$ при всех $0 < r < 1/k$ и больших k. Применяя неравенство треугольника, получим $\|f - g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g - g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon$ при всех $0 < r < 1/k$. Таким образом, $\varphi_n(x) \doteqdot g_{1/2kn}(x)$ удовлетворяют утверждению теоремы. □

Следствие. *Если $X \subset \mathbb{R}^m$ ограниченное множество и $f \in \boldsymbol{L}_\infty(X)$ ограниченная функция, то найдется последовательность основных функций $\varphi_n \in \mathscr{D}(X)$, т.ч.* a) $|\varphi_n(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ *при всех $x \in X$;* b) $\varphi_n(x) \to f(x)$ *при п.в. $x \in X$.*

Для доказательства достаточно применить теорему при $p = 1$, а затем выбрать подпоследовательность, сходящуюся п.в. на X. Заметим, что утверждение теоремы и свойство 3 будут выполняться также в случае $p = \infty$, если функция $f \in \boldsymbol{C}_0(X)$, т.е. является непрерывной и имеет компактный носитель $\operatorname{supp} f \Subset X$.

Определение. Для локально интегрируемой функции $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$ функционал $f \in \mathscr{D}'(X)$, определенный по формуле

$$\langle f, \varphi\rangle \doteqdot \int_X f(x)\varphi(x)\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X)\,,$$

называется *регулярной обобщенной функцией* на множестве X.

Непрерывность этого функционала вытекает из неравенства $|\langle f, \varphi\rangle \leqslant c\boldsymbol{p}_1(\varphi)$, где $c = \int_K |f(x)|\,dx$ и $K = \operatorname{supp}(\varphi)$. Введем систему полунорм $\boldsymbol{k}_n(f) \doteqdot \int_{K_n} |f(x)|\,dx$, где компакты $K_n \Subset X$ выбраны, т.ч. $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ и $X = \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{K}_n$. Рассматривая в $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ топологию, определяемую этой системой полунорм, получим отделимое локально выпуклое пространство. В силу полноты пространств $\boldsymbol{L}_1(K_n)$ пространство $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ будет полным и значит является пространством Фреше́.

Теорема. *Отображение $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \hookrightarrow \mathscr{D}'(X)$, в котором функции соответствует функционал, является инъективным и непрерывным.*

Доказательство. Докажем инъективность этого отображения. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ и предположим, что $\int_X f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Определим ограниченную функцию по формуле $g(x) \doteqdot |f(x)|/f(x)$, если $f(x) \neq 0$, и $g(x) = 0$, если $f(x) = 0$. Применяя следствие из теоремы о плотности основных функций, получим такую последовательность функций $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}(K_n)$, что $|\varphi_k(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in X$ и $\varphi_k \to g$ сходится п.в. на компакте K_n. Тогда по теореме Лебéга о мажорируемой сходимости имеем следующее равенство:

$$\int_{K_n} |f(x)|\,dx = \int_{K_n} f(x)\,g(x)\,dx = \lim \int_{K_n} f(x)\left(g(x) - \varphi_{k_j}(x)\right)dx = 0\,.$$

Поэтому $f(x) = 0$ при п.в. на множестве K_n. Поскольку это равенство выполняется при всех $n \in \mathbb{N}$, то функция $f(x) = 0$ п.в. на множестве X.

Если $U = \{f \in \mathscr{D}'(X) \,|\, \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\langle f, \varphi_k \rangle| < \varepsilon\}$ слабая* окрестность нуля в $\mathscr{D}'(X)$, то $V = \{g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \,|\, \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\langle g, \varphi_k \rangle| < \varepsilon\}$ является окрестностью нуля в $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$, т.к. каждое из множеств $\{g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \,|\, |\langle g, \varphi_k \rangle| < \varepsilon\}$ является открытым в $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$. Так как $V \subset U$, то указанное отображение непрерывно. □

Лемма (регуляризации)**.** *Если $f \in \mathscr{D}'(X)$ и $f_r(x) \doteqdot \langle f(y), \xi_r(x-y) \rangle$ ее усреднение, где $\xi_r(x)$ — аппроксимативная единица, то функции $f_r(x) \in \boldsymbol{C}^\infty(X)$ бесконечно дифференцируемы и сходятся $f_r \to f$ при $r \to 0$ в слабой* топологии $\mathscr{D}'(X)$.*

Доказательство. Пусть $e_j \doteqdot \{\delta_{ij}\}_{i=1}^m$ стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^m$. Тогда функции $\left(\xi(x + e_j h - y) - \xi(x-y)\right)/h$ сходятся равномерно по переменной $y \in X$ к функции $\partial_{x_j}\xi(x-y)$ при $h \to 0$ вместе со всеми своими производным, т.е. сходятся в пространстве $\mathscr{D}(X)$. Поэтому в силу непрерывности функционала $f \in \mathscr{D}'(X)$ мы имеем равенство $\partial_{x_j} f_r(x) = \langle f, \partial_{x_j}\xi(x-y) \rangle$. Применяя снова эти рассуждения к уже полученной формуле, имеем общую формулу $\partial^\alpha f_r(x) \doteqdot \langle f(y), \partial_x^\alpha \xi(x-y) \rangle$.

Поскольку функция $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ имеет компактный носитель $\operatorname{supp}\varphi \Subset X$, то можно аппроксимировать интеграл от функции $\xi_r(x-y)\varphi(x)$ суммами Ри́мана

$$\int_X \xi_r(x-y)\varphi(x)\,dx = \lim_{t \to +0} \sum_{z \in \mathbb{Z}^m} \xi_r(tz - y)\,\varphi(tz)\,t^m\,.$$

Суммы Ри́мана сходятся равномерно вместе со всеми производными по переменной $y \in X$ и имеют общий носитель, т. е. сходятся в $\mathscr{D}(X)$ при достаточно малых $r > 0$. Отсюда в силу непрерывности функционала $f \in \mathscr{D}'(X)$ получим

$$\langle f_r, \varphi \rangle = \int_X f_r(x)\varphi(x)\,dx = \int_X \langle f(y), \xi_r(x-y)\varphi(x) \rangle\,dx = \left\langle f(y), \int_X \xi_r(x)\varphi(y-x)\,dx \right\rangle.$$

Последний интеграл сходится равномерно к функции $\varphi(y)$ при $r \to 0$ вместе со всеми производными, т.е. сходится в пространстве $\mathscr{D}(X)$. Таким образом, применяя еще раз непрерывность функционала, получим $\lim_{r \to 0}\langle f_r, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$. □

Определение. Говорят, что функция $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ имеет производную $g \doteqdot \partial^\alpha f$ *в смысле Со́болева* на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, если $g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ и

$$\int_X g(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_X f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X).$$

По доказанной теореме производная в смысле Со́болева определяется однозначно с точностью до эквивалентности функций на множестве X.

Пространство Со́болева $\mathscr{W}_p^k(X)$ состоит из классов эквивалентности функций $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$, у которых производные в смысле Со́болева $\partial^\alpha f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$. Норма функции $f \in \mathscr{W}_p^k(X)$ в этом пространстве определяется по формуле

$$\|f\|_{\mathscr{W}_p^k} \doteqdot \sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_{\boldsymbol{L}_p}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}_+ \text{ и } 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Теорема. *Пространства Соболева $\mathscr{W}_p^k(X)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ являются ба́наховыми пространствами.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ является последовательностью Коши́ в пространстве $\mathscr{W}_p^k(X)$. Тогда $\{\partial^\alpha f_n\}$ будет последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{L}_p(X)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$. Так как $\boldsymbol{L}_p(X)$ полно, то последовательность $f_n \to f$ сходится и все производные $\partial^\alpha f_n \to g_\alpha$ сходятся в $\boldsymbol{L}_p(X)$ при $|\alpha| \leqslant k$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|\langle f_n - f, \varphi\rangle| \leqslant \int_X |f_n(x) - f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leqslant \|f_n - f\|_{\boldsymbol{L}_p}\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_q} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, где $1/p + 1/q = 1$. Следовательно, $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ и аналогично $\langle \partial^\alpha f_n, \varphi\rangle \to \langle g_\alpha, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Поэтому по определению производной в смысле Соболева получаем следующие равенства:

$$\langle g_\alpha, \varphi\rangle = \lim_n\langle \partial^\alpha f_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lim_n\langle f_n, \partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle$$

при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, т.е. $\partial^\alpha f = g_\alpha$. Таким образом, последовательность функций $f_n \to f$ сходится в пространстве $\mathscr{W}_p^k(X)$. □

Лемма. *Если обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(a,b)$ имеет $\partial^1 f = 0$, то $f = const$.*

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathscr{D}(a,b)$, т.ч. $\int_a^b \xi(x)\,dx = 1$. Всякая функция $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ допускает представление $\varphi(x) = \psi(x) + d\,\xi(x)$, где $d = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ и $\int_a^b \psi(x)\,dx = 0$. Тогда $\psi \in \mathscr{D}(a,b)$ является производной от основной функции $\psi_0(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt$. Поэтому $\langle f, \psi\rangle = -\langle f', \psi_0\rangle = 0$ и значит для всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$

$$\langle f, \varphi\rangle = d\,\langle f, \xi\rangle = \int_a^b \langle f, \xi\rangle\,\varphi(x)\,dx = \langle c, \varphi\rangle, \text{ где } c \doteqdot \langle f, \xi\rangle.$$

Следовательно, функционал равен $f = const$ на пространстве $\mathscr{D}(a,b)$. □

Теорема (о существовании первообразной)**.** *Для всякой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(a,b)$ существует обобщенная функция $g \in \mathscr{D}'(a,b)$, т.ч. $g' = f$.*

Доказательство. Вначале определим функционал $g \in \mathscr{D}'(a,b)$ на подпространстве $M \subset \mathscr{D}(a,b)$ всех функций $\psi = \varphi'$, где $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$, по формуле $\langle g, \varphi' \rangle \doteqdot -\langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$. Пусть $\xi \in \mathscr{D}(a,b)$, т.ч. $\int_a^b \xi(x)\,dx = 1$. Всякая функция $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ имеет представление в виде $\varphi(x) = \psi(x) + d\,\xi(x)$, где $d = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ и $\int_a^b \psi(t)\,dt = 0$. Заметим, что функция $\psi \in \mathscr{D}(a,b)$ является производной от основной функции $\psi_0(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt$, т.е. $\psi_0'(x) = \psi(x)$. Поэтому $\psi \in M$ и значит функционал g можно продолжить на все пространство $\mathscr{D}(a,b)$ по формуле

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle g, \psi \rangle + \langle g, \xi \rangle \int_a^b \varphi(t)\,dt = -\langle f, A\varphi \rangle + \langle c, \varphi \rangle\,,\ \varphi \in \mathscr{D}(a,b)\,,$$

где $c \doteqdot \langle g, \xi \rangle$ — константа и оператор $A\varphi(x) \doteqdot \psi(x) = \int_a^x \big(\varphi(y) - \xi(y) \int_a^b \varphi(t)\,dt\big)\,dy$ является непрерывным на пространстве $\mathscr{D}(a,b)$. Поэтому $g \in \mathscr{D}'(a,b)$. Кроме того, в силу леммы любая обобщенная функция, удовлетворяющая условию теоремы, отличается от g лишь на аддитивную постоянную. □

Определение. Функция $F : X \to \mathbb{F}$ называется *локально абсолютно непрерывной* на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$ и обозначается $F \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$, если она абсолютно непрерывна $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ на каждом отрезке $[a,b] \subset X$.

Теорема. *Для того чтобы существовала производная $\partial^1 f$ в смысле Соболева обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $F \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$, т.ч. $F = f$ п.в. на X.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим абсолютно непрерывную функцию $g(x) \doteqdot \int_a^x \partial^1 f(t)\,dt$ на отрезке $[a,b] \subset X$. По теореме Фубини при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$

$$\int_a^b g(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b \Big(\int_a^x \partial^1 f(t)\,dt\Big)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b \partial^1 f(t)\varphi(t)\,dt = \int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt\,.$$

Отсюда $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\varphi'(t)\,dt = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$. Следовательно, по лемме имеет место равенство $f = g + c$ п.в. на отрезке $[a,b] \subset X$. Поэтому существует функция $F \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$, т.ч. $F = f$ п.в. на множестве X.

Достаточность. Пусть $f = F$ п.в. на X, где $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ на каждом $[a,b] \subset X$. По формуле Ньютóна–Лéйбница $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$. Тогда при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b F(a)\varphi'(x)\,dx + \int_a^b \Big(\int_a^x F'(t)\,dt\Big)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b F'(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

Следовательно, $\partial^1 f = F'$ является производной в смысле Соболева функции f. □

Пусть $F : X \to \mathbb{F}$ имеет локально ограниченную вариацию на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$, т.е. $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ на каждом отрезке $[a,b] \subset X$. Обобщенная производная $\partial^1 F$ называется *обобщенной мерой* ν_F, поскольку значения функционала $\partial^1 F$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ совпадают с интегралом Лебéга–Стúлтьеса по мере ν_F

$$\langle \partial^1 F, \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle = -\int_X F(x)\varphi'(x)\,dx = \int_X \varphi(x)\,dF(x) = \int_X \varphi(x)\,d\nu_F(x)$$

Таким образом, если интеграл равен нулю для всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, то обобщенная производная $\partial^1 F = 0$ равна нулю. Тогда по лемме $F = const$ и, следовательно, мера $\nu_F = 0$. Следовательно, соответствие между борелевскими мерами ν_F на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$, конечными на каждом отрезке $[a,b] \subset X$, и соответствующими обобщенными производными $\partial^1 F$ является взаимно однозначным. Так, например, $\partial^1 \theta(x) = \delta(x)$ и значит δ-функция является обобщенной мерой.

Пример 2. Докажем, что δ-функция $\delta(x)$ не является регулярной на прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим основную функцию $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1/2$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$ и пусть $\varphi_n(x) \doteqdot \eta(nx)$. Если $\delta(x)$ регулярна, то для некоторой $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ получим $\langle \delta(x), \varphi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Однако это невозможно, поскольку $\varphi_n(x) \to 0$ при всех $x \neq 0$ и значит интеграл также стремится к нулю.

Пример 3. Обобщенная производная функции Хевиса́йда $\theta(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)$ равна $\partial^1 \theta(x) = \delta(x)$ δ-функции, которая нерегулярна на прямой $\mathbb{R}$. Поэтому функция Хевиса́йда $\theta(x)$ не имеет производной в смысле Со́болева.

2 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Определение. *Пространство Шва́рца* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется множество бесконечно дифференцируемых функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, у которых все следующие нормы

$$q_n(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha|\leqslant n, x\in\mathbb{R}^m} \big(1+\|x\|^2\big)^n |\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty, \quad n = 0, 1, \dots,$$

принимают конечное значение, где $\|x\| \doteqdot \big(\sum_{k=1}^m x_k^2\big)^{1/2}$ обозначает евклидову норму элемента $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Такие функции называются *быстро убывающими*. Локально выпуклая топология в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ определяется системой норм $\mathfrak{Q} = \{q_n\}_{n=0}^\infty$. Сопряженное пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ со слабой* топологией называется пространством *обобщенных функций медленного роста*.

Лемма. *Множество $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. Докажем лемму при $m = 1$. Выберем функцию $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, т.ч. $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1/2$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, и положим $\varphi_\nu(x) \doteqdot \eta(x/\nu)\varphi(x)$ для каждой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тогда $\varphi_\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и по формуле Ле́йбница мы имеем

$$\big|\partial^\alpha\big(\varphi_\nu(x) - \varphi(x)\big)\big| = \big|\partial^\alpha\big((\eta(x/\nu) - 1)\,\varphi(x)\big)\big| \ll \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \big|\partial^{\alpha-\beta}\big(\eta(x/\nu) - 1\big)\partial^\beta\varphi(x)\big|.$$

Для $\varepsilon > 0$ выберем k, т.ч. $(1+x^2)^n|\partial^\beta\varphi(x)| < \varepsilon$ при всех $|x| \geqslant k$ и $|\beta| \leqslant n$. Так как $\eta(x/\nu) - 1 = 0$ при всех $|x| \leqslant \nu/2$, то $(1+x^2)^n|\partial^\alpha\big(\varphi_\nu(x) - \varphi(x)\big)| \ll \varepsilon$ при всех $\nu \geqslant 2k$ и $|\alpha| \leqslant n$. Таким образом, получаем $q_n(\varphi_\nu - \varphi) \to 0$ при $\nu \to \infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. последовательность $\varphi_\nu \to \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\square$

Теорема. *Отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, которое каждому $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ ставит в соответствие $g \doteqdot f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}$, является инъективным и непрерывным.*

Доказательство. Пусть $K \Subset \mathbb{R}^m$, тогда $q_n(\varphi) \ll p_n(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Поэтому все полунормы $q_n \in \mathfrak{Q}$ допустимы и значит вложение $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно. Отсюда $g \doteqdot f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}$ является непрерывным функционалом, т.е. $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Докажем инъективность этого отображения. Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\langle f, \varphi\rangle = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. В силу леммы $\langle f, \varphi\rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, т.е. функционал $f = 0$ на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и, следовательно, отображение инъективно.

Если $U = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) \,|\, \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\langle f, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ слабая* окрестность нуля в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, то $V = \{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \,|\, \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\langle g, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ является слабой* окрестностью нуля в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $V \subset U$. Поэтому указанное отображение непрерывно. $\square$

Следствие. *Отображение $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, которое каждому $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ ставит в соответствие $g = f|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}$, является инъективным и непрерывным.*

Так как $p_{n,K}(\varphi) \leqslant q_n(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ будет непрерывным и значит отображение $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ непрерывно, а инъективность этого отображения следует из всюду плотности $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$.

Пример 1. Функция $f(x) \doteqdot e^{x^2}$ определяет регулярный функционал $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, который не имеет непрерывного продолжения на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, т.е. $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. В самом деле, пусть $\varphi(x) = e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. По лемме функции $\varphi_n(x) = \eta(x/n)\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ сходятся $\varphi_n \to \varphi$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Однако $\langle f, \varphi_n \rangle > \int_{-n/2}^{n/2} e^{x^2/2} dx > n \to \infty$.

Лемма (Шва́рца). *Для любого слабо* ограниченного множества $M \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ существуют $n \in \mathbb{N}$ и $c_n > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant c_n \boldsymbol{q}_n(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $f \in \boldsymbol{M}$.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда существуют последовательности $\{f_k\} \subset \boldsymbol{M}$ и $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $|\langle f_k, \varphi_k \rangle| > k\boldsymbol{q}_k(\varphi_k)$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Определим последовательность $\psi_k \doteqdot \varphi_k(x)/\sqrt{k}\boldsymbol{q}_k(\varphi_k)$. Тогда мы имеем $\boldsymbol{q}_n(\psi_k) \leqslant 1/\sqrt{k}$ при $k \geqslant n$. Поэтому $\psi_k \to 0$ в топологии $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. По принципу равностепенной непрерывности получим $\langle f_k, \psi_k \rangle \to 0$ при $k \to \infty$, что невозможно, т.к. $|\langle f_k, \psi_k \rangle| > \sqrt{k}$. □

Обозначим через $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}^m)$ пополнение пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ по норме $\boldsymbol{q}_n$. Так как $\boldsymbol{q}_n \leqslant \boldsymbol{q}_{n+1}$, то $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^m)$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^m) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\mathcal{S}'_n(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}'_{n+1}(\mathbb{R}^m)$ и выполняется равенство $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}'_n(\mathbb{R}^m) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, по лемме Шварца всякая обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста имеет конечный порядок.

1. *Каждой функции $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $(1 + \|x\|^2)^{-n} f(x) \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ при некотором $n \in \mathbb{Z}_+$, соответствует регулярный функционал $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста*

$$\langle f, \varphi \rangle \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Непрерывность этого функционала на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ вытекает из очевидного неравенства $|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant c_n \boldsymbol{q}_n(\varphi)$, где $c_n = \|(1 + \|x\|^2)^{-n} f(x)\|_{\boldsymbol{L}_1}$

Пример 2. Существуют регулярные обобщенные функции медленного роста, для которых не выполняется условие $(1 + \|x\|^2)^{-n} f(x) \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Примером такой функции является $f(x) = e^x \cos e^x$. В самом деле, рассмотрим функцию $g(x) = \sin e^x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, которая является регулярной обобщенной функцией медленного роста по свойству 1. Поэтому ее производная $g'(x) = f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Определение. Множество функций $g \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ найдутся $c_\alpha > 0$ и $n_\alpha \in \mathbb{N}$, для которых $|\partial^\alpha g(x)| \leqslant c_\alpha (1 + \|x\|^2)^{n_\alpha}$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$, обозначается через $\Theta(\mathbb{R}^m)$ и называется *пространством функций медленного роста*.

2. *Произведение обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ на функцию медленного роста $g \in \Theta(\mathbb{R}^m)$ определяется по формуле $\langle gf, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, g\varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.*

Непрерывность функционала gf на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ следует из непрерывности оператора $M_g(\varphi) \doteqdot g\varphi$ умножения на функцию g в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Докажем это при $m = 1$. Применяя формулу Лейбница из курса математического анализа, имеем

$$\boldsymbol{q}_n(g\varphi) = \sup_{\alpha \leqslant n, x \in \mathbb{R}} (1 + x^2)^n |\partial^\alpha g(x)\varphi(x)| \ll \sup_{\alpha \leqslant n, x \in \mathbb{R}} \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} (1 + x^2)^{n + n_{\alpha - \beta}} |\partial^\beta \varphi(x)|.$$

Отсюда $\boldsymbol{q}_n(g\varphi) \ll \boldsymbol{q}_{n+m_n}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, где $m_n = \max_{\alpha \leqslant n} n_\alpha$. Произведение на функцию медленного роста можно обосновывать соответствующим равенством для регулярных функционалов медленного роста:

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} (g(x)f(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,(g(x)\varphi(x))\,dx = \langle f, g\varphi \rangle\,.$$

3. *Операторы сдвига и растяжения обобщенной функции* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ *определяются по формулам* $\langle \tau_a f, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle$ *и* $\langle \rho_\lambda f, \varphi \rangle \doteqdot |\lambda|^{-m} \langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi \rangle$ *при всех* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ *и* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, *где* $\tau_{-a}\varphi(x) \doteqdot \varphi(x+a)$ *и* $\rho_{\lambda^{-1}}\varphi(x) \doteqdot \varphi(\lambda x)$.

Непрерывность функционалов $\tau_a f$ и $\rho_\lambda f$ вытекает из непрерывности операторов сдвига $\tau_{-a}\varphi$ и растяжения $\rho_{\lambda^{-1}}\varphi$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, так как $\boldsymbol{q}_n(\tau_{-a}\varphi) = \boldsymbol{q}_n(\varphi)$ и $\boldsymbol{q}_n(\rho_{\lambda^{-1}}\varphi) = \boldsymbol{q}_n(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Эти формулы можно обосновывать также следующими равенствами для регулярных функционалов медленного роста:

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-a)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x+a)\,dx = \langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle\,,$$

$$\langle \rho_\lambda f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda^{-1}x)\varphi(x)\,dx = |\lambda|^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(\lambda x)\,dx = |\lambda|^{-m} \langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi \rangle\,.$$

4. *Пусть* $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *линейное преобразование с определителем* $\det A \neq 0$. *Тогда замена переменных* $y = Ax$ *в обобщенной функции* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ *определяется по формуле* $\langle T_A f, \varphi \rangle \doteqdot |\det A|\,\langle f, T_{A^{-1}}\varphi \rangle$ *при всех* $\varphi \in \mathcal{S}(X)$, *где* $T_{A^{-1}}\varphi(x) = \varphi(Ax)$.

Непрерывность функционала $T_A f$ вытекает из непрерывности оператора замены переменных $T_{A^{-1}}\varphi$ на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Эту формулу можно обосновывать следующим равенством для регулярных функционалов медленного роста:

$$\langle T_A f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(A^{-1}y)\varphi(y)\,dy = |\det A| \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(Ax)\,dx = |\det A|\,\langle f, T_{A^{-1}}\varphi \rangle\,.$$

5. *Производная* $\partial^\alpha f$ *обобщенной функции* $f \in \mathcal{S}'(X)$ *определяется по формуле* $\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle \doteqdot (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle$ *для всех функций* $\varphi \in \mathcal{S}(X)$.

Непрерывность функционала $\partial^\alpha f$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ следует из непрерывности оператора дифференцирования $\partial^\alpha \varphi$ на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Эту формулу можно обосновывать следующим равенством для регулярных функционалов медленного роста, у которых производная $\partial^\alpha f$ является регулярным функционалом медленного роста:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial^\alpha f(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\partial^\alpha \varphi(x)\,dx$$

6. *Формула дифференцирования произведения обобщенной функции* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ *на функцию* $g \in \Theta(\mathbb{R}^m)$ *медленного роста выражается формулой Лейбница*

$$\partial^\alpha(gf) = \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta}\,\partial^{\alpha-\beta} g\,\partial^\beta f\,,$$

где $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \ldots \binom{\alpha_m}{\beta_m} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}$ *биномиальные коэффициенты,* $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_m!$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$ *мультииндексы. При этом* $\beta \leqslant \alpha$, *если* $\beta_k \leqslant \alpha_k$ *при всех* $k = 1, \ldots, m$.

Докажем формулу при $m=1$. Применяя обычную формулу Ле́йбница из курса математического анализа, при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ получим следующее равенство

$$\langle \partial(gf), \varphi\rangle = -\langle f, g(\partial\varphi)\rangle = \langle f, (\partial g)\varphi - \partial(g\varphi)\rangle = \langle (\partial g)f, \varphi\rangle + \langle g(\partial f), \varphi\rangle.$$

Поэтому $\partial(gf) = (\partial g)f + g(\partial f)$. Далее по индукции получим

$$\partial^{\alpha+1}(gf) = \partial^{\alpha}((\partial g)f + g(\partial f)) = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha+1-\beta}g\,\partial^{\beta}f + \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}g\,\partial^{\beta+1}f =$$

$$= \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha+1-\beta}g\,\partial^{\beta}f + \sum_{1\leqslant\beta\leqslant\alpha+1}\binom{\alpha}{\beta-1}\partial^{\alpha+1-\beta}g\,\partial^{\beta}f = \sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha+1}\binom{\alpha+1}{\beta}\partial^{\alpha+1-\beta}g\,\partial^{\beta}f,$$

так как $\binom{\alpha}{\beta} + \binom{\alpha}{\beta-1} = \binom{\alpha+1}{\beta}$ при всех $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, и утверждение доказано.

Определение. Пусть $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k$ скалярное произведение векторов $x,y\in\mathbb{R}^m$, тогда $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Для всех функций $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ полагаем

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy, \quad \varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}.$$

Линейные операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* функции $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$.

Пример 3. Функция $h_0(x) = \boldsymbol{e}^{-x^2/2}$ является собственной функцией оператора Фурье́ с собственным значением 1, т.е. $\mathcal{F}(h_0) = h_0$. В самом деле, имеем

$$\widehat{h_0}(x) = \varkappa\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{-\frac{y^2}{2}-\boldsymbol{i}xy}dy = \varkappa\boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\frac{(y+\boldsymbol{i}x)^2}{2}}dy = \varkappa\boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\frac{y^2}{2}}dy = h_0(x),$$

т.к. по теореме Коши́ $\int_{\Im z = x}\boldsymbol{e}^{-z^2/2}dz = \int_{\Im z=0}\boldsymbol{e}^{-z^2/2}dz = \int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-y^2/2}dy = \sqrt{2\pi}$.

Теорема. *Оператор Фурье́ $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в пространстве Шва́рца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным и биективным .*

Доказательство. В силу теоремы Фубини многомерное преобразование Фурье является композицией одномерных преобразований. Поэтому достаточно доказать непрерывность при $m=1$. Дифференцируя и интегрируя по частям,

$$\partial^{\alpha}\widehat{\varphi}(x) = \varkappa\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)(-\boldsymbol{i}y)^{\alpha}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy}dy, \quad \widehat{\partial^{\alpha}\varphi}(x) = (\boldsymbol{i}x)^{\alpha}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy}dy.$$

Отсюда $(1+x^2)^n\partial^{\alpha}\widehat{\varphi}(x) = \mathcal{F}\{(1-\partial^2)^n(-\boldsymbol{i}y)^{\alpha}\varphi(y)\}$ и значит для всех $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\boldsymbol{q}_n(\widehat{\varphi}) = \sup_{\alpha\leqslant n, x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^n|\partial^{\alpha}\widehat{\varphi}(x)| \leqslant \varkappa\sup_{\alpha\leqslant n}\int_{\mathbb{R}}|(1-\partial^2)^n y^{\alpha}\varphi(y)|\,dy \ll \boldsymbol{q}_{2n}(\varphi).$$

Таким образом, имеет место неравенство $\boldsymbol{q}_n(\widehat{\varphi}) \ll \boldsymbol{q}_{2n}(\varphi)$. Аналогичное неравенство $\boldsymbol{q}_n(\widehat{\varphi}) \ll \boldsymbol{q}_{2nm}(\varphi)$ верно при любом m, т.е. отображение $\mathcal{F}$ является непрерывным. Для доказательства биективности покажем, что $\widetilde{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(x)$.

В силу теоремы Фубини достаточно проверить это равенство в случае $m=1$.

$$\widetilde{\widehat{\varphi}}(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(y)\,e^{ixy-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)e^{-iyz}dz\Big)\,e^{ixy-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy=$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\Big(\int_{\mathbb{R}}e^{-i(z-x)y-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy\Big)\,dz=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varkappa^2}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\Big(\int_{\mathbb{R}}e^{-i(\frac{z-x}{\varepsilon})y-\frac{y^2}{2}}dy\Big)\,dz=$$

$$\text{(см. пример 3)}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varkappa}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)^2}dz=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\varphi(x+\varepsilon t)e^{-\frac{t^2}{2}}dz=\varphi(x)\,.$$

Аналогично имеем $\widehat{\widetilde{\varphi}}(x)=\varphi(x)$. Отсюда композиция операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ совпадает с тождественным оператором, т.е. $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}\cdot\mathcal{F}=I$. Таким образом, преобразование Фурье является биективным в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. □

Определение. Для каждой обобщенной функции $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста по определению полагаем, что $\langle\widehat{f},\varphi\rangle\doteqdot\langle f,\widehat{\varphi}\rangle$ и $\langle\widetilde{f},\varphi\rangle\doteqdot\langle f,\widetilde{\varphi}\rangle$ при всех $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Линейные операторы $\mathcal{F}(f)\doteqdot\widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f)\doteqdot\widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* обобщенной функции $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста.

Непрерывность функционалов $\widehat{f}$ и $\widetilde{f}$ на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ вытекает из выше доказанной теоремы, т.к. функционалы, определенные правой частью указанных равенств, являются непрерывными на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Следовательно, они представляют собой обобщенные функции медленного роста $\widehat{f},\widetilde{f}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Теорема. *Оператор Фурье́ $\mathcal{F}:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ в пространстве обобщенных функций медленного роста $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ является биективным и непрерывным.*

Доказательство. Так как преобразование Фурье́ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным, то $\widehat{f},\widetilde{f}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, если $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, а так как является биективным, то

$$\langle\widetilde{\widehat{f}},\varphi\rangle=\langle f,\widehat{\widetilde{\varphi}}\rangle=\langle f,\varphi\rangle\ \text{ и }\ \langle\widehat{\widetilde{f}},\varphi\rangle=\langle f,\widetilde{\widehat{\varphi}}\rangle=\langle f,\varphi\rangle\ \text{ при всех }\ \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Отсюда $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}\cdot\mathcal{F}=I$ будет тождественным оператором в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и поэтому оператор Фурье является биективным в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $U=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)|\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\langle f,\varphi_k\rangle|<\varepsilon\}$ слабая* окрестность нуля в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Тогда $\mathcal{F}^{-1}U=\{g\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)|\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\langle g,\widehat{\varphi}_k\rangle|<\varepsilon\}$ является слабой* окрестностью нуля в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Поэтому отображение $\mathcal{F}$ непрерывно. □

Теорема. *Преобразование Фурье обобщенной функции $f\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ совпадает $\widehat{f}=g|_{\mathbb{R}^m}$ п.в. с сужением на $\mathbb{R}^m$ целой функции медленного роста*

$$g(z)=\varkappa^m\big\langle f(y),e^{-i\langle z,y\rangle}\big\rangle\,,\quad z=(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{C}^m\,.$$

Доказательство. Пусть $e_j\doteqdot\{\delta_{ij}\}_{i=1}^m$, $j=1,\dots,m$, стандартный базис в $\mathbb{C}^m$. Так как функции $\zeta_h(y)=(e^{-i\langle z+e_jh,y\rangle}-e^{-i\langle z,y\rangle})/h$ и все их производные сходятся равномерно при $h\to0$ на каждом компакте $K\Subset\mathbb{R}^m$, т.е. сходятся в пространстве $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$, то

$$\partial_{z_j}g(z)=\varkappa^m\lim_{h\to0}\big\langle f(y),(e^{-i\langle z+e_jh,y\rangle}-e^{-i\langle z,y\rangle})/h\big\rangle=\varkappa^m\big\langle f(y),(-iy_j)e^{-i\langle z,y\rangle}\big\rangle\,.$$

Поэтому функция $g(z)$ имеет комплексные производные первого порядка при всех $z \in \mathbb{C}^m$ и значит является целой в $\mathbb{C}^m$. При этом комплексные производные любого порядка выражаются по формуле $\partial_z^\alpha g(z) = \varkappa^m \langle f(y), (-\boldsymbol{i}y)^\alpha \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle z,y\rangle} \rangle$.

