1 НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Всюду далее через $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ будем обозначать *линейные пространства* над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел. Напомним, что функция $\boldsymbol{p}:\boldsymbol{E}\to\mathbb{R}_+$ называется *нормой* в $\boldsymbol{E}$, если выполняются следующие свойства:

a) однородность: $\boldsymbol{p}(\lambda x)=|\lambda|\boldsymbol{p}(x)$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$ и $x\in\boldsymbol{E}$;

b) неравенство треугольника: $\boldsymbol{p}(x+y)\leqslant\boldsymbol{p}(x)+\boldsymbol{p}(y)$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$;

c) невырожденность: $\boldsymbol{p}(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

Норма обозначается через $\boldsymbol{p}(x)\doteqdot\|x\|$ и пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ называется *нормированным пространством*. Полное нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *ба́наховым пространством*. Если выполнены (a) и (b), то $\boldsymbol{p}(x)\doteqdot\|x\|$ называется *полунормой*, а пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ *полунормированным пространством*. Метрика или полуметрика в этих пространствах определяются по формуле $\rho(x,y)\doteqdot\|x-y\|$.

Определение. Два нормированных пространства $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p_E})$ и $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{p_F})$ называются *изоморфными* или *эквивалентными* $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p_E})\simeq(\boldsymbol{F},\boldsymbol{p_F})$, если найдется биективное линейное отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, для которого f и f^{-1} непрерывны.

Два нормированные пространства $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p_E})$ и $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{p_F})$ называются *изометрически изоморфными* и обозначаются через $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p_E})=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{p_F})$, если найдется биективное, линейное и изометричное отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, т.е. для которого выполняется равенство $\|f(x)\|_{\boldsymbol{F}}=\|x\|_{\boldsymbol{E}}$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.

Ясно, что изометрически изоморфные пространства являются изоморфными. Если нормированные пространства изоморфны и одно из них является полным или сепарабельным, то другое также будет соответственно полным или сепарабельным. Из следующей теоремы вытекает, что нормированные пространства одной и той же конечной размерности являются изоморфными.

Теорема. *Всякое нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности над полем $\mathbb{F}$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, где $n=\dim\boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ обозначает базис $\boldsymbol{E}$. Поэтому для каждого $x\in\boldsymbol{E}$ найдется единственный элемент $\lambda\doteqdot\{\lambda_k\}_{k=1}^n\in\mathbb{F}^n$, т.ч. $x=\sum_{k=1}^n\lambda_k e_k$. Определим отображение $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}^n$ по формуле $f(x)\doteqdot\lambda$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Тогда отображение f является линейным и биективным. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda)\doteqdot\|x\|$. Применяя неравенство треугольника и неравенство Коши́, получим

$$|\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda')|\leqslant\|x-x'\|\leqslant\sum_{k=1}^n|\lambda-\lambda'|\,\|e_k\|\leqslant\|\lambda-\lambda'\|_{\mathbb{F}^n}\Big(\sum_{k=1}^n\|e_k\|^2\Big)^{1/2}.$$

Поэтому функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{F}^n$ величина нижней грани $a\doteqdot\inf_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1}\varphi(\lambda)$ положительна, а величина верхней грани $b\doteqdot\sup_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1}\varphi(\lambda)$ конечна. Следовательно, в силу свойства однородности функции $\varphi(\lambda)$ получим $a\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}\leqslant\|x\|\leqslant b\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda\in\mathbb{F}^n$. В силу этих неравенств отображения f и f^{-1} являются непрерывными. □

Следствие 1. *Всякое нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности является банаховым, а всякое его ограниченное и замкнутое подмножество $M \subset \boldsymbol{E}$ является компактным.*

Это утверждение вытекает из полноты пространства $\mathbb{F}^n$ и теоремы Хаусдóрфа.

Следствие 2. *В линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ конечной размерности $n = \dim \boldsymbol{E}$ любые две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$, т.е. существует такое число $c \geqslant 1$, что $c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Пусть $f(x) = \lambda$ обозначает изоморфизм $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$. Используя обозначения теоремы, имеем $\|x\|_1 \leqslant b_1\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant b_1 a_2^{-1}\|x\|_2$ и $\|x\|_2 \leqslant b_2\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant b_2 a_1^{-1}\|x\|_1$. Поэтому, полагая $c \doteqdot \max\{b_1 a_2^{-1}, b_2 a_1^{-1}\}$, получим неравенство $c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1$.

Определение. Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства. Величина $\rho(x,L) \doteqdot \inf_{y\in L}\|x-y\|$ называется *наилучшим приближением* элемента $x \in \boldsymbol{E}$ подпространством L. Всякий элемент $y_0 \in L$, для которого $\rho(x,L) = \|x - y_0\|$, называется *элементом наилучшего приближения* подпространством L.

Теорема (о существовании наилучшего приближения)**.** *Если подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность $\dim L < \infty$, то для всякого $x \in \boldsymbol{E}$ существует элемент $y_0 \in L$ наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $x \in \boldsymbol{E}$, тогда имеем $\rho(x,L) \leqslant \|x\|$. Рассмотрим множество $K_x \doteqdot \{y \in L \mid \|x-y\| \leqslant \|x\|\}$. Поскольку K_x является замкнутым, ограниченным и содержится в конечномерном пространстве, то в силу следствия 1 оно компактно. Поэтому непрерывная функция $\varphi_x(y) \doteqdot \|x-y\|$ достигает своей нижней грани на компакте K_x. Следовательно, существует $y_0 \in K_x$, т.ч. $\varphi_x(y_0) = \inf_{y\in K_x}\varphi_x(y)$. □

Определение. Нормированное пространство называется *строго нормированным*, если $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ выполняется тогда и только тогда, когда $x = \lambda y$ при $\lambda \geqslant 0$.

Теорема (о единственности наилучшего приближения)**.** *Если пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ может существовать не более одного элемента наилучшего приближения подпространством $L \subset \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Пусть $\rho(x,L) = \|x-y_0\| = \|x-y_1\|$, где $y_0, y_1 \in L$. Тогда имеем

$$\rho(x,L) \leqslant \left\|x - \frac{y_0+y_1}{2}\right\| = \left\|\frac{x-y_0}{2} + \frac{x-y_1}{2}\right\| \leqslant \left\|\frac{x-y_0}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y_1}{2}\right\| = \rho(x,L).$$

Следовательно, вместо неравенств имеют место равенства. Поэтому в силу условия строгой нормированности $x - y_1 = \lambda(x-y_0)$ при некотором $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 1$, то $y_0 = y_1$. Если $\lambda \neq 1$, то $x = (y_1 - \lambda y_0)/(1-\lambda) \in L$ и значит $x = y_0 = y_1$. □

Элемент $x \in \boldsymbol{E}$ называют *ортогональным* (или перпендикулярным) подпространству $L \subset \boldsymbol{E}$ и обозначают это через $x \perp L$, если $\|x-y\| \geqslant \|x\|$ при всех $y \in L$, т.е. $\rho(x,L) = \|x\|$. По теореме существования для конечномерных подпространств $\dim L < \infty$ перпендикуляр с нормой $\|x\| = 1$ всегда существует.

Лемма (Ф. Ри́сса о почти перпендикуляре)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым подпространством нормированного пространства. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x \in \boldsymbol{E} \setminus L$, т.ч. $\|x\| = 1$ и $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ при всех $y \in L$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \boldsymbol{E} \setminus L$, тогда $d \doteqdot \rho(x_0, L) > 0$. Выберем элемент $y_0 \in L$, т.ч. $\|x_0 - y_0\| < d/(1-\varepsilon)$. Тогда если $x \doteqdot (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$, то при всех $y \in L$ имеем

$$\|x - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \frac{\|x_0 - y_1\|}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon\,,$$

где элемент $y_1 \doteqdot y_0 + \|x_0 - y_0\|\, y \in L$. □

Теорема. *Замкнутый единичный шар $\boldsymbol{S}_1 \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ является компактным в том и только в том случае, когда пространство $\boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность $\dim \boldsymbol{E} < \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\dim \boldsymbol{E} = \infty$. Если точка $x_1 \in \boldsymbol{S}_1$ и $L_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1\}$ есть линейная оболочка x_1, то по лемме существует $x_2 \in \boldsymbol{S}_1 \setminus L_1$, т.ч. $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Аналогично, если $L_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, x_2\}$ есть линейная оболочка x_1 и x_2, то существует $x_3 \in \boldsymbol{S}_1 \setminus L_2$, т.ч. $\|x_3 - x_1\| > 1/2$, $\|x_3 - x_2\| > 1/2$ и т.д. По индукции имеем $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$ и существует $x_{n+1} \in \boldsymbol{S}_1 \setminus L_n$, т.ч. $\|x_{n+1} - x_k\| > 1/2$ при $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. т.е. шар некомпактный.

Достаточность. Пусть $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$ — изоморфизм, где $n = \dim \boldsymbol{E}$. Тогда образ шара $f(\boldsymbol{S}_1) \subset \mathbb{F}^n$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{F}^n$. Поэтому $f(\boldsymbol{S}_1)$ компактно в $\mathbb{F}^n$ и, следовательно, $\boldsymbol{S}_1$ компактно в силу непрерывности f^{-1}. □

Рассмотрим пространства $\boldsymbol{\ell}_p$ всех последовательностей $x = \{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{F}$, имеющих конечную величину нормы $\|x\|_{\ell_p} < \infty$, где

$$\|x\|_{\ell_p} \doteqdot \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty; \\ \sup_{n \geqslant 1} |x_n|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Через $\boldsymbol{c}_0 \subset \boldsymbol{c} \subset \boldsymbol{\ell}_\infty$ обозначаются замкнутые подпространства в $\boldsymbol{\ell}_\infty$ соответственно последовательностей сходящихся к нулю и сходящихся последовательностей.

Пространства $\boldsymbol{\ell}_p$ является частными случаями пространств $\boldsymbol{L}_p(X, \mu)$, в которых множество $X = \mathbb{N}$ есть множество натуральных чисел и мера $\mu(n) = 1$ для каждой точки $n \in \mathbb{N}$. По доказанному ранее $\boldsymbol{\ell}_p = \boldsymbol{L}_p(\mathbb{N}, \mu)$ банаховы пространства.

Имеют место непрерывные вложения $\boldsymbol{\ell}_p \subset \boldsymbol{\ell}_q$ при всех $p < q$. Если $q = \infty$, то это вытекает из очевидного неравенства $\|x\|_{\ell_\infty} \leqslant \|x\|_{\ell_p}$. Пусть $q < \infty$. Докажем, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \text{ при всех } 1 \leqslant p < q < \infty \text{ и } x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p\,.$$

Если разделить левую часть на правую, то для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$. В этом случае $|x_n| \leqslant 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$ при всех $1 \leqslant p < q < \infty$. Таким образом, $\|x\|_{\ell_q} \leqslant \|x\|_{\ell_p}$ при всех $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

Для каждого $x \in \boldsymbol{\ell}_p$ обозначим через $s_m(x) = y$ финитную последовательность $y = \{y_n\}$, т.ч. $y_n = x_n$ при $n \leqslant m$ и $y_n = 0$ при $n > m$. Тогда эта последовательность $s_m(x) \to x$ сходится в метрике $\boldsymbol{\ell}_p$ при $1 \leqslant p < \infty$ и в метрике $\boldsymbol{c}_0$ при $m \to \infty$, т.к.

$$\|x - s_m(x)\|_{\ell_p} \doteqdot \begin{cases} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty; \\ \sup_{n \geqslant m+1} |x_n|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Теорема (Ри́сса). *Множество $M \subset \boldsymbol{\ell}_p$ тогда и только тогда предкомпактно в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$ при $1 \leqslant p < \infty$, когда выполняются следующие два условия:*

a) множество M ограничено в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$;

b) для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x - s_m(x)\|_{\ell_p} < \varepsilon$ при всех $x \in M$.

Доказательство. Необходимость. Ограниченность $M \subset \boldsymbol{\ell}_p$ вытекает из его вполне ограниченности. Докажем второе условие. Пусть $A = \{x^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ является $\varepsilon/3$-сетью множества M. Для каждого k выберем $m_k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x^{(k)} - s_{m_k}(x^{(k)})\|_{\ell_p} < \varepsilon/3$, а затем возьмем среди них наибольшее $m = \max_{1 \leqslant k \leqslant l} m_k$. Так как A является $\varepsilon/3$-сетью, то для любого $x \in M$ найдется k, т.ч. $\|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} \leqslant \varepsilon/3$ и по неравенству треугольника

$$\|x - s_m(x)\|_{\ell_p} \leqslant \|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} + \|x^{(k)} - s_m(x^{(k)})\|_{\ell_p} + \|s_m(x^{(k)}) - s_m(x)\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

при всех $x \in M$, т.е. выполнено второе условие (b).

Достаточность. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $M_m \doteqdot \{s_m(x) \mid x \in M\}$ в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$, где m определяется из второго условия для $\varepsilon/3$. Поскольку M_m содержится в конечномерном подпространстве $\boldsymbol{\ell}_p$ и является ограниченным в $\boldsymbol{\ell}_p$, то оно будет вполне ограниченным в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$.

Для заданного $\varepsilon > 0$ обозначим через $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ $\varepsilon/3$-сеть множества M_m, а через $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ элементы прообраза $y^{(k)} = s_m(x^{(k)})$. Тогда для каждого $x \in M$ найдется k, т.ч. $\|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\|_{\ell_p} \leqslant \varepsilon/3$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\|x - x^{(k)}\|_{\ell_p} \leqslant \|x - s_m(x)\|_{\ell_p} + \|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\|_{\ell_p} + \|s_m(x^{(k)}) - x^{(k)}\|_{\ell_p} < \varepsilon\,.$$

Таким образом, $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ образует ε-сеть M. Поэтому M вполне ограничено в $\boldsymbol{\ell}_p$ и значит является предкомпактным в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$. □

Замечание. Из неравенства $\|x\|_{\ell_p} \leqslant \|x\|_{\ell_1}$ вытекает, что если множество $M \subset \boldsymbol{\ell}_1$ компактно, то оно будет также компактным в любом $\boldsymbol{\ell}_p$. Аналогично из неравенства $\|f\|_{\boldsymbol{L}_p[0,1]} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{C}[0,1]}$ вытекает, что если множество $M \subset \boldsymbol{C}[0,1]$ компактно, то оно будет также компактным в любом $\boldsymbol{L}_p[0,1]$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

2 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ обозначают нормированные линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел.

Определение. Отображение $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *линейным оператором*, если

$$A(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1Ax_1+\lambda_2Ax_2 \text{ при всех } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F} \text{ и } x_1,x_2\in\boldsymbol{E}.$$

Норма линейного оператора $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ вычисляется по формулам:

$$\|A\|\doteqdot\sup_{x\neq0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|Ax\|,\ \text{где } \boldsymbol{S}_1\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid \|x\|\leqslant1\} \text{ единичный шар}.$$

Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если $\|A\|<\infty$. Это равносильно тому, что он отображает ограниченные множества в ограниченные. Через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначается пространство ограниченных операторов из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$.

Лемма. *Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. $\|A\|<\infty$.*

Доказательство. Если оператор A непрерывный, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\|Ax\|<\varepsilon$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, $\|x\|\leqslant\delta$. Отсюда мы имеем $\|A\|\leqslant\varepsilon/\delta$. Обратно, если $\|A\|<\infty$, то $\|Ax\|\leqslant\|A\|\,\|x\|<\varepsilon$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, $\|x\|<\varepsilon/\|A\|$. □

Теорема. *Если $\boldsymbol{F}$ — банахово пространство, то пространство ограниченных операторов $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является бáнаховым пространством,.*

Доказательство. Сложение операторов $A+B$ и их умножение λA на число $\lambda\in\mathbb{F}$ определяются по формулам $(A+B)(x)\doteqdot Ax+Bx$ и $(\lambda A)(x)\doteqdot\lambda Ax$. Очевидно, что $\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|$ и $\|A+B\|=\sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|Ax+Bx\|\leqslant\|A\|+\|B\|$. Следовательно, $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является нормированным пространством. Докажем его полноту.

Пусть $\{A_n\}$ есть последовательность Коши́ в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует N, т.ч. $\|A_n-A_m\|<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$. Из определения операторной нормы вытекает неравенство $\|A_nx-A_mx\|<\varepsilon\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $n,m\geqslant N$. Следовательно, $\{A_nx\}$ есть последовательность Коши́ в $\boldsymbol{F}$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. В силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $Ax\doteqdot\lim_{n\to\infty}A_nx$. Ясно, что A является линейным оператором. Переходя к пределу в неравенстве, указанном выше, получим, что $\|A_nx-Ax\|\leqslant\varepsilon\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $n\geqslant N$, т.е. $\|A_n-A\|\leqslant\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Поэтому $A_n\to A$ сходится по норме. Так как $\|A\|\leqslant\|A_n\|+\|A_n-A\|$, то $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. □

Следствие 1. *Сопряженное пространство $\boldsymbol{E}'=\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\mathbb{F})$ к нормированному пространству $\boldsymbol{E}$ является банаховым пространством.*

Определение. *Банаховой алгеброй* называют банахово пространство $\boldsymbol{E}$, которое образует алгебру с единицей $e\in\boldsymbol{E}$ относительно билинейного произведения $x\cdot y\in\boldsymbol{E}$ элементов $x,y\in\boldsymbol{E}$, т.е. имеет место $e\cdot x=x\cdot e=x$, $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\cdot y=\lambda_1x_1\cdot y+\lambda_2x_2\cdot y$, $x\cdot(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)=\lambda_1x\cdot y_1+\lambda_2x\cdot y_2$, и, кроме того, $\|e\|=1$ и $\|x\cdot y\|\leqslant\|x\|\,\|y\|$.

Следствие 2. *Если $\boldsymbol{E}$ является ба́наховым пространством, то пространство $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$ является банаховой алгеброй.*

В самом деле, произведение операторов $AB(x) \doteqdot A(Bx)$ является билинейным, т.к. $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B = \lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 B$ и $A(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 AB_1 + \lambda_2 AB_2$. При этом выполняется неравенство $\|AB\| \leqslant \sup_{x\in \boldsymbol{S}_1} \|A(Bx)\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$. Тождественное отображение $I(x) \doteqdot x$ является единицей этой алгебры, т.к. $IA = AI = A$ и $\|I\| = 1$.

Пример. Пусть $Af(x) \doteqdot \varphi(x)f(x)$ оператор умножения на функцию $\varphi \in \boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$. Докажем, что $\|A\| = \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Поскольку

$$\|Af\|^p_{\boldsymbol{L}_p} = \textstyle\int_X |\varphi(x)f(x)|^p d\mu \leqslant \|\varphi\|^p_{\boldsymbol{L}_\infty} \int_X |f(x)|^p d\mu = \|\varphi\|^p_{\boldsymbol{L}_\infty} \|f\|^p_{\boldsymbol{L}_p},$$

то $\|A\| \leqslant \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset X$ положительной меры, т.ч. $|\varphi(x)| > \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon$ для всех $x \in E$. Тогда, полагая $f(x) = \chi_E(x)$, имеем

$$\|Af\|^p_{\boldsymbol{L}_p} = \textstyle\int_E |\varphi(x)|^p d\mu > (\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon)^p \mu(E) = (\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon)^p \|f\|^p_{\boldsymbol{L}_p},$$

т.е. $\|A\| = \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Аналогично в случае при $p = \infty$. Таким образом, алгебра функций $\boldsymbol{L}_\infty(X,\mu)$ изометрически изоморфна подалгебре операторов в $\mathscr{L}(\boldsymbol{L}_p(X,\mu))$.

Теорема (Ба́наха–Штейнга́уза)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ является банаховом пространством и система операторов $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ поточечно ограничена, т.е. при всех $x \in \boldsymbol{E}$ множества $M_x \doteqdot \{y = A_i(x) \mid i \in I\}$ ограничены в $\boldsymbol{F}$, то $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$.*

Доказательство. Применяя *принцип равностепенной непрерывности* получаем, что система операторов $\{A_i\}_{i\in I}$ является равностепенно непрерывной. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|A_i x\| < \varepsilon$ при всех $\|x\| \leqslant \delta$ и $i \in I$. Отсюда следует, что $\|A_i\| = \sup_{\|x/\delta\|\leqslant 1} \|A_i(x/\delta)\| \leqslant \varepsilon/\delta$ при всех $i \in I$. □

Определение. Множество X называется *упорядоченным*, если в этом множестве задано *отношение порядка* $x \leqslant y$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $x \leqslant x$; 2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$; 3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Множество $A \subset X$ называется *цепью*, если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ для всех пар $x, y \in A$. Элемент $y \in X$ называется *мажорантой* множества A, если $x \leqslant y$ при всех $x \in A$. Элемент $x \in X$ называется *максимальным* в X, если из $x \leqslant y$ следует $x = y$.

Например, отношением порядка является *отношение включения* множеств, т.е. $A \leqslant B$, если $A \subset B$. Следующая лемма принимается за аксиому в теории множеств.

Лемма (Цо́рна)**.** *Если любая цепь $A \subset X$ упорядоченного множества X имеет мажоранту, то в множестве X существует максимальный элемент.*

Пусть $L \subset M \subset \boldsymbol{E}$ подпространства линейного подпространства $\boldsymbol{E}$. Линейный функционал $g : M \to \mathbb{F}$ называется *продолжением* линейного функционала $f : L \to \mathbb{F}$, если $g(x) = f(x)$ для всех $x \in L$. В каждом множестве линейных функционалов, заданных на некоторых подпространствах $\boldsymbol{E}$, *отношение продолжения* является *отношением порядка* и обозначается через $\{f, L\} \leqslant \{g, M\}$.

Теорема (Xа́на–Ба́наха)**.** *Если линейный функционал $f : L \to \mathbb{F}$ определён на линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$ полунормированного пространства $(\boldsymbol{E}, p)$ и $|f(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in L$, то существует такое его продолжение $g : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ на все пространство $\boldsymbol{E}$, что $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим действительный случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Пусть $e_1 \notin L$ и $M_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{e_1, L\}$ линейная оболочка e_1 и L. Поскольку при всех $x, y \in L$

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x-e_1) + p(y+e_1),$$

то $f(x) - p(x-e_1) \leqslant p(y+e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Поэтому существует $c_1 \in \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - p(x-e_1) \leqslant c_1 \leqslant p(y+e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Заменяя x и y на x/λ, а затем умножая на λ, получим $f(x) \pm \lambda c_1 \leqslant p(x \pm \lambda e_1)$ при всех $\lambda > 0$ и $x \in L$.

Определим на подпространстве M_1 функционал по формуле $g_1(z) \doteqdot f(x) + \lambda c_1$, где $z = x + \lambda e_1$, $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $g_1(x) = f(x)$ при всех $x \in L$ и по доказанному $g_1(z) \leqslant p(z)$ при всех $z \in M_1$. Так как $p(-z) = p(z)$, то $|g_1(z)| \leqslant p(z)$ при всех $z \in M_1$. Таким образом, построили продолжение функционала f на подпространство M_1. Если существует элемент $e_2 \notin M_1$, то аналогично можно доказать существование продолжения g_2 функционала g_1 на подпространство $M_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{M_1, e_2\}$ и т.д.