Аппроксимируем интеграл Фурье функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ суммами Ри́мана

$$\widehat{\varphi}(x) = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}\, dy = \varkappa^m \lim_{t\to+0} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^m} \varphi(t\nu)) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,t\nu\rangle} t^m .$$

Эти суммы Ри́мана сходятся равномерно на каждом компакте $K \Subset \mathbb{R}^m$ вместе со всеми производными, т. е. сходятся в пространстве $\mathscr{E}(\mathbb{R}^m)$. Следовательно, в силу непрерывности функционала $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \Big\langle f(x), \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \Big\rangle = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(x), \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \rangle \varphi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(y)\, dy .$$

Таким образом, $\widehat{f} = g|_{\mathbb{R}^m}$. Поэтому обобщенная функция $\widehat{f}$ регулярна и совпадает с целой функцией $g(z)$ на $\mathbb{R}^m$. В силу указанной выше формулы дифференцирования и непрерывности функционала $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ найдутся $n \in \mathbb{N}$ и компакт $K \Subset \mathbb{R}^m$, т.ч.

$$|\partial^\alpha g(x)| = \big|\big\langle f(y), y^\alpha \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \big\rangle\big| \ll \sup_{|\beta|\leqslant n; y\in K} \big|\partial^\beta \big(y^\alpha \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}\big)\big| \ll (1+\|x\|^2)^n .$$

Отсюда преобразование Фурье́ $\widehat{f} = g|_{\mathbb{R}^m} \in \Theta(\mathbb{R}^m)$ функция медленного роста. □

Рассмотрим формулы преобразования Фурье́ обобщенных функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

1. *Если $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ и удовлетворяет условию $(1+\|x\|^2)^{-n} f(x) \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, то ее преобразование Фурье вычисляется по формуле*

$$\widehat{f}(x) = \lim_{r\to\infty} \int_{\|x\|\leqslant r} f(y) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} dy \quad \text{при п.в. } x \in \mathbb{R}^m .$$

Действительно, функция f определяет регулярный функционал на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\theta(r - \|x\|) f(x) \to f(x)$ сходится слабо* в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ при $r \to \infty$. В силу слабо* непрерывности преобразования Фурье $\mathcal{F}(\theta(r-\|y\|) f(y)) \to \mathcal{F}(f)$ сходится слабо* в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ при $r \to \infty$. Отсюда вытекает указанная формула.

2. *Формула сдвига. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x-a)$, где $a \in \mathbb{R}^m$, то*

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-\boldsymbol{i}\langle a,x\rangle} \mathcal{F} f(x) , \quad \tau_a \mathcal{F} f = \mathcal{F}(e^{\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle} f) .$$

Для всех функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ формулы легко доказываются, применяя замену переменных в интеграле преобразования Фурье́. Используя эти формулы, получим следующие равенства:

$$\langle \mathcal{F}(\tau_a f), \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle f, \mathcal{F}(e^{-\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle}\varphi) \rangle = \langle e^{-\boldsymbol{i}\langle a,x\rangle} \mathcal{F} f, \varphi \rangle .$$

Аналогично доказывается вторая формула для всех функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\langle \tau_a(\mathcal{F} f), \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi) \rangle = \langle f, e^{\boldsymbol{i}\langle a,x\rangle}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}(e^{\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle} f), \varphi \rangle .$$

3. *Формула замены переменных. Пусть* $A:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ *невырожденный линейный оператор и* $T_A\varphi(x)\doteqdot\varphi(A^{-1}x)$*. Тогда если* $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$*, то имеют место формулы*

$$\mathcal{F}(T_Af)=|\det A'|\,T_{A'^{-1}}(\mathcal{F}f),\quad T_A(\mathcal{F}f)=|\det A'|\,\mathcal{F}(T_{A'^{-1}}f).$$

В этих формулах сопряженный оператор $A':\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ *однозначно определяется равенством* $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A'y\rangle$ *при всех* $x,y\in\mathbb{R}^m$.

В самом деле, применяя формулы замены переменных в обобщенной функции для всех функций $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим следующие равенства:

$$\langle\mathcal{F}(T_Af),\varphi\rangle=|\det A|\,\langle f,T_{A^{-1}}(\mathcal{F}\varphi)\rangle=\langle f,\mathcal{F}(T_{A'}\varphi)\rangle=|\det A'|\,\langle T_{A'^{-1}}\mathcal{F}f,\varphi\rangle.$$

Аналогично доказывается вторая формула для всех функций $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\langle T_A(\mathcal{F}f),\varphi\rangle=|\det A|\,\langle f,\mathcal{F}(T_{A^{-1}}\varphi)\rangle=\langle f,T_{A'}(\mathcal{F}\varphi)\rangle=|\det A'|\,\langle\mathcal{F}(T_{A'^{-1}}f),\varphi\rangle.$$

4. *Формула дифференцирования. Если* $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$*, то для любого* $\alpha\in\mathbb{Z}_+^m$

$$\partial^\alpha(\mathcal{F}f)=\mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha f(y)),\quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f)=(\boldsymbol{i}x)^\alpha\mathcal{F}f(x),$$

где производные берутся в смысле обобщенных функций медленного роста.

При помощи дифференцирования и интегрирования по частям преобразования Фурьé, эти формулы нетрудно доказать для всех функций $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому, используя определение производной и преобразования Фурьé, получим

$$\langle\partial^\alpha(\mathcal{F}f),\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\mathcal{F}(\partial^\alpha\varphi)\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,(\boldsymbol{i}x)^\alpha\mathcal{F}\varphi\rangle=\langle\mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha f(y)),\varphi\rangle.$$

Аналогично доказывается вторая формула для всех функций $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\langle\mathcal{F}(\partial^\alpha f),\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha(\mathcal{F}\varphi)\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha\varphi)\rangle=\langle(\boldsymbol{i}x)^\alpha\mathcal{F}f(y)),\varphi\rangle.$$

5. *Формула для многочлена. Если* $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$*,* $P(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant n}a_\alpha x^\alpha$ *многочлен и* $P(\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant n}a_\alpha\partial^\alpha$ *соответствующий дифференциальный оператор, то*

$$\mathcal{F}(Pf)=P(\boldsymbol{i}\partial)\mathcal{F}f,\quad \mathcal{F}(P(\partial)\,f)=P(\boldsymbol{i}x)\mathcal{F}f(x).$$

В силу свойства линейности преобразования Фурьé $\mathcal{F}$ эти формулы являются простым следствием из доказанных выше формул дифференцирования.

Пример 4. Преобразование Фурьé производной $\partial^\alpha\delta(x)$ от δ-функции. В силу определения преобразования Фурьé и производной для всех $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\langle\mathcal{F}\partial^\alpha\delta(x),\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle\delta(x),\partial^\alpha\mathcal{F}\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\mathcal{F}\varphi(0)=\varkappa^m\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)\,(\boldsymbol{i}y)^\alpha dy.$$

Таким образом, имеет место следующая формула $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta(x))=\varkappa^m(\boldsymbol{i}y)^\alpha$. Заметим, что эту формулу легко также получить, применяя указанную выше теорему.

Используя обращение преобразования Фурье, получаем преобразование Фурье степени $\mathcal{F}^{-1}((\boldsymbol{i}y)^\alpha)=\varkappa^{-m}\partial^\alpha\delta(x)$ и $\mathcal{F}(y^\alpha)=\mathcal{F}^{-1}((-y)^\alpha)=\varkappa^{-m}\boldsymbol{i}^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta(x)$.

3 ПРОИЗВЕДЕНИЕ И СВЕРТКА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $X_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $X_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$, $X = X_1 \times X_2 \subset \mathbb{R}^m$ открытые множества, где $m = m_1 + m_2$.

Определение. *Тензорным произведением* $f \otimes g$ обобщенных функций $f \in \mathscr{D}'(X_1)$ и $g \in \mathscr{D}'(X_2)$ называется функционал $\langle f \otimes g, \varphi \rangle \doteqdot \big\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle \big\rangle$, где $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.

Лемма. *a) Если обобщенная функция $g \in \mathscr{D}'(X_2)$, то каждой функции $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ соответствует основная функция $\varphi_1(x) \doteqdot \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle$, ее производная будет равна $\partial^\alpha \varphi_1(x) \doteqdot \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\rangle$, эта операция непрерывна из $\mathscr{D}(X)$ в $\mathscr{D}(X_1)$.*

b) Если $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{m_2})$, то каждой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ соответствует быстро убывающая функция $\varphi_1(x) \doteqdot \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_1})$, ее производная будет равна $\partial^\alpha \varphi_1(x) \doteqdot \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\rangle$, эта операция непрерывна из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_1})$.

Доказательство. Пусть $e_j \doteqdot \{\delta_{ij}\}$ стандартный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^{m_1}$. Тогда функции $\big(\varphi(x+te_j,y) - \varphi(x,y)\big)/t$ сходятся к $\partial_{x_j}\varphi(x,y)$ при $t \to 0$ равномерно относительно переменной $y \in X_2$. Если $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, то эти функции сходятся в $\mathscr{D}(X_2)$, а если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то они сходятся в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_2})$. Поэтому, используя непрерывность функционала g, мы получим равенство $\partial_{x_j}\varphi_1(x) = \langle g, \partial_{x_j}\varphi(x,y)\rangle$. Применяя снова эти рассуждения к полученной формуле, имеем $\partial^\alpha \varphi_1(x) \doteqdot \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\rangle$.

a) Пусть компакт $K = K_1 \times K_2 \Subset X$ и $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. Если $x \notin K_1$, то $(x,y) \notin K$ при всех $y \in K_2$. Значит $\varphi_1(x) = 0$, т.е. $\varphi_1 \in \mathscr{D}(K_1)$. Применяя непрерывность функционала $g \in \mathscr{D}'(X_2)$ заключаем, что существуют $n \geqslant k$ и $c_n > 0$, т.ч. при всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k; x\in K_1} \big|\partial^\alpha \varphi_1(x)\big| = \sup_{|\alpha|\leqslant k; x\in K_1} \big|\big\langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y)\big\rangle\big| \leqslant c_n \sup_{|\alpha|,|\beta|\leqslant n; (x,y)\in K} \big|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)\big|.$$

Так как последняя верхняя грань не превосходит $\boldsymbol{p}_n(\varphi)$, то она будет допустимой полунормой и значит операция непрерывна из $\mathscr{D}(X)$ в $\mathscr{D}(X_1)$.

b) Пусть функция $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Применяя непрерывность функционала $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_2})$, заключаем, что существуют $n \geqslant k$ и $c_n > 0$, т.ч. при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k; x\in \mathbb{R}^{m_1}} (1+\|x\|^2)^k \big|\partial^\alpha \varphi_1(x)\big| \leqslant c_n \sup_{|\alpha|,|\beta|\leqslant n; (x,y)\in \mathbb{R}^m} (1+\|x\|^2)^n (1+\|y\|^2)^n \big|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)\big|.$$

Так как $(1+\|x\|^2)^n(1+\|y\|^2)^n \leqslant (1+\|x\|^2+\|y\|^2)^{2n}$, то последняя верхняя грань не превосходит $\boldsymbol{q}_{2n}(\varphi)$. Значит операция непрерывна из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_1})$. □

В силу этой леммы определение тензорного произведения является корректным; a) если $f \in \mathscr{D}'(X_1)$ и $g \in \mathscr{D}'(X_2)$, то $f \otimes g \in \mathscr{D}'(X)$; b) если $f \in \mathscr{E}'(X_1)$ и $g \in \mathscr{E}'(X_2)$, то $f \otimes g \in \mathscr{E}'(X)$; c) если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_1})$ и $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_2})$, то $f \otimes g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Аналогично определяется тензорное произведение трех и более обобщенных функций

$$\langle f \otimes g \otimes h, \varphi \rangle \doteqdot \big\langle f(x), \big\langle g(y), \langle h(z), \varphi(x,y,z)\rangle \big\rangle \big\rangle, \text{ где } \varphi \in \mathscr{D}(X),\ X = X_1 \times X_2 \times X_3.$$

Из следующих свойств ассоциативности и коммутативности тензорного произведения вытекает, что эти определения не зависят от порядка обобщенных функций.

1. *Ассоциативность* $(f\otimes g)\times h = f\otimes g\otimes h = f\otimes(g\otimes h)$.

Действительно, пусть функция $\varphi\in\mathscr{D}(X)$, где $X = X_1\times X_2\times X_3$, тогда имеем

$$\langle (f\otimes g)\otimes h,\varphi\rangle = \big\langle f(x),\big\langle g(y),\langle h(z),\varphi(x,y,z)\rangle\big\rangle\big\rangle = \langle f\otimes(g\otimes h),\varphi\rangle\,.$$

2. *Коммутативность* $f\otimes g = g\otimes f$.

Действительно, равенство $f\otimes g = g\otimes f$ выполняется на множестве $M\subset\mathscr{D}(X)$ всех произведений вида $\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$, где $\varphi_1\in\mathscr{D}(X_1)$ и $\varphi_2\in\mathscr{D}(X_2)$, т.к.

$$\big\langle f(x),\langle g(y),\varphi_1(x)\varphi_2(y)\rangle\big\rangle = \langle f,\varphi_1\rangle\,\langle g,\varphi_2\rangle = \big\langle g(y),\langle f(x),\varphi_1(x)\varphi_2(y)\rangle\big\rangle\,.$$

Пусть $\xi_\varepsilon(x,y)=\xi^1_\varepsilon(x)\xi^2_\varepsilon(y)$ — произведение аппроксимативных единиц. Поскольку $\langle f(t)\otimes g(s),\xi_\varepsilon(x-t,y-s)\rangle = \langle g(s)\otimes f(t),\xi_\varepsilon(x-t,y-s)\rangle$, то, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, при помощи леммы регуляризации получим $f\otimes g = g\otimes f$.

3. *Дифференцирование произведения* $\partial^\alpha_x\partial^\beta_y(f\otimes g) = \partial^\alpha_x f(x)\otimes\partial^\beta_y g(y)$.

Действительно, используя определение производной и лемму, мы получим

$$\langle\partial^\alpha_x\partial^\beta_y(f\otimes g),\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\big\langle f_1,\langle f_2,\partial^\alpha_x\partial^\beta_y\varphi\rangle\big\rangle = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\big\langle f_1,\partial^\alpha_x\langle f_2,\partial^\beta_y\varphi\rangle\big\rangle\,.$$

4. *Умножение на функции* $\varphi_1(x)\in\boldsymbol{C}^\infty(X_1)$ *и* $\varphi_2(y)\in\boldsymbol{C}^\infty(X_2)$. *Операция сдвига, которая на основных функциях имеет вид* $\tau_{(x_0,y_0)}\varphi(x,y)=\varphi(x-x_0,y-y_0)$.

$$\varphi_1\varphi_2(f\otimes g) = \varphi_1(x)f(x)\otimes\varphi_2(y)g(y)\,,\quad \tau_{(x_0,y_0)}(f\otimes g) = \tau_{x_0}f(x)\otimes\tau_{y_0}g(y)\,.$$

Эти формулы вытекает из определения произведения, умножения и сдвига.

5. *Носитель произведения* $\operatorname{supp}(f\otimes g)=\operatorname{supp}f\times\operatorname{supp}g$.

В самом деле, если $x_0\in\operatorname{supp}f$ и $y_0\in\operatorname{supp}g$, то для любых окрестностей этих точек существуют такие функции $\varphi_1\in\mathscr{D}(X_1)$ и $\varphi_2\in\mathscr{D}(X_2)$, которые имеют носители соответственно в этих окрестностях, $\langle f,\varphi_1\rangle\neq 0$ и $\langle g,\varphi_2\rangle\neq 0$. Тогда выполняется неравенство $\langle f\otimes g,\varphi_1\varphi_2\rangle = \langle f,\varphi_1\rangle\,\langle g,\varphi_2\rangle\neq 0$ и значит $(x_0,y_0)\in\operatorname{supp}(f\otimes g)$.

Обратно, если точка $(x_0,y_0)\in\operatorname{supp}(f\otimes g)$, то для всякой окрестности этой точки существует такая функция $\varphi\in\mathscr{D}(X)$, у которой носитель будет находиться в этой окрестности и при этом $\langle f\otimes g,\varphi\rangle = \langle f(x),\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle\neq 0$. Отсюда следует, что $\langle g(y),\varphi(x_0,y)\rangle\neq 0$ при некотором x_0. В силу свойства коммутативности получим, что $\langle f(x),\varphi(x,y_0)\rangle\neq 0$ при некотором y_0. Поэтому $x_0\in\operatorname{supp}f$ и $y_0\in\operatorname{supp}g$.

6. *Обобщенная функция* $f\in\mathscr{D}'(X)$ *не зависит от* $x\in X_1$, *если* $f(x,y)=1(x)\otimes g(y)$ *и* $g\in\mathscr{D}'(X_2)$. *В этом случае имеет место следующая формула:*

$$\langle 1\otimes g,\varphi\rangle = \int_{X_1}\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\,dx = \langle g(y),\int_{X_1}\varphi(x,y)\,dx\rangle = \langle g\otimes 1,\varphi\rangle\,.$$

В частности, если $1\otimes g = 0$, то обобщенная функция $g=0$, т.к. полагая в этой формуле $\varphi(x,y)=\xi(x)\varphi_2(y)$, мы получим $\langle g,\varphi_2\rangle = 0$ при всех $\varphi_2\in\mathscr{D}(X_2)$.

Если $f,g\in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$ и один из следующих интегралов существует при п.в. $x\in\mathbb{R}^m$

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,g(x-y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\,g(y)\,dy,$$

то функция $f*g$ называется *сверткой* двух локально интегрируемых функций. Здесь функция $h(x,y)=f(y)g(x-y)$ будет измеримой по Лебегу, как функция двух переменных, т.к. при отображении $(x,y)\to(y,x-y)$ измеримые множества переходят в измеримые, а измеримость $f(x)g(y)$ известна.

Для того чтобы свертка $f*g\in\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$, достаточно ограниченности следующего множества $D_r \doteqdot \{(x,y)\in\mathbb{R}^{2m}\mid x\in\operatorname{supp} f,\ y\in\operatorname{supp} g,\ x+y\in \boldsymbol{S}_r\}$, где $\boldsymbol{S}_r$ шар радиуса $r>0$ в $\mathbb{R}^m$. Это так, например, если носители $\operatorname{supp} f$ и $\operatorname{supp} g$ ограничены в $\mathbb{R}^m$. В самом деле, если $D_r\subset \boldsymbol{S}_a\times\boldsymbol{S}_b$, то по теореме Фуби́ни

$$\int_{\boldsymbol{S}_r}|f*g(x)|\,dx\leqslant\int_{D_r}|f(y)g(z)|\,dydz\leqslant\int_{\boldsymbol{S}_a}|f(y)|\,dy\int_{\boldsymbol{S}_b}|g(z)|\,dz.$$

Другим достаточным условием существования свертки является $f\in\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^m)$ и $g\in\boldsymbol{L}_q(\mathbb{R}^m)$ при $1\leqslant 1/p+1/q\leqslant 2$. В случае $1/p+1/q=1$ по неравенству Гельдера

$$\|f*g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^m}\left|\int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)\,dy\right|\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}\|g\|_{\boldsymbol{L}_q}.$$

В случае $1/p+1/q=2$, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\|f*g\|_{\boldsymbol{L}_1}=\int_{\mathbb{R}^m}\left|\int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)\,dy\right|dx\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_1}\|g\|_{\boldsymbol{L}_1}.$$

В общем случае полагаем $1/r=1/p+1/q-1$ и выберем числа $s,t\geqslant 1$, т.ч. $1/s=1/p-1/r$ и $1/t=1/q-1/r$. Поэтому имеет место равенство $1/r+1/s+1/t=1$. Применяя обобщенное неравенство Гельдера к внутреннему интегралу, получим

$$\int_{\mathbb{R}^m}\big|f*g(x)\big|^r\,dx\leqslant\int_{\mathbb{R}^m}\left|\int_{\mathbb{R}^m}\Big(|f(y)|^{\frac{p}{r}}|g(x-y)|^{\frac{q}{r}}\Big)|f(y)|^{\frac{r-p}{r}}|g(x-y)|^{\frac{r-q}{r}}\,dy\right|^r dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}|f(y)|^p|g(x-y)|^q\,dy\Big(\int_{\mathbb{R}^m}|f(y)|^p\,dy\Big)^{\frac{r}{s}}\Big(\int_{\mathbb{R}^m}|g(x-y)|^q dy\Big)^{\frac{r}{t}}\,dx.$$

Поскольку по условию $1+r/s=r/p$ и $1+r/t=r/q$, то имеет место неравенство $\|f*g\|_{\boldsymbol{L}_r}\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}\|g\|_{\boldsymbol{L}_q}$. Это оценка называется *неравенством Юнга*.

Заметим, что если свертка локально интегрируемых функций $f*g\in\boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$, то она определяет регулярный функционал на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ по формуле

$$\langle f*g,\varphi\rangle\doteqdot\int_{\mathbb{R}^m} f*g(x)\varphi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^m}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)\,dy\Big)\,\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(x-y)\varphi(x)\,dx\Big)\,dy=\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(y)g(z)\varphi(y+z)\,dydz,$$

Здесь мы применили теорему Фубини и сделали замену переменных $z=x-y$ во внутреннем интеграле. Последнюю формулу можно взять за определение свертки.

Таким образом, для существования свертки функций $f, g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R}^m)$, необходимо и достаточно, чтобы функционал тензорного произведения $f \otimes g$ распространялся на все функции вида $\varphi(x+y)$, где $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ произвольная функция.

Определение. *Сверткой* двух обобщенных функций $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ называется линейный непрерывный функционал $f * g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, определенный по формуле

$$\langle f * g, \varphi \rangle \doteqdot \langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x+y) \rangle = \big\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \big\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m).$$

Говорят, что свертка $f * g$ существует, если функционал тензорного произведения $f \otimes g$ допускает продолжение на множество функций вида $\varphi(x+y)$, где $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ произвольная функция. Это продолжение должно быть линейным и непрерывным, т.е. если $\varphi_n \to 0$ в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, то $\langle f(x) \otimes g(y), \varphi_n(x+y) \rangle \to 0$. Заметим, что тензорное произведение не зависит от порядка множителей и все функции вида $\varphi(x+y)$ симметричны относительно переменных x и y. Поэтому продолжение также не должно зависеть от порядка множителей тензорного произведения.

Используя это свойство коммутативности, покажем, что продолжение является единственным. Если функционал $f \otimes g$ имеет два различных продолжения, то, взяв их разность, получим, что $f \otimes g = 0$ в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2m})$ и существует $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т. ч. $\langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x+y) \rangle = \big\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \big\rangle \neq 0$. Следовательно, $\langle g(y), \varphi(x_0+y) \rangle \neq 0$ при некотором x_0, а из коммутативности $\langle f(x), \varphi(x+y_0) \rangle \neq 0$ при некотором y_0. Отсюда следует $f \otimes g \neq 0$, что невозможно.

Аналогичным образом определяется свертка трех и более обобщенных функций

$$\langle f * g * h, \varphi \rangle \doteqdot \langle f(x) \otimes g(y) \otimes h(z), \varphi(x+y+z) \rangle = \Big\langle f(x), \big\langle g(y), \langle h(z), \varphi(x+y+z) \rangle \big\rangle \Big\rangle,$$

где $f, g, h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. При этом продолжение тензорного произведения $f(x) \otimes g(y) \otimes h(z)$ на множество функций вида $\varphi(x+y+z)$ должно быть линейным, непрерывным и не зависеть от порядка множителей. Поэтому, рассуждая как и выше, получим единственность такого продолжения. Кроме того, из определения вытекает, что необходимым условием для существования свертки трех функций $f * g * h$ является существование сверток из двух функций $f * g$, $f * h$, $g * h$.

Лемма. *a) Свертка обобщенной $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ будет бесконечно дифференцируемой функцией $\varphi_1(x) \doteqdot \langle g(y), \varphi(x-y) \rangle \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$; ее производная $\partial^\alpha \varphi_1(x) = \langle g(y), \partial^\alpha \varphi(x-y) \rangle$; если $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$, то $\varphi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.*

b) Свертка обобщенной функции $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и быстро убывающей функцией $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является функцией медленного роста $\varphi_1(x) \doteqdot \langle g(y), \varphi(x-y) \rangle \in \Theta(\mathbb{R}^m)$; ее производная $\partial^\alpha \varphi_1(x) = \langle g(y), \partial^\alpha \varphi(x-y) \rangle$; если $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$, то $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Доказательство. Свертка обобщенной $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ определяется функцией $(g * \varphi)(x) \doteqdot \langle g(y), \varphi(x-y) \rangle$. В самом деле, используя замену переменных, при всех $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ получим следующие равенства:

$$\langle g(y) \otimes \varphi(z), \psi(y+z) \rangle = \langle g(y), \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x-y) \psi(x)\, dx \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \langle g(y), \varphi(x-y) \rangle\, \psi(x)\, dx.$$

Утверждения a) и b) о том, что свертка является бесконечно дифференцируемой функцией φ_1 и ее производная выражается формулой $\partial^\alpha \varphi_1(x) = \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x-y)\rangle$, вытекают непосредственно из доказательства предыдущей леммы.

Докажем последнее утверждение a). Носителем функции $\varphi(x-y)$ по переменной y является множество $x - \operatorname{supp}\varphi$. Если пересечение $\operatorname{supp} g \cap (x - \operatorname{supp}\varphi) = \emptyset$ пусто, т.е. если $x \notin \operatorname{supp} g + \operatorname{supp}\varphi$, то $\varphi_1(x) = 0$. Следовательно, носитель свертки $\operatorname{supp}\varphi_1$ содержится в компактном множестве $\operatorname{supp} g + \operatorname{supp}\varphi$.

Для доказательства того, что $\varphi_1 \in \Theta(\mathbb{R}^m)$ является функцией медленного роста, используем неравенство $1 + \|x+y\|^2 \leqslant 2(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2)$. Тогда из непрерывности функционала $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ получим следующее неравенство:

$$|\varphi_1(x)| \ll \sup_{|\alpha| \leqslant n; y \in \mathbb{R}^m} (1+\|x+y\|^2)^n \left|\partial^\alpha \varphi(y)\right| \ll 2^n (1+\|x\|^2)^n q_n(\varphi),$$

где константа зависит от g. Следовательно, $\varphi_1 \in \Theta(\mathbb{R}^m)$. Для доказательства того, что $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, используем указанное выше неравенство. В силу непрерывности функционала $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ существуют число $k \in \mathbb{N}$ и компакт $K \Subset \mathbb{R}^m$, т.ч.

$$\sup_{|\alpha| \leqslant n; x \in \mathbb{R}^m} (1+\|x\|^2)^n \left|\partial^\alpha \varphi_1(x)\right| \ll \sup_{|\alpha| \leqslant n; |\beta| \leqslant k; x \in \mathbb{R}^m; y \in K} (1+\|x+y\|^2)^n \left|\partial^{\alpha+\beta} \varphi(x)\right| < \infty,$$

где константа зависит от $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, функция $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. □

Теорема. *Светка обобщенных функций $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ существует в следующих двух случаях: a) если $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$, то свертка $f * g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$; b) если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$, то свертка $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. По доказанному ранее обобщенная функция $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ имеет компактный носитель $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}^m$. Выберем функцию $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\eta(y) = 1$ в окрестности носителя $\operatorname{supp} g$. В силу равенства функционалов $g = \eta g$ получим $\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f * \eta g, \varphi\rangle = \langle f(x) \otimes g(y), \eta(y)\varphi(x+y)\rangle$. Поскольку $\eta(y)\varphi(x+y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2m})$, то последняя формула определяет продолжение функционала $f \otimes g$.

Для доказательства a) в силу доказанной ранее леммы имеем $f \otimes g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2m})$. Следовательно, достаточно показать, что операция $\varphi(z) \to \eta(y)\varphi(x+y)$ является непрерывной из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2m})$. Это вытекает из неравенства

$$\sup_{|\alpha| \leqslant n; x, y \in K} |\partial_{(x,y)}^\alpha \eta(y)\varphi(x+y)| \ll \sup_{|\alpha| \leqslant n; z \in K+K} |\partial^\alpha \varphi(z)|, \text{ где } K \Subset \mathbb{R}^m.$$

где константа зависит от функции η и ее производных до порядка n.

Для доказательства b) в силу доказанной ранее леммы имеем $f \otimes g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2m})$. Следовательно, достаточно показать, что операция $\varphi(z) \to \eta(y)\varphi(x+y)$ является непрерывной из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2m})$. Это вытекает из неравенства

$$\sup_{|\alpha| \leqslant n; x, y \in \mathbb{R}^m} (1+\|x+y\|^2)^n |\partial_{(x,y)}^\alpha \eta(y)\varphi(x+y)| \ll \sup_{|\alpha| \leqslant n; z \in \mathbb{R}^m} (1+\|z\|^2)^n |\partial^\alpha \varphi(z)|,$$

где константа зависит от функции η и ее производных до порядка n. □

1. *Коммутативность* $f*g = g*f$.

Это свойство вытекает из коммутативности тензорного произведения.

2. *Ассоциативность* $f*(g*h) = (f*g)*h$, *если существует свертка* $f*g*h$.

Это свойство вытекает из ассоциативности тензорного произведения.

3. *Свертка с* δ*-функцией* $f*\delta = \delta*f = f$.

Так как выполняются равенства $\langle f*\delta,\varphi\rangle = \big\langle f(x),\langle\delta(y),\varphi(x+y)\rangle\big\rangle = \langle f(x),\varphi(x)\rangle$.

4. *Дифференцирование свертки* $\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g = f*(\partial^\alpha g)$.

По свойству дифференцирования тензорного произведения обобщенных функций

$$\langle\partial^\alpha(f*g),\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f(x)\otimes g(y),\partial_x^\alpha\varphi(x+y)\rangle = \langle\partial_x^\alpha f(x)\otimes g(y),\varphi(x+y)\rangle.$$

5. *Сдвиг свертки* $\tau_{x_0}(f*g) = (\tau_{x_0}f)*g = f*(\tau_{x_0}g)$, *где* $\tau_{x_0}\varphi(x) = \varphi(x-x_0)$.

Из свойства сдвига произведения обобщенных функций имеет место равенство

$$\langle\tau_{x_0}(f*g),\varphi\rangle = \langle f(x)\otimes g(y),\tau_{-x_0}\varphi(x+y)\rangle = \langle\tau_{x_0}f(x)\otimes g(y),\varphi(x+y)\rangle = \langle(\tau_{x_0}f)*g,\varphi\rangle.$$

6. *Операция свертки* $f*g$ *является билинейным отображением на множестве тех обобщенных функций, для которых свертка существует.*

Это свойство непосредственно следует из определения свертки и билинейности операции тензорного произведения обобщенных функций.

7. *Если* $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ *и* $g\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$, *то операция свертки* $f*g$ *непрерывна по каждому аргументу соответственно в слабой* топологии* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ *и* $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$.

В самом деле, пусть, например, $f_n\to f$ сходится слабо*. Поскольку по лемме функция $\varphi_1(x) = \langle g(y),\varphi(x+y)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, то, переходя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n*g,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle f*g,\varphi\rangle.$$

8. *Носитель свертки* $\operatorname{supp} f*g\subset\overline{\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g}$ *содержится в замыкании суммы носителей. Если обобщенная функция* $g\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ *имеет компактный носитель, то носитель* $\operatorname{supp} f*g\subset\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$ *содержится в сумме носителей.*

Если пересечение замыкания с носителем функции $\overline{\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g}\cap\operatorname{supp}\varphi = \emptyset$ пусто, то по свойству носителя тензорного произведения $\operatorname{supp} f\otimes g = \operatorname{supp} f\times\operatorname{supp} g$ множество $\{(x,y)\in\operatorname{supp} f\otimes g\mid x+y\in\operatorname{supp}\varphi\} = \emptyset$ также пусто. Поэтому для такой функции $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ получим $\langle f*g,\varphi\rangle = \langle f(x)\otimes g(y),\varphi(x+y)\rangle = 0$. Таким образом, носитель свертки содержится в замыкании суммы носителей.