Рассмотрим множество всех продолжений $\{g, M\}$ функционала f, заданного на подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$, которые будут удовлетворять условию теоремы. Определим в этом множестве отношение порядка, как отношение продолжения. Тогда для каждой цепи продолжений $\{g_i, M_i\}_{i \in I}$ имеется мажоранта $\{g, M\}$, где $M = \cup_{i \in I} M_i$ и $g|_{M_i} = g_i$. Следовательно, по лемме Цóрна существует максимальный элемент. Поскольку по доказанному выше каждый функционал можно продолжить на более широкое подпространство, то максимальное продолжение определено на всем $\boldsymbol{E}$.

Переход от действительного к комплексному случаю производится следующим образом. Пусть $f(x) = u(x) + \boldsymbol{i}v(x)$, где $u(x) = \Re f(x)$ и $v(x) = \Im f(x)$. Так как в силу линейности $f(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}f(x)$, то $u(\boldsymbol{i}x) + \boldsymbol{i}v(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}u(x) - v(x)$. Поэтому $v(x) = -u(\boldsymbol{i}x)$ и $f(x) = u(x) - \boldsymbol{i}u(\boldsymbol{i}x)$. Пусть функционал h определяет продолжение функционала u в действительном случае. Тогда для функционала $g(x) \doteqdot h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)$ выполняется свойство линейности $g(\boldsymbol{i}x) = h(\boldsymbol{i}x) - \boldsymbol{i}h(-x) = \boldsymbol{i}(h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)) = \boldsymbol{i}g(x)$.

Следовательно, функционал g является линейным над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и задает продолжение функционала f. Докажем неравенство $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если $g(x) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}|g(x)|$, то $|g(x)| = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}g(x) = g(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = h(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) \leqslant p(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = p(x)$. Таким образом, функционал g удовлетворяет условиям теоремы. □

Следствие. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ подпространство в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, то для каждого $f \in L'$ существует $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|_L$.*

Для доказательства определим $p(x) \doteqdot \|f\|_L \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда по теореме существует функционал g, т.ч. $g|_L = f$ и $|g(x)| \leqslant \|f\|_L \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому имеем $\|g\| \leqslant \|f\|_L$, а в силу условия $g|_L = f$ справедливо обратное неравенство $\|g\| \geqslant \|f\|_L$. Таким образом, имеет место равенство $\|g\| = \|f\|_L$.

Теорема (Ри́сса о представлении). *Для каждого* $\alpha \in \boldsymbol{C}'[a,b]$ *существует такая единственная функция* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$*, что* $\alpha(f) = \int_a^b f\,dF$ *для всех* $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$*,* $F(a) = 0$*,* $F(x)$ *непрерывна слева в* (a,b) *и ее вариация* $\mathbf{V}_a^b(F) = \|\alpha\|$*.*

Доказательство. Применяя следствие мы можем продолжить $\alpha \in \boldsymbol{C}'[a,b]$ на пространство $\boldsymbol{B}[a,b]$ с сохранением нормы. Пусть $F(t) \doteqdot \alpha(u_t)$, где $u_t(x) \doteqdot \chi_{[a,t)}(x)$ при $a \leqslant t < b$ и $u_b(x) = 1$. Тогда $F(a) = 0$. Докажем, что функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$. Пусть $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ задает разбиение отрезка $[a,b]$ и $\theta_k \doteqdot \arg\big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big)$, тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |F(t_k) - F(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k} \alpha(u_{t_k} - u_{t_{k-1}}) = \alpha\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k} \chi_{[t_{k-1},t_k)}\Big) \leqslant \|\alpha\|.$$

поскольку $|\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\chi_{[t_{k-1},t_k)}(x)| = 1$. Поэтому $\mathbf{V}_a^b(F) \leqslant \|\alpha\|$ и $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$. Для каждой $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ введём ступенчатые функции $f_\tau(x) \doteqdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(u_{t_k}(x) - u_{t_{k-1}}(x))$, где $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Эти функции $f_\tau \rightrightarrows f$ сходятся равномерно на $[a,b]$, когда диаметр разбиения $d_\tau \to 0$. Отсюда в силу непрерывности $\alpha \in \boldsymbol{B}'[a,b]$ получим

$$\alpha(f) = \lim_{d_\tau \to 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d_\tau \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big) = \int_a^b f\,dF.$$

Поскольку $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ имеет не более счетного числа точек разрыва первого рода и интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса не зависит от изменения F на счётном множестве точек (a,b), то F можно считать непрерывной слева в (a,b). Так как при $\|f\|_C \leqslant 1$

$$|\alpha(f)| = \Big|\int_a^b f\,dF\Big| \leqslant \sup_\tau \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,|F(t_k) - F(t_{k-1})| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^b(F), \text{ то } \|\alpha\| = \mathop{\mathbf{V}}_a^b(F).$$

Докажем единственность. Пусть функция $g_n \in \boldsymbol{C}[a,b]$, т.ч. $g_n(x) = 1$ при $x \in [a,t_n]$, $g_n(x) = 0$ при $x \in [t,b]$, а в интервале (t_n,t) является линейной. Тогда в силу непрерывности F слева получим, что $|\alpha(g_n) - F(t_n)| = \Big|\int_{t_n}^t g_n dF\Big| \leqslant \mathbf{V}_{t_n}^t(F) \to 0$ при $t_n \nearrow t$, т.е. имеет место равенство $\lim \alpha(g_n) = \lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t)$ при всех $t \in [a,b]$. □

Следствие. *Сопряжённое пространство* $\boldsymbol{C}'[a,b]$ *изометрически изоморфно подпространству* $\boldsymbol{BV}_0[a,b]$ *всех функций* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ *ограниченной вариации, т.ч.* $F(a) = 0$ *и* $F(x)$ *непрерывна слева в* (a,b)*.*

Теорема (Ри́сса о представлении). *Для каждого* $\alpha \in \boldsymbol{L}_p'(X,\mu)$ *существует такой единственный элемент* $g \in \boldsymbol{L}_q(X,\mu)$*, что* $\alpha(f) = \int_X fg\,d\mu$ *при всех* $f \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ *и* $\|\alpha\| = \|g\|_{\boldsymbol{L}_q}$*, где* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $1/p + 1/q = 1$*.*

В случае $p = 1$ эта *теорема Штейнга́уза* была доказана в прошлом семестре. В случае $1 < p < \infty$ доказательство во многом повторяет указанные там рассуждения. В силу этой теоремы устанавливается изометрический изоморфизм сопряжённого пространства $\boldsymbol{L}_p'(X,\mu)$ на пространство $\boldsymbol{L}_q(X,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.

3 СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим локально выпуклые топологии в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченных операторов, действующих в нормированных пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$.

Локально выпуклая топология в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, определяемая операторной нормой $\boldsymbol{p}(A) \doteqdot \|A\|$, называется *равномерной топологией* или *топологией равномерной сходимости*. Последовательность операторов сходится $A_n \to A$ в этой топологии, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число N, т.ч. $\|A_n - A\| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$, что равносильно равномерной сходимости $A_n x \to Ax$ в $\boldsymbol{F}$ на единичном шаре $x \in \boldsymbol{S}_1$.

Локально выпуклая топология в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, определяемая системой полунорм $\boldsymbol{p}_x(A) \doteqdot \|Ax\|$, $x \in \boldsymbol{E}$, называется *сильной топологией* или *топологией сильной сходимости*. Последовательность операторов сходится $A_n \to A$ в этой топологии, если для любых $x \in \boldsymbol{E}$, $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$, что равносильно сильной сходимости $A_n x \to Ax$ в $\boldsymbol{F}$ в каждой точке $x \in \boldsymbol{E}$.

Локально выпуклая топология в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, определяемая системой полунорм $\boldsymbol{p}_{\alpha,x}(A) \doteqdot |\alpha(Ax)|$, $\alpha \in \boldsymbol{F}', x \in \boldsymbol{E}$, называется *слабой топологией* или *топологией слабой сходимости*. Последовательность сходится $A_n \to A$ в этой топологии, если для любых $\alpha \in \boldsymbol{F}'$, $x \in \boldsymbol{E}$, $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $|\alpha(A_n x - Ax)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$, что равносильно слабой сходимости $A_n x \to Ax$ в $\boldsymbol{F}$ в каждой точке $x \in \boldsymbol{E}$.

1. *Из равномерной сходимости вытекает сильная сходимость, а из сильной сходимости следует слабая сходимость. Если размерность* $\dim \boldsymbol{E} < \infty$ *конечна, то верны также обратные утверждения.*

2. *Если* $\boldsymbol{E}$ *— банахово пространство и* $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *сходится сильно к некоторому оператору* A*, то* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *и* $\|A\| \leqslant \underline{\lim} \|A_n\|$.

3. *Если* $\boldsymbol{E}$ *— банахово пространство и множество* $M \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *является сильно ограниченным, то* M *равномерно ограничено.*

Доказательство свойства 1 вытекает из указанных определений. Если $\dim \boldsymbol{E} < \infty$, то каждая из этих сходимостей равносильна сходимости на элементах базиса $\boldsymbol{E}$. По условию свойства 2 существует предел $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда последовательность $\{A_n x\}$ ограничена в $\boldsymbol{F}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и значит в силу теоремы Ба́наха–Штейнга́уза $\sup \|A_n\| < \infty$. Выберем индексы n_k, т.ч. $\underline{\lim} \|A_n\| = \lim \|A_{n_k}\|$. Тогда $\|A(x)\| = \lim \|A_{n_k}(x)\| \leqslant \lim \|A_{n_k}\| = \underline{\lim} \|A_n\|$ при всех $x \in \boldsymbol{S}_1$. Поэтому имеем $\|A\| \leqslant \underline{\lim} \|A_n\| \leqslant \sup \|A_n\| < \infty$, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Наконец, необходимость свойства 3 получается из теоремы Ба́наха–Штейнга́уза, а его достаточность легко вытекает из неравенства $\|A(x)\| \leqslant \|A\| \, \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $A \in M$.

Теорема (критерий сильной сходимости операторов). *Пусть* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{F}$ *являются банаховыми пространствами. Последовательность операторов* $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *тогда и только тогда сходится сильно к* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$*, когда* $\sup \|A_n\| < \infty$ *и существует множество* $M \subset \boldsymbol{E}$*, т.ч. линейная оболочка* M *всюду плотна в* $\boldsymbol{E}$ *и предел* $\lim A_n(x) = A(x)$ *при всех* $x \in M$.

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы Ба́наха–Штейнга́уза. Для доказательства достаточности обозначим через $L \doteqdot \mathrm{sp}M$ линейную оболочку M. В силу линейности операторов существует предел $\lim A_n(y) = A(y)$ при всех $y \in L$. Поскольку L всюду плотно, то для любого $x \in \boldsymbol{E}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in L$, т.ч. $\|x-y\| < \varepsilon/4c$, где $c \doteqdot \sup\|A_n\| > 0$. Выберем N, т.ч. $\|A_n(y) - A_m(y)\| < \varepsilon/2$ при всех $n,m \geqslant N$. Так как $\|A_n(x) - A_n(y)\| \leqslant \|A_n\|\,\|x-y\| < \varepsilon/4$, то при всех $n,m \geqslant N$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leqslant \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\| < \varepsilon.$$

Отсюда $\{A_n(x)\}$ является последовательностью Коши при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и в силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $\lim A_n(x) \doteqdot A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Таким образом, по свойству 2 оператор A является ограниченным, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$. □

Топология в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}'$, определяемая нормой $\boldsymbol{p}(f) \doteqdot \|f\|$, называется *сильной топологией*, а сходимость по норме *сильной сходимостью*.

Локально выпуклая топология в $\boldsymbol{E}'$, заданная системой полунорм $\boldsymbol{p}_x(f) \doteqdot |f(x)|$, $x \in \boldsymbol{E}$, называется *слабой* топологией* или *топологией слабой* сходимости*. В этой топологии $\{f_n\}$ сходится к f, если $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Используя свойства сильной сходимости операторов получим свойства слабой* сходимости:

1. *Из сильной сходимости следует слабая* сходимость. Если размерность* $\dim(\boldsymbol{E}) < \infty$ *конечна, то верно также обратное утверждение.*

2. *Если* $\boldsymbol{E}$ *– банахово пространство и* $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}'$ *сходится слабо* к некоторому функционалу* f*, то* $f \in \boldsymbol{E}'$ *и* $\|f\| \leqslant \underline{\lim}\,\|f_n\|$.

3. *Если* $\boldsymbol{E}$ *– банахово пространство и множество* $M \subset \boldsymbol{E}'$ *слабо* ограничено, то* M *является сильно ограниченным.*

Теорема (критерий слабой* сходимости в $\boldsymbol{E}'$). *Пусть* $\boldsymbol{E}$ *банахово пространство. Последовательность функционалов* $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}'$ *тогда и только тогда сходится слабо* к* $f \in \boldsymbol{E}'$*, когда* $\sup\|f_n\| < \infty$ *и существует* $M \subset \boldsymbol{E}$*, т.ч. линейная оболочка* $\mathrm{sp}M$ *всюду плотна в* $\boldsymbol{E}$ *и предел* $\lim f_n(x) = f(x)$ *при всех* $x \in M$.

Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}'$ и система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ называется *биортогональными*, если $f_j(e_i) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$.

Лемма 1. *Если система функционалов* $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}'$ *линейно независима, то существует биортогональная система элементов* $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$.

Доказательство. При $n = 1$ имеем $f_1 \neq 0$. Поэтому найдется $e_1 \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_1(e_1) = 1$. По индукции предположим, что для $n-1$ утверждение верно. Тогда существуют $x_i \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_j(x_i) = 0$ при $i \neq j$ и $f_i(x_i) = 1$, где $i,j = 1,\dots,n-1$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ положим $y \doteqdot x - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x)x_i$. Тогда $f_j(y) = 0$ при всех $j = 1,\dots,n-1$ и $x \in \boldsymbol{E}$.

Если $f_n(y) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) f_n(x_i)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, что противоречит условию линейной независимости. Поэтому найдется элемент $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_n(y) \neq 0$. Определяя $e_n \doteqdot y/f_n(y)$ и $e_i \doteqdot x_i - f_n(x_i)e_n$ при $i = 1,\dots,n-1$, получим биортогональную систему элементов $\{e_i\}_{i=1}^n$ в пространстве $\boldsymbol{E}$. □

Линейное подпространство $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}'$ называется *тотальным* на пространстве $\boldsymbol{E}$ (или разделяющим точки $\boldsymbol{E}$), если из $f(x) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}$ следует, что $x = 0$.

Следствие. *Пусть система $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ линейно независима и $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}'$ тотально, то существует биортогональная система $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{F}$.*

Каноническим вложением $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$ во второе сопряженное пространство $\boldsymbol{E}''$ называется отображение $J(x) \doteqdot \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ при всех $f \in \boldsymbol{E}'$ обозначает функционал Дира́ка. Используя это вложение, заметим, что в силу тотальности подпространства $\boldsymbol{F}$ система $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейно независима тогда и только тогда, когда соответствующая система функционалов $\{\delta_{e_i}\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{F}'$ линейно независима.

Лемма 2. *Подпространство $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}'$ является слабо* плотным в $\boldsymbol{E}'$, тогда и только тогда, когда оно тотально на пространстве $\boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}'$ слабо* плотно и $f(x) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}$. Так как слабая* окрестность $O(g) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' \,|\, |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ точки $g \in \boldsymbol{E}'$ содержит $f \in \boldsymbol{F}$, то $|g(x)| = |g(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$. Отсюда $g(x) = 0$ при всех $g \in \boldsymbol{E}'$. Пусть функционал $f(\lambda x) = \lambda \|x\|$ задан на линейной оболочке $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x\}$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Поскольку $f \in L'$ и по следствию из теоремы Ха́на–Ба́наха существует $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g(x) = \|x\|$ и $\|g\| = \|f\|_L = 1$. Поэтому $x = 0$, т.е. $\boldsymbol{F}$ является тотальным.

Обратно, пусть $O(g) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' \,|\, \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |g(e_i) - f(e_i)| < \varepsilon\}$ определяет слабую* окрестностью точки $g \in \boldsymbol{E}'$. Можно считать, что $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ линейно независима. Из следствия имеем биортогональную систему $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{F}$. Построим функционал $f(x) = \sum_{i=1}^n g(e_i) f_i(x) \in \boldsymbol{F}$, т.ч. $f(e_i) = g(e_i)$ при $i = 1, \ldots, n$. Тогда $f \in O(g)$. □

Теорема. *Каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$ — изометрично, его образ $J(\boldsymbol{E})$ является слабо* плотным в пространстве $\boldsymbol{E}''$ и состоит из всех функционалов, которые непрерывны в слабой* топологии пространства $\boldsymbol{E}'$.*

Доказательство. Пусть функционал $f \in \boldsymbol{E}'$ и $\|f\| \leqslant 1$, тогда $|\delta_x(f)| \leqslant \|x\|$. Поэтому имеем $\|J(x)\| = \|\delta_x\| \leqslant \|x\|$. Докажем, что норма функционала $\|\delta_x\| = \|x\|$. Применяя теорему Ха́на–Ба́наха, также как в лемме 2, для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ можно построить функционал $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g(x) = \|x\|$. Тогда $\delta_x(g) = \|x\|$ и, следовательно, $\|\delta_x\| = \|x\|$. Таким образом, каноническое вложение изометрично. Поскольку подпространство $J(\boldsymbol{E})$ тотально на $\boldsymbol{E}'$, то в силу леммы 2 оно является слабо* плотным в $\boldsymbol{E}''$.

Пусть функционал $\alpha = \delta_x \in J(\boldsymbol{E})$, тогда $|\alpha(f)| \leqslant |f(x)|$ при всех $f \in \boldsymbol{E}'$. Поэтому α является слабо* непрерывным. Обратно, по определению слабой* топологии в $\boldsymbol{E}'$ и слабой* непрерывности α существуют $c > 0$ и система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $|\alpha(f)| \leqslant c \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(e_i)|$ при всех $f \in \boldsymbol{E}'$. Можно считать, что система $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейно независима. Пусть $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}'$ биортогональная система функционалов. Тогда любой элемент $g \in \boldsymbol{E}'$ имеет представление $g(x) = \sum_{i=1}^n g(e_i) f_i(x) + f(x)$, где $f(e_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, n$. Из указанного выше неравенства следует, что $\alpha(f) = 0$. Поэтому $\alpha(g) = \sum_{i=1}^n g(e_i) \alpha(f_i) = \delta_x(g)$ при всех $g \in \boldsymbol{E}'$, где $x = \sum_{i=1}^n \alpha(f_i) e_i$. □

Замечание. Если каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}''$ является сюръективным, то пространство $\boldsymbol{E}$ называется *рефлексивным*. Например, нетрудно доказать, что все конечномерные нормированные пространства будут рефлексивны. В силу теоремы, сформулированной в конце предыдущей лекции, пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при всех $1 < p < \infty$ являются рефлексивными. По *теореме Джéймса* банахово пространство $\boldsymbol{E}$ рефлексивно в том и в том случае, когда всякий функционал $f \in \boldsymbol{E}'$ достигает своей нормы на единичном шаре $\boldsymbol{S}_1$, т.е. существует $x \in \boldsymbol{S}_1$, т.ч. $f(x) = \|f\|$.

Топология в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, определяемая нормой $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$, называется *сильной топологией*, а сходимость по норме *сильной сходимостью*.

Локально выпуклую топологию в $\boldsymbol{E}$, заданную системой полунорм $\boldsymbol{p}_f(x) \doteqdot |f(x)|$, $f \in \boldsymbol{E}'$, называют *слабой топологией* или *топологией слабой сходимости*. В этой топологии $\{x_n\}$ сходится к x, если $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in \boldsymbol{E}'$. Тогда из свойств слабой* сходимости, используя каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \hookrightarrow \boldsymbol{E}''$, мы получим следующие свойства топологии слабой сходимости:

1. *Из сильной сходимости следует слабая сходимость. Если размерность* $\dim(\boldsymbol{E}) < \infty$ *конечна, то верно также обратное утверждение.*

2. *Если* $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ *сходится слабо к* $x \in \boldsymbol{E}$, *то* $\|x\| \leqslant \varliminf \|x_n\|$.

3. *Если множество* $M \subset \boldsymbol{E}$ *слабо ограничено, то* M *сильно ограничено.*

Теорема (критерий слабой сходимости в $\boldsymbol{E}$). *Последовательность элементов* $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ *тогда и только тогда сходится слабо к* $x \in \boldsymbol{E}$, *когда* $\sup \|x_n\| < \infty$ *и существует множество* $M \subset \boldsymbol{E}'$, *т.ч. линейная оболочка* $\mathrm{sp} M$ *всюду плотна в* $\boldsymbol{E}'$ *и предел* $\lim f(x_n) = f(x)$ *при всех* $f \in M$.

Пример. Последовательность $\{f_n\} \subset \boldsymbol{C}[a,b]$ сходится слабо в пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$ в том и только в том случае когда является равномерно ограниченной и сходится $f_n(x) \to f(x)$ в любой точке $x \in [a,b]$. Для доказательства необходимости рассмотрим функционалы Дирака $\delta_x \in \boldsymbol{C}'[a,b]$, тогда имеем $\delta_x(f_n) = f_n(x) \to f(x) = \delta_x(f)$.

Для доказательства достаточности всякий функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ представим интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса $\alpha(f) = \int_a^b f\,dF$. Так как интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса от непрерывной функции совпадает с интегралом Лебе́га–Сти́лтьеса, то можно применить теорему Лебе́га о предельном переходе под знаком интеграла.

Рассмотрим последовательность $\delta_{x_n} \subset \boldsymbol{C}'[a,b]$ функционалов Дира́ка. Тогда имеем $\delta_{x_n}(f) \doteqdot f(x_n)$ при всех $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. Если $x_n \to x$, то $\delta_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) = \delta_x(f)$ по непрерывности функций $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. Поэтому $\delta_{x_n} \to \delta_x$ сходится слабо* в $\boldsymbol{C}'[a,b]$. Однако $\{\delta_{x_n}\}$ не сходится по норме, т.к. $\|\delta_{x_n} - \delta_x\| = 2$ при всех $x_n \neq x$.

4 ГИ́ЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение. *Скалярным произведением* в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ называется функция $q : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ двух переменных $x, y \in \boldsymbol{E}$, обозначаемая через $\langle x, y \rangle \doteqdot q(x, y)$ и обладающая следующими свойствами:

a) $q(x,y) = \overline{q(y,x)}$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$;

b) $q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 q(x_1, y) + \lambda_2 q(x_2, y)$ при всех $x_1, x_2, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$;

c) $q(x,x) \geqslant 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $q(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пространство $\boldsymbol{E}$, в котором определено скалярное произведение $\langle x, y \rangle \doteqdot q(x, y)$, называется *евклидовым пространством* $(\boldsymbol{E}, q)$. Функция $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x, x \rangle}$ называется *евклидовой нормой*, а $\rho(x,y) \doteqdot \|x - y\|$ называется *евклидовой метрикой*.