Пусть $g\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$, $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ и $\varphi_-(x)\doteqdot\varphi(-x)$, тогда $(g*\varphi_-)_- = \langle g(y),\varphi(x+y)\rangle$ и, следовательно, $\langle f*g,\varphi\rangle = \langle f,(g*\varphi_-)_-\rangle$. Рассуждая как при доказательстве а) в лемме, имеем $g*\varphi_-\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ и $\operatorname{supp} g*\varphi_-\subset\operatorname{supp} g-\operatorname{supp}\varphi$. Поэтому $\langle f*g,\varphi\rangle = 0$, если пересечение $\operatorname{supp} f\cap(\operatorname{supp}\varphi-\operatorname{supp} g) = \emptyset$ является пустым множеством, т.е. если носитель $\operatorname{supp}\varphi$ не пересекается с суммой носителей $\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$.

9. *Преобразование Фурьé свертки обобщенных функций $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ вычисляется по формуле $\widehat{f*g} = \varkappa^{-m}\widehat{f}\,\widehat{g}$, где $\widehat{g}$ сужение целой функции на $\mathbb{R}^m$.*

В самом деле, пусть $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\eta(y) = 1$ в окрестности носителя $\operatorname{supp} g \Subset \mathbb{R}^m$. Используя определения преобразования Фурьé, свертки, тензорного произведения, а также формулу преобразования Фурьé обобщенной функции $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$, имеем

$$\langle \widehat{f*g}, \varphi \rangle = \langle f(x) \otimes \eta(y) g(y), \widehat{\varphi}(x+y) \rangle = \varkappa^m \Big\langle f(x), \Big\langle g(y), \eta(y) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z)\, e^{-i\langle x+y, z\rangle} dz \Big\rangle \Big\rangle =$$
$$= \varkappa^m \Big\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^m} \Big\langle g(y), \eta(y)\, e^{-i\langle y,z\rangle} \Big\rangle \varphi(z)\, e^{-i\langle x,z\rangle} dz \Big\rangle = \varkappa^{-m} \Big\langle f, \widehat{\widehat{g}\varphi} \Big\rangle = \varkappa^{-m} \Big\langle \widehat{f}\,\widehat{g}, \varphi \Big\rangle.$$

Произведение $\widehat{f}\,\widehat{g} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, т.к. $\widehat{g} \in \Theta(\mathbb{R}^m)$ функция медленного роста.

Определение. Пусть $f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. *Фундаментальным решением* для уравнения свертки $f * u = g$ называется обобщенная функция $\mathcal{E} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $f * \mathcal{E} = \delta$.

Фундаментальное решение не единственно. Оно определяется с точностью до слагаемого $\mathcal{E}_0$, которое удовлетворяет однородному уравнению $f * \mathcal{E}_0 = 0$.

Теорема. *Пусть $f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Если существует фундаментальное решение $\mathcal{E}$ уравнения свертки $f * u = g$, а также существует свертка $f * \mathcal{E} * g$, то $u = \mathcal{E} * g$ является решением уравнения свертки.*

Доказательство. Поскольку свертки $\mathcal{E} * g$ и $f * \mathcal{E} * g$ существуют, то выполняются равенства $f * u = f * (\mathcal{E} * g) = f * \mathcal{E} * g = (f * \mathcal{E}) * g = \delta * g = g$. □

Замечание. Предположим, что фундаментальное решение $\mathcal{E}$ уравнения свертки существует. Тогда в классе решений u уравнения свертки $f * u = g$, т.ч. существует свертка $u * f * \mathcal{E}$ трех функций, решение является единственным.

Для доказательства покажем, что однородное уравнение $f * u = 0$ имеет только нулевое решение. Действительно, если свертка $f * u = 0$ существует и равно нулю, то $u = u * \delta = u * (f * \mathcal{E}) = u * f * \mathcal{E} = (f * u) * \mathcal{E} = 0 * \mathcal{E} = 0$.

Пример 1. Оператор свертки $A(f) = f * g$ не является непрерывным в слабой* топологии. Например, пусть $f_n \doteqdot \delta(x - n)$ и $g = 1$, тогда $f_n \to 0$ и $A(f_n) = 1$.

Пример 2. Свертка не является ассоциативной операцией. Например, пусть $f = 1$, $g = \delta'$, $h = \theta$. Тогда $(f * g) * h = 1' * \theta = 0 * \theta = 0$, однако $f * (g * h) = 1 * \delta = 1$.

Пример 3. Существование сверток $(\partial^\alpha f) * g$ и $f * (\partial^\alpha g)$ не достаточно для существования свертки $f * g$ и справедливости равенства $(\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g)$. Например, пусть $f = \theta$ и $g = 1$, тогда $\theta' * 1 = \delta * 1 = 1$, однако $\theta * 1' = \theta * 0 = 0$. Следовательно, свертка этих функций $f * g = \theta * 1$ не существует.

Пример 4. Множество $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ может быть незамкнутым. Например, пусть $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n)$ и $g = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x - ma)$, где a иррациональное число. Тогда счетное множество $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g = \{x = n + ma \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ всюду плотно на прямой $\mathbb{R}$.

Пример 5. Докажем, что если свертка $\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x-y)\rangle = 0$ равна нулю для заданной обобщенной функции $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ и произвольной основной функцией $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, то $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ имеет компактный носитель.

Пусть носитель $\operatorname{supp} g$ является неограниченным множеством. Тогда существует основная функция $\varphi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset \boldsymbol{S}_1$ в единичном шаре и, т.ч. $g * \varphi_1(x_1) \neq 0$. Так как по условию носитель свертки $\operatorname{supp} g * \varphi_1 \subset \boldsymbol{S}_{r_1}$, то существует функция $\varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset \boldsymbol{S}_1$, т.ч. $g * \varphi_2(x_2) \neq 0$ и $\|x_2\| > r_1 + 1$. Определим $\psi_1 = \varphi_1$ и $\psi_2 = \varphi_2 - \lambda\psi_1$, т.ч. $g * \psi_2(x_1) = g * \varphi_2(x_1) - \lambda g * \psi_1(x_1) = 0$.

Продолжая так далее, построим последовательность основных функций $\{\psi_n\}$, у которых носители $\operatorname{supp}\psi_n \subset \boldsymbol{S}_1$, и последовательность точек $\{x_k\}$, т.ч. $x_k \to \infty$ и свертка $g * \psi_n(x_k) \neq 0$ не равна нулю только в случае $n = k$. Выберем достаточно малые константы $c_n > 0$ так, чтобы ряд $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$ сходился равномерно вместе со всеми его производными. Тогда функция $\psi(x)$ является основной и ее свертка $g * \psi$ не имеет компактного носителя.

4 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ́ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_1(\mathbb{R}^m)$ и $L_2(\mathbb{R}^m)$

Напомним, что операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$, определенные по формулам

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{-i\langle x,y\rangle} dy \;\text{ и }\; \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{i\langle x,y\rangle} dy, \quad \text{где } \varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}.$$

называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* функций из $L_1(\mathbb{R}^m)$. Из определения реобразования Фурье́ вытекает неравенство $\|\widehat{f}\|_C \leqslant \varkappa^m \|f\|_{L_1}$.

Лемма (Ри́мана–Лебе́га). *Если $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, то преобразование Фурье́ $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^m)$ является непрерывной функцией и имеет предел $\lim_{\|x\|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\tau_a f(x) \doteqdot f(x-a)$ оператор сдвига, тогда получим

$$|\tau_a \widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)| \leqslant \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \left| f(y) \left(e^{-i\langle a,y\rangle} - 1\right)\right| dy \to 0 \;\text{ при }\; \|a\| \to 0,$$

по теореме Лебе́га о мажарируемой сходимости. Поэтому функция $\widehat{f}$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что

$$\widehat{\tau_a f}(x) = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y-a) e^{-i\langle x,y\rangle} dy = \varkappa^m e^{-i\langle x,a\rangle} \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle} dy = -\widehat{f}(x)$$

где число $a \doteqdot \frac{\pi x}{\langle x,x\rangle}$ при всех $x \neq 0$. Отсюда $\widehat{f}(x) = (\widehat{f}(x) - \widehat{\tau_a f}(x))/2$, поэтому

$$|\widehat{f}(x)| = \frac{1}{2}\left|\widehat{f}(x) - \widehat{\tau_a f}(x)\right| \leqslant \frac{\varkappa^m}{2}\left\|f - \tau_a f\right\|_{L_1} \to 0 \;\text{ при }\; \|a\| = \pi/\|x\| \to 0.$$

Таким образом, имеем $\widehat{f}(x) \to 0$ при $\|x\| \to \infty$. □

Теорема (условие Ди́ни). *Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Дини в точке $x \in \mathbb{R}$, т.е. при некотором $\delta > 0$ следующий интеграл*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty, \quad \text{то} \quad \lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = f(x).$$

Доказательство. По теореме Фуби́ни, меняя порядок интегрирования, имеем

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \Big(\int_{-n}^{n} e^{i(x-z)y} dy \Big)\, dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{x-z}\, dz.$$

Производя замену переменных и используя равенство $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 1$, получим

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin nt}{t}\, dt - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt\, dt.$$

Последнее выражение запишем в виде суммы трех интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{|t|\leqslant\delta} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt\, dt - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|t|>n\delta} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Здесь первые два интеграла стремятся к нулю при $n \to \infty$ по лемме Ри́мана–Лебе́га, а последний интеграл достаточно мал в силу его сходимости в бесконечности. □

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$.

1. *Формула умножения. Если* $f,g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, *то выполняется равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx.$$

В самом деле, применяя теорему Фуби́ни, получаем равенство

$$\varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} dy \Big)\, g(x)\, dx = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} dx \Big)\, dy.$$

В частности, отсюда вытекает, что преобразование Фурье́ любой интегрируемой функции из $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ совпадает п.в. с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если функция и преобразование Фурье́* $f, \widehat{f} \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, *то выполняются равенства* $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ *при п.в.* $x \in \mathbb{R}^m$.

Применяя формулы умножения и обращения для функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{f}}(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Поэтому $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$. Аналогично $\widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

3. *Формулы дифференцирования. Если функция* $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ *и* $x^\alpha f(x) \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, *то* $\partial^\alpha \widehat{f}(x) = \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha f}(y)$ *при всех* $x \in \mathbb{R}^m$. *Если функция* $f \in \mathscr{W}_1^k(\mathbb{R}^m)$ *и* $|\alpha| \leqslant k$, *то* $\widehat{\partial^\alpha f}(x) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x)$ *при всех* $x \in \mathbb{R}^m$.

Первая формула доказывается дифференцированием под знаком интеграла Лебе́га. Для доказательства второй формулы при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$\langle \widehat{\partial^\alpha f}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha \varphi}(y) \rangle = \langle (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x), \varphi \rangle$$

Отсюда следует равенство $\widehat{\partial^\alpha f}(x) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$, а так как функции непрерывны, то это равенство выполняется всюду.

4. *Формула свертки. Свертка* $f * g(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, g(x-y)\, dy$ *функций* $f,g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ *принадлежит* $f*g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ *и* $\widehat{f*g}(x) = \varkappa^{-m} \widehat{f}(x)\, \widehat{g}(x)$ *при всех* $x \in \mathbb{R}^m$.

Линейное преобразование $A(x,y) = (y, x-y)$ отображает биективно измеримые множества в $\mathbb{R}^{2m}$ в измеримые в $\mathbb{R}^{2m}$. Поэтому из измеримости функции $f(x)g(y)$ следует измеримость функции $f(y)g(x-y)$. При помощи обобщенного неравенства Минко́вского получим $\|f*g\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_1} \|g\|_{\boldsymbol{L}_1}$. Отсюда $f*g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и

$$\varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(z) g(y-z)\, dz \Big)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} dy = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(z) \Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(y-z)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y-z\rangle} dy \Big)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,z\rangle} dz.$$

Производя замену переменных во внутреннем интеграле, получим, что повторный интеграл равен произведению интегралов.

Теорема (Планшере́ля)**.** *Если функция $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то ее преобразование Фурье́ $\widehat{f} \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и имеет место равенство $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$.*

Доказательство. В силу формул умножения и обращения преобразования Фурье́ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство

$$\|\varphi\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{\varphi}}(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(x)\overline{\widehat{\varphi}(x)}dx = \|\widehat{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$|\langle \widehat{f}, \varphi\rangle = |\langle f, \widehat{\varphi}\rangle = \left|\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\widehat{\varphi}(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}\|\widehat{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Поскольку $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то норма функционала $\|\widehat{f}\| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. По теореме Ри́сса о представлении существует функция функция $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, т.ч.

$$\langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\overline{g(x)}\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Поэтому функционал $\widehat{f}$ является регулярным и функция $\widehat{f}(x) = \overline{g(x)} \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Поскольку $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$, то $\|\widehat{\widehat{f}}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Наконец из неравенства $\|\widehat{\widehat{f}}\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ следует равенство $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. □

В силу теоремы операторы Фурье́ $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) = \widetilde{f}$ являются *унитарными*, т.е. определяют биективное и изометрическое отображение пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Пусть $\square_n \doteq (-n,n)^m$ обозначает открытый куб в $\mathbb{R}^m$ с ребром $2n$. Прямое и обратное преобразование Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ можно вычислить по формулам

$$\widehat{f}(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \varkappa^m \int_{\square_n} f(y)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteq \lim_{n\to\infty} \varkappa^m \int_{\square_n} f(y)\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy,$$

где пределы берутся в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. В самом деле, рассмотрим функции $f_{(n)}(x) \doteq f\chi_{\square_n}(x)$ из пространства $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, где $\chi_{\square_n}(x)$ характеристическая функция куба $\square_n$. Их преобразование Фурье вычисляется по обычным формулам

$$\widehat{f_{(n)}}(x) = \varkappa^m \int_{\square_n} f(y)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy, \quad \widetilde{f_{(n)}}(x) = \varkappa^m \int_{\square_n} f(y)\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy.$$

При этом по теореме имеет место $\|\widehat{f} - \widehat{f_{(n)}}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f - f_{(n)}\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

1. *Формула умножения. Если $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то выполняются равенства*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx, \quad \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{f}(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\widetilde{g}(x)\,dx.$$

Эти равенства получаются предельным переходом $g_{(n)} \to f$ и $f_{(n)} \to g$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ из соответствующих равенств для $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$. В частности, отсюда преобразование Фурье́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ совпадает с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если* $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$*, то* $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ *при п.в.* $x \in \mathbb{R}^m$.

Из формул умножения и обращения преобразования Фурье́ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi(x)\,dx \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Отсюда $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$. Аналогично $\widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

3. *Формула свертки. Свертка функций* $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ *и* $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ *принадлежит* $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ *и выполняется равенство* $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ *при п.в.* $x \in \mathbb{R}^m$.

В силу обобщенного неравенства Минко́вского $\|f * g\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}\|g\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Отсюда свертка $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и непрерывна по второму аргументу в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Поскольку $g_{(n)} \to g$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то, применяя формулу свертки в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\langle \widehat{f * g}, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \widehat{f * g_{(n)}}, \varphi \rangle = \varkappa^{-m} \lim_{n\to\infty} \langle \widehat{f}\,\widehat{g_{(n)}}, \varphi \rangle = \varkappa^{-m} \langle \widehat{f}\,\widehat{g}, \varphi \rangle$$

для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

Определение. Пространство $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ является бесконечномерным евклидовым пространством относительно скалярного произведения и нормы

$$\langle f, g \rangle \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx, \quad \|f\| \doteqdot \sqrt{\langle f, g \rangle} = \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}, \quad f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m).$$

Функции $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ называются *ортогональными*, если $\langle f, g \rangle = 0$. Систему функций $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют *ортонормированной системой* в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, если $\langle e_k, e_l \rangle = 0$ при $k \neq l$ и $\langle e_k, e_k \rangle = 1$ при $k = l$.

Система функций $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *полной* в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, если из того, что $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ ортогональна $\langle f, e_n \rangle = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, следует $f = 0$.

Определение. *Функциями Эрми́та* называются следующие функции:

$$h_n(x) \doteqdot c_n \boldsymbol{e}^{x^2/2}\big(\boldsymbol{e}^{-x^2}\big)^{(n)} = H_n(x)\boldsymbol{e}^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где функции $H_n(x) = c_n(-2x)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ называются *многочленами Эрми́та*.

Функции Эрми́та обладают свойством ортогональности в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. В самом деле, интегрируя по частям n раз, получим при всех $k < n$

$$\int_{\mathbb{R}} h_k(x)\,h_n(x)\,dx = c_n \int_{\mathbb{R}} H_k(x)\big(\boldsymbol{e}^{-x^2}\big)^{(n)} dx = c_n(-1)^n \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{-x^2}\big(H_k(x)\big)^{(n)} dx = 0.$$

В случае $k = n$ имеем $\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x)\,dx = c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}$. Таким образом, при $c_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$ система функций Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной системой.

Теорема. *Система функций Эрми́та* $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ *образует в пространстве* $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ *полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье́ с собственными значениями* $\lambda_n = (-\boldsymbol{i})^n$*, т.е.* $\mathcal{F}(h_n) = \lambda_n h_n$ *при* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Пусть функция $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ ортогональна $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,h_n(t)\,dt = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ функциям Эрми́та. Заметим, что функция $F(z) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\boldsymbol{e}^{-\frac{t^2}{2}-\boldsymbol{i}tz}dt$ является целой в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ее производные в нуле равны нулю

$$F^{(n)}(z)|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,(-\boldsymbol{i}t)^n\boldsymbol{e}^{-\frac{t^2}{2}-\boldsymbol{i}tz}dt|_{z=0} = (-\boldsymbol{i})^n\int_{\mathbb{R}} f(t)\,t^n\boldsymbol{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0 \text{ при } n \in \mathbb{Z}_+,$$

т.к. функция $t^n\boldsymbol{e}^{-t^2/2} = \sum_{k=0}^n b_k h_k(t)$ выражается линейной комбинацией функций Эрми́та. Поэтому $F(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$. В частности, $F(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Отсюда по формуле обращения преобразования Фурье́ получим, что $f(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, система функций Эрми́та полна в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

Докажем того, что функции Эрмита являются собственным для преобразования Фурье́, используем простые преобразования и интегрирование по частям

$$\widehat{h_n}(x) = \varkappa\int_{\mathbb{R}} h_n(y)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy}dy = \varkappa c_n\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{\frac{y^2-2\boldsymbol{i}xy}{2}}\big(\boldsymbol{e}^{-y^2}\big)^{(n)}dy = \varkappa c_n\boldsymbol{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{\frac{(y-\boldsymbol{i}x)^2}{2}}\big(\boldsymbol{e}^{-y^2}\big)^{(n)}dy =$$
$$\varkappa c_n(-1)^n\boldsymbol{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{-y^2}\Big(\boldsymbol{e}^{\frac{(y-\boldsymbol{i}x)^2}{2}}\Big)_y^{(n)}dy = \varkappa c_n(-\boldsymbol{i})^n\boldsymbol{e}^{\frac{x^2}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{e}^{-y^2}\boldsymbol{e}^{\frac{(y-\boldsymbol{i}x)^2}{2}}dy\Big)_x^{(n)} = (-\boldsymbol{i})^n h_n(x).$$

В последнем равенстве мы использовали то, что функция $h_0(x) = \boldsymbol{e}^{-x^2/2}$ является собственной функцией оператора Фурье́ с собственным значением 1. □

Обозначим через $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ пространство всех обобщенных функций с носителем $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_+$ на неотрицательной части действительных чисел.

Теорема. *Если $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$, то свертка существует и $f * g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$. При этом свертка непрерывна по каждому аргументу f и g в том смысле, что если $f_n \to f$ сходится слабо*, то $f_n * g \to f * g$ сходится слабо*.*

Доказательство. Выберем функцию $\eta \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R})$, т.ч. $\eta(x) = 1$ при $x > -a$ и $\eta(x) = 0$ при $x < -2a$, где $a > 0$. В силу равенства функционалов $f = \eta f$ и $g = \eta g$

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \langle \eta f * \eta g, \varphi\rangle = \langle f(x) \times g(y), \eta(x)\eta(y)\varphi(x+y)\rangle,\ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Поскольку $\eta(x)\eta(y)\varphi(x+y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, то последняя формула определяет нам нужное продолжение функционала $f \times g$ на множество функций вида $\varphi(x+y)$, где $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ произвольная функция. При этом, если последовательность основных функций $\varphi_n \to 0$ сходится в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, то $\eta(x)\eta(y)\varphi_n(x+y) \to 0$ сходится в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Так как носитель свертки $\operatorname{supp} f * g \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$, то $f * g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Для доказательства непрерывности свертки положим $\varphi_-(x) \doteq \varphi(-x)$, тогда мы имеем равенство $\langle f_n * g, \varphi\rangle = \langle f_n, (g * \varphi_-)_-\rangle = \langle f_n, \eta(g * \varphi_-)_-\rangle$. Поскольку по свойству носителя свертки $\operatorname{supp}(g * \varphi_-)_- \subset \operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp} g$, то функция $\eta(g * \varphi_-)_- \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ является основной. Поэтому, переходя к пределу, получим при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n * g, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, \eta(g * \varphi_-)_-\rangle = \langle f, \eta(g * \varphi_-)_-\rangle = \langle f * g, \varphi\rangle.$$

Таким образом, если $f_n \to f$ сходится слабо*, то $f_n * g \to f * g$ сходится слабо*. □

Следствие. *Свертка в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ определяет коммутативную, ассоциативную, линейную и непрерывную операцию по каждому аргументу.*

Определение. Линейное пространство называется *алгеброй*, если в нем задана операция умножения, линейная относительно каждого множителя в отдельности. Если операция умножения является коммутативной или ассоциативной, то алгебра называется соответственно *коммутативной* или *ассоциативной*.

В силу доказанного пространство $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^m)$ обобщенных функций с компактным носителем и пространство $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ обобщенных функций с носителем на полуоси $\mathbb{R}_+$ образуют коммутативные и ассоциативные алгебры относительно операции свертки. Такие алгебры называются *свёрточными алгебрами*.

Рассмотрим в свёрточной алгебре уравнение свертки $f*u=g$. Решение этого уравнения при $g=\delta$ называется *фундаментальным* и обозначается f^{-1}. Так как δ-функция является единицей в свёрточной алгебре, то элемент f^{-1} называется также обратным к f. Поскольку, как было доказано равее, однородное уравнение $f*u=0$ имеет единственное нулевое решение, то уравнение свертки имеет также единственное решение, которое можно записать в следующем виде $u=f^{-1}*g$.

Лемма. *Если существуют фундаментальные решения f_i^{-1} уравнений $f_i*u=g$ при $i=1,\ldots,n$, то n-кратная свертка $f_1^{-1}*\ldots*f_n^{-1}$ является фундаментальным решением уравнения $f_1*\ldots*f_n u=g$.*

Доказательство. В самом деле, используя коммутативность и ассоциативность свертки, получим следующие равенства:

$$(f_1*\ldots*f_n)*(f_1^{-1}*\ldots*f_n^{-1})=(f_1*f_1^{-1})*\ldots*(f_n*f_n^{-1})=\delta*\ldots*\delta=\delta\,.$$

Таким образом, $f_1^{-1}*\ldots*f_n^{-1}$ является фундаментальным решением. □

Пример 1. Пусть $D=(\partial-\lambda)^n$ является дифференциальным оператором в $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, тогда обратным элементом обобщенной функции $D\delta$ в свёрточной алгебре $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ является $(D\delta)^{-1}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}\theta(x)$, где $\theta(x)$ функция Хевисайда.

В самом деле, в случае $n=1$ обратный элемент в свёрточной алгебре $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ обобщенной функции $D\delta=\delta'-\lambda\delta$ удовлетворяет уравнению $u'-\lambda u=\delta$, решением которого является функция $u(x)=e^{\lambda x}\theta(x)$. В общем случае обратный элемент по лемме равен свертке n таких функций. Поэтому по индукции получаем

$$\Big(\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda x}\theta(x)\Big)*\Big(e^{\lambda x}\theta(x)\Big)=\theta(x)\int_0^x\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda t}e^{\lambda(x-y)}dy=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}\theta(x)\,.$$

Таким образом, обратный элемент равен $(D\delta)^{-1}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}\theta(x)$.

Теорема. *Если $D\doteqdot\partial^n+\sum_{i=1}^n a_i\partial^i$ дифференциальный оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_i\in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}_+)$, то обратным элементом в сверточной алгебре $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ обобщенной функции $D\delta$*

является $(D\delta)^{-1} = u\theta$*, где* $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ *решение однородного уравнения* $Du = 0$ *с начальными условиями* $u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0$ *и* $u^{(n-1)}(0) = 1$.

Доказательство. Поскольку $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ бесконечно дифференцируема, то

$$(u\theta)' = u'\theta + u(0)\delta\,,\ \ldots, (u\theta)^{(n)} = u^{(n)}\theta + u^{(n-1)}(0)\delta + \ldots + u(0)\delta^{(n-1)}.$$

Учитывая начальные условия для функции u, получим $(u\theta)^{(i)} = u^{(i)}\theta$ при $i \leqslant n-1$ и $(u\theta)^{(n)} = u^{(n)}\theta + \delta$. Отсюда $D\delta * (u\theta) = D(u\theta) = (Du)\theta + \delta = \delta$. □

Пример 2. Рассмотрим обобщенные функции $f_\alpha(x) \doteqdot \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\theta(x)$ при $\alpha > 0$ и $f_\alpha(x) \doteqdot f^{(n)}_{\alpha+n}(x)$ при $\alpha \leqslant 0$ и $\alpha + n > 0$, производная n-го порядка берется в смысле обобщенных функций. Докажем, что $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Действительно, если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то, применяя формулу свертки локально интегрируемых функций и формулу для Γ-функции, получим

$$f_\alpha * f_\beta(x) = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}dy = \frac{\theta(x)\,x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt =$$
$$= \frac{\theta(x)\,x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}B(\alpha,\beta) = \frac{\theta(x)\,x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = f_{\alpha+\beta}(x).$$

Если $\alpha \leqslant 0$ или $\beta \leqslant 0$, то подбирая n и m, т.ч. $\alpha + n > 0$ и $\beta + m > 0$, мы получим

$$f_\alpha * f_\beta(x) = f^{(n)}_{\alpha+n} * f^{(m)}_{\beta+m}(x) == (f_{\alpha+n} * f_{\beta+m})^{(n+m)}(x) = f^{(n+m)}_{\alpha+\beta+n+m}(x) = f_{\alpha+\beta}(x).$$

Таким образом, равенство $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ выполняется при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим оператор свертки $A(g) = f_\alpha * g$ с функцией f_α в алгебре $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$. Так как $f_0 = \theta' = \delta$, то из формулы $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ вытекает, что обратный элемент обобщенной функции f_α существует и равен $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$. Кроме того, поскольку $f_{-n} = \delta^{(n)}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $f_{-n} * u = \delta^{(n)} * u = u^{(n)}$. Следовательно, операция свертки с функцией f_{-n} является n-кратным дифференцированием обобщенной функции. С другой стороны, поскольку имеет место равенство $(f_n * u)^{(n)} = f_{-n} * (f_n * u) = (f_{-n} * f_n) * u = \delta * u = u$, то операция свертки с функцией f_n является первообразной n-го порядка обобщенной функции.

Определение. Оператор свертки $A(g) = f_\alpha * g$ с функцией f_α в сверточной алгебре $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ называется оператором *дробного дифференцирования* порядка α при $\alpha < 0$ и называется оператором *дробного интегрирования* порядка α при $\alpha > 0$.

Например, если функция $g \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ измерима и ограничена на полупрямой, то ее дробная производная порядка $1/2$ может быть вычислена по формуле

$$\partial^{1/2}g(x) = f_{-1/2} * g(x) = \partial_x(f_{1/2} * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\int_0^x \frac{g(y)}{\sqrt{x-y}}dy.$$

где ∂_x это обобщенная производная по переменной x.

5 ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ И О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ

Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ — нормированные пространства и $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначает пространство всех ограниченных операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ с нормой $\|A\|\doteqdot\sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|Ax\|$.

Определение. Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ будем называть *гомоморфизмом*, если он является непрерывным и открытым. Напомним, что оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ является *непрерывным*, если прообраз $A^{-1}(U)\subset\boldsymbol{E}$ всякого открытого множества $U\subset\boldsymbol{F}$ является открытым, и является *открытым*, если образ $A(V)\subset\boldsymbol{F}$ всякого открытого множества $V\subset\boldsymbol{E}$ является открытым.

Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *почти открытым*, если замыкание образа $\overline{A(U)}\subset\boldsymbol{F}$ любой окрестности нуля $U\subset\boldsymbol{E}$ является окрестностью нуля в $\boldsymbol{F}$.

Лемма (о почти открытом операторе)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ банахово пространство, то всякий почти открытый оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является открытым.*

Доказательство. По определению почти открытого оператора для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\overline{A(\boldsymbol{S}_\varepsilon)}\supset\boldsymbol{S}_{2\delta}$. В силу линейности оператора A для каждого $\varepsilon_n=\varepsilon/2^n$ и соответствующего $\delta_n=\delta/2^{n-1}$ выполняется включение $\overline{A(\boldsymbol{S}_{\varepsilon_n})}\supset\boldsymbol{S}_{\delta_n}$.

Если $y\in\boldsymbol{S}_{\delta_1}$, то существует $x_1\in\boldsymbol{S}_{\varepsilon_1}$, т.ч. $\|y-Ax_1\|\leqslant\delta_2$. Поскольку $y-Ax_1\in\boldsymbol{S}_{\delta_2}$, то существует $x_2\in\boldsymbol{S}_{\varepsilon_2}$, т.ч. $\|y-Ax_1-Ax_2\|\leqslant\delta_3$, и т.д. Определим по индукции последовательность $\{x_n\}$, т.ч. $x_n\in\boldsymbol{S}_{\varepsilon_n}$ и $\|y-\sum_{k=1}^n Ax_k\|\leqslant\delta_{n+1}$. Поскольку частичные суммы $s_n\doteqdot\sum_{k=1}^n x_k$ удовлетворяют неравенству $\|s_m-s_n\|\leqslant\sum_{k=n+1}^m\|x_k\|<\varepsilon_n$, то ряд $x\doteqdot\sum_{k=1}^\infty x_k$ сходится в силу полноты $\boldsymbol{E}$ и $\|x\|\leqslant\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|\leqslant\varepsilon$. Поэтому в силу непрерывности оператора A имеет место равенство $Ax=\sum_{n=1}^\infty Ax_n=y$.

Таким образом, $A(\boldsymbol{S}_\varepsilon)\supset\boldsymbol{S}_\delta$. Отсюда оператор A является сюръективным и значит для каждого $y_0\in\boldsymbol{F}$ существует $x_0\in\boldsymbol{E}$, т.ч. $Ax_0=y_0$ и имеет место включение $A(\boldsymbol{S}_\varepsilon(x_0))\supset\boldsymbol{S}_\delta(y_0)$. Следовательно, оператор A является открытым. □

Теорема (Ба́наха о гомоморфизме)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ — банаховы пространства и оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сюръективный, то он является гомоморфизмом.*

Доказательство. Покажем, что оператор A является почти открытым. В силу его сюръективности $\boldsymbol{F}=\bigcup_{n=1}^\infty A(\boldsymbol{S}_{r_n})$, где $r_n=n$. По теореме Бэра одно из множеств $A(\boldsymbol{S}_{r_n})$ не является нигде не плотным. Тогда замыкание $\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}\supset\boldsymbol{S}_r(y_0)$ содержит некоторый шар $\boldsymbol{S}_r(y_0)$. В силу симметричности множества $\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}\supset\boldsymbol{S}_r(-y_0)$. Пусть $y\in\boldsymbol{S}_r$, тогда $y=((y+y_0)+(y-y_0))/2\in\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}$ в силу выпуклости множества $\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}$. Таким образом, $\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}\supset\boldsymbol{S}_r$ и, если $\varepsilon>0$ и $\delta=r\varepsilon/r_n$, то $\overline{A(\boldsymbol{S}_\varepsilon)}\supset\boldsymbol{S}_\delta$, т.е. оператор A является почти открытым. По лемме A будет открытым отображением. □

Определение. *Произведением операторов* $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ и $B:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ называется их композиция, т.е. $BA:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{G}$ определен по формуле $BA(x)\doteqdot B(Ax)$ при $x\in\boldsymbol{E}$.