1. Неравенство Коши́–Буняко́вского: *$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$.*

Пусть $z = tx + \lambda y$, где $\lambda \doteqdot \langle x, y \rangle / |\langle x, y \rangle|$ и $\langle x, y \rangle \neq 0$. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\langle z, z \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + t\big(\overline{\lambda}\langle x, y \rangle + \lambda\langle y, x \rangle\big) + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle = t^2\|x\|^2 + 2t|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \geqslant 0\,.$$

Так как дискриминант этого трехчлена не положительный, то $|\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$. При этом равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $z = tx + \lambda y = 0$ при некотором $t \in \mathbb{R}$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимы.

2. Неравенство треугольника: *$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$.*

Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, получим неравенство треугольника

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\Re\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\,.$$

Равенство выполняется в том и только в том случае, когда $\Re\langle x, y \rangle = \|x\|\,\|y\|$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимыми $x = \lambda y$, где $\Re\lambda = |\lambda| \geqslant 0$, и значит $\lambda \geqslant 0$. Поэтому евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным.

3. Равенство параллелограмма: *$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ при $x, y \in \boldsymbol{E}$.*

Складывая два равенства $\langle x \pm y, x \pm y \rangle = \langle x, x \rangle \pm 2\Re\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$, получим равенство параллелограмма $\langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle$.

Теорема (Дж. фон Не́ймана). *Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае является евклидовым пространством, когда в нем выполняется равенство параллелограмма.*

Доказательство достаточности приведено в учебнике Колмого́рова и Фомина́. Например, пространство $\boldsymbol{B}(X)$ ограниченных функций не является евклидовым пространством. В самом деле, если $f(x) = \chi_A(x)$ и $g(x) = \chi_B(x)$, где $A \cap B = \emptyset$, то не выполняется равенство параллелограмма, т.к. $\|f\| = \|g\| = \|f+g\| = \|f-g\| = 1$, за исключением тривиального случая, когда X состоит из одной точки.

4. Непрерывность скалярного произведения (как функции двух переменных).

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ и $c > 0$, т.ч. $\delta < \min\{c, \varepsilon/3c\}$, $\max(\|x_0\|, \|y_0\|) < c$. Тогда, если $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - y_0\| < \delta$, то по неравенству Коши́–Буняко́вского

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \leqslant |\langle x - x_0, y_0\rangle| + |\langle x_0, y - y_0\rangle| + |\langle x - x_0, y - y_0\rangle| \leqslant \\ \leqslant \|x - x_0\|\,\|y_0\| + \|x_0\|\,\|y - y_0\| + \|x - x_0\|\,\|y - y_0\| < \varepsilon\,.$$

5. Неравенство Бе́ппо Ле́ви. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{E}$, то для всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $y, z \in L$ выполняется неравенство*

$$\|y - z\| \leqslant \sqrt{\|x - y\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - z\|^2 - d^2}, \text{ где } d = \rho(x, L)\,.$$

Пусть $u \doteqdot (ty + z)/(t + 1) \in L$, тогда $\|x - u\| \geqslant d$ и выполняется неравенство

$$\|t(x - y) + (x - z)\|^2 = \|(t + 1)(x - u)\|^2 \geqslant (t + 1)^2 d^2 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Раскрывая левую норму и перенося правую часть этого неравенства влево, получим

$$t^2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2t(\Re\langle x - y, x - z\rangle - d^2) + (\|x - z\|^2 - d^2) \geqslant 0 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Так как дискриминант этого трехчлена не положительный, то имеем неравенство $\Re\langle x - y, x - z\rangle - d^2 \leqslant \sqrt{(\|x - y\|^2 - d^2)(\|x - z\|^2 - d^2)}$, из которого следует, что

$$\|y - z\|^2 = \|(x - y) - (x - z)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\Re\langle x - y, x - z\rangle + \|x - z\|^2 = \\ = \big(\|x - y\|^2 - d^2\big) - 2\big(\Re\langle x - y, x - z\rangle - d^2\big) + \big(\|x - z\|^2 - d^2\big) \leqslant \\ \leqslant \big(\|x - y\|^2 - d^2\big) + 2\sqrt{\big(\|x - y\|^2 - d^2\big)\big(\|x - z\|^2 - d^2\big)} + \big(\|x - z\|^2 - d^2\big).$$

Замечая, что это полный квадрат, получим неравенство Бе́ппо Ле́ви.

Определение. Элементы $x, y \in \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначаются через $x \perp y$, если их скалярное произведение $\langle x, y\rangle = 0$. Элемент $x \in \boldsymbol{E}$ называется *ортогональным подпространству* $L \subset \boldsymbol{E}$ и обозначается $x \perp L$, если $\langle x, y\rangle = 0$ при всех $y \in L$. Два подпространства $L, M \subset \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначаются через $L \perp M$, если $\langle x, y\rangle = 0$ для всех $x \in L$ и $y \in M$.

Лемма. *Элемент $y \in L$ является наилучшим приближением элемента $x \in \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $x - y \perp L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle x - y, z\rangle \neq 0$ при некотором $z \in L \setminus 0$. Тогда, пологая $u \doteqdot y + \lambda z \in L$, где $\lambda \doteqdot \langle x - y, z\rangle / \langle z, z\rangle$, мы получим равенство

$$\|x - u\|^2 = \|(x - y) - \lambda z\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\Re\overline{\lambda}\langle x - y, z\rangle + |\lambda|^2\langle z, z\rangle = \|x - y\|^2 - |\lambda|^2\|z\|^2.$$

Отсюда следует, что $\|x - u\| < \|x - y\| = \rho(x, L)$. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть $\langle x - y, z\rangle = 0$ при всех $z \in L$. Тогда при всех $z \in L$ имеем

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x - y, x - z\rangle \leqslant \|x - y\|\,\|x - z\|.$$

Поэтому $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$ при всех $z \in L$, т.е. $\rho(x, L) = \|x - y\|$. □

Теорема. *Пусть задана* $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ *линейно независимая система элементов евклидова пространства* $\boldsymbol{E}$ *и* $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x_k\}_{k=1}^n$ *линейная оболочка. Тогда величина наилучшего приближения элемента* $x \in \boldsymbol{E}$ *подпространство* L *вычисляется по следующей формуле:*

$$\rho(x,L) = \sqrt{\frac{D(x_1,\dots,x_n,x)}{D(x_1,\dots,x_n)}}, \quad \text{где } D(x_1,\dots,x_n) \doteqdot \det\begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1,x_n\rangle & \dots & \langle x_n,x_n\rangle \end{pmatrix}$$

обозначает определитель Гра́ма.

Доказательство. Поскольку евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ строго нормировано, то по доказанному ранее элемент наилучшего приближения существует и единственный. Пусть $d^2 \doteqdot \rho(x,L)^2 = \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle$, где $y \in L$. Поскольку $\langle x-y, y\rangle = 0$, то $\langle y,x\rangle = \langle x,x\rangle - d^2$. Кроме того, из равенств $\langle x-y, x_k\rangle = 0$ следует, что $\langle y,x_k\rangle = \langle x,x_k\rangle$ при $k=1,\dots,n$. Подставляя в эти равенства выражение $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, мы получим систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\begin{cases} \lambda_1\langle x_1,x_1\rangle + \dots + \lambda_n\langle x_n,x_1\rangle &= \langle x,x_1\rangle \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots \\ \lambda_1\langle x_1,x_n\rangle + \dots + \lambda_n\langle x_n,x_n\rangle &= \langle x,x_n\rangle \\ \lambda_1\langle x_1,x\rangle + \dots + \lambda_n\langle x_n,x\rangle &= \langle x,x\rangle - d^2. \end{cases}$$

По теореме Кро́некера–Капе́лли ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов. Поэтому определитель расширенной матрицы равен нулю. Тогда, записывая последний столбец расширенной матрицы в виде суммы двух столбцов, получим $D(x_1,\dots,x_n,x) - d^2 D(x_1,\dots,x_n) = 0$, что требовалось доказать. □

Определение. *Ги́льбертовым пространством* $\boldsymbol{H}$ называется полное евклидово пространство относительно евклидовой метрики.

Примером ги́льбертова пространства является пространство $\boldsymbol{L}_2(X,\mu)$, в котором скалярное произведение $\langle f,g\rangle \doteqdot \int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu$ и его норма $\|f\| \doteqdot \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu\right)^{1/2}$. При $p \neq 2$ пространства $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ не являются ги́льбертовыми, кроме тривиального случая, когда размерность пространства равна единице, т.к. для $f(x) = \chi_A(x) \neq 0$ и $g(x) = \chi_B(x) \neq 0$, где $A \cap B = \emptyset$, не выполняется равенство параллелограмма.

Теорема (о наилучшем приближении)**.** *Если* $L \subset \boldsymbol{H}$ *замкнутое подпространство в ги́льбертова пространства* $\boldsymbol{H}$*, то для каждого* $x \in \boldsymbol{H}$ *существует единственный элемент* $y \in L$ *наилучшего приближения подпространством* L*.*

Доказательство. Пусть $d = \rho(x,L) \doteqdot \inf_{y\in L}\|x-y\|$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $d^2 \leqslant \|x-y_n\|^2 < 1/n^2 + d^2$. По неравенству Бе́ппо Ле́ви $\|y_n - y_m\| < 1/n + 1/m$, т.е. $\{y_n\}$ является последовательностью Коши́ в L. В силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ и замкнутости подпространства L получим, что $\lim y_n = y \in L$. Переходя к пределу в неравенстве $d \leqslant \|x-y_n\| < \sqrt{d^2 + 1/n^2}$, имеем $\|x-y\| = \lim\|x-y_n\| = d$.

Таким образом, мы доказали существование элемента наилучшего приближения. Единственность элемента наилучшего приближения вытекает из ранее доказанной теоремы, т.к. ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ является строго нормированным. $\square$

Теорема (об ортогональном разложении)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ является замкнутым подпространством в ги́льбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда пространство $\boldsymbol{H}$ представляется в виде прямой суммы $\boldsymbol{H} = L \oplus L^{\perp}$ подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid x \perp L\}$.*

Доказательство. В силу теоремы о наилучшем приближении для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует такой единственный элемент $y \in L$, что $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Он называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство L. Положим $P(x) \doteqdot y$. Нетрудно проверить, что оператор P является линейным и норма $\|P\| = 1$.

Пусть $z \doteqdot x - y$. Тогда по лемме $z \in L^{\perp}$. Таким образом, имеем $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$. Докажем единственность этого разложения. Пусть $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, где $y_1, y_2 \in L$ и $z_1, z_2 \in L^{\perp}$. Из этого равенства следует, что $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^{\perp}$. Поэтому $\|y_1 - y_2\| = \|z_1 - z_2\| = 0$, т.е. $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$. $\square$

Следствие. *Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{H}$ всюду плотно в ги́льбертовом пространстве в том и только в том случае, когда $L^{\perp} = 0$.*

Необходимость. Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ всюду плотно, т.е. $\overline{L} = \boldsymbol{H}$. Для любого элемента $x \in \overline{L}$ существуют $x_n \in L$, т.ч. $x_n \to x$. Если $y \in L^{\perp}$, то $\langle x, y \rangle = \lim \langle x_n, y \rangle = 0$ при всех $x \in \overline{L}$ и, следовательно, $y \in \overline{L}^{\perp}$. Поэтому $L^{\perp} = \overline{L}^{\perp} = \boldsymbol{H}^{\perp} = 0$.

Достаточность. Пусть $L^{\perp} = 0$. Тогда, как показано выше, $\overline{L}^{\perp} = L^{\perp} = 0$. Поэтому по теореме об ортогональном разложении имеет место равенство $\boldsymbol{H} = \overline{L} \oplus \overline{L}^{\perp} = \overline{L}$, т.е. подпространство L является всюду плотным в $\boldsymbol{H}$.

Пример. Покажем, что в неполном евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ утверждение этого следствия неверно. Рассмотрим евклидово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C}[a, b]$ как подпространство с соответствующим скалярным произведением в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a, b]$. Пусть M подпространство, состоящее из всех многочленов, ортогональных функции $\chi_{[a,c]}(x)$, где $a < c < b$. Тогда $M \subset \boldsymbol{E}$ и его ортогональное дополнение в $\boldsymbol{E}$ равно $M^{\perp} = 0$. Однако M не является всюду плотным в $\boldsymbol{E}$, т.к. иначе M было бы всюду плотным в $\boldsymbol{L}_2[a, b]$, что невозможно.

5 ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть $\boldsymbol{H}$ является гильбертовом пространством над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел, а $\boldsymbol{H}'$ обозначает его сопряженное пространство.

Теорема (Ри́сса–Фреше́ о представлении)**.** *Для каждого $\alpha \in \boldsymbol{H}'$ существует единственный элемент $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x) = \langle x, y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|\alpha\| = \|y\|$.*

Доказательство. Поскольку $\alpha \in \boldsymbol{H}'$ является непрерывным функционалом, то его ядро $L = \ker(\alpha) \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid \alpha(x) = 0\}$ образует замкнутое подпространство в $\boldsymbol{H}$. Если $L^{\perp} = 0$, то в силу следствия теоремы об ортогональном разложении $L = \boldsymbol{H}$, т.е. $\alpha = 0$. Если $\alpha \neq 0$, то существует элемент $z \in L^{\perp}$, т.ч. $\|z\| = 1$. Для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ рассмотрим элемент $u = \alpha(x)z - \alpha(z)x \in L$, т.ч. $\alpha(u) = 0$. Отсюда получаем равенство $\langle u, z\rangle = \alpha(x)\langle z, z\rangle - \alpha(z)\langle x, z\rangle = \alpha(x) - \langle x, y\rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, где $y \doteqdot \overline{\alpha(z)}z$. Таким образом, имеет место представление $\alpha(x) = \langle x, y\rangle$ для всех $x \in \boldsymbol{H}$.

Для доказательства единственности представления допустим, что $\langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Тогда $\langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и, следовательно, $y_1 - y_2 = 0$. Из неравенства Коши́–Буняко́вского вытекает неравенство $|\alpha(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. При этом, если $x = y/\|y\|$, то $|\alpha(x)| = \|y\|$. Поэтому норма $\|\alpha\| = \|y\|$. □

Определения. Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *ортогональной*, если $e_n \perp e_m$ при всех $n \neq m$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ называется *ортонормированной* в $\boldsymbol{E}$, если она является ортогональной $e_n \perp e_m$ при всех $n \neq m$ и $\|e_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ называется *замкнутой* в пространстве $\boldsymbol{E}$, если ее замкнутая линейная оболочка $\overline{\mathrm{sp}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{E}$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ называется *полной* в пространстве $\boldsymbol{E}$, если ее ортогональное дополнение равно нулю $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}{}^{\perp} = 0$.

Для каждого элемента $x \in \boldsymbol{E}$ определяются *коэффициенты Фурье́* $c_n \doteqdot \langle x, e_n\rangle$ относительно ортонормированной системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ряд $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ называется *рядом Фурье́* элемента x. Если ряд Фурье любого элемента $x \in \boldsymbol{E}$ сходится, т.е. последовательность частичных сумм $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ имеет предел $x = \lim s_n$, то система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ортонормированным базисом* пространства $\boldsymbol{E}$.

1. Неравенство Бе́сселя. $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$ *при всех* $x \in \boldsymbol{E}$.

Поскольку система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной, то для частичных сумм ряда Фурье $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ выполняется следующее равенство:

$$\|x - s_n\|^2 = \langle x - s_n, x - s_n\rangle = \langle x.x\rangle - 2\Re\langle x, s_n\rangle + \langle s_n, s_n\rangle = \|x\|^2 - \textstyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geqslant 0.$$

2. Равенство Парсева́ля. *Равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ выполняется тогда и только тогда, когда ряд Фурье элемента $x \in \boldsymbol{E}$ сходится в $\boldsymbol{E}$.*

В самом деле, по доказанному выше $\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$. Следовательно, $\|x - s_n\| \searrow 0$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

3. Обобщенное равенство Парсева́ля. *Равенство Парсева́ля* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ *выполняется в* $\boldsymbol{E}$ *тогда и только тогда, когда в* $\boldsymbol{E}$ *справедливо обобщенное равенство Парсева́ля* $\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\overline{d_n}$, *где* $c_n = \langle x,e_n\rangle$ *и* $d_n = \langle y,e_n\rangle$.

Так как $\langle x+\lambda y,e_n\rangle = c_n+\lambda d_n$, то применяя равенство Парсева́ля, получим

$$\|x+\lambda y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n+\lambda d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n\overline{\lambda d_n}) + |\lambda|^2\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2.$$

Поскольку $\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2$, то $\Re(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n\overline{\lambda d_n})$. Полагая здесь $\lambda = 1$, а затем $\lambda = \boldsymbol{i}$, получим обобщенное равенство Парсева́ля

$$\langle x,y\rangle = \Re\langle x,y\rangle + \boldsymbol{i}\Im\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n\overline{d_n}) + \boldsymbol{i}\sum_{n=1}^{\infty} \Im(c_n\overline{d_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\overline{d_n}.$$

Теорема (Стекло́ва о замкнутости)**.** *Ортонормированная система* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ *является замкнутой в евклидовом пространстве тогда и только тогда, когда выполняется равенство Парсева́ля* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ *при все* $x \in \boldsymbol{E}$, *где* $c_n \doteqdot \langle x,e_n\rangle$.

Доказательство. Необходимость. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута, то для всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\varepsilon > 0$ существует $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, т.ч. $\|x-y\| < \varepsilon$. Пусть $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{n}$ обозначает линейную оболочку системы $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Поскольку $x-s_n \perp L_n$, то суммы s_n является наилучшим приближением элемента x подпространством L_n. Поэтому имеет место неравенство $\|x-s_m\| \leqslant \|x-s_n\| \leqslant \|x-y\| < \varepsilon$ при всех $m \geqslant n$. Отсюда ряд Фурье сходится в $\boldsymbol{E}$ и, следовательно, выполняется равенство Парсева́ля.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$. Так как $\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\|x-s_n\| < \varepsilon$. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$. □

Следствие. *Ортонормированная система* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{H}$ *является базисом гильбертова пространства* $\boldsymbol{H}$ *тогда и только тогда, когда она полна.*

В самом деле, если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом, то в силу теоремы выполняется равенство Парсева́ля. Поскольку из условия $c_n \doteqdot \langle x,e_n\rangle = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ следует, что $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 0$, то эта система полна. Обратно, если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной, то ее ортогональное дополнение равно нулю. Поэтому в силу следствия теоремы об ортогональном разложении система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет замкнутой, а значит образует ортонормированный базис в пространстве $\boldsymbol{H}$.

Пример 1. В бесконечномерных евклидовых пространствах из свойства полноты ортонормированной системы не следует ее замкнутость, т.е. существуют полные ортонормированные системы, которые не являются ортонормированным базисом.

Пусть $\boldsymbol{M}$ подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{E} \doteqdot \boldsymbol{C}[a,b]$, построенное в конце предыдущей лекции. Оно состоит из алгебраических многочленов и его ортогональное дополнение в $\boldsymbol{E}$ равно $M^{\perp} = 0$. Поскольку многочлены, имеющие рациональные коэффициенты, всюду плотны в $\boldsymbol{M}$ и их счетное число, то, выбирая линейно независимую систему и применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, можно построить ортонормированную систему многочленов из $\boldsymbol{M}$, которая будет полной в $\boldsymbol{E}$, но не является замкнутой в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$.

Лемма (метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта). *Для каждой линейно независимой системы элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ существует ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч. ее элементы e_n являются линейными комбинациями элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n}$.*

Доказательство. Пусть $y_1 = x_1$ и $e_1 \doteqdot y_1/\|y_1\|$. Далее полагаем $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ и определим $e_2 \doteqdot y_2/\|y_2\|$, и т.д. На n-том шаге полагаем $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, e_k\rangle e_k$ и определим $e_n \doteqdot y_n/\|y_n\|$. Поскольку система $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ линейно независима, то $y_n \neq 0$ при всех n. Таким образом, матрица A_n преобразования системы $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ в систему $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ является треугольной, т.е. имеет вид

$$\begin{cases} e_1 & = & a_{11}x_1 \\ e_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{kk} = 1/\|y_k\| \neq 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Обратная матрица также будет треугольной. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой тогда и только тогда, когда будет замкнута система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Явное выражение элементов e_n имеет вид

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_{n-1}\rangle & \cdots & \langle x_n, x_{n-1}\rangle \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

где $D_n \doteqdot D(x_1, \ldots, x_n) = \det\{\langle x_k, x_l\rangle\}_{k,l=1}^{n}$ обозначают определители Гра́ма. □

Теорема (Ри́сса–Фи́шера). *Каждое сепарабельное ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ изометрически изоморфно либо конечномерному евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, либо бесконечномерному пространству $\boldsymbol{\ell}_2$.*

Доказательство. В силу условия сепарабельности в пространстве $\boldsymbol{H}$ существует замкнутая система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Отбрасывая из этой системы элементы, которые линейно выражаются через предыдущие, мы получим замкнутую линейно независимую систему элементов в пространстве $\boldsymbol{H}$. Рассмотрим случай, когда эта система является бесконечной, т.е. размерность $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. В случае, когда эта система конечна, т.е. $\dim \boldsymbol{H} < \infty$, доказательство полностью аналогично.

Применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, мы построим замкнутую в $\boldsymbol{H}$ ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу теоремы Стекло́ва и свойства 2 всякий элемент $x \in \boldsymbol{H}$ представляется сходящимся в $\boldsymbol{H}$ рядом Фурье $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, где $c_n = \langle x, e_n\rangle$ его коэффициенты Фурье́. Определим отображение $F : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(x) = c$, где $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что F линейное отображение. Поскольку по теореме Стекло́ва выполняется равенство Парсева́ля $\|F(x)\|_{\ell_2} = \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то отображение F является изометричным. Осталось доказать, что образ этого отображения $F(\boldsymbol{H})$ совпадает с пространством $\boldsymbol{\ell}_2$.

Для каждого элемента $c = \{c_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$ рассмотрим последовательность частичных сумм $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^n c_k e_k$ ряда Фурье $\sum_{n=1}^\infty c_n e_n$. Так как по свойству ортогональности

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m \sum_{j=n+1}^m c_k \overline{c_j} \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2 \to 0 \text{ при } n, m \to \infty,$$

то $\{s_n\}$ является последовательностью Коши́ и в силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ существует предел $\lim s_n = x$ по норме $\boldsymbol{H}$. Применяя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle x, e_n \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle s_m, e_n \rangle = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $F(x) = c$ Таким образом, $F : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ является биективным и изометричным отображением гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$ на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$. □

Пример 2. Тригонометрическая система $e_n(x) \doteqdot \boldsymbol{e}^{inx}/\sqrt{2\pi}$, где $n \in \mathbb{Z}$, является ортонормированным базисом в пространстве $\boldsymbol{L}_2[0, 2\pi]$. В самом деле, имеем

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(n-m)x} dx = \frac{\boldsymbol{e}^{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)} - 1}{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ 1 & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Докажем замкнутость этой системы. Так как множество непрерывных функций всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2[0, 2\pi]$, то для любой $f \in \boldsymbol{L}_2[0, 2\pi]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $g \in \boldsymbol{C}[0, 2\pi]$, т.ч. $\|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/3$. Изменяя функцию g на достаточно малом отрезке $[0, \delta]$ и полагая ее там линейной, мы построим такую функцию $g_1 \in \boldsymbol{C}[0, 2\pi]$, что $g_1(0) = g_1(2\pi)$ и $\|g - g_1\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/3$. В силу теоремы Вейерштрасса об аппроксимации найдется тригонометрический полином $T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \boldsymbol{e}^{ikx}$, $\|g_1 - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/3\sqrt{2\pi}$. Так как $\|g_1 - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \sqrt{2\pi} \|g_1 - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/3$, то выполняется неравенство

$$\|f - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|g - g_1\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|g_1 - T\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon.$$

Таким образом, тригонометрическая система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ замкнута в $\boldsymbol{L}_2[0, 2\pi]$.