Оператор $A^{-1}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{E}$ называется *обратным* к оператору $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, если имеют место равенства $A^{-1}A=I$ и $AA^{-1}=I$, где I обозначает тождественный оператор $I(x)=x$, определенной соответственно в пространстве $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$.

Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *обратимым*, если обратный A^{-1} существует и является $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ также ограниченным. Существование обратного оператора A^{-1} равносильно биективности соответствующего отображения $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$. Если операторы $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ ограничены, то их произведение $BA \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ является ограниченным оператором и его норма

$$\|BA\| \leqslant \|B\|\,\|A\|, \quad \text{т.к. } \|BA\| = \sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|B(Ax)\| \leqslant \|B\| \sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|Ax\| = \|B\|\,\|A\|.$$

1. *Если линейным оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ является биективным, то его обратный оператор $A^{-1}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{E}$ является линейным.*

Докажем линейность оператора A^{-1}. Пусть $A^{-1}(u)=x$, $A^{-1}(v)=y$ и $\lambda\in\mathbb{F}$, тогда

$$A^{-1}(u+v) = A^{-1}(Ax+Ay) = A^{-1}A(x+y) = x+y = A^{-1}(u)+A^{-1}(v),$$
$$A^{-1}(\lambda u) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}(u).$$

Ядро $\ker A$ и образ $\operatorname{Im}A$ линейного оператора определяются по формулам

$$\ker A \doteqdot \{x\in\boldsymbol{E} \mid Ax=0\} \text{ и } \operatorname{Im}A \doteqdot \{y\in\boldsymbol{F} \mid y=Ax, x\in\boldsymbol{E}\}$$

2. *Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ тогда и только тогда будет биективным, когда его ядро $\ker A=0$ и образ $\operatorname{Im}A=\boldsymbol{F}$.*

Если A является биективным, то $\ker A = A^{-1}(0)=0$ и $\operatorname{Im}A=\boldsymbol{F}$. Обратно, если $\ker A=0$, то из равенства $Ax=Ay$ следует, что $A(x-y)=0$ и значит $x-y=0$. Отсюда оператор A является биективным отображением $\boldsymbol{E}$ на свой образ $\operatorname{Im}A=\boldsymbol{F}$.

3. *Если оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченный, то его ядро $\ker A\subset\boldsymbol{E}$ является замкнутым подпространством, а образ $\operatorname{Im}A\subset\boldsymbol{F}$ линейным подпространством.*

Пусть $x,y\in\ker A$, тогда $A(x+y)=Ax+Ay=0$ и $A(\lambda x)=\lambda Ax=0$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$, т.е. $x+y\in\ker A$ и $\lambda x\in\ker A$. Если $x=\lim x_n$ и $x_n\in\ker A$, тогда в силу непрерывности оператора $Ax=\lim Ax_n=0$, т.е. $x\in\ker A$. Пусть $u,v\in\operatorname{Im}A$, тогда $u+v=Ax+Ay=A(x+y)\in\operatorname{Im}A$ и $\lambda u=\lambda Ax=A(\lambda x)\in\operatorname{Im}A$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$, т.е. $u+v,\lambda u\in\operatorname{Im}A$.

Теорема (Ба́наха об обратном операторе)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами и оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ биективный, то $A^{-1}\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$.*

Эта теорема есть следствие теоремы о гомоморфизме, поскольку оператор A^{-1} является линейным, а так как оператор A открытый, то A^{-1} будет непрерывным.

Пример 1. Оператор $Af(x)=a(x)f(x)$ умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда он задает изоморфизм пространства $\boldsymbol{L}_p(x,\mu)$. В самом деле, непрерывность оператора равносильна тому, что функция $a(x)\in\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$. При этом, если его ядро $\ker A\neq 0$, то функция $a(x)$ обращается в нуль на множестве положительной меры и значит оператор A не является сюръективным. Следовательно, ядро оператора $\ker A=0$ и по теореме Банаха об обратном операторе A будет изоморфизмом.

Пример 2. Построим контрпримеры к теореме Банаха об обратном операторе.

a) Рассмотрим пространство $\boldsymbol{C}_0^{(1)}[0,1]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$, т.ч. $f(0)=0$, и определим линейный оператор

$$A:\boldsymbol{C}[0,1]\to\boldsymbol{C}_0^{(1)}[0,1],\quad Af(x)\doteqdot\int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Относительно равномерной нормы $\|f\|_{\boldsymbol{C}}\doteqdot\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$ пространство $\boldsymbol{C}[0,1]$ является банаховым, а $\boldsymbol{C}_0^{(1)}[0,1]$ нормированным. Обратный оператор $A^{-1}g(x)=g'(x)$ существует, но не является ограниченным. В самом деле, пусть $g_n(x)=x^n$, тогда $\|g_n\|=1$ и $g_n'(x)=nx^{n-1}$. Поэтому $\|g_n'\|=n$ при $n>1$ и значит $\|A^{-1}\|=\infty$.

b) Пусть $\boldsymbol{I}:\boldsymbol{C}[0,1]\to\boldsymbol{C}[0,1]$ обозначает тождественный оператор, отображающий пространство $\boldsymbol{C}[0,1]$ с нормой $\|f\|_\alpha\doteqdot\|f\|_{\boldsymbol{C}}+|\alpha(f)|$, где α разрывный линейный функционал, в пространство $\boldsymbol{C}[0,1]$ с равномерной нормой. Так как $\|\boldsymbol{I}(f)\|_{\boldsymbol{C}}\leqslant\|f\|_\alpha$, то оператор $\boldsymbol{I}$ является ограниченным. Однако его обратный оператор $\boldsymbol{I}^{-1}=\boldsymbol{I}$ не является ограниченным, т.к. из его ограниченности $\|f\|_\alpha\leqslant\|A^{-1}\|\,\|f\|_{\boldsymbol{C}}$ вытекало бы ограниченность функционала α.

Рассмотрим замкнутое подпространство $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{E}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и *факторпространство* $\widehat{\boldsymbol{E}}\doteqdot\boldsymbol{E}/\boldsymbol{L}$ по подпространству $\boldsymbol{L}$. Всякий элемент $\widehat{x}\in\widehat{\boldsymbol{E}}$ можно записать в виде $\widehat{x}\doteqdot x+\boldsymbol{L}$, где $x\in\boldsymbol{E}$. Факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}}$ является линейным пространством над $\mathbb{F}$ относительно операций сложения $\widehat{x}+\widehat{y}\doteqdot\widehat{x+y}$, где $x,y\in\boldsymbol{E}$, и умножение на число $\lambda\widehat{x}\doteqdot\widehat{\lambda x}$, где $x\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda\in\mathbb{F}$. Функция

$$\|\widehat{x}\|\doteqdot\inf\nolimits_{y\in\boldsymbol{L}}\|x+y\|=\rho(x,\boldsymbol{L})\ \text{при всех}\ x\in\boldsymbol{E},$$

называется *нормой в факторпространстве* $\widehat{\boldsymbol{E}}$, т.к. обладает свойствами:

$$\|\lambda\widehat{x}\|=\|\widehat{\lambda x}\|=\inf_{y\in\boldsymbol{L}}\|\lambda x+y\|=|\lambda|\inf_{y\in\boldsymbol{L}}\|x+y\|=|\lambda|\|\widehat{x}\|;$$
$$\|\widehat{x+y}\|=\inf_{z\in\boldsymbol{L}}\|x+y+z\|\leqslant\inf_{u\in\boldsymbol{L}}\|x+u\|+\inf_{v\in\boldsymbol{L}}\|y+v\|=\|\widehat{x}\|+\|\widehat{y}\|.$$

Если $\|\widehat{x}\|=\inf_{y\in\boldsymbol{L}}\|x+y\|=0$, то существуют $y_n\in\boldsymbol{L}$, т.ч. $x+y_n\to 0$. Следовательно, т.к. подпространство $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{E}$ замкнуто, то $x=-\lim y_n\in\boldsymbol{L}$ и значит $\widehat{x}=\widehat{0}$.

Лемма. *Если $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство ба́нахова пространства $\boldsymbol{E}$, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}/\boldsymbol{L}$ является ба́наховым.*

Доказательство. Докажем полноту факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Пусть $\{\widehat{x_n}\}\subset\widehat{\boldsymbol{E}}$ является последовательностью Коши. Выберем такую последовательность индексов $n_1<n_2<\ldots$, что $\|\widehat{x_n}-\widehat{x_m}\|<1/2^k$ при всех $n,m\geqslant n_k$. Тогда существуют $y_{n_k}\in\boldsymbol{L}$, т.ч. $z_k\doteqdot x_{n_k}+y_{n_k}\in\widehat{x_{n_k}}$ и $\|z_{k+1}-z_k\|<1/2^k$. Отсюда существует предел $z=\lim z_k$ и, следовательно, ряд $z=z_1+\sum_{k=1}^\infty(z_{k+1}-z_k)$ сходится. Поэтому получаем

$$\|\widehat{z}-\widehat{x_n}\|\leqslant\|\widehat{z}-\widehat{x_{n_k}}\|+\|\widehat{x_{n_k}}-\widehat{x_n}\|\leqslant\|z-z_k\|+1/2^k\leqslant\textstyle\sum_{i=k}^\infty 1/2^i+1/2^k=3/2^k$$

при всех $n\geqslant n_k$. Таким образом, существует предел $\lim\widehat{x_n}=\widehat{z}\in\widehat{\boldsymbol{E}}$. $\square$

Следствие. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство ба́нахова пространства, то фактоотображение $\pi : \boldsymbol{E} \to \widehat{\boldsymbol{E}}$, определенное по формуле $\pi(x) \doteqdot \widehat{x}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, является гомоморфизмом.*

Сюръективность π вытекает из определения, а его непрерывность следует из неравенства $\|\widehat{x}\| \leqslant \|x\|$. Кроме того, по лемме о почти перпендикуляре $\|\pi\| = 1$.

Теорема (о трех гомоморфизмах)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ банаховы пространства, операторы $A_1 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}_1)$ и $A_2 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}_2)$ являются гомоморфизмами и, кроме того, удовлетворяют условию* $\ker A_1 \subset \ker A_2$. *Тогда существует гомоморфизм $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$, что $A_2 = BA_1$.*

Доказательство. Определим оператор $B : \boldsymbol{F}_1 \to \boldsymbol{F}_2$ по формуле $By = A_2x$ при всех $y = A_1x$ и $x \in \boldsymbol{E}$. Если $y = A_1x = A_1x'$, то $x - x' \in \ker A_1 \subset \ker A_2$. Отсюда $A_2x = A_2x'$. Поэтому оператор B определен корректно. Так как для каждого $z \in \boldsymbol{F}_2$ найдется $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $z = A_2x$, то $By = z$ при $y = A_1x$. Поэтому оператор B будет сюръективным. Докажем его линейность. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y = A_1x$ и $y' = A_1x'$, тогда получим

$$B(\lambda y) = B(\lambda A_1(x)) = B(A_1(\lambda x)) = A_2(\lambda x) = \lambda A_2(x) = \lambda B(y).$$
$$B(y + y') = B(A_1(x + x')) = A_2(x + x') = A_2(x) + A_2(x') = B(y) + B(y').$$

Значит оператор B является линейным. Докажем непрерывность оператора B. Если $U \subset \boldsymbol{F}_2$ открытое множество, то $A_2^{-1}(U) = A_1^{-1}(B^{-1}(U))$ также является открытым множеством. Тогда $B^{-1}(U) = A_1(A_2^{-1}(U))$ будет открытым множеством. Аналогично докажем, что оператор B является открытым. Пусть $V \subset \boldsymbol{F}_1$ открытое множество, тогда $A_2^{-1}(V) = U$ также является открытым множеством. Поэтому $B(V) = A_2(U)$ будет открытым множеством. □

Пусть $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \doteqdot \{(x, y) \mid x \in \boldsymbol{E},\ y \in \boldsymbol{F}\}$ прямое произведение линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Определим в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ операции сложения и умножения по формулам

$$\lambda(x, y) \doteqdot (\lambda x, \lambda y) \quad \text{и} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteqdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Тогда мы получим прямую сумму $\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F} \doteqdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ линейных подпространств $\boldsymbol{E} \times 0$ и $0 \times \boldsymbol{F}$. Кроме того, если данные пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются нормированными, то норма в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ определяется по евклидовой формуле $\|(x, y)\| \doteqdot \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ при всех $(x, y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Свойства нормы легко проверяются также как на евклидовой плоскости.

Лемма. *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами, то их прямое произведение $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ будет банаховым пространством.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Пусть $\{(x_n, y_n)\}$ образует последовательность Коши́ в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| = \sqrt{\|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2} < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Тогда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются последовательностями Коши́ и в силу полноты $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ существуют пределы $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$. Отсюда $\lim(x_n, y_n) = (x, y)$ сходится в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. □

В приложениях часто для линейного оператора указывается его естественная область определения. Предположим, что линейный оператор $A: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$ задан на линейном подпространстве $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{E}$ банахова пространства $\boldsymbol{E}$ и принимает значения в банаховом пространстве $\boldsymbol{F}$. Подпространство $\boldsymbol{L} \doteqdot \mathrm{dom} A$ называется *областью определения* оператора A, а подпространство $\mathrm{gr} A \doteqdot \{(x,y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \mid x \in \boldsymbol{L}, y = Ax\}$ *графиком* оператора A. График оператора образует линейное подпространство в прямом произведении $\mathrm{gr} A \subset \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, но, вообще говоря, незамкнутое.

Определение. Линейный оператор $A: \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$ называется *замкнутым*, если его график $\mathrm{gr} A$ является замкнутым подпространством в пространстве $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$.

Замкнутость графика $\mathrm{gr} A$ оператора A равносильно следующему условию: если последовательность элементов $(x_n, y_n) \in \mathrm{gr} A$ и $(x_n, y_n) \to (x, y)$ сходится по норме прямого произведения $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, то элемент $(x,y) \in \mathrm{gr} A$, т.е. если последовательность $x_n \in L$ сходится $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$, то $x \in \boldsymbol{L}$ и $Ax = y$.

Теорема (Ба́наха о замкнутом графике)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ ба́наховы пространства. Оператор $A: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ замкнут тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим отображение $P: \mathrm{gr} A \to \boldsymbol{E}$, заданное по формуле $P(x,y) \doteqdot x$ при $x \in \boldsymbol{E}$, где $y = Ax$. Отображение P является линейным, биективным и ограниченным, т.к. $\|x\| \leqslant \|(x,y)\|$ при всех $(x,y) \in \mathrm{gr} A$. По теореме об обратном операторе существует $c > 0$, т.ч. $\|(x,y)\| \leqslant c\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, $y = Ax$. Отсюда $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$, т.е. оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ будет ограниченным.

Достаточность. Пусть теперь оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ ограничен. Тогда, если последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ сходится $x_n \to x$ в пространстве $\boldsymbol{E}$, то ее предел $x \in \boldsymbol{E}$ и имеет место $Ax_n \to Ax$. Поэтому, если $(x_n, y_n) \in \mathrm{gr} A$ и сходится $(x_n, y_n) \to (x,y)$ в пространстве $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, то $(x,y) \in \mathrm{gr} A$. Таким образом, график $\mathrm{gr} A$ замкнут. □

Теорема. *Линейный оператор $A: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, тогда и только тогда является непрерывным в сильных топологиях $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, когда он непрерывен в слабых топологиях $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $O \doteqdot \{y \in \boldsymbol{F} \mid |f_i(y)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}$ задает слабую окрестность нуля в $\boldsymbol{F}$, где $f_i \in \boldsymbol{F}'$. Так как A и f_i непрерывны, то $f_i A \in \boldsymbol{E}'$ и, следовательно, $A^{-1}O = \{x \in \boldsymbol{E} \mid |f_i A(x)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}$ образует слабую окрестность нуля в $\boldsymbol{E}$. Поэтому оператор A непрерывен в слабых топологиях.

Достаточность. Если A непрерывен в слабых топологиях, то его график $\mathrm{gr} A$ будет замкнутым в слабых топологиях $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. В самом деле, пусть $(x_0, y_0) \notin \mathrm{gr} A$. Выберем не пересекающиеся слабые окрестности $O(y_0)$ и $O(y_1)$ точек y_0 и $y_1 = Ax_0$, затем положим $O(x_0) = A^{-1}O(y_1)$. Тогда окрестность $O(x_0) \times O(y_0)$ не пересекается с графиком $\mathrm{gr} A$, т.к. для всякого $x \in O(x_0)$ имеем $Ax \in O(y_1)$ и значит $Ax \notin O(y_0)$.

Поскольку слабая топология $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ слабее сильной, то график замкнут в сильной топологии $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Таким образом, по теореме о замкнутом графике оператор A непрерывен в сильных топологиях $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. □

Пример 3. Построим контрпример к теореме Банаха о замкнутом графике.

Рассмотрим оператор дифференцирования $D : \mathscr{W}_1^1[0,1] \to \boldsymbol{L}_1[0,1]$, заданный по формуле $Df(x) \doteqdot f'(x)$ при п.в. $x \in [0,1]$, где производная берется в смысле Со́болева и его область определения $\mathrm{dom} D$ совпадает с пространством Со́болева $\mathscr{W}_1^1[0,1]$. При этом предполагается, что $\mathrm{dom} D$ является подпространством в пространстве $\boldsymbol{L}_1[0,1]$ с соответствующей нормой из $\boldsymbol{L}_1[0,1]$.

Докажем, что оператор неограничен относительно указанной нормы. В самом деле, полагая $\varphi_n(x) \doteqdot e^{inx}$, имеем $\|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_1} = 1$ и $\|D\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_1} = n \to \infty$, т.е. $\|D\| = \infty$.

Докажем замкнутость оператора. Пусть последовательности функций $f_n \to f$ и $f_n' \to g$ сходятся в $\boldsymbol{L}_1([0,1])$, где $f_n \in \mathscr{W}_1^1([0,1])$. Поскольку каждая функция из $\mathscr{W}_1^1([0,1])$ совпадает п.в. на $[0,1]$ с абсолютно непрерывной функцией, то из указанных условий вытекает, что выполняется формула Нью́тона-Ле́йбница

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)\,dt \quad \text{при п.в. } x \in [0,1].$$

Поэтому $|f_n(0)| \leqslant \|f_n\|_{\boldsymbol{L}_1} + \|f'\|_{\boldsymbol{L}_1}$ и, следовательно, последовательность $\{f_n(0)\}$ ограничена. Тогда, переходя к пределу по некоторой подпоследовательности, мы получим, что $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt$ при п.в. $x \in [0,1]$. Таким образом, функция $f(x)$ п.в. совпадает с абсолютно непрерывной функцией, т.е. $f \in \mathscr{W}_1^1[0,1]$ и при этом $f'(x) = g(x)$ при п.в. $x \in [0,1]$. Значит оператор D является замкнутым.

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ — банаховы пространства. Замыканием линейного оператора $A : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$, заданного на линейном подпространстве $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{E}$, называется замкнутый оператор $\overline{A} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{F}$, заданный на линейном подпространстве $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}$, график которого совпадает с замыканием $\mathrm{gr}\overline{A} = \overline{\mathrm{gr} A}$ графика оператора A.

Линейный оператор $A : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$ в том и только в том случае имеет замыкание, если из сходимости $x_n \to 0$ и $Ax_n \to y$ следует, что $y = 0$. В самом деле, это условие является необходимым в силу линейности оператора $\overline{A}$. Обратно, при выполнении этого условия можно определить замкнутый оператор $\overline{A} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{F}$, полагая $\overline{A}x = y$, если существует последовательность $x_n \in \boldsymbol{L}$, т.ч. $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$.

Пример 4. Непрерывный линейный оператор $A : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{F}$ тогда и только тогда будет замкнутым в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, когда его область определения $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым подпространством в пространстве $\boldsymbol{E}$. Следовательно, замыканием $\overline{A}$ непрерывного линейного оператора A является его продолжение по непрерывности на замкнутое подпространство $\overline{\boldsymbol{L}} \subset \boldsymbol{E}$.

Построим линейный незамкнутый оператор, который не имеет замыкания. Пусть далее $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{C}[a,b]$ обозначает подпространство всех алгебраических многочленов $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ и задана функция $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$, не являющаяся многочленом $f \notin \boldsymbol{P}$. Определим линейный оператор $A : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{C}[a,b]$ на линейной оболочке $\boldsymbol{L} \doteqdot \mathrm{sp}\{f, \boldsymbol{P}\}$ по формуле $A(\lambda f + p) \doteqdot \lambda f$, где $\lambda \in \mathbb{F}$. В силу теоремы Вейерштрасса существует последовательность многочленов $p_n \in \boldsymbol{P}$, т.ч. $p_n \rightrightarrows f$. Тогда, полагая $f_n \doteqdot f - p_n$, получим $f_n \rightrightarrows 0$ и $Af_n = f$. Таким образом, оператор A не имеет замыкания.

Пример 5. Если линейный оператор $A : \boldsymbol{L}_p(X,\mu) \to \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ задан в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ и непрерывен относительно топологии $\boldsymbol{L}_q(X,\mu)$, при этом мера $\mu(X) < \infty$ конечна и $1 \leqslant q \leqslant p$, то он будет непрерывен в топологии $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$.

В самом деле, заметим, что из неравенства Гёльдера выполняется неравенство $\|f\|_{\boldsymbol{L}_q} \leqslant c\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$, где $c = \mu^{\frac{p-q}{pq}}(X)$. Поэтому $\boldsymbol{L}_p(X,\mu) \subset \boldsymbol{L}_q(X,\mu)$ и топология в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ сильнее индуцированной топологии из пространства $\boldsymbol{L}_q(X,\mu)$. Отсюда, если график оператора $\mathrm{gr}A$ замкнут в топологии $\boldsymbol{L}_q(X,\mu)$, то он замкнут также в топологии $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Таким образом, по теореме о замкнутом графике, если линейный оператор, действующий в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, является непрерывным в топологии $\boldsymbol{L}_q(X,\mu)$, то он будет непрерывным в топологии $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$.

Пример 6. Рассмотрим интегральный оператор, определенный в нормированных пространствах $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ и $\boldsymbol{L}_q(Y,\nu)$, $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, по формуле

$$Af(x) \doteqdot \int_X K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\,,\ A : \boldsymbol{L}_q(Y,\nu) \to \boldsymbol{L}_p(X,\mu)\,,$$

где функция $K(x,y)$ называется ядром интегрального оператора. Предположим, что функция двух переменных $K(x,y)$ является измеримой на произведении $X \times Y$, при этом одна из следующих смешанных норм является конечной:

$$\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq'}} \doteqdot \|\,\|K(x,y)\|_{\boldsymbol{L}_p}\|_{\boldsymbol{L}_{q'}}, \quad \|K\|_{\boldsymbol{L}_{q'p}} \doteqdot \|\,\|K(x,y)\|_{\boldsymbol{L}_{q'}}\|_{\boldsymbol{L}_p}\,,$$

где $1/q + 1/q' = 1$. Здесь в случае $\boldsymbol{L}_{pq'}(X \times Y, \mu \times \nu)$ внутренняя норма $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ берется по первой переменной x, а внешняя норма $\boldsymbol{L}_{q'}(Y,\nu)$ берется по второй переменной y, а в случае $\boldsymbol{L}_{q'p}(X \times Y, \mu \times \nu)$ внутренняя норма $\boldsymbol{L}_{q'}(Y,\nu)$ берется по второй переменной y, а внешняя норма $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ берется по первой переменной x.

Используя обобщенное неравенство Минко́вского по переменной x и неравенство Гёльдера по переменной y, в первом случае получим неравенство

$$\|Af\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \int_Y \Big(\int_X |K(x,y)|^p\, dx\Big)^{1/p} |f(y)|\, dy \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq'}} \|f\|_{\boldsymbol{L}_q}\,.$$

Аналогичное неравенство имеет место во втором случае, если использовать только неравенство Гёльдера по переменной y

$$\|Af\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \Big(\int_X \big(\|K(x,y)\|_{\boldsymbol{L}_{q'}} \|f\|_{\boldsymbol{L}_q}\big)^p dx\Big)^{1/p} = \|K\|_{\boldsymbol{L}_{q'p}} \|f\|_{\boldsymbol{L}_q}\,.$$

Таким образом, интегральный оператор $A : \boldsymbol{L}_q(Y,\nu) \to \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ является ограниченным, если одна из указанных смешанных норм является конечной, при этом его норма $\|A\| \leqslant \min\{\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq'}}, \|K\|_{\boldsymbol{L}_{q'p}}\}$ не превосходит их минимума.

6 СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ и $M \subset \boldsymbol{E}'$ обозначают линейные подпространства нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и его сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$. Подпространства

$$L^{\perp} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' \mid f(x) = 0, x \in L\} \quad \text{и} \quad M_{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = 0, f \in M\}$$

называются соответственно *аннулятором** L и *аннулятором* M. Поскольку $L^{\perp}$ совпадает с пересечением $\bigcap_{x\in L} \ker \delta_x$ ядер слабо* непрерывных функционалов Дирака $\delta_x(f) = f(x)$, а $M_{\perp}$ совпадает с пересечением $\bigcap_{f\in M} \ker f$ ядер непрерывных функционалов, то бианнулятор* $L^{\perp}$ является слабо* замкнутым подпространством, а бианнулятор $M_{\perp}$ является замкнутым подпространством.

Лемма (о бианнуляторах). *Бианнулятор* $(L^{\perp})_{\perp}$ *совпадает с замыканием* $\overline{L}$*, а бианнулятор** $(M_{\perp})^{\perp}$ *совпадает со слабым* замыканием* $\overline{M}$.

Доказательство. Так как $L \subset (L^{\perp})_{\perp}$ и бианнулятор замкнут, то $\overline{L} \subset (L^{\perp})_{\perp}$. Пусть $x \notin \overline{L}$, тогда определим функционал на линейной оболочке $Z = \mathrm{sp}\{x, \overline{L}\}$ по формуле $f(z) \doteqdot \lambda$ при всех $z = \lambda x + y$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y \in \overline{L}$. Тогда $|f(z)| = \|z\|/\|z/\lambda\| \leqslant \|z\|/d$ при всех $z \in Z$, где $d \doteqdot \rho(x, \overline{L}) > 0$,. По теореме Ха́на–Ба́наха существует функционал $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g|_Z = f$ и $\|g\| \leqslant 1/d$. Отсюда $g \in L^{\perp}$ и $g(x) = 1$, т.е. $x \notin (L^{\perp})_{\perp}$.

Поскольку $M \subset (M_{\perp})^{\perp}$ и бианнулятор* слабо* замкнут, то $\overline{M} \subset (M_{\perp})^{\perp}$. Если $g \notin \overline{M}$, то определим функционал α на линейной оболочке $H = \mathrm{sp}\{g, \overline{M}\}$ по формуле $\alpha(h) \doteqdot \lambda$ при всех $h = \lambda g + f$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ и $f \in \overline{M}$. Рассмотрим слабую* окрестность $O(g) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' | \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}$ для точки $g \in \boldsymbol{E}'$, которая не пересекается с подпространством $\overline{M}$, и введем полунорму $\boldsymbol{p}(f) \doteqdot \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |f(x_i)|$. Тогда получим $|\alpha(h)| = \boldsymbol{p}(h)/\boldsymbol{p}(h/\lambda) \leqslant \boldsymbol{p}(h)/\varepsilon$ для всех $h \in H$, т.к. $\inf_{f\in\overline{M}} \boldsymbol{p}(g - f) \geqslant \varepsilon > 0$. В силу теоремы Ха́на–Ба́наха существует $\beta \in \boldsymbol{E}''$, т.ч. $\beta|_H = \alpha$ и $|\beta(f)| \leqslant \boldsymbol{p}(f)/\varepsilon$ при всех $f \in \boldsymbol{E}'$. Поскольку функционал β слабо* непрерывный и $\beta|_M = 0$, то существует $x \in M_{\perp}$, т.ч. $\beta = \delta_x$. Таким образом, имеем $\delta_x(g) = g(x) = 1$ и значит $g \notin (M_{\perp})^{\perp}$. $\square$

Следствие. *Слабое замыкание любого подпространства* L *в нормированном пространстве* $\boldsymbol{E}$ *совпадает с его сильным замыканием.*

В самом деле, по теореме замыкание совпадает $\overline{L} = \bigcap_{f\in L^{\perp}} \ker f$ с пересечением слабо замкнутых подпространств $\ker f$ и значит будет слабо замкнутым.

Пример 1. Существуют такие множества в бесконечномерном нормированном пространстве, которые замкнуты, но не являются слабо замкнутыми.

Например, последовательность функций $e_n(x) = \varkappa \boldsymbol{e}^{inx}$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $\varkappa = 1/\sqrt{2\pi}$, в пространстве $\boldsymbol{L}_2[0, 2\pi]$ образует замкнутое множество, т.к. $\|e_n - e_m\|_{\boldsymbol{L}_2} = \sqrt{2}$ и значит множество $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не имеет предельных точек в пространстве $\boldsymbol{L}_2[0, 2\pi]$. Однако нуль является его слабой предельной точкой, т.к. любая слабая окрестность нуля содержит точки этого множества. В самом деле, рассмотрим слабую окрестность нуля $\boldsymbol{O} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{L}_2[0, 2\pi] | \sup_{1\leqslant j\leqslant k} |\langle f, g_j\rangle| < \varepsilon\}$. Так как коэффициенты Фурье́ $c_n(g_j) = \langle g_j, e_n\rangle \to 0$ при $n \to \infty$, то существует n, т.ч. $e_n \in \boldsymbol{O}$.

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ далее являются нормированными пространствами. *Сопряженным* к линейному оператору $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется оператор $A':M\to\boldsymbol{E}'$, область определения $M=\mathrm{dom}A'$ которого состоит из всех функционалов $f\in\boldsymbol{F}'$, т.ч. функционал $g(x)=f(Ax)$ является ограниченным на $\boldsymbol{E}$, и $\langle A'f,x\rangle=\langle f,Ax\rangle$ при $x\in\boldsymbol{E}$ и $f\in M$, где скобки обозначают значение функционала, т.е. $\langle f,x\rangle\doteqdot f(x)$.

1. *Если оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограничен, то сопряженный оператор имеет область определения $\boldsymbol{F}'$, является ограниченным $A'\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F}',\boldsymbol{E}')$ и его норма совпадает $\|A'\|=\|A\|$ с нормой оператора A.*

Докажем, что A' является линейным оператором. Пусть $f,g\in\boldsymbol{F}'$ и $A'(f+g)=h$. Тогда имеем $h(x)=(f+g)(Ax)=f(Ax)+g(Ax)$, т.е. $A'(f+g)=A'f+A'g$. Пусть $\lambda\in\mathbb{F}$ и $A'(\lambda f)=h$, тогда получим $h(x)=(\lambda f)(Ax)=\lambda f(Ax)$, т.е. $A'(\lambda f)=\lambda A'f$.

Так как $A'f(x)=f(Ax)$, то $\|A'f\|\leqslant\|f\|\,\|A\|$, т.е. $\|A'\|\leqslant\|A\|$. С другой стороны, для каждого $x\in\boldsymbol{E}$ по теореме Ха́на–Ба́наха существует $f\in\boldsymbol{F}'$, т.ч. $f(Ax)=\|Ax\|$ и $\|f\|=1$. Поэтому $\|Ax\|=A'f(x)\leqslant\|A'f\|\,\|x\|\leqslant\|A'\|\,\|x\|$ и значит $\|A'\|=\|A\|$.

2. *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ банаховы пространства и область определения $\mathrm{dom}A'$ является тотальной в $\boldsymbol{F}'$, то операторы $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $A'\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F}',\boldsymbol{E}')$ ограничены.*

По теореме о замкнутом графике достаточно показать, что график $\mathrm{gr}A$ замкнут. В самом деле, пусть $x_n\to x$, $Ax_n\to y$ и $f\in\mathrm{dom}A'$. Тогда мы получим $f(Ax_n)\to f(y)$ в силу непрерывности $f\in\boldsymbol{F}'$ и $fA(x_n)\to fA(x)$ в силу непрерывности $fA\in\boldsymbol{E}'$. Поэтому $f(y)=f(Ax)$ при всех $f\in\mathrm{dom}A'$ и из тотальности следует, что $y=Ax$.

3. *Если операторы $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ ограничены, то $(BA)'=A'B'$. В частности, если $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является биективным, то $(A^{-1})'=(A')^{-1}$.*

В самом деле, $(BA)'g(x)=g(BAx)=B'g(Ax)=A'B'g(x)$ при $g\in\boldsymbol{G}'$ и $x\in\boldsymbol{E}$. Второе утверждение следует из определения и теоремы Ба́наха об обратном операторе, т.к. если $AA^{-1}=\boldsymbol{I}$ и $A^{-1}A=\boldsymbol{I}$, то соответственно $(A^{-1})'A'=\boldsymbol{I}$ и $A'(A^{-1})'=\boldsymbol{I}$.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ конечномерные нормированные пространства, тогда, выбирая базисы, всякий линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ принимает вид

$$y_i=(Ax)_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j\,,\ i=1,\ldots,n,\ \text{где}\ x=\{x_j\}_{j=1}^m\in\boldsymbol{E}\,,\ y=\{y_i\}_{i=1}^n\in\boldsymbol{F}\,.$$

Здесь $A=\{a_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,m}$ обозначает матрицу оператора A. Как нам известно всякое конечномерное нормированное пространство является банаховым пространством и всякий линейный оператор в этих пространствах является ограниченным. Поэтому сопряженный оператор определен на всем $\boldsymbol{F}'$ и принимает вид

$$\langle z,Ax\rangle=\sum_{i=1}^{n}z_i\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j\Big)=\sum_{j=1}^{m}x_j\Big(\sum_{i=1}^{n}z_ia_{ij}\Big)=\langle A'z,x\rangle\,,\ \text{где}\ z=\{z_i\}_{i=1}^n\in\boldsymbol{F}'\,.$$

Таким образом, $(A'z)_j=\sum_{i=1}^n z_ia_{ij}$, $j=1,\ldots,m$, и поэтому сопряженный оператор имеет транспонированную матрицу $A'=\{a'_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,m}$, где $a'_{ij}=a_{ji}$.

Теорема. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограничен, то имеют место равенства*

$$\ker A = (\mathrm{Im}A')_\perp,\ \ker A' = (\mathrm{Im}A)^\perp,\ (\ker A')_\perp = \overline{\mathrm{Im}A},\ (\ker A)^\perp = \overline{\mathrm{Im}A'}.$$

где $\overline{\mathrm{Im}A}$ является замыканием подпространства $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{F}$, а $\overline{\mathrm{Im}A'}$ является слабым замыканием подпространства $\mathrm{Im}A' \subset \boldsymbol{E}'$.*

Доказательство. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ по теореме Ха́на–Ба́наха существует $f \in \boldsymbol{F}'$, т.ч. $f(Ax) = \|Ax\|$ и $\|f\| = 1$. Поэтому $x \in \ker A$ тогда и только тогда, когда имеет место $f(Ax) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}'$. Это равносильно включению $x \in (\mathrm{Im}A')_\perp$ и значит первое равенство доказано. Для доказательства второго заметим, что функционал $f \in \ker A'$ тогда и только тогда, когда $f(Ax) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, что равносильно включению $f \in (\mathrm{Im}A)^\perp$. Таким образом, второе равенство доказано.

Для доказательства третьего и четвертого равенств достаточно применить лемму о бианнуляторах соответственно ко второму и первому равенству. В самом деле, имеем $(\ker A')_\perp = (\mathrm{Im}A^\perp)_\perp = \overline{\mathrm{Im}A}$ и $(\ker A)^\perp = (\mathrm{Im}A'_\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Im}A'}$. □

Следствие. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, заданный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, имеет замкнутый образ $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{F}$, то $\mathrm{Im}A = (\ker A')_\perp$ и $\mathrm{Im}A' = (\ker A)^\perp$.*

Первое равенство следствие теоремы. Докажем второе. Ясно, что $\mathrm{Im}A' \subset (\ker A)^\perp$. Если $f \in (\ker A)^\perp$, то $\ker A \subset \ker f$. Применяя теорему о трех гомоморфизмах к A и f , построим функционал $g \in (\mathrm{Im}A)'$, т.ч. $f(x) = g(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, а затем продолжим этот функционал на все пространство $\boldsymbol{F}$ по теореме Ха́на–Ба́наха. Тогда $f = A'g \in \mathrm{Im}A'$ и, следовательно, имеет место $\mathrm{Im}A' = (\ker A)^\perp$.

Пример 3. Контрпримеры к третьему и четвертому равенству теоремы. Покажем, что включения $\mathrm{Im}A \subset (\ker A')_\perp$ и $\mathrm{Im}A' \subset (\ker A)^\perp$ могут быть строгими.

Рассмотрим оператор $Af(x) = xf(x)$ в пространстве $\boldsymbol{C}[0,1]$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Его сопряженный оператор в пространстве $\boldsymbol{BV}_0[0,1]$ функций $\varphi(x)$ ограниченной вариации на отрезке $[0,1]$, непрерывных справа и $\varphi(0) = 0$, действует по формуле $A'\varphi(x) = \int_0^x t\,d\varphi(t)$. Заметим, что если $\int_0^x t\,d\varphi(x) = x\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)\,dt = 0$, то функция $\varphi \in \boldsymbol{BV}_0[0,1]$ непрерывно дифференцируема и значит она равна нулю. Следовательно, ядро $\ker A' = 0$ и аннулятор ядра $(\ker A')_\perp = \boldsymbol{C}[0,1]$. Однако образ оператора $\mathrm{Im}A$ не совпадает с пространством $\boldsymbol{C}[0,1]$, т.к. $1 \notin \mathrm{Im}A$.

Рассмотрим этот оператор $Af(x) = xf(x)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_1[0,1]$ интегрируемых функций по Лебегу на отрезке $[0,1]$. Его сопряженный оператор действует по той же формуле $A'g(x) = xg(x)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_\infty[0,1]$ ограниченных измеримых функций на отрезе $[0,1]$. Поскольку ядро $\ker A = 0$ равно нулю, то его аннулятор* $(\ker A)^\perp = \boldsymbol{L}_\infty[0,1]$. Однако образ сопряженного оператора $\mathrm{Im}A'$ не совпадает со всем пространством $\boldsymbol{L}_\infty[0,1]$, т.к. $1 \notin \mathrm{Im}A'$.

Определение. Говорят, что линейный оператор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ является *проектором* на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, если имеет место равенство $P^2 = P$ и его образ $\mathrm{Im}P = L$.

Рассмотрим свойства проекторов P на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$.

1. *Ограничение проектора P на L есть тождественный оператор $P|_L = I$.*

Действительно, если $y = Px$, то $Py = P^2x = Px = y$ при всех $y \in L$.

2. *Справедливы равенства* $\ker(I-P) = \operatorname{Im} P$ *и* $\operatorname{Im}(I-P) = \ker P$.

Если $x \in \ker(I-P)$, то $x - Px = 0$ и значит $x \in \operatorname{Im} P$. Если $y = Px \in \operatorname{Im} P$, то имеем $(I-P)y = (P-P^2)x = 0$, т.е. $y \in \ker(I-P)$. Аналогично, получаем второе равенство.

3. *$\boldsymbol{E} = L \oplus M$ является прямой суммой подпространств $L = \operatorname{Im} P$ и $M = \ker P$.*

Поскольку $I = P + (I-P)$, то $\boldsymbol{E} = L + M$. Если $y \in L \cap M$, то $y = Px = x - Px$, т.е. $x = 2Px$. Применяя к этому равенству P, получим $Px = 2Px$ и значит $y = Px = 0$.

Определение. Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ будем называть *дополняемым* в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, если оно является замкнутым в $\boldsymbol{E}$ и существует замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Теорема. *Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда является дополняемым в банаховом пространству $\boldsymbol{E}$, когда существует ограниченный проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L.*

Доказательство. Необходимость. Если $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ прямая сумма двух замкнутых подпространств L и M, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют единственные элементы $y \in L$ и $z \in M$, т.ч. $x = y + z$. Поэтому, полагая $Px \doteqdot y$, мы получим проектор P на подпространство $L = \operatorname{Im} P$. Если $x_n \to x$ и $Px_n = y_n \to y$, то $z_n = x_n - y_n \to z = x - y$. Так как в силу замкнутости подпространств $y \in L$ и $z \in M$, то из единственности разложения $x = y + z$ вытекает $Px = y$. Следовательно, оператор P имеет замкнутый график и по теореме о замкнутом графике он является ограниченным.

Достаточность. Поскольку проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L является ограниченным, то $L = \operatorname{Im} P = \ker(I-P)$ и $M = \ker P = \operatorname{Im}(I-P)$ являются замкнутыми подпространствами. Так как $I = P + (I-P)$, то имеет место $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. □

Лемма. *Замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, имеющее конечную размерность* $\dim L < \infty$ *или конечную коразмерность* $\operatorname{codim} L \doteqdot \dim \boldsymbol{E}/L < \infty$, *является дополняемым.*

Выберем базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в подпространстве L, а затем определим подпространство $M \doteqdot \bigcap_{k=1}^n \ker f_k$, где $\{f_k\}_{k=1}^n$ обозначает биортогональную систему к базису $\{e_k\}_{k=1}^n$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим элементы $y \doteqdot \sum_{k=1}^n f_k(x)\, e_k$ и $z \doteqdot x - y$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Рассмотрим базис $\{\widehat{e}_k\}_{k=1}^m$ для факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$, а затем обозначим через $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{E}$ найдутся $\lambda_k \in \mathbb{F}$, т.ч. $\widehat{x} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \widehat{e}_k$. Определим элементы $z \doteqdot \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ и $y \doteqdot x - z$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Пример 4. Любое замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ банахова пространства $\boldsymbol{E}$, изоморфное пространству $\boldsymbol{\ell}_\infty$, является дополняемым.

Обозначим через $f: L \to \boldsymbol{\ell}_\infty$ изоморфизм, тогда $f(x) = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, где $x \in L$ и $x_n \in \mathbb{F}$. Полагая $f_n(x) \doteqdot x_n$, мы получим последовательность ограниченных функционалов $f_n \in L'$ на подпространстве L, т.ч. $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant \|f\|$ при всех $x \in L$, $\|x\| \leqslant 1$. Тогда по теореме Ха́на–Ба́наха существуют $g_n \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g_n|_L = f_n$ и $\|g_n\| = \|f_n\|_L$. Поэтому $\sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n(x)| \leqslant \|f\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, $\|x\| \leqslant 1$. Следовательно, оператор $g: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{\ell}_\infty$, заданный по формуле $g(x) = \{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$, является ограниченным. Отсюда $P \doteqdot f^{-1} \cdot g$ будет ограниченным проектором на подпространство L. Таким образом, в силу доказанной теореме подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ является дополняемым.

Пример 5. Любое замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ банахова пространства $\boldsymbol{E}$, факторпространство которого $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$ изоморфно $\boldsymbol{\ell}_1$, является дополняемым.

По предположению существует система линейно независимых функционалов $f_n \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. подпространство $L = \bigcap_{n=1}^\infty \ker f_n$ совпадает с пересечением ядер этих функционалов и факторотображение $f: \boldsymbol{E} \to \widehat{\boldsymbol{E}} \cong \boldsymbol{\ell}_1$ определяется по формуле $f(x) = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \in \boldsymbol{\ell}_1$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Выберем систему линейно независимых элементов $e_n \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|e_n\| = 1$ и выполняется неравенство $|f_n(e_n)| > \|f_n\|/2$, а затем определим проектор по формуле $P(x) \doteqdot x - \sum_{n=1}^\infty f_n(x)\, e_n$.

Если элемент $y \in L$, то $f_n(y) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и значит $P(y) = y$. С другой стороны, если $P(x) = x$, то $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\, e_n = 0$ и в следствии линейной независимости элементов e_n получим $f_n(x) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому образ проектора $\operatorname{Im} P = L$. Так как в силу изоморфизма между $\widehat{\boldsymbol{E}}$ и $\boldsymbol{\ell}_1$ существует $c > 0$, т.ч. $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| \leqslant c\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то $\|P(x)\| \leqslant (1+c)\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Следовательно, проектор $P: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ является непрерывным, а подпространство $M = \ker P$ замкнутым. Таким образом, $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ является прямой суммой замкнутых подпространств.

Пример 6. Любое замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ сепарабельного банахова пространства $\boldsymbol{E}$, изоморфное пространству $\boldsymbol{c}_0$, является дополняемым.

Пусть $f: L \to \boldsymbol{c}_0$ заданный изоморфизм, тогда отображение f представляется последовательностью функционалов $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L'$. При этом $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant c$ при всех $x \in L$ с нормой $\|x\| \leqslant 1$ и $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при всех $x \in L$. Следует отметить, что любая подпоследовательность $\{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ удовлетворяет указанным условиям и, следовательно, определяет изоморфизм L на пространство $\boldsymbol{c}_0$.

Обозначим через $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ счетное и всюду плотное подмножество в $\boldsymbol{E}$. Можно считать, что $x_n \notin L$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$, что каждый функционал f_{n_j} допускает продолжение $g_{n_j} \in \boldsymbol{E}'$ с нормой $\|g_{n_j}\| \leqslant 2c$ и для любых $p, q \in \mathbb{N}$ найдется $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\sup_{1\leqslant k\leqslant q} |g_{n_j}(x_k)| < 1/p$ при всех $n_j \geqslant m$.

В самом деле, по теореме Ха́на-Ба́наха можно считать, что функционалы $f_n \in \boldsymbol{E}'$ и $\|f_n\| \leqslant c$. Обозначим через $L_q \doteqdot \operatorname{sp}\{x_1, \ldots, x_q, L\}$ линейную оболочку. Выберем такую подпоследовательность $\{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$, что существует предел $\lim_{n_j\to\infty} f_{n_j}(x_k)$ при всех $1 \leqslant k \leqslant q$. Функционал $g(x) \doteqdot \lim_{n_j\to\infty} f_{n_j}(x)$ имеет норму $\|g\| \leqslant c$ и $g|_L = 0$.

Поэтому функционалы $g_{n_j} \doteqdot f_{n_j} - g$ являются продолжением f_{n_j} из L на все $\boldsymbol{E}$ с нормой $\|g_{n_j}\| \leqslant 2c$. Построив $\{g_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ для каждого q и применяя диагональный метод, получим такую подпоследовательность, которая не зависит от q.

Используя плотность множества $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для любого $\varepsilon > 0$ и $x \in \boldsymbol{E}$ существуют $q \in \mathbb{N}$ и $y \in L_q$, т.ч. $\|x - y\| < \varepsilon$. Поэтому, применяя доказанное утверждение, найдем m, т.ч. $|g_{n_j}(x)| \leqslant |g_{n_j}(x-y)| + |g_{n_j}(y)| < (2c+1)\varepsilon$ при всех $n_j \geqslant m$. Следовательно, предел $\lim_{n_j \to \infty} g_{n_j}(x) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Пусть $F \doteqdot \{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ изоморфизм $F : L \to \boldsymbol{c}_0$ и $G \doteqdot \{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ гомоморфизм $G : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{c}_0$ на $\boldsymbol{c}_0$, тогда оператор $P \doteqdot F^{-1}G$ является непрерывным проектором на L и значит подпространство L будет дополняемым.

Замечание. Примеры недополняемых подпространств. Подпространство $\boldsymbol{c}_0 \subset \boldsymbol{\ell}_\infty$ (Р. С. Фи́ллипс) и подпространство $\boldsymbol{C}[0,1] \subset \boldsymbol{L}_\infty[0,1]$ (Г. М. Фихтенго́льц и Л. В. Канторо́вич) является не дополняемыми.

Подпространства функций $H_p \subset \boldsymbol{L}_p[0,2\pi]$, у которых все коэффициенты Фурье с отрицательными индексами равны нулю, являются дополняемыми при $1 < p < \infty$ (М. Рисс) и является не дополняемым при $p = 1$ (Д. Нью́ман).

Подпространство $\boldsymbol{A}(D) \subset \boldsymbol{C}(D)$, состоящее из голоморфных функций в круге $\mathring{D} \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, является не дополняемым в пространстве $\boldsymbol{C}(D)$ непрерывных функций в замкнутом круге $D \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ (У. Ру́дин).

Определение. Пусть $A : L \to \boldsymbol{H}$ плотно определенный линейный оператор, т.е. его область определения $\mathrm{dom} A = L$ всюду плотна в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Оператор $A^* : M \to \boldsymbol{H}$ называется *эрмитово-сопряженным* к оператору $A : L \to \boldsymbol{H}$, если имеет место равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ при всех $x \in L$ и $y \in M$, где

$$M = \mathrm{dom} A^* \doteqdot \{y \in \boldsymbol{H} \mid \exists z \in \boldsymbol{H} : \langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle, \forall x \in \boldsymbol{E}\}$$

Таким образом, множество значений эрмитово-сопряженного $A^*y = z$ состоит из всех $z \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in L$, а область определения $M \doteqdot \mathrm{dom} A^*$ эрмитово-сопряженного оператора состоит из всех $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. существует $z \in \boldsymbol{H}$, для которого $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in L$. Существование такого элемента $z \in \boldsymbol{H}$ в силу теоремы Фреше́–Ри́сса равносильно тому, что функционал $\alpha(x) \doteqdot \langle Ax, y\rangle$, заданный на пространстве L, является ограниченным. Кроме того, т.к. оператор A определен на всюду плотном подпространстве $L \subset \boldsymbol{H}$, то этот элемент определяется однозначно в пространстве $\boldsymbol{H}$.

1. *Эрмитово-сопряженный оператор является линейным.*

Если равенства $\langle Ax, y_1\rangle = \langle x, z_1\rangle$ и $\langle Ax, y_2\rangle = \langle x, z_2\rangle$ выполняются при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то равенство $\langle Ax, y_1 + y_2\rangle = \langle x, z_1 + z_2\rangle$ имеет место при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Отсюда следует, что $A^*(y_1 + y_2) = A^*y_1 + A^*y_2$. Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ выполняется при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то $\langle Ax, \lambda y\rangle = \langle x, \lambda z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому $A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$.

2. *Эрмитово-сопряженный оператор является замкнутым.*

Определим в прямом произведении $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}$ оператор $U(x,y)=(-y,x)$ и скалярное произведение $\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle \doteqdot \langle x_1,x_2\rangle+\langle y_1,y_2\rangle$. Тогда равенство $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, определяющее оператор A^*, равносильно тому, что $U(x,Ax)\perp(y,A^*y)$ при всех $x\in L$. Следовательно, график $\mathrm{gr}A^*=U(\mathrm{gr}A)^\perp$ будет замкнутым.

3. *Эрмитово-сопряженный оператор к ограниченному оператору $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$ определен на всем пространстве $A^*\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ и его норма $\|A^*\|=\|A\|$.*

Поскольку $\boldsymbol{E}$ всюду плотно в $\boldsymbol{H}$, то можно продолжить A по непрерывности на все $\boldsymbol{H}$, при этом норма $\|A\|$ не изменится. Рассмотрим линейный функционал $\alpha(x)\doteqdot\langle Ax,y\rangle$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем $|\alpha(x)|\leqslant\|Ax\|\,\|y\|\leqslant\|A\|\,\|x\|\,\|y\|$, т.е. $\|\alpha\|\leqslant\|A\|\,\|y\|$. Отсюда по теореме Ри́сса–Фреше́ существует $z\in\boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x)=\langle x,z\rangle$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$ и $\|\alpha\|=\|z\|$.

Таким образом, имеем равенство $\langle Ax,y\rangle=\langle x,z\rangle$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$, где $\|z\|\leqslant\|A\|\,\|y\|$. Тогда по определению $A^*y=z$. При этом мы имеем $\|A^*y\|\leqslant\|A\|\,\|y\|$, т.е. $\|A^*\|\leqslant\|A\|$. В силу симметричности скалярного произведения $\langle x,Ay\rangle=\langle A^*y,x\rangle$ при всех $y\in\boldsymbol{H}$. Отсюда эрмитово-сопряженный к оператору A^* совпадает с оператором A. Поэтому выполняется неравенство $\|A\|=\|A^{**}\|\leqslant\|A^*\|$ и значит $\|A\|=\|A^*\|$.

Определение. Линейный оператор B называется *расширением* оператора A, если $\mathrm{gr}A\subset\mathrm{gr}B$, т.е. если $\mathrm{dom}A\subset\mathrm{dom}B$ и $B|_{\mathrm{dom}A}=A$. Говорят, что линейный оператор допускает замыкание, если у него существует замкнутое расширение. Наименьшее замкнутое расширение $\overline{A}$ называется *замыканием* оператора A.

Теорема. *Плотно определенный оператор $A:L\to\boldsymbol{H}$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда его эрмитово-сопряженный оператор $A^*:M\to\boldsymbol{H}$ является плотно определенным в $\boldsymbol{H}$. При этом замыкание $\overline{A}=A^{**}$.*

Доказательство. Пусть B замкнутое расширение оператора A. Тогда $\overline{\mathrm{gr}A}\subset\mathrm{gr}B$, т.к. график $\mathrm{gr}B$ замкнут. Если $(0,y)\in\overline{\mathrm{gr}A}$, то $(0,y)\in\mathrm{gr}B$ и значит $y=0$. Поэтому, если область определения M не плотна в $\boldsymbol{H}$, то существует $y\neq0$, т.ч. $y\in M^\perp$. Тогда имеем $(0,y)\in(U\,\mathrm{gr}A^*)^\perp=(\mathrm{gr}A)^{\perp\perp}=\overline{\mathrm{gr}A}$ (см. свойство 2), что невозможно.

Обратно, если оператор A^* является плотно определенным в $\boldsymbol{H}$, то имеют место равенства $\overline{\mathrm{gr}A}=(U\,\mathrm{gr}A^*)^\perp=(U(U\,\mathrm{gr}A^{**})^\perp)^\perp=\mathrm{gr}A^{**}$. Поэтому $\overline{A}=A^{**}$. □

Определение. Плотно определенный линейный оператор $A:L\to\boldsymbol{H}$ называется *симметрическим*, если равенство $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$ выполняется при всех $x,y\in L$.

Линейный оператор $A:L\to\boldsymbol{H}$ называется *самосопряженным*, если $A=A^*$, т.е. является симметрическим оператором и область определения $L=\mathrm{dom}A$ совпадает с областью определения $M=\mathrm{dom}A^*$ эрмитово-сопряженного оператора.

Самосопряженный оператор $A:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$, заданный в гильбертовом пространстве, называется *эрмитовым* и обозначается через $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$.

Теорема (Хе́ллингера–Тёплица)**.** *Каждый эрми́товый оператор $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ в гильбертовом пространстве является ограниченным, т.е. $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$.*

Доказательство. Если оператор $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ является эрмитовым, то выполняется равенство $A = A^*$. Поскольку по свойству 2 оператор A^* замкнут, то по теореме о замкнутом графике оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ является ограниченным. □

Пример 7. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$ диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$, где $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$. Оператор $A : L \to \boldsymbol{\ell}_2$ с областью определения $L \doteqdot \{x \in \boldsymbol{\ell}_2 \mid Ax \in \boldsymbol{\ell}_2\}$ обладает следующими свойствами:

1) оператор A замкнут для любой последовательности чисел $\lambda_n \in \mathbb{F}$;
2) оператор A ограничен тогда и только тогда, когда $\sup|\lambda_n| < \infty$;
3) оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
4) оператор A эрми́тов тогда и только тогда, когда $\sup|\lambda_n| < \infty$ и $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;

Введем множества индексов $I_1 \doteqdot \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| \leqslant 1\}$ и $I_2 \doteqdot \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| > 1\}$. Тогда A будет прямой суммой двух диагональных операторов $A = A_1 \oplus A_2$, при этом для оператора A_1 имеем $\sup|\lambda_n^{(1)}| \leqslant 1$, а для оператора A_2 имеем $\inf|\lambda_n^{(2)}| \geqslant 1$. Заметим, что оператор A_1 замкнут, так как является ограниченным. Оператор A_2 имеет ограниченный обратный оператор A_2^{-1}. Так как из замкнутости графика оператора A_2^{-1} следует замкнутость графика оператора A_2, то оператор A_2 также является замкнутым. Отсюда следует замкнутость оператора $A = A_1 \oplus A_2$.

Заметим, что область определения $L = \mathrm{dom} A$ является всюду плотной в $\boldsymbol{\ell}_2$, так как множество всех финитных последовательностей содержится в L. Свойство 2) следует из равенства $\|A\| = \sup|\lambda_n|$; 3) очевидно; 4) вытекает из 3) и того факта, что эрмитовый оператор определен на всем $\boldsymbol{\ell}_2$.

7 РЕЗОЛЬВЕНТА И СПЕКТР ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ является банаховым пространством над полем $\mathbb{C}$. Построение теории голоморфных функций $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$, определенных в области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со значениями в $\boldsymbol{E}$, как и построение теории комплекснозначных голоморфных функций, опирается на понятие криволинейного интеграла.

Всякая непрерывная функция $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ограниченной вариации $\gamma\in\boldsymbol{BV}[a,b]$ называется *спрямляемой кривой* в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Если $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ при $t_1\neq t_2$ за исключением случая, когда $t_1=a$ и $t_2=b$, то кривая называется *жордановой*. Если $\gamma(a)=\gamma(b)$, то жорданова кривая называется *замкнутой*.

Криволинейный интеграл функции f по кривой γ определяется по формуле

$$\alpha\Big(\oint_\gamma f(z)\,dz\Big)=\oint_\gamma \alpha f(z)\,dz=\int_a^b \alpha f(\gamma(t))\,d\gamma(t)\ \text{ при всех }\ \alpha\in\boldsymbol{E}'.$$

В следствии теоремы Ха́на–Ба́наха интеграл $\oint_\gamma f(z)\,dz$ определяется однозначно.

Определение. Функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$, определенная в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *сильно голоморфной*, если для каждого $z\in\Omega$ существует сильный предел $\lim_{h\to0}\big(f(z+h)-f(z)\big)/h=f'(z)$ по норме пространства $\boldsymbol{E}$.

Функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$, определенная в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *слабо голоморфной*, если для каждого функционала $\alpha\in\boldsymbol{E}'$ функция $\alpha f:\Omega\to\mathbb{C}$ голоморфна в области Ω в обычном смысле.

Теорема (Данфорда). *Функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае сильно голоморфна в области $\Omega\subset\mathbb{C}$, когда она является слабо голоморфной.*

Доказательство. Необходимость. Если функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ сильно голоморфна в области Ω, то в силу непрерывности функционала $\alpha\in\boldsymbol{E}'$ имеет место равенство $\lim_{h\to0}\big(\alpha f(z+h)-\alpha f(z)\big)/h=(\alpha\cdot f)'(z)$ при всех $z\in\Omega$. Поэтому из сильной голоморфности следует слабая голоморфность.

Достаточность. Пусть γ замкнутая спрямляемая жорданова кривая в области Ω, ограничивающая некоторую область G, которая содержит компакт $K\Subset G$, и $z\in K$. По теореме об интегральном представлении голоморфной функции $g(z)=\alpha f(z)$

$$\alpha f(z)=g(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\quad\text{при всех }\ z\in K.$$

Для любого функционала $\alpha\in\boldsymbol{E}'$ правая следующего равенства будет равномерно ограниченной, когда точки $z,z+h_1,z+h_2\in K$ независимо пробегают компакт K,

$$\alpha\Big(\frac{\Delta_{h_1}f(z)/h_1-\Delta_{h_2}f(z)/h_2}{h_1-h_2}\Big)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-h_1)(\zeta-z-h_2)}d\zeta\,,$$

где $\Delta_h f(z)\doteqdot f(z+h)-f(z)$. Тогда функция в скобках является слабо ограниченной и значит по принципу равномерной ограниченности будет сильно ограниченной, т.е. $\|\Delta_{h_1}f(z)/h_1-\Delta_{h_2}f(z)/h_2\|\leqslant c\,|h_1-h_2|$ для всех $z,z+h_1,z+h_2\in K$. В силу полноты $\boldsymbol{E}$ существует предел $\lim_{h\to0}\big(f(z+h)-f(z)\big)/h=f'(z)$ при всех $z\in\Omega$. $\square$

Далее функции сильно и слабо голоморфные будем называть голоморфными.

1. *Если функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ голоморфна в ограниченной области Ω, непрерывна в ее замыкании $\overline{\Omega}$, а ее граница $\partial\Omega$ состоит из конечного числа замкнутых спрямляемых кривых, то интеграл по границе $\oint_{\partial\Omega} f(z)\,dz=0$ равен нулю.*

В силу непрерывности функции в замыкании области $\overline{\Omega}$ существует интеграл от функции по границе этой области $\partial\Omega$. Следовательно, по определению интеграла функции со значениями в пространстве $\boldsymbol{E}$ для любого функционала $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{E}'$

$$\boldsymbol{\alpha}\Big(\oint_{\partial\Omega} f(z)\,dz\Big)=\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{\alpha}\cdot f(z)\,dz=0.$$

по теореме Коши. Поэтому следствии теоремы Ха́на–Ба́наха интеграл $\oint_{\gamma} f(z)\,dz=0$ равен нулю и, таким образом, справедлива обобщенная теорема Коши.

2. *Если функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ удовлетворяет условиям предыдущего свойства, то справедлива обобщенная интегральная формула Коши*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\oint_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\,,\quad z\in\Omega.$$

Пусть $\Omega_r\doteqdot\Omega\setminus\boldsymbol{S}_r(z)$, где замкнутый шар $\boldsymbol{S}_r(z_0)\Subset\Omega$. Функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}$ является голоморфной в области Ω_r и непрерывной в ее замыкании $\overline{\Omega_r}$ Так как $\gamma_r=\partial\boldsymbol{S}_r(z)$ ориентирована против часовой стрелки, то в силу обобщенной теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\oint_{\partial\Omega_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\oint_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0.$$

Из непрерывности функции для любого $\varepsilon>0$ найдется $r>0$, т.ч. $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$ при всех $|\zeta-z|\leqslant r$. Тогда следующая разность по норме не превосходит ε, т.к.

$$\frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-f(z)=\frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\,,\ \text{где}\ \frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\oint_{\gamma_r}\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta=1\,,$$

Переходя к пределу при $r\to0$, получим обобщенную формулу Коши.

3. *Если функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$ голоморфна в области Ω, то для всякой точке $z_0\in\Omega$ ряд Тейлора функции сильно сходится внутри каждого круга $\gamma_r=\partial\boldsymbol{S}_r(z_0)$ с центром в точке z_0, целиком лежащим внутри области Ω, т.е.*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n,\quad \textit{где}\ c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

Чтобы получить это разложение в ряд Тейлора, разложим ядро интегральной формулы Коши в геометрическую прогрессию по степеням $(z-z_0)^n$, т.е.

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\big(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\big)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,.$$

Далее умножим это выражение на $f(\zeta)/2\pi i$, а затем проинтегрируем почленно по $\zeta \in \gamma_r$. Так как $|z-z_0|/r = q < 1$, то прогрессия сходится абсолютно и равномерно по $\zeta \in \gamma_r$. Равномерность не нарушится при умножении на непрерывную функцию. Поэтому почленное интегрирование законно и мы получим указанную формулу.

4. *Если функция $f : \mathbb{C} \to \boldsymbol{E}$ голоморфна во всей комплексной плоскости и ограничена по норме, то она является константой.*

По свойству 3 функция разлагается в степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, сходящийся всюду. Так как f ограничена $\|f(z)\| \leqslant c$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то для любого $r > 0$

$$\|c_n\| = \frac{\|f^{(n)}(0)\|}{n!} \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} \frac{\|f(\zeta)\|}{|\zeta|^{n+1}} |d\zeta| \leqslant \frac{c}{r^n}.$$

Переходя к пределу $r \to \infty$, получим $c_n = 0$ при всех $n \neq 0$. Таким образом, имеет место обобщенная теорема Лиувилля.

5. *Радиус сходимости степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ вычисляется по обобщенной формуле Кошú–Адамáра $1/r = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|}$.*

В самом деле, рассмотрим случай конечного $r \neq 0$. Пусть $|z-z_0| < 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|}$. Это неравенство мы перепишем в виде $\overline{\lim} \sqrt[n]{|z-z_0|^n \|c_n\|} < 1$. Откуда на основании признака Коши вытекает сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| \, |z-z_0|^n$ и значит указанный ряд сходится. С другой стороны, если $|z-z_0| > 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|}$, то мы имеем неравенство $\overline{\lim} \sqrt[n]{|z-z_0|^n \|c_n\|} > 1$. Поэтому величина $|z-z_0|^n \|c_n\| \not\to 0$ не стремится к нулю и значит общий член степенного ряда не стремится к нулю. Случаи $r = 0$ и $r = \infty$ можно рассмотреть аналогичным образом. При этом в случае $r = \infty$ ряд $f(z)$ будет сходится во всей комплексной плоскости, а в случае $r = 0$ только в точке z_0.