При помощи теоремы Ри́сса–Фи́шера определяется изометрический изоморфизм пространства $\boldsymbol{L}_2[0, 2\pi]$ на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(f) = c$, где $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ обозначает совокупность всех коэффициентов Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_2[0, 2\pi]$. По теореме Стекло́ва будет выполняться равенство Парсева́ля $\|F(f)\|_{\boldsymbol{\ell}_2} = \|f\|$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2[0, 2\pi]$ и, следовательно, указанное отображение $F : \boldsymbol{L}_2[0, 2\pi] \to \boldsymbol{\ell}_2$ является изометрическим изоморфизмом на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$.

6 ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ

Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ — нормированные пространства и $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначает пространство всех ограниченных операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ с нормой $\|A\| \doteqdot \sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|Ax\|$.

Определение. Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *гомоморфизмом*, если он является непрерывным и открытым отображением. Напомним, что оператор A является *непрерывным отображением*, если прообраз $A^{-1}(U)\subset\boldsymbol{E}$ всякого открытого множества $U\subset\boldsymbol{F}$ является открытым, и является *открытым отображением*, если образ $A(V)\subset\boldsymbol{F}$ всякого открытого множества $V\subset\boldsymbol{E}$ является открытым.

Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *почти открытым*, если замыкание образа $\overline{A(U)}\subset\boldsymbol{F}$ любой окрестности нуля $U\subset\boldsymbol{E}$ является окрестностью нуля.

Лемма (о почти открытом отображении)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ — банахово пространство, то всякий почти открытый оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является открытым.*

Доказательство. По определению почти открытого оператора для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\overline{A(\boldsymbol{S}_\varepsilon)}\supset\boldsymbol{S}_{2\delta}$. В силу линейности оператора A для каждого $\varepsilon_n=\varepsilon/2^n$ и соответствующего $\delta_n=\delta/2^{n-1}$ выполняется включение $\overline{A(\boldsymbol{S}_{\varepsilon_n})}\supset\boldsymbol{S}_{\delta_n}$.

Если $y\in\boldsymbol{S}_{\delta_1}$, то существует $x_1\in\boldsymbol{S}_{\varepsilon_1}$, т.ч. $\|y-Ax_1\|\leqslant\delta_2$. Поскольку $y-Ax_1\in\boldsymbol{S}_{\delta_2}$, то существует $x_2\in\boldsymbol{S}_{\varepsilon_2}$, т.ч. $\|y-Ax_1-Ax_2\|\leqslant\delta_3$, и т.д. Определим по индукции последовательность $\{x_n\}$, т.ч. $\|x_n\|\leqslant\varepsilon_n$ и $\|y-\sum_{k=1}^n Ax_k\|\leqslant\delta_{n+1}$. Так как частичные суммы $s_n\doteqdot\sum_{k=1}^n x_k$ удовлетворяют неравенству $\|s_m-s_n\|\leqslant\sum_{k=n+1}^m\|x_k\|<\varepsilon/2^n$, то в силу полноты $\boldsymbol{E}$ сходится ряд $x\doteqdot\sum_{k=1}^\infty x_k$ и $\|x\|\leqslant\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|\leqslant\varepsilon$. Следовательно, в силу непрерывности оператора имеет место равенство $Ax=\sum_{n=1}^\infty Ax_n=y$.

Таким образом, $A(\boldsymbol{S}_\varepsilon)\supset\boldsymbol{S}_\delta$. Отсюда по линейности оператор A сюръективный и для каждой точки $y_0\in\boldsymbol{F}$ и соответствующей точки $x_0\in\boldsymbol{E}$, $Ax_0=y_0$, имеет место включение $A(\boldsymbol{S}_\varepsilon(x_0))\supset\boldsymbol{S}_\delta(y_0)$. Поэтому A является открытым отображением. □

Теорема (Ба́наха о гомоморфизме)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ — банаховы пространства и оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сюръективный, то он является гомоморфизмом.*

Доказательство. Покажем, что оператор A является почти открытым. В силу его сюръективности $\boldsymbol{F}=\bigcup_{n=1}^\infty A(\boldsymbol{S}_{r_n})$, где $r_n=n$. По теореме Бэра одно из множеств $A(\boldsymbol{S}_{r_n})$ не является нигде не плотным. Тогда замыкание $\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}\supset\boldsymbol{S}_r(y_0)$ содержит некоторый шар $\boldsymbol{S}_r(y_0)$. В силу симметричности множества $\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}\supset\boldsymbol{S}_r(-y_0)$. Пусть $y\in\boldsymbol{S}_r$, тогда $y=((y+y_0)+(y-y_0))/2\in\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}$ в силу выпуклости множества $\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}$. Таким образом, $\overline{A(\boldsymbol{S}_{r_n})}\supset\boldsymbol{S}_r$ и, если $\varepsilon>0$ и $\delta=r\varepsilon/r_n$, то $\overline{A(\boldsymbol{S}_\varepsilon)}\supset\boldsymbol{S}_\delta$, т.е. оператор A является почти открытым. По лемме A будет открытым отображением. □

Произведением операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ и $B:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ называется композиция этих операторов, т.е. $BA:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{G}$ определен по формуле $BA(x)\doteqdot B(Ax)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Если $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то $BA\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ и $\|BA\|\leqslant\|B\|\,\|A\|$, т.к.

$$\|BA\|=\sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|B(Ax)\|\leqslant\|B\|\sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|Ax\|=\|B\|\,\|A\|.$$

Оператор $A^{-1}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{E}$ называется *обратным* к оператору $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$, если имеют место равенства $A^{-1}A=\boldsymbol{I}$ и $AA^{-1}=\boldsymbol{I}$. Его существование равносильно биективности отображения A. Ограниченный оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *обратимым*, если его обратный A^{-1} существует и является $A^{-1}\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ ограниченным.

1. *Если линейным оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ является биективным, то его обратный оператор $A^{-1}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{E}$ является линейным.*

Докажем линейность оператора A^{-1}. Пусть $A^{-1}(u)=x$, $A^{-1}(v)=y$ и $\lambda\in\mathbb{F}$, тогда

$$A^{-1}(u+v)=A^{-1}(Ax+Ay)=A^{-1}A(x+y)=x+y=A^{-1}(u)+A^{-1}(v),$$
$$A^{-1}(\lambda u)=A^{-1}(\lambda Ax)=A^{-1}A(\lambda x)=\lambda x=\lambda A^{-1}(u).$$

Ядро $\ker A$ и образ $\operatorname{Im}A$ линейного оператора определяются по формулам

$$\ker A\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid Ax=0\}\ \text{ и }\ \operatorname{Im}A\doteqdot\{y\in\boldsymbol{F}\mid y=Ax,x\in\boldsymbol{E}\}$$

2. *Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ тогда и только тогда будет биективным, когда его ядро $\ker A=0$ и образ $\operatorname{Im}A=\boldsymbol{F}$.*

Если A является биективным, то $\ker A=A^{-1}(0)=0$ и $\operatorname{Im}A=\boldsymbol{F}$. Обратно, если $\ker A=0$, то из равенства $Ax=Ay$ следует, что $A(x-y)=0$ и значит $x-y=0$. Отсюда оператор A является биективным отображением $\boldsymbol{E}$ на свой образ $\operatorname{Im}A=\boldsymbol{F}$.

3. *Если оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченный, то его ядро $\ker A\subset\boldsymbol{E}$ является замкнутым подпространством, а образ $\operatorname{Im}A\subset\boldsymbol{F}$ линейным подпространством.*

Пусть $x,y\in\ker A$, тогда $A(x+y)=Ax+Ay=0$ и $A(\lambda x)=\lambda Ax=0$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$, т.е. $x+y\in\ker A$ и $\lambda x\in\ker A$. Если $x=\lim x_n$ и $x_n\in\ker A$, тогда в силу непрерывности оператора $Ax=\lim Ax_n=0$, т.е. $x\in\ker A$. Пусть $u,v\in\operatorname{Im}A$, тогда $u+v=Ax+Ay=A(x+y)\in\operatorname{Im}A$ и $\lambda u=\lambda Ax=A(\lambda x)\in\operatorname{Im}A$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$, т.е. $u+v,\lambda u\in\operatorname{Im}A$.

Теорема (Ба́наха об обратном операторе)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ ба́наховы пространства и оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является биективным, тогда $A^{-1}\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$.*

Эта теорема есть следствие теоремы о гомоморфизме, поскольку оператор A^{-1} является линейным, а так как оператор A открытый, то A^{-1} будет непрерывным.

Пусть $L\subset\boldsymbol{E}$ — замкнутое подпространство и $\widehat{\boldsymbol{E}}\doteqdot\boldsymbol{E}/L$ факторпространство по подпространству L. Всякий элемент $\widehat{\boldsymbol{E}}$ записывается в виде $\widehat{x}\doteqdot x+L$, где $x\in\boldsymbol{E}$. При этом факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}}$ является линейным пространством относительно операций сложения $\widehat{x}+\widehat{y}\doteqdot\widehat{x+y}$, где $x,y\in\boldsymbol{E}$, и умножение на число $\lambda\widehat{x}\doteqdot\widehat{\lambda x}$, где $x\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda\in\mathbb{F}$. Функция $\|\widehat{x}\|\doteqdot\inf_{y\in L}\|x+y\|=\rho(x,L)$ является нормой в $\widehat{\boldsymbol{E}}$, т.к.

$$\|\lambda\widehat{x}\|=\|\widehat{\lambda x}\|=\inf_{y\in L}\|\lambda x+y\|=|\lambda|\inf_{y\in L}\|x+y\|=|\lambda|\|\widehat{x}\|;$$
$$\|\widehat{x+y}\|=\inf_{z\in L}\|x+y+z\|\leqslant\inf_{u\in L}\|x+u\|+\inf_{v\in L}\|y+v\|=\|\widehat{x}\|+\|\widehat{y}\|.$$

Пусть $\|\widehat{x}\|=\inf_{y\in L}\|x+y\|=0$. Тогда найдутся $y_n\in L$, т.ч. $x+y_n\to0$. Следовательно, т.к. подпространство $L\subset\boldsymbol{E}$ замкнуто, то $x=-\lim y_n\in L$ и значит $\widehat{x}=\widehat{0}$.

Лемма. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство ба́нахова пространства, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$ является ба́наховым.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Пусть $\{\widehat{x_n}\}$ является последовательностью Коши́. Выберем последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$, т.ч. $\|\widehat{x_n} - \widehat{x_m}\| < 1/2^k$ при всех $n, m \geqslant n_k$. Тогда существуют $y_{n_k} \in L$, т.ч. $z_k \doteqdot x_{n_k} + y_{n_k} \in \widehat{x_{n_k}}$ и $\|z_{k+1} - z_k\| < 1/2^k$. Отсюда ряд $z = z_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(z_{k+1} - z_k) = \lim z_k$ сходится и

$$\|\widehat{z} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|\widehat{z} - \widehat{x_{n_k}}\| + \|\widehat{x_{n_k}} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|z - z_k\| + 1/2^k \leqslant \textstyle\sum_{i=k}^{\infty} 1/2^i + 1/2^k < 3/2^k$$

при всех $n \geqslant n_k$. Таким образом, существует предел $\lim \widehat{x_n} = \widehat{z} \in \widehat{\boldsymbol{E}}$. □

Следствие. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство ба́нахова пространства, то фактоотображение $\pi : \boldsymbol{E} \to \widehat{\boldsymbol{E}}$, определенное по формуле $\pi(x) \doteqdot \widehat{x}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, является гомоморфизмом.*

Сюръективность π вытекает из определения, а его непрерывность следует из неравенства $\|\widehat{x}\| \leqslant \|x\|$. Кроме того, по лемме о почти перпендикуляре $\|\pi\| = 1$.