6. *Степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ представляет собой голоморфную функцию внутри круга сходимости.*

Действительно, для любого $\alpha \in \boldsymbol{E}'$, $\alpha \neq 0$, радиус сходимости степенного ряда $\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(c_n)(z-z_0)^n$ не меньше радиуса сходимости исходного ряда, так как имеет место неравенство $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|\alpha(c_n)\|} \leqslant \overline{\lim} \sqrt[n]{\|\alpha\| \, \|c_n\|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|}$. Поэтому αf является голоморфной функцией внутри круга сходимости ряда $f(z)$. По теореме Данфорда функция f будет голоморфной внутри своего круга сходимости.

Далее через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$ будем обозначать банахову алгебру ограниченных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, действующих в бáнаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{C}$.

Определение. $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным числом* ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если существует обратный оператор A_λ^{-1} к оператору $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$.

Множество регулярных чисел $\rho(A)$ называется *резольвентным множеством*. Дополнение $\sigma(A) \doteqdot \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром*. Обратный оператор $R_\lambda \doteqdot A_\lambda^{-1}$ при всех $\lambda \in \rho(A)$ называется *резольвентой*.

Так как оператор $A_\lambda \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то в силу теоремы Ба́наха об обратном операторе резольвента $R_\lambda = A_\lambda^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ также будет ограниченным оператором при всех $\lambda \in \rho(A)$.

Далее мы докажем, что резольвентное множество $\rho(A)$ является открытым и резольвента R_λ образует голоморфную функцию в каждой связной компоненте $\rho(A)$. Этот факт позволяет использовать при изучении спектра комплексный анализ и таким способом получать информацию об операторе.

Лемма. *Если $\|A\| < 1$, то оператор $B \doteqdot I - A$ имеет обратный $B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Доказательство. Пусть $C_n \doteqdot \sum_{k=0}^{n} A^k$ и $\|A\| = r < 1$. Так как $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$, то по неравенству треугольника имеем $\|C_m - C_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|A\|^k < r^{n+1}/(1-r)$. Поэтому $\{C_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́наховом пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Тогда существует предел $\lim C_n \doteqdot C \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Так как предел $\lim A^{n+1} = 0$, то равенства

$$BC = \lim BC_n = \lim \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = I - \lim A^{n+1} = \lim \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \lim C_n B = CB,$$

показывают, что $BC = CB = I$, т.е. оператор $C = B^{-1}$ является обратным к B. □

Теорема (о резольвенте)**.** *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то резольвентное множество $\rho(A)$ открыто, а резольвента R_λ голоморфна в каждой связной компоненте множества $\rho(A)$ и удовлетворяет уравнению $R_\lambda - R_{\lambda_0} = -(\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}$. При этом ее норма $\|R_\lambda\| \geqslant 1/d_\lambda$, где $d_\lambda \doteqdot \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda - z|$ обозначает расстояние от точки $\lambda \in \rho(A)$ до спектра $\sigma(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(A)$, тогда $A_z = A_\lambda - (\lambda - z)I = A_\lambda (I - (\lambda - z) R_\lambda)$. Если $|z - \lambda| \, \|R_\lambda\| < 1$, то по лемме получим $R_z = (I - (\lambda - z) R_\lambda)^{-1} R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - z)^n R_\lambda^{n+1}$ сходящийся ряд в силу полноты пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Следовательно, круг радиуса $r = \|R_\lambda\|^{-1}$ с центором в точке λ содержится в резольвентном множестве. Отсюда множество $\rho(A)$ открыто и функция R_λ является голоморфной на каждой связной компоненте $\rho(A)$. Для доказательства резольвентного уравнения имеем

$$R_\lambda = R_\lambda A_{\lambda_0} R_{\lambda_0} = R_{\lambda_0} - R_\lambda (A_\lambda - A_{\lambda_0}) R_{\lambda_0} = R_{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}.$$

Кроме того, поскольку по доказанному выполняется неравенство $\|R_\lambda\| \geqslant |\lambda - z|^{-1}$ при всех $z \in \sigma(A)$, т.е. имеет место неравенство $\|R_\lambda\| \geqslant 1/d_\lambda$. □

Теорема (о спектре)**.** *Спектр ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является непустым, замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы резольвентное множество $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ открыто, а спектр $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ будет замкнут в $\mathbb{C}$. Если число $|\lambda| > \|A\|$, то, применяя лемму, получим разложение $R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n / \lambda^{n+1}$. Следовательно, резольвента $R_\lambda \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным оператором при всех $|\lambda| > \|A\|$ и, кроме того, ее норма стремится $\|R_\lambda\| \to 0$ к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

Поэтому спектр $\sigma(A)$ находится в круге радиуса $\|A\|$ центром в нуле. Если спектр $\sigma(A) = \emptyset$ является пустым множеством, то по предыдущей теореме резольвента R_λ является голоморфной функцией во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда по обобщенной теореме Лиувилля $R_\lambda = 0$, что невозможно. □

Теорема (о спектральном радиусе). *Спектральный радиус* $r(A) \doteqdot \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$ *ограниченного оператора* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ *вычисляется по формуле* $r(A) = \lim \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Доказательство. Пусть число $\lambda \in \sigma(A)$ принадлежит спектру оператора A. Так как по теореме Безу $\lambda^n - z^n = (\lambda - z)P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$, то выполняются равенства $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)P_{n-1}(A) = P_{n-1}(A)(\lambda I - A)$. Если оператор $\lambda^n I - A^n$ является обратимым, то, умножая указанное равенство справа и слева на его обратный, мы получим, что оператор $\lambda I - A$ обратим. Поскольку это противоречит нашему предположению, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ про всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $|\lambda|^n \leqslant \|A^n\|$ и, следовательно, имеет место неравенство $r(A) \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

С другой стороны, ранее было получено разложение $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$ при всех $|\lambda| > \|A\|$. Радиус сходимости этого ряда Лорана в бесконечности вычисляется по формуле Коши–Адамара и равен $r \doteqdot \overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Поэтому ряд $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$ сходится при всех $|\lambda| > r$. Отсюда имеем $r = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} < |\lambda|$ при всех $|\lambda| > r(A)$, т.е. выполняется неравенство $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A)$. Таким образом, существует предел $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$ и равен спектральному радиусу $r(A)$. □

Свойства спектра сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

1. *Если* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ *действует в банаховом пространстве* $\boldsymbol{E}$, *то резольвента сопряженного оператора* $R_\lambda(A') = R'_\lambda(A)$ *и спектр* $\sigma(A') = \sigma(A)$.

Так как $\langle (A_\lambda)' f, x\rangle = \langle f, A_\lambda x\rangle = \langle (A')_\lambda f, x\rangle$, то имеет место равенство $(A_\lambda)' = (A')_\lambda$. Поэтому, используя для обратимого оператора равенство $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, получим $R'_\lambda(A) = (A_\lambda^{-1})' = ((A_\lambda)')^{-1} = ((A')_\lambda)^{-1} = R_\lambda(A')$. Отсюда следует $\rho(A') = \rho(A)$.

2. *Если* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ *задан в гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{H}$, *то резольвента эрмитово-сопряженного оператора* $R_\lambda(A^*) = R^*_{\bar\lambda}(A)$ *и спектр* $\sigma(A^*) = \overline{\sigma}(A)$.

По определению эрмитово-сопряженного оператора имеют место равенства

$$\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle \lambda x - Ax, y\rangle = \langle x, \bar\lambda y - A^* y\rangle = \langle x, (A^*)_{\bar\lambda}\, y\rangle,\ \text{т.е.}\ (A_\lambda)^* = (A^*)_{\bar\lambda}.$$

Отсюда $R^*_\lambda(A) = (A_\lambda^{-1})^* = (A^*_{\bar\lambda})^{-1} = R_{\bar\lambda}(A^*)$ при всех $\lambda \in \rho(A)$ и $\rho(A^*) = \overline{\rho}(A)$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным числом* для оператора A, если существует $e \in \boldsymbol{E} \setminus 0$, т.ч. $Ae = \lambda e$. Следующие множества называются

$\sigma_p(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$ точечным спектром оператора A;

$\sigma_c(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \boldsymbol{E}, \operatorname{Im} A_\lambda \neq \boldsymbol{E}\}$ непрерывным спектром A;

$\sigma_r(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}$ остаточным спектром оператора A.

Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то в силу теоремы Банаха об обратном операторе имеет место равенство $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$.

Число $\lambda \in \sigma_p(A)$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение $A_\lambda x = 0$ имеет ненулевое решение, т.е. λ является собственным числом для оператора A. Число $\lambda \in \sigma_c(A)$ тогда и только тогда, когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ будет плотно разрешимым, т.е. существует единственное решение для всюду плотного множества элементов $y \in \boldsymbol{E}$. Число $\lambda \in \sigma_r(A)$ тогда и только тогда , когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ не является плотно разрешимым, т.е. существует единственное решение только для не всюду плотного множества элементов $y \in \boldsymbol{E}$.

Для того чтобы линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы $\ker A = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{E}$. При этом условие $\ker A = 0$ равносильно существованию левого обратного $B : \operatorname{Im} A \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $BA = I$, а условие $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{E}$ равносильно существованию правого обратного $C : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $AC = I$.

Лемма. *Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ в банаховом пространстве имеет ограниченный левый обратный оператор $B \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} A, \boldsymbol{E})$, в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих условий:*

a) *оператор A ограничен снизу, т.е. $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| > 0$;*

b) *ядро $\ker A = 0$ и образ $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым.*

Доказательство. Если $B \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} A, \boldsymbol{E})$ левый обратный, то $\|x\| = \|BAx\| \leqslant \|B\|\|Ax\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|B\|^{-1} > 0$. Предположим теперь, что $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, где $c > 0$. Если $y_n = Ax_n \to y$ сходится, то $\|x_n - x_m\| \leqslant \|y_n - y_m\|/c \to 0$. Отсюда $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и существует предел $\lim x_n = x$. В силу непрерывности оператора $Ax = y \in \operatorname{Im} A$. Таким образом, оператор имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} A$ и его ядро $\ker A = 0$. По теореме Ба́наха об обратном операторе существует $B \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} A, \boldsymbol{E})$, т.ч. $BA = I$. □

Определение. $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *полурегулярным* числом оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ имеет ограниченный левый обратный $B_\lambda \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, \boldsymbol{E})$. Множество полурегулярных значений обозначается через $\rho_l(A)$. Дополнительное множество $\sigma_l(A) = \mathbb{C} \setminus \rho_l(A)$ называется *предельным спектром* оператора A.

По определению, если $\lambda \in \sigma_l(A)$, то оператор A_λ не имеет ограниченного обратного оператора и значит $\sigma_l(A) \subset \sigma(A)$. При этом в силу леммы *предельный спектр* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ совпадает с множеством

$$\sigma_l(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}.$$

Дополнительное множество $\sigma_d(A) \doteqdot \sigma(A) \setminus \sigma_l(A)$ называют *дефектным спектром*. Из леммы получаем, что дефектный спектр содержится в остаточном спектре

$$\sigma_d(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda = \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\} \subset \sigma_r(A).$$

В самом деле, Если $\lambda \notin \sigma_l(A)$, то $\lambda \in \rho_l(A)$ и, как показано в лемме, ядро будет равно $\ker A_\lambda = 0$, а образ $\mathrm{Im} A_\lambda$ является замкнутым, т.е. $\overline{\mathrm{Im} A_\lambda} = \mathrm{Im} A_\lambda$.

Число $\lambda \in \rho_l(A)$ тогда и только тогда является полурегулярным значением, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *корректно разрешимо*, т.е. существует ограниченный обратный оператор $B_\lambda : \mathrm{Im} A_\lambda \to \boldsymbol{E}$ на подпространстве $\mathrm{Im} A_\lambda$. Поэтому $\lambda \in \sigma_l(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ не является корректно разрешимым.

Теорема (о границе спектра). *Граница спектра $\partial\sigma(A)$ ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ содержится $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$ в предельном спектре.*

Доказательство. Если $\lambda \in \partial\sigma(A)$, то существует $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, т.ч. $\lambda_n \to \lambda$. Тогда имеем $d_{\lambda_n} \doteqdot \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda_n - z| \leqslant |\lambda_n - \lambda| \to 0$. Так как $A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = I$, то имеет место

$$A_\lambda R_{\lambda_n} = (\lambda - \lambda_n) R_{\lambda_n} + A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = (\lambda - \lambda_n) R_{\lambda_n} + I.$$

По определению нормы оператора R_{λ_n} существует последовательность $\{y_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|R_{\lambda_n} y_n\| > \|R_{\lambda_n}\|/2$. Поэтому, полагая $x_n \doteqdot R_{\lambda_n} y_n / \|R_{\lambda_n} y_n\|$ и применяя к $y_n / \|R_{\lambda_n} y_n\|$ указанное выше соотношение, получим следующее равенство:

$$A_\lambda x_n = A_\lambda R_{\lambda_n} \big(y_n / \|R_{\lambda_n} y_n\| \big) = (\lambda - \lambda_n) x_n + y_n / \|R_{\lambda_n} y_n\|.$$

Поскольку $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и по теореме о резольвенте $\|R_{\lambda_n} y_n\| > \|R_{\lambda_n}\|/2 \geqslant 1/2d_{\lambda_n}$, то $\|A_\lambda x_n\| \leqslant |\lambda - \lambda_n| + 2d_{\lambda_n} \leqslant 3|\lambda - \lambda_n| \to 0$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_l(A)$. $\square$

Пример 1. Пусть $A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$ — диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$ при всех $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \sup |\lambda_n| < \infty$.

Пусть $e_i \doteqdot \{\delta_{ij}\}$. Тогда $A e_n = \lambda_n e_n$, т.е. $\lambda_n \in \sigma_p(A)$ будут собственными числами. Если $\lambda \neq \lambda_n$, то оператор $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n) x_n$ тогда и только тогда имеет ограниченный обратный $(R_\lambda y)_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, когда его норма $\|R_\lambda\| = \sup |\lambda - \lambda_n|^{-1} < \infty$. Значит спектр A совпадает с замыканием $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$ множества $\{\lambda_n\}$.

Пусть $\lambda \in \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ предельная точка, т.е. существует подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$, т.ч. $\lim \lambda_{n_k} = \lambda$. Тогда $\|A_\lambda e_{n_k}\|_{\ell_p} = |\lambda - \lambda_{n_k}| \to 0$, т.е. $\lambda \in \sigma_l(A)$. Если $1 \leqslant p < \infty$, то образ $\mathrm{Im} A_\lambda$ содержит множество всех финитных последовательностей и значит будет всюду плотным в $\boldsymbol{\ell}_p$, т.е. $\lambda \in \sigma_c(A)$. Если $p = \infty$, то для всех элементов $y = \{y_n\} \in \mathrm{Im} A_\lambda$ получим $\lim y_{n_k} = 0$. Применяя теорему Ха́на–Ба́наха, построим продолжение функционала $f(y) = \lim y_{n_k}$ на все пространство $\boldsymbol{\ell}_\infty$ с сохранением нормы. Поэтому образ $\mathrm{Im} A_\lambda \subset \ker f$ не является всюду плотным, т.е. $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Структура спектра диагонального оператора						
Спектр оператора A	$\sigma(A)$	$\sigma_p(A)$	$\sigma_c(A)$	$\sigma_r(A)$	$\sigma_l(A)$	$\sigma_d(A)$
$A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$, $1 \leqslant p < \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$
$A : \boldsymbol{\ell}_\infty \to \boldsymbol{\ell}_\infty$, $p = \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$

Пример 2. Рассмотрим оператор *левого сдвига* $T_l : \boldsymbol{\ell}_1 \to \boldsymbol{\ell}_1$, определенный по формуле $(T_l x)_n = x_{n+1}$ при $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_1$. Его сопряженным будет оператор *правого*

сдвига $T_r = T_l^* : \ell_\infty \to \ell_\infty$, определенный по формуле $(T_r x)_n = x_{n-1}$ при $x = \{x_n\} \in \ell_\infty$, где $x_0 = 0$. Элементы $e_\lambda = \{\lambda^{n-1}\}$ являются собственными векторами оператора T_l с собственным значением λ при всех $|\lambda| < 1$. Так как норма оператора T_l равна $\|T_l\| = 1$, то его спектр $\sigma(T_l) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. Отсюда оператор T_r имеет норму $\|T_r\| = 1$ и его спектр $\sigma(T_r) = \sigma(T_l)$.

Структура спектра операторов левого и правого сдвига						
	σ	σ_p	σ_c	σ_r	σ_l	σ_d
$T_l : \ell_1 \to \ell_1$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\lvert\lambda\rvert < 1$	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$\emptyset$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\emptyset$
$T_r : \ell_\infty \to \ell_\infty$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$\lvert\lambda\rvert < 1$

8 КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ нормированные пространства рад полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ нормированное пространство ограниченных операторов, действующий в этих пространствах.

Определение. Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называют *компактным*, если образ $A(M)\subset\boldsymbol{F}$ каждого ограниченного множества $M\subset\boldsymbol{E}$ является предкомпактным. $\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначает множество всех компактных операторов и $\mathscr{K}(\boldsymbol{E})\doteqdot\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$.

1. *Оператор $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ тогда и только тогда является компактным, когда образ $A(\boldsymbol{S}_r)\subset\boldsymbol{F}$ какого-нибуть шара $\boldsymbol{S}_r\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid\|x\|\leqslant r\}$ предкомпактный.*

В самом деле, по определению множество $M\subset\boldsymbol{E}$ ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре $\boldsymbol{S}_r\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid\|x\|\leqslant r\}$, где $r>0$.

2. *Всякий компактный оператор $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограничен, т.е. $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

Действительно, так как образ единичного шара $A(\boldsymbol{S}_1)$ является предкомпактным, то он будет ограниченным множеством и значит норма $\|A\|<\infty$.

3. *Если $A,B\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактны, то их сумма $A+B\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактна.*

Действительно, пусть $\{x_n\}\subset\boldsymbol{S}_1$. Тогда существует $\{n_k\}$, т.ч. $Ax_{n_k}\to y\in\boldsymbol{F}$, и существует $\{n_{k_i}\}$, т.ч. $Bx_{n_{k_i}}\to z\in\boldsymbol{F}$. Отсюда $(A+B)x_{n_{k_i}}=Ax_{n_{k_i}}+Bx_{n_{k_i}}\to y+z\in\boldsymbol{F}$. Таким образом, множество $(A+B)(\boldsymbol{S}_1)\subset\boldsymbol{F}$ является предкомпактным.

4. *Если $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B\in\mathscr{K}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то оператор $BA\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ компактный. Если $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то оператор $BA\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ компактный.*

Это следует из того, что всякий ограниченный оператор переводит ограниченные множества в ограниченные, а предкомпактные множества в предкомпактные.

5. *Если размерность $\dim\boldsymbol{E}<\infty$ или $\dim\boldsymbol{F}<\infty$, то ограниченный оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является компактным $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

Действительно, всякое ограниченное множество $M\subset\boldsymbol{E}$ в пространстве конечной размерности $\dim\boldsymbol{E}<\infty$ является предкомпактным. Поэтому единичный шар $\boldsymbol{S}_1\subset\boldsymbol{E}$ и его образ $A(\boldsymbol{S}_1)\subset\boldsymbol{F}$ при непрерывном отображении будут предкомпактными.

6. *Если $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный, то его образ $\mathrm{Im}A$ сепарабелен.*

Так как $A(\boldsymbol{E})=\bigcup_{n=1}^{\infty}A(\boldsymbol{S}_n)$ и $A(\boldsymbol{S}_n)$ сепарабельно, то образ $\mathrm{Im}A$ сепарабелен.

7. *Если $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный и размерность $\dim\boldsymbol{E}=\infty$, то оператор A не имеет ограниченного левого обратного оператора и значит необратим.*

Если существует левый обратный $B\in\mathscr{L}(\mathrm{Im}A,\boldsymbol{E})$, то тождественный оператор, равный $BA=I$, является компактным, что невозможно, т.к. единичный шар $\boldsymbol{S}_1\subset\boldsymbol{E}$ в бесконечномерном пространстве не является предкомпактным.

8. *Если $\boldsymbol{F}$ — банахово пространство и последовательность $\{A_n\}$ компактных операторов $A_n \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сходится по норме к A, то $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный.*

По условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется n, т.ч. $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon/2$ при всех $x \in \boldsymbol{S}_1$. Так как $A_n(\boldsymbol{S}_1)$ предкомпактно, то существует $\varepsilon/2$-сеть $\{y_k\}_{k=1}^m$ множества $A_n(\boldsymbol{S}_1)$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{S}_1$ найдется k, т.ч. $\|y_k - Ax\| \leqslant \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$, т.е. $\{y_k\}_{k=1}^m$ является ε-сетью $A(\boldsymbol{S}_1)$. По теореме Хаусдорфа $A(\boldsymbol{S}_1)$ предкомпактно.

Определение. Пусть $f_n \in \boldsymbol{E}'$, $y_n \in \boldsymbol{F}$, $c_n \in \mathbb{F}$ обладают свойствами $\sup\|f_n\| < \infty$, $\sup\|y_n\| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ и $\boldsymbol{F}$ является банаховым пространством. Тогда оператор

$$A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}, \quad A(x) \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)\, y_n \text{ при всех } x \in \boldsymbol{E},$$

называется *ядернаным*. *Ядерной нормой* ядерного оператора называется

$$\|A\|_{\mathscr{N}} \doteqdot \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\,\|f_n\|\,\|y_n\|,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям $A(x) \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)\, y_n$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, указанным в определении ядерного оператора. Пространство всех ядерных операторов обозначается через $\mathscr{N}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\mathscr{N}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{N}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$.

Область определения ядерного оператора состоит из всех $x \in \boldsymbol{E}$. В самом деле, частичные суммы ряда образуют последовательность Коши в пространстве $\boldsymbol{F}$, т.к.

$$\Big\|\sum_{k=n}^{m} c_n \langle f_n, x\rangle\, y_n\Big\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |c_n|\,\|f_n\|\,\|x\|\,\|y_n\| \ll \sum_{k=n}^{m} |c_n|\,\|x\| < \varepsilon \|x\| \text{ при всех } n \geqslant N.$$

Отсюда существует равномерный предел последовательности операторов, равных частичным суммам этого ряда. Следовательно, в силу свойства 8 ядерный оператор $A \in \mathscr{N}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является компактным $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

Пример 1. Примером ядерного оператора являются ограниченные *операторы конечного ранга*, т.е. линейные операторы $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, у которых образ $\mathrm{Im}A$ имеет конечную размерность $\dim(\mathrm{Im}A) < \infty$. В самом деле, выберем базис $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \mathrm{Im}A$ подпространства $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{E}$ и образуем биортогональную систему функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}'$. Тогда оператор принимает вид $Ax = \sum_{i=1}^n f_i(Ax)\, e_i$.

Множество всех ограниченных операторов конечного ранга обозначается через $\mathscr{N}_0(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\mathscr{N}_0(\boldsymbol{E}) = \mathscr{N}_0(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$. Заметим, что в алгебре $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ всех ограниченных операторов подпространства $\mathscr{N}_0(\boldsymbol{E})$ и $\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ являются идеалами.

Пример 2. Пусть множества $X \Subset \mathbb{R}^n$, $Y \Subset \mathbb{R}^m$ компактны и функция $K \in \boldsymbol{C}(X \times Y)$ непрерывна. Тогда интегральный оператор, определенный по формуле

$$Af(x) \doteqdot \int_Y K(x,y)\, f(y)\, dy \text{ при всех } f \in \boldsymbol{C}(Y)$$

и действующий из $\boldsymbol{C}(Y)$ в $\boldsymbol{C}(X)$, является компактным.

В самом деле, по определению нормы в пространстве непрерывных функций, получим неравенство $\|Af\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \mu_m(X)\|K\|_{\boldsymbol{C}}\|f\|_{\boldsymbol{C}}$ для всех $f \in \boldsymbol{C}(Y)$, где μ_m мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$. Так как функция $K(x,y)$ равномерно непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|K(x_1,y) - K(x_2,y)| < \varepsilon$ при всех $|x_1 - x_2| < \delta$. Следовательно, при всех $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство

$$|Af(x_1) - Af(x_2)| \leqslant \int_Y |K(x_1,y) - K(x_2,y)|\,|f(y)|\,dy < \varepsilon\mu_m(Y)\|f\|_{\boldsymbol{C}}.$$

Таким образом, образ единичного шара $A(\boldsymbol{S}_1) \subset \boldsymbol{C}(X)$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По теореме Арцела́–Аско́ли множество $A(\boldsymbol{S}_1)$ предкомпактно в $\boldsymbol{C}(X)$. Поэтому оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{C}(Y),\boldsymbol{C}(X))$ компактный.

Пример 3. Пусть заданы (X,μ) и (Y,ν) измеримые пространства с σ-конечными и σ-аддитивными мерами, $(X\otimes Y, \mu\otimes\nu)$ обозначает их тензорное произведение и функция $K \in \boldsymbol{L}_2(X\otimes Y, \mu\otimes\nu)$. Тогда интегральный оператор

$$Af(x) \doteqdot \int_Y K(x,y)\,f(y)\,d\nu(y) \text{ при всех } f \in \boldsymbol{L}_2(Y,\nu),$$

действующий из $\boldsymbol{L}_2(Y,\nu)$ в $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$, называется оператором Ги́льберта–Шми́дта. Докажем, что интегральный оператор Ги́льберта–Шми́дта является компактным.

Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского и теорему Фубини, получим, что

$$\|Af\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_2}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2} \text{ при всех } f \in \boldsymbol{L}_2(Y,\nu).$$

Поскольку множество простых функций $\mathcal{H}(X\otimes Y,\mu\otimes\nu)$ является всюду плотным в пространстве $\boldsymbol{L}_2(X\otimes Y,\mu\otimes\nu)$, то для каждого $n\in\mathbb{N}$ найдется $K_n \in \mathcal{H}(X\otimes Y,\mu\otimes\nu)$, т.ч. $\|K - K_n\|_{\boldsymbol{L}_2} < 1/n$. Определим интегральный оператор по формуле

$$A_nf(x) \doteqdot \int_Y K_n(x,y)\,f(y)\,d\nu(y) \text{ при всех } f \in \boldsymbol{L}_2(Y,\nu).$$

Используя указанное выше неравенство, получим $\|Af - A_nf\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|K - K_n\|_{\boldsymbol{L}_2}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$, т.е. $\|A - A_n\| < 1/n$. Отсюда последовательность компактных операторов сходится по норме к A. По свойству 8 оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{L}_2(Y,\nu),\boldsymbol{L}_2(X,\mu))$ компактный.

Выясним свойства спектра $\sigma(A)$ компактного оператора $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$. Напомним, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит предельному спектру $\lambda \in \sigma_l(A)$ оператора A, если выполняется равенство $\inf_{\|x\|=1}\|A_\lambda x\| = 0$.

1. *Если размерность* $\dim\boldsymbol{E} = \infty$ *и* $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, *то* $\sigma_l(A) = \sigma_p(A)\cup\{0\}$.

По определению $\sigma_p(A) \subset \sigma_l(A)$ и из свойства 7 имеем $0 \in \sigma_l(A)$. Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$ и $\lambda \neq 0$, тогда существует $\{x_n\}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \to 0$. В силу компактности A существует $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to e \in \boldsymbol{E}$. Поскольку $\lambda x_{n_k} = A_\lambda x_{n_k} + Ax_{n_k}$, то $\lambda x_{n_k} \to e$. Тогда по непрерывности оператора $A(\lambda x_{n_k}) \to Ae = \lambda e$, т.е. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

2. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, то при любом $\varepsilon > 0$ вне круга $\boldsymbol{S}_\varepsilon \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \varepsilon\}$ может находится лишь конечное число собственных значений оператора A.*

Предположим, что найдется последовательность $|\lambda_n| > \varepsilon$ различных собственных значений. Рассмотрим последовательность $\{e_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|e_n\| = 1$ и $Ae_n = \lambda_n e_n$, и обозначим через $L_n = \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^n$ линейную оболочку. Поскольку $\{e_n\}$ линейно независимы, то $L_{n-1} \neq L_n$. По лемме Рисса о почти перпендикуляре существуют $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Представим эти элементы в виде $y_n \doteqdot c_n e_n + x_n$, где $x_n \in L_{n-1}$. Тогда $Ay_n = c_n\lambda_n e_n + Ax_n = \lambda_n y_n - \lambda_n x_n + Ax_n$, где $\lambda_n x_n - Ax_n \in L_{n-1}$. Так как при $n > m$ имеем $\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m \in L_{n-1}$, то

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m)\| > |\lambda_n|/2 > \varepsilon/2,$$

т.е. последовательность $\{Ay_n\} \subset A(\boldsymbol{S})$ не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.

Теорема (Ри́сса–Ша́удера). *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ размерности $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то его спектр $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ состоит из собственных значений и нуля, а ненулевые собственные значения $\lambda \neq 0$ имеют конечную кратность $n_\lambda \doteqdot \dim E_\lambda < \infty$, где $E_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$.*

Доказательство. По свойству 1 спектра компактного оператора и по теореме о границе спектра выполняется включение $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Поскольку в силу свойства 2 вне любого круга $\boldsymbol{S}_\varepsilon \subset \mathbb{C}$ радиуса $\varepsilon > 0$ имеется лишь конечное число собственных значений $\lambda \in \sigma_p(A)$, то там нет других точек спектра. В самом деле, предположим, что эта область содержит точки спектра $\sigma(A)$, не являющиеся собственными значениями. Ясно, что существует прямая в этой области, идущая в бесконечность, содержащая точки спектра и не проходящая через собственные значения. Тогда последняя точка спектра на этой прямой будет граничной точкой спектра, что невозможно. Таким образом, спектр компактного оператора совпадает предельным спектром $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Поскольку сужение оператора $A|_{E_\lambda} = \lambda I|_{E_\lambda}$ на собственное подпространство E_λ, соответствующее собственному значению $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$, является компактным и обратимым оператором, то по свойству 7 размерность $\dim E_\lambda < \infty$. □

Теорема (Ша́удера). *Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ банаховы пространства и $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$. Для того чтобы $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ был компактным, необходимо и достаточно, чтобы сопряженный $A' \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{E}')$ был компактным.*

Доказательство. Необходимость. По условию компактности оператора A замкнутый образ единичного шара $K \doteqdot \overline{A(\boldsymbol{S}_1)}$ является компактным. Обозначим через $\boldsymbol{M}$ множество непрерывных функций $g \in \boldsymbol{C}(K)$, т.ч. $g(y) \doteqdot f(y)$ при всех $y \in K$, где $f \in \boldsymbol{S}_1' \subset \boldsymbol{F}'$ линейный функционал с нормой $\|f\| \leqslant 1$. Поскольку

$$\sup_{y \in K} |g(y)| = \sup_{x \in \boldsymbol{S}} |f(Ax)\| \leqslant \|A\|, \quad |g(y_1) - g(y_2)| = |f(y_1 - y_2)| \leqslant \|y_1 - y_2\|,$$

то множество $M \subset C(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Арцела́–Аско́ли множество M является предкомпактным. Заметим, что M изометрично образу $A'(S_1')$ сопряженного единичного шара S_1', поскольку

$$\|A'f\| = \sup_{x\in S_1} |A'f(x)| = \sup_{x\in S_1} |f(Ax)| = \sup_{y\in K} |g(y)| = \|g\|_C .$$

Поэтому образ единичного шара $A'(S_1') \subset E'$ является предкомпактным.

Достаточность. Если сопряженный оператор $A' \in \mathscr{K}(F', E')$ компактный, то по доказанному $A'' \in \mathscr{K}(E'', F'')$. Пусть J обозначает каноническое вложение во второе сопряженное пространство, а скобки обозначают значение функционала. Тогда, полагая $J(x) = \delta_x$, получим следующие равенства:

$$\langle A''J(x), f\rangle = \langle \delta_x, A'f\rangle = \langle A'f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle = \langle JA(x), f\rangle, \text{ где } x \in E \text{ и } f \in F^*,$$

т.е. $A''J = JA$. Отсюда $JA(S_1)) = A''J(S_1)) \subset A''(S'')$. Так как $A''(S_1'')$ предкомпактно, то $A(S_1)$ будет предкомпактным в силу изометричности вложения J. □

Теорема (Ве́йля о возмущении). *Если разность $K = A - B$ двух ограниченных операторов $A, B \in \mathscr{L}(E)$ в банаховом пространстве E является компактным оператором $K \in \mathscr{K}(E)$, то спектры этих операторов совпадают с точностью до собственных значений этих операторов, т.е. $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subset \sigma(B)$.*

Доказательство. Требуется доказать, что если оператор $A_\lambda = \lambda I - A$ необратим и его ядро $\ker A_\lambda = 0$, то оператор $B_\lambda = \lambda I - B$ также необратим. Для доказательства предположим, что оператор B_λ обратим. Тогда мы имеем следующие равенства:

$$A_\lambda = B_\lambda + (B - A) = B_\lambda(I - B_\lambda^{-1}(A - B)) = B_\lambda(I - B_\lambda^{-1}K).$$

Поскольку оператор A_λ необратим, то $\lambda = 1$ является его собственным значением компактного оператор $B_\lambda^{-1}K \in \mathscr{K}(E)$. Так как $B_\lambda^{-1}K = B_\lambda^{-1}(A - B) = I - B_\lambda^{-1}A_\lambda$, то существует ненулевой вектор $x \in E$, т.ч. $x - B_\lambda^{-1}A_\lambda x = x$. Откуда $B_\lambda^{-1}A_\lambda x = 0$, т.е. $A_\lambda x = 0$, и мы получили противоречие с предположением $\ker A_\lambda = 0$. □

Следствие. *Если операторы $A, B \in \mathscr{L}(E)$ не имеют остаточного спектра и их разность компактна, то непрерывные спектры совпадают с точностью до собственных значений этих операторов.*

Определение. Операторы $A \in \mathscr{L}(E)$ и $B \in \mathscr{L}(F)$ называются *(изометрически) эквивалентными* и обозначают $A \simeq B$ ($A \cong B$), если существует (изометрический) изоморфизм $T : E \to F$, т.ч. $BT = TA$. В случае, когда пространства E и F являются гильбертовыми, операторы $A \cong B$ называются *унитарно эквивалентными*.

Если, кроме того, оператор T является изометричным отображением E на F, то эти операторы называются *изометрически эквивалентными* $A \approx B$.

1. *Если $A \simeq B$ эквивалентны, то $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$ и $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$.*

Поскольку $A_\lambda = \lambda I - A$, $B_\lambda = \lambda I - B$ и $BT = TA$, то $B_\lambda T = TA_\lambda$. Поэтому операторы $A_\lambda \sim B_\lambda$ эквивалентны. Следовательно, A_λ обратим тогда и только тогда, когда B_λ обратим. При этом имеют место равенства $\ker B_\lambda = T \ker A_\lambda$ и $\operatorname{Im} B_\lambda = T \operatorname{Im} A_\lambda$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Отсюда легко вытекают указанные равенства спектров.

2. *Если $A \cong B$ изометрически эквивалентны, то* $\|A\| = \|B\|$.

В силу изометричности $B = TAT^{-1}$, где $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$. Поэтому имеют место неравенства $\|B\| \leqslant \|A\|$ и $\|A\| \leqslant \|B\|$. Откуда следует, что $\|A\| = \|B\|$.

Пример 4. Выясним структуру спектра оператора $Af(x) \doteq a(x) f(x)$ умножения на функцию $a(x) \in \boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Вначале докажем, что $\|A\| = \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. В случае $p = \infty$ это вытекает из определения нормы в $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$. Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Поскольку имеет место неравенство

$$\|Af\|^p_{\boldsymbol{L}_p} = \int_X |a(x)f(x)|^p d\mu(x) \leqslant \|a\|^p_{\boldsymbol{L}_\infty} \|f\|^p_{\boldsymbol{L}_p},$$

то норма $\|A\| \leqslant \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ выберем множество $E \subset X$, т.ч. $|a(x)| > \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon$ при всех $x \in E$, и положим $f(x) = \chi_E(x)$. Тогда

$$\|Af\|^p_{\boldsymbol{L}_p} = \int_E |a(x)|^p d\mu(x) > (\|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon)^p \mu(E) = (\|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon)^p \|f\|^p_{\boldsymbol{L}_p}.$$

Отсюда следует, что $\|A\| > \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon$ при любом ε. Поэтому $\|A\| = \|a\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$.

Резольвента оператора находится из уравнения $A_\lambda f(x) = (\lambda - a(x))f(x) = g(x)$. Решая это уравнение относительно f, получим $R_\lambda g(x) = g(x)/(\lambda - a(x))$. Так как резольвента является ограниченным оператором, то $\|(\lambda - a)^{-1}\|_{\boldsymbol{L}_\infty} < \infty$. Точки $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие этому условию, составляют резольвентное множество $\rho(A)$ и называется множеством *несущественных значений* функции $a(x)$. Дополнительное множество образует спектр $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ и называется множеством *существенных значений* функции $a(x)$. Таким образом, $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда мера множества $\mu(E_\varepsilon(\lambda)) > 0$ при всех $\varepsilon > 0$, где $E_\varepsilon(\lambda) \doteq \{x \in X \mid |\lambda - a(x)| < \varepsilon\}$.

Если мера множества $E_0(\lambda) \doteq \{x \in X \mid a(x) = \lambda\}$ положительна $\mu(E_0(\lambda)) > 0$, то $\lambda \in \sigma_p(A)$. В самом деле, для любого множества $M \subset E_0(\lambda)$ положительной меры $\mu(M) > 0$ характеристическая функция $f(x) = \chi_M(x)$ множества M является собственной функцией с собственным значением λ.

Если $1 \leqslant p < \infty$ и мера множества $E_0(\lambda)$ равна нулю $\mu(E_0(\lambda)) = 0$, то $\lambda \in \sigma_c(A)$. Действительно, ясно, что $\ker A_\lambda = 0$. Для каждой функции $g \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ определим функцию $g_\varepsilon(x) = (\lambda - a(x))^{-1} g(x) \chi_{X \setminus E_\varepsilon(\lambda)}(x)$, тогда при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\|g - A_\lambda g_\varepsilon\|^p_{\boldsymbol{L}_p} = \int_{E_\varepsilon(\lambda)} |g(x)|^p d\mu \to 0, \text{ так как } \mu(E_\varepsilon(\lambda)) \to 0,$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебéга. Таким образом, замыкание образа $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ и, следовательно, $\lambda \in \sigma_c(A)$.

Если $p = \infty$ и мера множества $E_0(\lambda)$ равна нулю $\mu(E_0(\lambda)) = 0$, то $\lambda \in \sigma_r(A)$. В самом деле, ясно, что $\ker A_\lambda = 0$. Рассмотрим линейный функционал

$$\alpha(g) = \lim_{\delta \to 0} \int_{E_\varepsilon(\lambda)} g(x)\, d\mu / \mu(E_\varepsilon(\lambda)), \quad g \in \boldsymbol{L}_p(X, \mu).$$

Поскольку $|\alpha(g)| \leqslant \|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$, то функционал ограничен на пространстве $\boldsymbol{L}_\infty(X, \mu)$, а так как $|\alpha(g)| \leqslant \varepsilon \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ при $g(x) = (\lambda - a(x)) f(x) \in \operatorname{Im} A_\lambda$, то функционал равен нулю на подпространстве $\operatorname{Im} A_\lambda$. Следовательно, получаем $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Пример 5. Выясним структуру спектра оператора свертки с функцией $K \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, определенного следующей формулой:

$$Af(x) = K * f(x) = \textstyle\int_{\mathbb{R}} K(x-y)\, f(y)\, dy, \text{ где } f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}).$$

Применяя обобщенное неравенство Минко́вского, получим $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_1} \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Значит $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и в качестве оператора T можно взять преобразование Фурье́. Тогда из формулы свертки вытекает, что $\widehat{Af}(x) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{K}(x)\, \widehat{f}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

По лемме Ри́мана–Лебе́га $\varphi(x) \doteqdot \sqrt{2\pi}\, \widehat{K}(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Поэтому функцию $\varphi(x)$ мы можем считать заданной на множестве $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ и непрерывной, т.е. $\varphi(\pm\infty) = 0$. Пусть $Bg(x) \doteqdot \varphi(x)\, g(x)$ обозначает оператор умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Тогда $B_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))\, g(x)$ и $R_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))^{-1} g(x)$. Резольвента R_λ является ограниченным оператором в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\|R_\lambda\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda - \varphi(x)|^{-1} < \infty$. Поэтому $\sigma(B) = \varphi(\overline{\mathbb{R}})$. Поскольку операторы $A \approx B$ унитарно эквивалентны, то выполняются следующие свойства:

a) норма оператора $\|A\| = \|B\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$;

b) спектр оператора $\sigma(A) = \sigma(B) = \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \doteqdot \{\lambda = \varphi(x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$;

c) точечный спектр $\sigma_p(A) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \text{мера } \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$;

d) непрерывный спектр $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \text{мера } \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0\}$;

e) предельный спектр $\sigma_l(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) = \sigma(A)$.

В самом деле, если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$ положительна, то функция $e(x) \doteqdot \chi_E(x)$, где $E \subset \varphi^{-1}(\lambda)$ есть измеримое множество положительной меры $\mu(E) > 0$, является собственной функцией оператора B, т.е. $Be(x) = \lambda e(x)$. Поэтому $\lambda \in \sigma_p(B)$.

Докажем теперь, что при $\lambda \neq 0$ и $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$ замыкание образа $\overline{\operatorname{Im} B_\lambda} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим открытое множество O_δ меры меньше $\delta > 0$ и содержащее $\varphi^{-1}(\lambda)$. Для каждой функции $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ определим следующую функцию: $g_\delta(x) \doteqdot 0$, если $x \in O_\delta$; $g_\delta(x) \doteqdot (\lambda - \varphi(x))^{-1} g(x)$, если $x \notin O_\delta$. Так как $|g_\delta(x)| \leqslant c\, |g(x)|$ при некотором $c > 0$, то $g_\delta \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и из абсолютной непрерывности интеграла Лебе́га получим

$$\|g - B_\lambda g_\delta\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \textstyle\int_{\mathbb{R}} |g(x) - B_\lambda g_\delta(x)|^2 dx = \int_{O_\delta} |g(x)|^2 dx \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Поэтому имеем $\lambda \in \sigma_c(B)$ и $\sigma_l(B) = \sigma_p(B) \sqcup \sigma_c(B) = \sigma(B)$. Аналогичным образом рассматривается случай, когда $\lambda = 0$ и $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$.

9 ФРЕДГО́ЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ обозначают банаховы пространства. Напомним, что *коразмерностью* подпространства $L \subset \boldsymbol{E}$ называется размерность факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$.

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *фредго́льмовым*, если ядро имеет конечную размерность $\dim(\ker A) = n$, а образ конечную коразмерность $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = m$. Величина $\operatorname{ind} A \doteqdot n - m$ называется *индексом* A. Множество фредго́льмовых операторов обозначается через $\mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\mathscr{F}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$.

Лемма. *Если оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ фредго́льмовый, то образ $\operatorname{Im} A$ замкнут.*

Доказательство. Пусть $\{\widehat{e}_k\}_{k=1}^m$ образует базис факторпространства $\widehat{\boldsymbol{F}} \doteqdot \boldsymbol{F}/\operatorname{Im} A$. Поскольку всякий элемент $z \in \boldsymbol{F}$ допускает представление $z = z_0 + \sum_{k=1}^m c_k e_k$, где $z_0 \in \operatorname{Im} A$, то пространство $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A \oplus M$ является прямой суммой образа и линейной оболочки $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$. Рассмотрим оператор $B : \boldsymbol{E} \times M \to \boldsymbol{F}$, определенный по формуле $B(x,y) \doteqdot Ax + y$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $y \in M$. Так как $\|B\| \ll \|A\| + 1$, то оператор B ограниченный и сюръективный. Поэтому он является гомоморфизмом и значит образ $B(\boldsymbol{E} \times 0) = \operatorname{Im} A$ будет замкнутым подпространством в $\boldsymbol{F}$. $\square$

Пример 1. Всякий биективный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является фредгольмовым. Компактный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ не является фредгольмовым, если $\dim \boldsymbol{E} = \infty$ или $\dim \boldsymbol{F} = \infty$. В самом деле, иначе по теореме о гомоморфизме образ единичного шара $A(\boldsymbol{S})$ является окрестностью нуля в $\operatorname{Im} A$. Силу предкомпактности образа $A(\boldsymbol{S})$ по теореме Ри́сса размерность $\dim(\operatorname{Im} A) < \infty$ конечна, а значит размерности $\dim \boldsymbol{F} < \infty$ и $\dim \boldsymbol{E} < \infty$ также конечны, что невозможно по предположению.

Теорема (о каноническом операторе Фредго́льма)**.** *Если оператор $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ является компактным, то оператор $A \doteqdot I - K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})$ фредго́льмовый.*

Доказательство. Так как по теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A$ имеет конечную размерность, то существует замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$. Докажем, что оператор $B \doteqdot A|_L$ имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A$.

Заметим, что B ограничен снизу. В самом деле, иначе существует $\{x_n\} \subset L$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to 0$. В силу компактности K существует подпоследовательность, т.ч. $Kx_{n_i} \to x$ сходится по норме. Так как $x_{n_i} = Ax_{n_i} + Kx_{n_i} \to x$, то $Ax_{n_i} \to Ax$. Поэтому из замкнутости L следует, что $x \in L$, $\|x\| = 1$ и $Ax = 0$. Таким образом, $\ker B \neq 0$, что противоречит выбору L. В силу леммы, доказанной ранее, из ограниченности снизу оператора B вытекает, что он имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A$.

Тогда из доказанных ранее соотношений ядра и образа получим $\operatorname{Im} A = (\ker A')_\perp$. По теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A'$ имеет конечную размерность m. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ образует базис ядра $\ker A'$ и $\{e_k\}_{k=1}^m$ соответствующая ему биортогональная система. Тогда имеем $\operatorname{Im} A = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Обозначим через $L \doteqdot \operatorname{Im} A$ и $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку. Всякий элемент $x \in \boldsymbol{E}$ допускает разложение $x = y + z$, где

$z = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\, e_k \in M$ и $y = x - z \in L$. Таким образом, $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ и коразмерность образа равна $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}A) = \dim(\ker A') = m$ размерности ядра $\ker A'$. □

Замечание. Из леммы и последнего абзаца доказательства теоремы получается, что ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда является фредго́льмовым $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})$, когда образ $\mathrm{Im}A$ является замкнутым, а ядро $\ker A$ и ядро $\ker A'$ сопряженного оператора имеют конечную размерность.

В курсе линейной алгебры доказывается следующая альтернатива Фредго́льма: либо система n линейных уравнений с n неизвестными однозначно разрешима для любой правой части, либо однородная система имеет ненулевое решение. Теоремы Фредго́льма в бесконечномерном банаховом пространстве устанавливают аналогичные связи между решениями однородного и неоднородного уравнений.

Для доказательств теорем Фредгольма предположим, что $A \doteqdot I - K$ является каноническим оператором Фредгольма в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$, где $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор, а оператор $A' \doteqdot I - K'$ является сопряженным оператором. По теореме Ри́сса–Ша́удера ядра этих операторов $\ker A$ и $\ker A'$ имеют конечную размерность $\dim(\ker A) = n$ и $\dim(\ker A') = \mathrm{codim}(\mathrm{Im}A) = m$.

Теорема (I теорема Фредго́льма)**.** *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ базис решений однородного сопряженного уравнения $A'f = 0$. Неоднородное уравнение $Ax = y$ имеет решение тогда и только тогда, когда $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Поскольку образ $\mathrm{Im}A$ замкнут, то в силу соотношений ядра и образа $\mathrm{Im}A = (\ker A')_{\perp} = \bigcap_{k=1}^{m} \ker f_k$. Поэтому $y \in \mathrm{Im}A$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$. □

Теорема (II теорема Фредго́льма)**.** *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ базис решений однородного уравнения $Ax = 0$. Неоднородное сопряженное уравнение $A'f = g$ имеет решение тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Так как образ замкнут, то в силу соотношений ядра и образа $\mathrm{Im}A' = (\ker A)^{\perp} = \bigcap_{k=1}^{n} \ker \delta_{x_k}$, где $\delta_{x_k}(f) \doteqdot f(x_k)$ при $f \in \boldsymbol{E}'$ функционал Дирака. Отсюда $g \in \mathrm{Im}A'$ тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. □

Теорема (III теорема, альтернатива Фредго́льма)**.** *Для того чтобы неоднородное уравнение $Ax = y$ было разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $Ax = 0$ имело только нулевое решение.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует элемент $x_1 \neq 0$, т.ч. $Ax_1 = 0$. Обозначим через $L_n \doteqdot \ker A^n$ ядро оператора A^n. Тогда включения $L_{n-1} \subset L_n$ являются строгими. В самом деле, по условию существуют $x_n \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $Ax_n = x_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Поэтому $A^{n-1}x_n = x_1 \neq 0$ и значит $x_n \in L_n \setminus L_{n-1}$.

В силу леммы Ф. Рисса о почти перпендикуляре существуют элементы $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Поскольку имеют место равенства $Ky_n - Ky_m = y_n - (Ay_n + y_m - Ay_m)$ и элемент $Ay_n + y_m - Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то

$\|Ky_n - Ky_m\| > 1/2$ при $n > m$, а значит последовательность Ky_n не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора K.

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = 0$ допускает только нулевое решение. Тогда по второй теореме неоднородное сопряженное уравнение $A'f = g$ разрешимо при всех $g \in \boldsymbol{E}'$. Поэтому из доказанной необходимости однородное сопряженное уравнение $A'f = 0$ имеет только нулевое решение. Таким образом, по первой теореме неоднородное уравнение $Ax = y$ разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$. $\square$

Теорема (об индексе канонического оператора Фредго́льма)**.** *Уравнения* $Ax = 0$ *и* $A'f = 0$ *имеют равное число линейно независимых решений, т.е.* $\mathrm{ind}A = n - m = 0$.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ образует базис в подпространстве $\ker A$ и $\{f_i\}_{i=1}^n$ соответствующая биортогональная система функционалов из $\boldsymbol{E}'$. Пусть $\{g_j\}_{j=1}^m$ образует базис в подпространстве $\ker A'$ и $\{y_j\}_{i=1}^m$ соответствующая биортогональная система элементов из $\boldsymbol{E}$. Докажем, что следующие два случая невозможны.

a) $n < m$. Определим компактные операторы $K_n x \doteqdot Kx + \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ при $x \in \boldsymbol{E}$ и положим $A_n \doteqdot I - K_n$. Докажем, что его ядро $\ker A_n = 0$. Если элемент $x \in \ker A_n$, то получаем уравнение $Ax = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$. Поскольку $A'g_j = 0$ при $j = 1, \ldots, m$, то $A'g_j(x) = g_j(Ax) = f_j(x) = 0$ при $j = 1, \ldots, n$. Поэтому в силу уравнения $Ax = 0$ и значит, выражая элемент $x \in \ker A$ по базису, имеем $x = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i = 0$.

Применяя теперь к оператору A_n третью теорему Фредго́льма, заключаем, что существует элемент $z \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $A_n z = y_m$. Отсюда $1 = g_m(y_m) = g_m(A_n z) = g_m(Az) = A'g_m(z) = 0$. Таким образом, мы получили противоречие.

b) $n > m$. Рассмотрим компактный оператор $K'_m f \doteqdot K'f + \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$ при $f \in \boldsymbol{E}'$, который является сопряженным к компактному оператору $K_m x \doteqdot Kx + \sum_{j=1}^m f_j(x) y_j$. Положим $A'_m = I - K'_m$. Докажем, что его ядро $\ker A'_m = 0$. Если элемент $f \in \ker A'_m$, то получаем уравнение $A'f = \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$. Поскольку $Ax_i = 0$ при $i = 1, \ldots, n$, то $A'f(x_i) = f(Ax_i) = f(y_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, m$. Поэтому в силу уравнения $A'f = 0$ и значит, выражая этот элемент $f \in \ker A'$ по базису, имеем $f = \sum_{j=1}^m f(y_j) g_j = 0$.

Применяя теперь к оператору A'_m третью теорему Фредго́льма, заключаем, что существует элемент $h \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $A'_m h = f_n$. Отсюда $1 = f_n(x_n) = A'_m h(x_n) = h(A_m x_n) = h(Ax_n) = 0$. Таким образом, мы получили противоречие. $\square$

Ограниченный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *оператором конечного ранга*, если его образ $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность. Множество всех операторов конечного ранга обозначается через $\mathscr{N}_0(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ и $\mathscr{N}_0(\boldsymbol{E}) = \mathscr{N}_0(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$. Говорят, что банахово пространство $\boldsymbol{E}$ обладает *свойством аппроксимации*, если любой компактный оператор $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ можно аппроксимировать подпространством $\mathscr{N}_0(\boldsymbol{E})$ операторов конечного ранга. Например, таким является гильбертово пространство.

Лемма. *Если банахово пространство* $\boldsymbol{E}$ *имеет базис Шаудера* $\{e_i\}_{i=1}^\infty$*, то оно обладает свойством аппроксимации.*

Доказательство. По определению базиса Шаудера для любого $x \in \boldsymbol{E}$ и $\varepsilon > 0$ существуют $c_i \in \mathbb{F}$, т.ч. $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$. Обозначим через $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ частичную сумму этого ряда и определим новую норму $\|x\|_1 \doteqdot \sup \|s_n(x)\|$ пространстве $\boldsymbol{E}$. Так как относительно этой нормы пространство $\boldsymbol{E}$ полно, то она эквивалентна старой норме. Поскольку относительно новой нормы $\|s_n\|_1 \leqslant 1$, то существует $c \geqslant 1$, т.ч. $\|s_n\| \leqslant c$ относительно старой нормы. Пусть $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор, тогда существует конечная $\frac{\varepsilon}{3c\|A\|}$-сеть $\{x_j\}_{j=1}^{m}$ в образе $A(\boldsymbol{S}_1)$ единичного шара пространства $\boldsymbol{E}$. В силу сходимости разложения по базису Шаудера существует N, т.ч. $\|x_j - s_n(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{3c\|A\|}$ при всех $n > N$ и $j = 1, \ldots, m$. Так как $s_n A = A s_n$, то

$$\|Ax - s_n(Ax)\| \leqslant \|Ax - Ax_j\| + \|Ax_j - A s_n(x_j)\| + \|s_n(Ax_j) - s_n(Ax)\| < \varepsilon\,.$$

Поэтому оператор A аппроксимируется операторами $s_n A$ конечного ранга. □

Свойства спектра компактного оператора были получены ранее в теореме Рисса–Шаудера, применяя теорему о границе спектра и лемму о почти перпендикуляре. Эти свойства легко также вывести из теорем Фредгольма. Другой метод доказательства этих свойств заключается в использовании аналитичности.

Теорема (аналитическая теорема Фредгольма)**.** *Пусть банахово пространство $\boldsymbol{E}$ обладает свойством аппроксимации, функция $f : \Omega \to \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ голоморфна в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, принимает значения в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и т.ч. $f(z) \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор при всех $z \in \Omega$. Тогда обратный оператор к оператору $I - f(z)$, либо не существует при всех $z \in \Omega$, либо существует при всех $z \in \Omega \setminus D$ за исключением дискретного множества $D \subset \Omega$.*

Доказательство. Мы докажем, что эти утверждения выполняются в некоторой окрестности любой точки $z_0 \in \Omega$. Простые соображения, использующие связность области Ω, позволяют перенести этот результат на всю область Ω.

Для заданной точки $z_0 \in \Omega$ выберем $r > 0$, т.ч. $\|f(z) - f(z_0)\| < 1/2$ при всех $z \in U_r(z_0)$, где $U_r(z_0) \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$. Пусть $N \in \mathscr{N}_0(\boldsymbol{E})$ оператор конечного ранга, т.ч. $\|f(z_0) - N\| < 1/2$. Тогда $\|f(z) - N\| < 1$ при всех $z \in U_r(z_0)$ и по ранее доказанным утверждениям функция $(I - f(z) + N)^{-1}$ голоморфна в круге $U_r(z_0)$.

Так как оператор N имеет конечный ранг, то существует линейно независимая система $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset \boldsymbol{E}$ и соответствующая биортогональная ей система $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n} \subset \boldsymbol{E}'$, т.ч. $Nx = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i, Nx \rangle x_i$. Рассмотрим голоморфную функцию в круге $U_r(z_0)$, т.ч.

$$g(z) = N(I - f(z) + N)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \langle h_i(z), . \rangle x_i\,, \text{ где } h_i(z) = (N((I - f(z) + N)^{-1})' \alpha_i\,.$$

Поскольку $I - f(z) = (I - g(z)))(I - f(z) + N)$, то при всех $z \in U_r(z_0)$ оператор $I - f(z)$ обратим тогда и только тогда, когда оператор $I - g(z)$ обратим. Отсюда уравнение $x = f(z)x$ будет иметь ненулевое решение тогда и только тогда, когда уравнение $x = g(z)x$ имеет ненулевое решение. Подставляя $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ в уравнение $x = g(z)x$, получим систему однородных уравнений $c_i = \sum_{j=1}^{n} \langle h_i(z), x_j \rangle c_j$, $i = 1, \ldots, n$, относительно неизвестных $c_i \in \mathbb{C}$. Таким образом, уравнение $x = g(z)x$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель $d(z) \doteqdot \det\{\delta_{ij} - \langle h_i(z), x_j \rangle\} = 0$ равен нулю. Так как функция $d(z)$ голоморфна в круге $U_r(z_0)$, то либо множество $D_r \doteqdot \{z \in U_r(z_0) \mid d(z) = 0\}$ является дискретным, либо совпадает с кругом $U_r(z_0)$.

Предположим теперь, что $d(z) \neq 0$. Тогда для любого $y \in \boldsymbol{H}$ существует $x \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $(I - g(z))x = y$. Действительно, пологая $x = y + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ и вычисляя c_i из системы уравнений $c_i = \langle h_i(z), y \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle h_i(z), x_j \rangle c_j$, $i = 1, \ldots, n$, мы получим решение этого уравнения. Так как $d(z) \neq 0$, то решение существует и единственно. Таким образом, оператор $I - g(z)$ обратим тогда и только тогда, когда $z \in U_r(z_0) \setminus D_r$. □

Следствие. *В условиях теоремы функция $(I - f(z))^{-1}$ мероморфна в области Ω, голоморфна в $\Omega \setminus D$ и ее вычеты в полюсах являются операторами конечного ранга. Если $z \in D$, то уравнение $x = f(z)x$ имеет ненулевое решение.*

В самом деле, мероморфность функции $(I - f(z))^{-1}$ и конечность рангов вычитов в полюсах этой функции следует из явной формулы для коэффициентов c_i, известной из линейной алгебры. В частном случае, когда $f(z) = A/z$, где $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор, спектр $\sigma(A)$ является дискретным множеством, не имеющим предельных точек, за исключением точки $\lambda = 0$, т.к. резольвента имеет вид

$$R_\lambda = A_\lambda^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\Big(I - f(\lambda)\Big)^{-1}, \text{ где } \lambda \in \mathbb{C} \setminus D.$$

Кроме того, поскольку решение уравнения $x = f(\lambda)x$ сводится к решению конечной системы линейных уравнений с конечным числом неизвестных, то ненулевые точки спектра имеют конечную кратность.

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ называется *обратимым по модулю операторов конечного ранга*, если существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$, т.ч. выполняются равенства $TA = I - N_1$ и $AT = I - N_2$, где $N_1 \in \mathscr{N}_0(\boldsymbol{E})$ и $N_2 \in \mathscr{N}_0(\boldsymbol{F})$ являются операторами конечного ранга.

Аналогичным образом, ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ мы будем называть *обратимым по модулю компактных операторов*, если существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами.

Теорема (Никольского). *Пусть $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ ограниченный оператор, заданный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, тогда следующие условия эквивалентны:*

a) оператор A обратим по модулю операторов конечного ранга;

b) оператор A обратимым по модулю компактных операторов;

c) оператор A является фредго́льмовым.

Доказательство. Так как ограниченный оператор конечного ранга является компактным, то из того, что оператор обратимым по модулю операторов конечного ранга, очевидно, следует, что он обратимым по модулю компактных операторов.

Пусть $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ ограниченный оператор, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами. Тогда по доказанной теореме о каноническом операторе Фредгóльма операторы $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$ будут фредгóльмовыми. Так как имеют место включения $\ker A \subset \ker TA$ и $\operatorname{Im} AT \subset \operatorname{Im} A$, то оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ также будет фредгóльмовым.

Пусть оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является фредгóльмовым. Так как размерность ядра $\ker A$ является конечной, то существует замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$. Так как коразмерность образа $\operatorname{Im} A$ является конечной, то существует замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{F}$, т.ч. $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A \oplus M$. Обозначим через $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ проектор на подпространство L, а через $Q : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ проектор на подпространство $\operatorname{Im} A$, и положим $P_1 \doteqdot I - P$ и $Q_1 \doteqdot I - Q$. Тогда проекторы P_1 и Q_1 имеют конечный ранг, т.к. выполняются равенства $\operatorname{Im} P_1 = \ker A$ и $\operatorname{Im} Q_1 = M$.

Поскольку оператор $B \doteqdot A|_L : L \to \operatorname{Im} A$ биективный, то по теореме Бáнаха его обратный $B^{-1} : \operatorname{Im} A \to L$ является ограниченным. Пусть $T \doteqdot PB^{-1}Q$, тогда имеют место равенства $TA = PB^{-1}A = P = I - P_1$ и $AT = AB^{-1}Q = Q = I - Q_1$, где операторы $P_1 \in \mathscr{N}_0(\boldsymbol{E})$ и $Q_1 \in \mathscr{N}_0(\boldsymbol{F})$ конечного ранга. Заметим еще, что ядро $\ker T = \ker Q$ и образ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} P$. Поэтому оператор $T \in \mathscr{F}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ является фредгольмовым и его индекс вычисляется по формуле $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} A$. □

Теорема (об устойчивости при компактных возмущениях)**.** *Если оператор* $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *фредгóльмовый, а оператор* $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *компактный, то оператор* $A + K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *также фредгóльмовый и его индекс равен* $\operatorname{ind}(A+K) = \operatorname{ind} A$.

Доказательство. В силу теоремы Никольского существует оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами. Тогда имеют место следующие равенства:

$$T(A+K) = I - (K_1 - TK), \quad (A+K)T = I - (K_2 - KT),$$

где операторы $K_1 - TK \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 - KT \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными. Отсюда оператор $A + K \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ обратим по модулю компактных операторов и значит в силу теоремы Никольского является фредгóльмовым. Кроме того, по замечанию, указанному в конце доказательства теоремы Никольского, индекс оператора $A + K$ равен $\operatorname{ind}(A+K) = -\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} A$ индексу оператора A. □

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *несущественным значением* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ является фредгóльмовым. Множество всех несущественных значений обозначается через $\rho_e(A)$. Дополнительное множество $\sigma_e(A) \doteqdot \mathbb{C} \setminus \rho_e(A)$ называется *существенным спектром* оператора A.

Спектр ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ представляется в виде объединения двух непересекающихся множеств $\sigma(A) = \sigma_e(A) \sqcup \sigma_i(A)$, где

$$\sigma_e(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \notin \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\} \quad \text{и} \quad \sigma_i(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\}.$$

Множество $\sigma_i(A)$ называется *несущественным спектром* A.

Непосредственным следствием этого определения и теоремы об устойчивости при компактных возмущениях является сохранение существенного спектра при добавлении к оператору A компактного оператора.

Пример 2. Пусть $(Ax)_n = \lambda_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$, диагональным оператор в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$, где последовательность $\{\lambda_n\} \in \boldsymbol{\ell}_\infty$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \|\lambda\|_{\ell_\infty} = \sup|\lambda_n|$.

Обозначим через $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n = 0\}$ и $M == \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n \neq 0\}$. Тогда получим разложение $\boldsymbol{\ell}_p = \boldsymbol{\ell}_p(N) \oplus \boldsymbol{\ell}_p(M)$ в прямую сумму замкнутых подпространств. Если оператор фредго́льмовый, то его ядро $\ker A = \boldsymbol{\ell}_p(N)$ имеет конечную размерность, а образ $\operatorname{Im} A = A(\boldsymbol{\ell}_p(M))$ является замкнутым. Тогда множество N конечно и оператор $A : \boldsymbol{\ell}_p(M) \to \operatorname{Im} A$ по теореме Ба́наха имеет ограниченный обратный.

Докажем, что $\inf_{n\in M} |\lambda_n| > 0$. Если это условие не выполняется, то существует последовательность, т.ч. $x^{(n)}_{i_n} = 1$ при некотором $i_n \in M_n \doteqdot \{j \in M \mid \frac{1}{n+1} < |\lambda_j| \leqslant \frac{1}{n}\}$ и $x^{(n)}_i = 0$ при $i \neq i_n$. Тогда получим $\|Ax^{(n)}\|_{\ell_p} > n+1$ при всех n, для которых $M_n \neq \emptyset$, что противоречит ограниченности обратного оператора $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to \boldsymbol{\ell}_p(M)$.

Таким образом, выполняется равенство $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{\ell}_p(M)$. Следовательно, оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{\ell}_p)$ фредгольмовый тогда и только тогда, когда нуль $0 \in \mathbb{C}$ не является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$. Так как оператор $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$, то существенный спектр $\sigma_e(A)$ совпадает с множеством предельных точек $\{\lambda_n\}$, а несущественный спектр $\sigma_i(A)$ с множеством тех $\lambda_n \notin \sigma_e(A)$, которые повторяются в последовательности $\{\lambda_n\}$ только конечное число раз.

Пример 3. Пусть $Af(x) = \varphi(x) f(x)$ оператор умножения на функцию в $\boldsymbol{L}_p[a,b]$, где $\varphi \in \boldsymbol{L}_\infty[a,b]$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |\varphi(x)| < \infty$.

Обозначим через $N = \{x \in [a,b] \mid \varphi(x) = 0\}$ и через $M = [a,b] \setminus N$. Тогда получаем следующее представление $\boldsymbol{L}_p([a,b]) = \boldsymbol{L}_p(N) \oplus \boldsymbol{L}_p(M)$. Если оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{L}_p)$ является фредго́льмовым, то ядро $\ker A = \boldsymbol{L}_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\operatorname{Im} A = A(\boldsymbol{L}_p(M)) \subset \boldsymbol{L}_p(M)$ замкнут. Поэтому множество N имеет меру нуль и оператор $A : \boldsymbol{L}_p(M) \to \operatorname{Im} A$ имеет ограниченный обратный.

Докажем, что $\operatorname{ess\,inf}_{x\in[a,b]} |\varphi(x)| > 0$. Допустим, что это условие не выполняется. Тогда функция $f_n(x) = \chi_{E_n}(x)$, где $E_n \doteqdot \{x \in M \mid 1/(n+1) \leqslant |\varphi(x)| < 1/n\}$, принадлежит образу $\operatorname{Im} A$ и $\|A^{-1} f_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \geqslant n\|f_n\|_{\boldsymbol{L}_p}$ при все n, для которых множество $E_n \neq \emptyset$, что противоречит ограниченности обратного оператора $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to \boldsymbol{L}_p(M)$.

Таким образом, оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{L}_p)$ фредго́льмовый тогда и только тогда, когда множество N имеет меру нуль и оператор $A : \boldsymbol{L}_p(M) \to \boldsymbol{L}_p(M)$ имеет ограниченный обратный. Это равносильно тому, что оператор A имеет ограниченный обратный. Поскольку $A_\lambda f(x) = (\lambda - \varphi(x)) f(x)$, то существенный спектр оператора $\sigma_e(A)$ будет совпадать со спектром оператора $\sigma(A) = \sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ess\,inf}_{x\in[a,b]} |\lambda - \varphi(x)| = 0\}$, т.е. с множеством всех существенных значений функции $\varphi(x)$.

10 ЭРМИ́ТОВЫ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Напомним, что линейный оператор $A:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым*, если $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$ для всех $x,y\in\boldsymbol{H}$. Множество эрмитовых операторов образует действительное подпространство $\mathscr{H}(\boldsymbol{H})\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ ограниченных операторов.

1. *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то собственные числа $\lambda\in\sigma_p(A)$ действительны $\lambda\in\mathbb{R}$, а собственные подпространства $H_\lambda\doteqdot\ker A_\lambda$ ортогональны $H_{\lambda_1}\perp H_{\lambda_2}$ при $\lambda_1\neq\lambda_2$.*

Пусть $Ae=\lambda e$ и $\|e\|=1$, тогда по свойству эрмитовости $\lambda=\langle Ae,e\rangle=\langle e,Ae\rangle=\overline{\lambda}$, т.е. $\lambda\in\mathbb{R}$. Поэтому, если $Ae_1=\lambda_1e_1$ и $Ae_2=\lambda_2e_2$, где $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ и $\lambda_1\neq\lambda_2$, то

$$\lambda_1\langle e_1,e_2\rangle=\langle Ae_1,e_2\rangle=\langle e_1,Ae_2\rangle=\lambda_2\langle e_1,e_2\rangle,\ \text{т.е.}\ \langle e_1,e_2\rangle=0.$$

Теорема (Ве́йля)**.** *Спектр эрмитова оператора $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ не имеет остаточного спектра и совпадает с предельным спектром, т.е. $\sigma(A)=\sigma_l(A)$.*

Доказательство. Поскольку дополнительное множество к предельному спектру $\sigma(A)\setminus\sigma_l(A)\subset\sigma_r(A)$ содержится в остаточном спектре, то достаточно показать, что остаточный спектр $\sigma_r(A)$ является пустым. Предположим обратное, т.е. $\ker A_\lambda=0$ и существует $y\in\boldsymbol{H}$, т.ч. $y\neq0$ и $y\perp\operatorname{Im}A_\lambda$. Тогда $\langle A_\lambda x,y\rangle=\langle x,A_{\overline{\lambda}}y\rangle=0$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$. Отсюда следует, что $A_{\overline{\lambda}}y=0$, т.е. $\overline{\lambda}\in\sigma_p(A)$. Так как собственные значения действительны, то $A_\lambda y=0$, что противоречит нашему предположению. □

2. *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то спектр $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$ является действительным и норма резольвенты удовлетворяет оценке $\|R_\lambda\|\leqslant1/|\Im\lambda|$ при всех $\Im\lambda\neq0$.*

Если $\lambda=\alpha+\boldsymbol{i}\beta$ и $\beta\neq0$, то $A_\lambda=A_\alpha+\boldsymbol{i}\beta I$ и справедливо следующее равенство:

$$\|A_\lambda x\|^2=\langle A_\alpha x,A_\alpha x\rangle-\boldsymbol{i}\beta\langle A_\alpha x,x\rangle+\boldsymbol{i}\beta\langle x,A_\alpha x\rangle+\beta^2\langle x,x\rangle=\|A_\alpha x\|^2+\beta^2\|x\|.$$

Поэтому $\inf_{\|x\|=1}\|A_\lambda x\|\geqslant|\beta|>0$ и, следовательно, по критерию Ве́йля $\lambda\notin\sigma(A)$. В силу свойства однородности нормы из последнего неравенства вытекает, что $\|A_\lambda x\|\geqslant|\beta|\,\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$. Поэтому $\|R_\lambda\|\leqslant1/|\beta|$ при всех $\beta\neq0$.

3. *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то спектральный радиус $r(A)=\|A\|$ равен норме.*

Так как $A^2=AA$, то $\|A^2\|\leqslant\|A\|^2$. В силу неравенства Коши́–Буняко́вского

$$\|A^2\|=\sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|A^2x\|=\sup_{x,y\in\boldsymbol{S}_1}\langle A^2x,y\rangle=\sup_{x,y\in\boldsymbol{S}_1}\langle Ax,Ay\rangle\geqslant\sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\langle Ax,Ax\rangle=\|A\|^2,$$

Поэтому $\|A^2\|=\|A\|^2$ и, следовательно, $\|A^{2^n}\|=\|A\|^{2^n}$. По теореме о спектральном радиусе $r(A)=\lim\sqrt[n]{\|A^n\|}=\lim\sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|}=\|A\|$.

4. *Если $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{H})\cap\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ компактный и эрмитовый, то $\sigma_p(A)\neq\emptyset$ не пуст.*

Пусть $\sigma_p(A)=\emptyset$. Так как $\sigma(A)\neq\emptyset$, то по теореме Ри́сса–Шау́дера $\sigma(A)=\{0\}$. Поэтому по свойству 3 получим $r(A)=\|A\|=0$, т.е. $A=0$, что невозможно.

Теорема (Ги́льберта–Шми́дта). *Пусть оператор $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H}) \cap \mathscr{K}(\boldsymbol{H})$ является эрмитовым и компактным в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда существует полная ортонормированная система, состоящая из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. В случае, когда размерность $\dim \boldsymbol{H} < \infty$ конечна, эта теорема доказывается в курсе линейной алгебры. Пусть $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. Так как оператор A является компактным, то множество $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$ собственных значений не более, чем счетно, и ненулевые собственные значения $\lambda_n \neq 0$ имеют конечную кратность $\dim H_{\lambda_n} < \infty$, где $H_{\lambda_n} \doteqdot \ker A_{\lambda_n}$. Поскольку оператор A является эрмитовым, то все его собственные значения действительны $\lambda_n \in \mathbb{R}$, а их собственные подпространства ортогональны $H_{\lambda_n} \perp H_{\lambda_m}$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Выберем в каждом подпространстве H_{λ_n} ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов с собственным значением λ_n. Тогда объединение всех этих ортонормированных систем образует ортонормированную систему $\{e_n\}$ в $\boldsymbol{H}$. Пусть $L \doteqdot \overline{\operatorname{sp}}\{e_n\}$ замкнутая линейная оболочка системы $\{e_n\}$. Тогда L является инвариантным подпространством для оператора $A : L \to L$, а в силу его эрмитовости ортогональное дополнение $L^\perp$ также будет инвариантным подпространством для оператора $A : L^\perp \to L^\perp$. При этом по свойству 4 подпространство $L^\perp$ должно иметь собственный вектор, что невозможно по построению. Следовательно, $L^\perp = 0$ и по теореме об ортогональном разложении получим, что $\boldsymbol{H} = L \oplus L^\perp = L$. $\square$

Пример 1. Интегральным оператором *Ги́льберта–Шми́дта* в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ обычно называется оператор, определенный по следующей формуле:

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy, \quad f \in \boldsymbol{L}_2[a,b],$$

у которого ядро $K(x,y)$ удовлетворяет условиям $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$, $K(x,y) \in \boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. В силу доказанных ранее утверждений этот оператор является эрмитовым и компактным. Выведем формулу резольвенты для оператора Ги́льберта–Шми́дта.

Пусть ненулевые собственные значения упорядочены $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ и повторяется столько раз, какова их кратность. Соответствующая ортонормированная система собственных функций обозначается через $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. По теореме Ги́льберта–Шми́дта каждая функция $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$ представляется рядом Фурье $f = f_0 + \sum_{n=1}^\infty \langle f, e_n\rangle e_n$, где $f_0 \in \ker A$. Если $g = A_\lambda f$, то $\langle g, e_n\rangle = \langle A_\lambda f, e_n\rangle = \langle f, A_\lambda e_n\rangle = (\lambda - \lambda_n)\langle f, e_n\rangle$. Поэтому резольвента $R_\lambda g = f$ имеет при всех $\lambda \in \rho(A)$ представление

$$R_\lambda g = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} A f = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, e_n\rangle e_n = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} \int_a^b K_\lambda(x,y)\, g(y)\, dy,$$

где $K_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(x)\overline{e_n(y)}$. Докажем, что ряд $K_\lambda(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Поскольку функции $\varphi_n(x,y) = e_n(x)\overline{e_n(y)}$ образуют ортонормированную систему в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$ и функция $K(x,y)$ имеет коэффициенты Фурье $\langle K, \varphi_n\rangle = \langle Ae_n, e_n\rangle = \lambda_n$, то ее ряд Фурье́ сходится к функции $F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x,y)$ из пространства $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Так как система функций $h(x,y) = f(x)\overline{g(y)}$ полна в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$, где $f,g \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, и

$$\langle K,h\rangle = \langle Ag,f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g,e_n\rangle \langle e_n,f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \varphi_n,h\rangle = \langle F,h\rangle$$

то $K(x,y) = F(x,y)$ п.в. на $[a,b]^2$. Поэтому $\|K\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$ в силу равенства Парсева́ля. Тогда имеем $\|K_\lambda\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\lambda_n}{\lambda-\lambda_n}\right|^2 < \infty$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Таким образом, ряд Фурье функции K_λ сходится в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$ и значит функция $K_\lambda \in \boldsymbol{L}_2[a,b]^2$.

Пусть функция $p \in \boldsymbol{C}^{(1)}[a,b]$ является непрерывно дифференцируемой и положительной $p(x) > 0$, а функция $q \in \boldsymbol{C}[a,b]$ непрерывна и принимает действительные значения. Рассмотрим дифференциальный оператор Шту́рма–Лиуви́лля

$$Lu(x) = -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) \text{ при п.в. } x \in [a,b]\,.$$

Его область определения $\operatorname{dom} L = M$ состоит из функций $u \in \mathscr{W}_2^{(2)}[a,b]$, у которых первая производная абсолютно непрерывна $u' \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, а вторая $u'' \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, при этом выполняются граничные условия $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0$ и $\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0$ с действительными коэффициентами и $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Заметим, что подпространство M является всюду плотным в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$ и оператор L является симметрическим, т.е. $\langle Lu,v\rangle = \langle u,Lv\rangle$ для всех $u,v \in M$. В самом деле, интегрируя по частям, получим следующие равенства:

$$\langle Lu,v\rangle - \langle u,Lv\rangle = \int_a^b (Lu)\bar{v} - u(L\bar{v})dx = -\int_a^b \bar{v}\,d(pu') + \int_a^b u\,d(p\bar{v}') = p(u\bar{v}' - u'\bar{v})\big|_a^b = 0\,,$$

где последнее равенство вытекает из граничных условий, т.к. определители

$$\det\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{vmatrix} = 0, \quad \det\begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \bar{v}(b) & \bar{v}'(b) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Рассмотрим *задачу Шту́рма–Лиуви́лля*, которая включает, во-первых, вопрос о существовании решения уравнения $Lu = f$, где $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, а во-вторых, вопрос о существовании полной системы собственных функций оператора L в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$. С этой целью вначале мы докажем существование функции Грина задачи Шту́рма–Лиуви́лля, которая определяется условиями следующей леммы.

Лемма. *Если ядро* $\ker L = 0$*, то существует функция Гри́на* $G(x,y)$*, т.ч.*

a) функция $G(x,y)$ *действительная, симметричная и непрерывная в* $[a,b]^2$*;*

b) функция $G(x,y)$ *дважды непрерывно дифференцируема при* $y \neq x$*;*

c) удовлетворяет уравнению $L_y G(x,y) = 0$ *и граничным условиям при* $y \neq x$*;*

d) первая производная $G'_y(x,y)$ *допускает разрыв первого рода при* $y = x \in (a,b)$ *с величиной скачка* $G'_y(x,x+0) - G'_y(x,x-0) = -1/p(x)$.

Доказательство. Так как $\ker L = 0$, то, решая задачу Коши, получим два линейно независимых действительных решения u_1 и u_2 уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничным условиям. Поэтому их определитель Вро́нского $\Delta = u_1u_2' - u_1'u_2 \neq 0$ не равен нулю, а функция $p\Delta \doteqdot p(u_1u_2' - u_1'u_2)$ равна константе $c_0 \neq 0$, т.к. ее производная $(p\Delta)' = u_1(pu_2')' - u_2(pu_1')' = 0$ равна нулю.

Определим функцию $G(x,y) \doteqdot c_1u_1(y)$ при $y \leqslant x$ и $G(x,y) \doteqdot c_2u_2(y)$ при $y \geqslant x$. Выберем $c_1 = c_1(x)$ и $c_2 = c_2(x)$, чтобы функция $G(x,y)$ являлась непрерывной на отрезке $[a,b]$ и ее производная $G_y'(x,y)$ имела указанный скачок в точке x, т.е. $c_1u_1(x) - c_2u_2(x) = 0$ и $c_1u_1'(x) - c_2u_2'(x) = 1/p(x)$. Поскольку $c_0 = p(u_1u_2' - u_1'u_2) \neq 0$ константа, то, полагая $c_1 \doteqdot -u_2(x)/c_0$ и $c_2 \doteqdot -u_1(x)/c_0$, мы получим функцию

$$G(x,y) \doteqdot -\frac{1}{c_0}\begin{cases} u_1(y)\,u_2(x), & \text{при } a \leqslant y \leqslant x \leqslant b; \\ u_1(x)\,u_2(y), & \text{при } a \leqslant x \leqslant y \leqslant b; \end{cases}$$

которая будет удовлетворять всем условиям леммы. □

Теорема (о существовании решения)**.** *Если* $\ker L = 0$ *и* $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$*, то функция* $u \in M$ *тогда и только тогда удовлетворяет уравнению* $Lu = f$*, когда*

$$u(x) = Af(x) \doteqdot \int_a^b G(x,y)\,f(y)\,dy \quad \textit{при всех } x \in [a,b]\,,$$

где $G(x,y)$ *есть функция Гри́на задачи Шту́рма–Лиувилля.*

Доказательство. Пусть $f = Lu$, где $u \in M$. Интегрируя по частям и используя свойства функции Гри́на и граничные условия по переменной y, мы получим

$$\int_a^b G(x,y)\,f(y)\,dy = \Big(\int_a^x G\,(Lu)\,dy - \int_a^x (L_yG)\,u\,dy\Big) + \Big(\int_x^b G\,(Lu)\,dy - \int_x^b (L_yG)\,u\,dy\Big) =$$
$$= p\,(uG_y' - u'G)\,\big|_a^{x-0} + p\,(uG_y' - u'G)\,\big|_{x+0}^{b} = p\,(uG_y' - u'G)\,\big|_{x+0}^{x-0} = u(x)\,.$$

Следовательно, имеет место равенство $ALu = u$ при всех $u \in M$.

Теперь докажем равенство $LAf = f$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Поскольку $Af \in M$, то в силу эрмитовости операторов L и A мы получим $\langle LAf, u\rangle = \langle f, ALu\rangle = \langle f, u\rangle$ для всех $u \in M$. Так как подпространство M всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$, то $LAf = f$ п.в. на отрезке $[a,b]$. Таким образом, оператор A, определенный на пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ со значениями в M, является обратным к оператору L. □

Теорема (о полноте собственных функций)**.** *Существует полная ортонормированная система в* $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ *собственных функций оператора Шту́рма-Лиуви́лля.*

Доказательство. Пусть $\ker L = 0$. Тогда существование полной ортонормированной системы собственных функций вытекает из теоремы Ги́льберта–Шми́дта, так как собственные функции оператора L будут собственными функциями интегрального оператора A, ядром которого является функция Гри́на.

Пусть $\ker L \neq 0$. В силу эрмитовости оператора L его собственные функции с различными собственными числами ортогональны. Поэтому множество всех его собственных чисел не более, чем счетно, и значит существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, которое не является собственным числом. Тогда оператор $L_0 = L - \lambda_0 I$ удовлетворяет условию $\ker L_0 = 0$. Поскольку собственные функции оператора L_0 являются собственными функциями оператора L и наоборот, то оператор L одновременно с оператором L_0 обладает полной системой собственных функций в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим оператор $Lu = -u''$ и граничные условия $u(0) = u(\pi) = 0$. По решениям x и $\pi - x$ уравнения $Lu = 0$, построим функцию Гри́на

$$G(x,y) = \begin{cases} (\pi - x)y, & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi; \\ x(\pi - y), & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi. \end{cases}$$

Затем, решая дифференциальное уравнение $u'' + \lambda u = 0$ с граничными условиями $u(0) = u(\pi) = 0$, находим его собственные значения $\lambda_n = n^2$ и ортонормированную систему собственных функций $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, полную в $\boldsymbol{L}_2[0,\pi]$. Ядро интегрального оператора разлагается в двумерный ряд Фурье

$$G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} \sin \pi n x \sin \pi n y.$$

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ называется *унитарным*, если он изометричен $\|Ax\| = \|x\|$ и его образ $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{H}$.

Условие изометричности оператора равносильно условию сохранения скалярного произведения $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ при всех $x, y \in \boldsymbol{H}$. В самом деле, используя тождество

$$4\Re\langle Ax, Ay \rangle = \|A(x+y)\|^2 - \|A(x-y)\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4\Re\langle x, y \rangle$$

и заменяя в нем y на $\boldsymbol{i}y$, получим $4\Im\langle Ax, Ay \rangle = 4\Re\langle x, y \rangle$. Откуда следует равенство $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. В силу этого равенства условие унитарности равносильно тому, что эрмитово сопряженный оператор $A^* = A^{-1}$ равен обратному оператору.

Пример 3. Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой μ и $\tau : X \to X$ биективное отображение, сохраняющее меру, т.е. $\mu(\tau(M)) = \mu(M)$ для всех $M \in \Sigma$. Тогда оператор, определенный по формуле $Af(x) \doteqdot f(\tau(x))$ при всех $x \in X$, является унитарным в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2(X, \mu)$.

Определение. Пусть A замкнутый и симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда оператор $U_A \doteqdot (A - \boldsymbol{i}I)(A + \boldsymbol{i}I)^{-1}$ с областью определения $\operatorname{dom} U_A = \operatorname{Im}(A + \boldsymbol{i}I)$ называется *преобразованием Кэли* оператора A.

Теорема (прямая)**.** *Для каждого замкнутого и симметрического оператора A в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ существует ограниченный левый обратный оператор $(A + \boldsymbol{i}I)^{-1}$, его преобразование Кэли $U_A \doteqdot (A - \boldsymbol{i}I)(A + \boldsymbol{i}I)^{-1}$ является замкнутым изометричным оператором, при этом существует левый обратный $(I - U_A)^{-1}$ и имеет место равенство $A = \boldsymbol{i}(I + U_A)(I - U_A)^{-1}$.*

Доказательство. Так как в силу симметричности оператора $\langle Ax, \boldsymbol{i}x\rangle = -\langle \boldsymbol{i}x, Ax\rangle$, то $\|Ax \pm \boldsymbol{i}x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$. Отсюда ядро $\ker(A+\boldsymbol{i}I) = 0$ равно нулю и из неравенства $\|Ax+\boldsymbol{i}x\| \geqslant \|x\|$ при $x \in L$ следует, что оператор $A+\boldsymbol{i}I$ имеет ограниченный левый обратный. Кроме того, равенства $\|Ax-\boldsymbol{i}x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 = \|Ax+\boldsymbol{i}x\|^2$ показывают, что имеет место $\|(A-\boldsymbol{i}I)(A+\boldsymbol{i}I)^{-1}y\| = \|y\|$ при всех $y = Ax + \boldsymbol{i}x$. Следовательно, оператор U_A с областью определения $\operatorname{Im}(A+\boldsymbol{i}I)$ является изометричным.

Убедимся в том, что U_A замкнут. Если $Ax_n + \boldsymbol{i}x_n = y_n \to y$ и $Ax_n - \boldsymbol{i}x_n = z_n \to z$, то $\|y_n - y_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| + \|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Поэтому $x_n \to x$ и $Ax_n \to Ax$ в силу замкнутости оператора A. Таким образом, получаем $Ax_n + \boldsymbol{i}x_n \to Ax + \boldsymbol{i}x = y$ и аналогично $Ax_n - \boldsymbol{i}x_n \to Ax - \boldsymbol{i}x = z$. Поэтому имеет место равенство $U_A y = z$.

Из равенств $Ax + \boldsymbol{i}x = y$ и $Ax - \boldsymbol{i}x = U_A y$ следует, что $2Ax = y + U_A y$ и $2\boldsymbol{i}x = y - U_A y$. Поэтому, если $y \in \ker(I - U_A)$, то $y \in \ker(I + U_A)$ и $2y = (I+U_A)y + (I-U_A)y = 0$. Таким образом, $\ker(I - U_A) = 0$ и значит существует левый обратный оператор. При этом из $2Ax = y + U_A y$ и $2\boldsymbol{i}x = y - U_A y$ следует, что $A = \boldsymbol{i}(I+U_A)(I-U_A)^{-1}$. □

Теорема (обратная)**.** *Если U замкнутый изометрический оператор, заданный в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, т.ч. образ $\operatorname{Im}(I-U)$ всюду плотен в $\boldsymbol{H}$, то существует замкнутый симметрический оператор A, т.ч. $U = U_A$.*

Доказательство. Пусть $x \in \ker(I-U)$. В силу изометричности оператора мы имеем $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$. Следовательно, для любого $z = (I-U)y$ выполняется равенство $\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, Uy\rangle = \langle Ux, Uy\rangle - \langle x, Uy\rangle = \langle Ux - x, Uy\rangle = 0$. Поэтому из условия плотности образа $\operatorname{Im}(I-U)$ следует, что $x = 0$. Таким образом, $\ker(I-U) = 0$ и, следовательно, существует левый обратный оператор $(I-U)^{-1}$.

Определим оператор $A \doteqdot \boldsymbol{i}(I+U)(I-U)^{-1}$ с всюду плотной областью определения $\operatorname{Im}(I-U)$ и докажем его симметричность. Пусть $x = (I-U)u$ и $y = (I-U)v$, тогда $\langle Ax, y\rangle = \langle \boldsymbol{i}(I+U)u, (I-U)v\rangle = \boldsymbol{i}\langle Uu, v\rangle - \boldsymbol{i}\langle u, Uv\rangle = \langle (I-U)u, \boldsymbol{i}(I+U)v\rangle = \langle x, Ay\rangle$, т.к. $\langle Uu, Uv\rangle = \langle u, v\rangle$ в силу изометричности оператора U.

Оператор A отображает множество $\operatorname{Im}(I-U)$ на множество $\operatorname{Im}\boldsymbol{i}(I+U)$. Если две последовательности $(I-U)u_n$ и $(I+U)u_n$ сходятся, то две последовательности u_n и Uu_n тоже сходятся. Поэтому в силу замкнутости оператора U получим $u_n \to u$, $(I-U)u_n \to (I-U)u$, $\boldsymbol{i}(I+U)u_n \to \boldsymbol{i}(I+U)u$, что равносильно замкнутости A.

Осталось показать, что $U = U_A$. Если $x = (I-U)u$, то выполняется равенство $Ax = \boldsymbol{i}(I+U)u$. Поэтому, поскольку $(A+\boldsymbol{i}I)x = 2\boldsymbol{i}u$, то получаем $\operatorname{dom} U_A = \operatorname{dom} U$, а поскольку $(A-\boldsymbol{i}I)x = 2\boldsymbol{i}Uu$, то $U_A(2\boldsymbol{i}u) = 2\boldsymbol{i}U(u) = U(2\boldsymbol{i}u)$. Откуда $U_A = U$. □

Теорема (о структуре эрмитово-сопряженного оператора)**.** *Пусть A замкнутый и симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Обозначим через $\boldsymbol{H}_A^+ \doteqdot (\operatorname{dom} U_A)^\perp$ и $\boldsymbol{H}_A^- \doteqdot (\operatorname{Im} U_A)^\perp$ замкнутые подпространства в $\boldsymbol{H}$. Тогда*

$$\boldsymbol{H}_A^+ = \{x \in \boldsymbol{H} \mid A^*x = \boldsymbol{i}x\}, \quad \boldsymbol{H}_A^- = \{x \in \boldsymbol{H} \mid A^*x = -\boldsymbol{i}x\},$$

и всякий элемент $x \in \operatorname{dom} A^*$ единственным образом представляется в виде $x = x_0 + x_+ + x_-$, т.ч. $A^*x = Ax_0 + \boldsymbol{i}x_+ - \boldsymbol{i}x_-$, где $x_0 \in \operatorname{dom} A$, $x_+ \in \boldsymbol{H}_A^+$, $x_- \in \boldsymbol{H}_A^-$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{dom}(U_A)^\perp = \mathrm{Im}(A + \boldsymbol{i}I)^\perp$, тогда $\langle Ay + \boldsymbol{i}y, x\rangle = 0$ при всех $y \in \mathrm{dom}A$. Поэтому $\langle Ay, x\rangle = -\langle \boldsymbol{i}y, x\rangle = \langle y, \boldsymbol{i}x\rangle$ и, следовательно, $x \in \mathrm{dom}A^*$ и $A^*x = \boldsymbol{i}x$. С другой стороны, если последние два условия выполнены, то $\langle x, Ay + \boldsymbol{i}y\rangle = 0$ при всех $y \in \mathrm{dom}A$, т.е. выполняется включение $x \in \mathrm{Im}(A + \boldsymbol{i}I)^\perp = (\mathrm{dom}U_A)^\perp$. Тем самым доказано первое равенство. Второе равенство доказывается аналогично.

Поскольку U_A замкнутый изометрический оператор, то $\mathrm{dom}U_A$ и $\mathrm{Im}U_A$ являются замкнутыми подпространствами в $\boldsymbol{H}$. Рассмотрим ортогональное разложение элемента $(A^* + \boldsymbol{i}I)x = (A + \boldsymbol{i}I)x_0 + y$, где $x_0 \in \mathrm{dom}A$ и $y \in (\mathrm{dom}U_A)^\perp$. По определению оператор A^* является расширением оператора A. Поэтому $(A + \boldsymbol{i}I)x_0 = (A^* + \boldsymbol{i}I)x_0$. Кроме того, из включения $y \in (\mathrm{dom}U_A)^\perp = \boldsymbol{H}_A^+$ следует равенство $A^*y = \boldsymbol{i}y$. Отсюда вытекает, что $y = (A^* + \boldsymbol{i}I)x_1$, где $x_1 = y/2\boldsymbol{i} \in (\mathrm{dom}U_A)^\perp$. Таким образом, получаем, что $(A^* + \boldsymbol{i}I)x = (A^* + \boldsymbol{i}I)(x_0 + x_1)$, где $x_0 \in \mathrm{dom}A$ и $x_1 \in (\mathrm{dom}U_A)^\perp$. Следовательно, имеем $(A^* + \boldsymbol{i}I)(x - x_0 - x_1) = 0$ и значит элемент $x_2 = x - x_0 - x_1 \in \boldsymbol{H}_A^- = (\mathrm{Im}U_A)^\perp$. Осталось доказать единственность этого разложения.

Предположим, что $x_0 + x_1 + x_2 = 0$, где $x_0 \in \mathrm{dom}A$ и $x_1 \in \mathrm{dom}(U_A)^\perp$, $x_2 \in \mathrm{Im}(U_A)^\perp$. Тогда по доказанному выше $A^*x_0 = Ax_0$, $A^*x_1 = \boldsymbol{i}x_1$, $A^*x_2 = -\boldsymbol{i}x_2$. Поэтому мы имеем $0 = (A^* + \boldsymbol{i}I)(x_0 + x_1 + x_2) = (A + \boldsymbol{i}I)x_0 + 2\boldsymbol{i}x_1$ и в силу ортогональности слагаемых $(A + \boldsymbol{i}I)x_0 = 0$ и $2\boldsymbol{i}x_1 = 0$. Поскольку из симметричности оператора A вытекает, что $\ker(A + \boldsymbol{i}I) = 0$, то, следовательно, $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$, а значит и $x_2 = 0$. $\square$

Следствие. *Замкнутый и симметрический оператор A, заданный в гильбертовом пространстве тогда и только тогда является самосопряженным, когда его преобразование Кели U_A определяет унитарный оператор.*

В самом деле, условие самосопряженности $\mathrm{dom}A = \mathrm{dom}A^*$ эквивалентно требованию $\mathrm{dom}(U_A)^\perp = 0$ и $\mathrm{Im}(U_A)^\perp = 0$. Последние два условия в силу замкнутости $\mathrm{dom}U_A$ и $\mathrm{Im}U_A$ равносильны тому, что оператор U_A является унитарным.

Пример 4. Оператор координаты в квантовой механике. Оператор $Af(x) = xf(x)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ с областью определения $\mathrm{dom}A = \{f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}) \mid xf(x) \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})\}$ является самосопряженным, т.к. его преобразование Кэли $Uf(x) = \frac{x-\boldsymbol{i}}{x+\boldsymbol{i}}f(x)$ является унитарным оператором.

Пример 5. Оператор импульса в квантовой механике. Оператор $Af(x) = \frac{1}{\boldsymbol{i}}f'(x)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ с областью определения $\mathrm{dom}A = \{f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}) \mid f' \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})\}$ является самосопряженным.

Пример 6. Оператор импульса $Af(x) = \frac{1}{\boldsymbol{i}}f'(x)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2[0,1]$, который имеет область определения $\mathrm{dom}A = \{f \in \boldsymbol{AC}[0,1] \mid f' \in \boldsymbol{L}_2[0,1], f(0) = f(1) = 0\}$, является симметрическим, но не самосопряженным. Его эрмитово-сопряженным является оператор $A^*f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{i}}f'(x)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2[0,1]$ с областью определения $\mathrm{dom}A^* = \{f \in \boldsymbol{AC}[0,1] \mid f' \in \boldsymbol{L}_2[0,1]\}$.