Теорема (о трех гомоморфизмах)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ банаховы пространства, операторы $A_1 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}_1)$ и $A_2 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}_2)$ являются гомоморфизмами и, кроме того, удовлетворяют условию* $\ker A_1 \subset \ker A_2$. *Тогда существует гомоморфизм $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$, что $A_2 = BA_1$.*

Доказательство. Определим оператор $B : \boldsymbol{F}_1 \to \boldsymbol{F}_2$ по формуле $By = A_2x$ при всех $y = A_1x$ и $x \in \boldsymbol{E}$. Если $y = A_1x = A_1x'$, то $x - x' \in \ker A_1 \subset \ker A_2$. Отсюда $A_2x = A_2x'$. Поэтому оператор B определен корректно. Так как для каждого $z \in \boldsymbol{F}_2$ найдется $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $z = A_2x$, то $By = z$ при $y = A_1x$. Поэтому оператор B будет сюръективным. Докажем его линейность. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y = A_1x$ и $y' = A_1x'$, тогда получим

$$B(\lambda y) = B(\lambda A_1(x)) = B(A_1(\lambda x)) = A_2(\lambda x) = \lambda A_2(x) = \lambda B(y).$$
$$B(y + y') = B(A_1(x + x')) = A_2(x + x') = A_2(x) + A_2(x') = B(y) + B(y').$$

Значит оператор B является линейным. Докажем непрерывность оператора B. Если $U \subset \boldsymbol{F}_2$ открытое множество, то $A_2^{-1}(U) = A_1^{-1}(B^{-1}(U))$ также является открытым множеством. Тогда $B^{-1}(U) = A_1(A_2^{-1}(U))$ будет открытым множеством. Аналогично докажем, что оператор B является открытым. Пусть $V \subset \boldsymbol{F}_1$ открытое множество, тогда $A_2^{-1}(V) = U$ также является открытым множеством. Поэтому $B(V) = A_2(U)$ будет открытым множеством. □

Пусть $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \doteqdot \{(x, y) \mid x \in \boldsymbol{E},\ y \in \boldsymbol{F}\}$ прямое произведение линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Определим в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ операции сложения и умножения по формулам

$$\lambda(x, y) \doteqdot (\lambda x, \lambda y) \quad \text{и} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteqdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Тогда мы получим прямую сумму $\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F} \doteqdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ линейных подпространств $\boldsymbol{E} \times 0$ и $0 \times \boldsymbol{F}$. Кроме того, если данные пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются нормированными, то норма в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ определяется по евклидовой формуле $\|(x, y)\| \doteqdot \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ при всех $(x, y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$.

Лемма. *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами, то их прямое произведение $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ будет банаховым пространством.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$. Пусть $\{(x_n,y_n)\}$ образует последовательность Коши́ в $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует N, т.ч. $\|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\|=\sqrt{\|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2}<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$. Тогда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются последовательностями Коши́ и в силу полноты $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ существуют пределы $\lim x_n=x$ и $\lim y_n=y$. Отсюда $\lim(x_n,y_n)=(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$. □

Определение. Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *замкнутым*, если его график $\mathrm{gr}A \doteqdot \{(x,y)\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}\mid y=Ax\}$ замкнут в пространстве $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$.

Замкнутость графика $\mathrm{gr}A$ оператора A равносильно следующему условию: если последовательность элементов $(x_n,y_n)\in\mathrm{gr}A$ и $(x_n,y_n)\to(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$, то $(x,y)\in\mathrm{gr}A$, т.е. если $x_n\in L$, $x_n\to x$ и $Ax_n\to y$, то $x\in L$ и $Ax=y$.

Теорема (Ба́наха о замкнутом графике)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ ба́наховы пространства. Оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ замкнут тогда и только тогда, когда он непрерывен.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим отображение $P:\mathrm{gr}A\to\boldsymbol{E}$, заданное по формуле $P(x,y)\doteqdot x$ при $x\in\boldsymbol{E}$, где $y=Ax$. Отображение P является линейным, биективным и ограниченным, так как $\|x\|\leqslant\|(x,y)\|$ при всех $(x,y)\in\mathrm{gr}A$. По теореме об обратном операторе существует $c>0$, т.ч. $\|(x,y)\|\leqslant c\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, $y=Ax$. Отсюда $\|Ax\|\leqslant c\|x\|$, т.е. $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, и значит оператор A будет непрерывным.

Достаточность. Пусть оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является непрерывным. Тогда, если последовательность $\{x_n\}\subset\boldsymbol{E}$ сходится $x_n\to x$ в пространстве $\boldsymbol{E}$, то ее предел $x\in\boldsymbol{E}$ и имеет место $Ax_n\to Ax$. Поэтому, если $(x_n,y_n)\in\mathrm{gr}A$ и сходится $(x_n,y_n)\to(x,y)$ в пространстве $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$, то $(x,y)\in\mathrm{gr}A$. Таким образом, график $\mathrm{gr}A$ замкнут. □

Пример 1. Пусть $D:\boldsymbol{C}^{(1)}[0,1]\to\boldsymbol{C}[0,1]$ обозначает оператор дифференцирования, заданный на подпространстве $\boldsymbol{C}^{(1)}[0,1]\subset\boldsymbol{C}[0,1]$ непрерывно дифференцируемых функций по формуле $Df(x)\doteqdot f'(x)$ при всех $x\in[0,1]$. Из курса анализа известно, что если последовательность $f_n\in\boldsymbol{C}^{(1)}[0,1]$ сходится равномерно $f_n\rightrightarrows f$ вместе со своими производными $f_n'\rightrightarrows g$, то $f\in\boldsymbol{C}^{(1)}[0,1]$ и $f'=g$. Поэтому график оператора D замкнут. Однако он не является ограниченным и значит непрерывным, т.к. полагая $f_n(x)=x^n$, получим $\|f_n'\|=n$ и, следовательно, его норма $\|D\|=\infty$.

7 СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ и $M \subset \boldsymbol{E}'$ обозначают линейные подпространства нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и его сопряженного пространства $\boldsymbol{E}'$, тогда

$$L^{\perp} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' \mid f(x) = 0, x \in L\} \quad \text{и} \quad M_{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = 0, f \in M\}$$

называются *аннулятором** L и *аннулятором* M. Заметим, что $M_{\perp} = \bigcap_{f \in M} \ker f$ и $L^{\perp} = \bigcap_{x \in L} \ker \delta_x$ представляются пересечением подпространств $\ker f$ и $\ker \delta_x$. Значит образуют соответственно замкнутое и слабо* замкнутое подпространство.

Лемма (о бианнуляторах). *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ и $M \subset \boldsymbol{E}'$ линейные подпространства. Тогда бианнулятор $(L^{\perp})_{\perp}$ совпадает с замыканием $\overline{L}$, а бианнулятор* $(M_{\perp})^{\perp}$ совпадает со слабым* замыканием $\overline{M}$.*

Доказательство. Поскольку $L \subset (L^{\perp})_{\perp}$ и $(L^{\perp})_{\perp}$ является замкнутым, то $\overline{L} \subset (L^{\perp})_{\perp}$. Если $x \notin \overline{L}$, то можно определить функционал на линейной оболочке $Z = \mathrm{sp}\{x, \overline{L}\}$ по формуле $f(z) \doteqdot \lambda$ при всех $z = \lambda x + y$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y \in \overline{L}$. Пусть $d \doteqdot \rho(x, \overline{L}) > 0$, тогда $|f(z)| = \|z\|/\|z/\lambda\| \leqslant \|z\|/d$ для всех $z \in Z$. По теореме Ха́на–Ба́наха существует $g \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $g|_Z = f$ и $\|g\| \leqslant 1/d$. Отсюда $g \in L^{\perp}$ и $g(x) = 1$, т.е. $x \notin (L^{\perp})_{\perp}$.

Поскольку $M \subset (M_{\perp})^{\perp}$ и $(M_{\perp})^{\perp}$ является слабо* замкнутым, то $\overline{M} \subset (M_{\perp})^{\perp}$. Если $g \notin \overline{M}$, то можно определить функционал α на линейной оболочке $H = \mathrm{sp}\{f, \overline{M}\}$ по формуле $\alpha(h) \doteqdot \lambda$ при всех $h = \lambda g + f$, где $\lambda \in \mathbb{F}$ и $f \in \overline{M}$. Рассмотрим слабую* окрестность $O_{\{e_i\}}(g) \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}' | \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |g(e_i) - f(e_i)| < \varepsilon\}$ точки $g \in \boldsymbol{E}'$, которая не пересекается с подпространством $\overline{M}$. Определим полунорму $\boldsymbol{p}(f) \doteqdot \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(e_i)|$. Тогда $|\alpha(h)| = \boldsymbol{p}(h)/\boldsymbol{p}(h/\lambda) \leqslant \boldsymbol{p}(h)/d$ для всех $h \in H$, где $d \doteqdot \inf_{f \in \overline{M}} \boldsymbol{p}(g - f) > 0$. В силу теоремы Ха́на–Ба́наха существует $\beta \in \boldsymbol{E}''$, т.ч. $\beta|_H = \alpha$ и $|\beta(f)| \leqslant \boldsymbol{p}(f)/d$. Так как функционал β слабо* непрерывный и $\beta|_M = 0$, то существует $x \in M_{\perp}$, т.ч. $\beta = \delta_x$. Таким образом, имеем $\delta_x(g) = g(x) = 1$ и значит $g \notin (M_{\perp})^{\perp}$. □

Следствие. *Слабое замыкание любого линейного подпространства $L \subset \boldsymbol{E}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ совпадает с его замыканием.*

В самом деле, замыкание подпространства $\overline{L} = (L^{\perp})_{\perp}$ совпадает с пересечением слабо замкнутых подпространств $\ker f$, где $f \in L^{\perp}$, и значит будет слабо замкнутым.

Определение. Оператор $A' : \boldsymbol{F}' \to \boldsymbol{E}'$ называется *сопряженным* к $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, если имеет место равенство $\langle A'f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и при всех $f \in \boldsymbol{F}'$, где скобки $\langle\ ,\ \rangle$ обозначают значение функционала. Таким образом, для каждого $f \in \boldsymbol{F}'$ его образ $A'(f) = g$ равен $g(x) \doteqdot f(Ax)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

1. *Если операторы $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$, то $(BA)' = A'B'$. В частности, если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является биективным, то $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.*

В самом деле, имеем $(BA)'g(x) = g(BAx) = B'g(Ax) = A'B'g(x)$ при всех $g \in \boldsymbol{G}'$ и $x \in \boldsymbol{E}$. Второе утверждение следует из теоремы Ба́наха об обратном операторе.

2. *Если оператор* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$*, то сопряженный* $A' \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}',\boldsymbol{E}')$ *и* $\|A'\| = \|A\|$.

Докажем, что A' является линейным оператором. Пусть $f,g \in \boldsymbol{F}'$ и $A'(f+g) = h$. Тогда имеем $h(x) = (f+g)(Ax) = f(Ax)+g(Ax)$, т.е. $A'(f+g) = A'f+A'g$. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $A'(\lambda f) = h$, тогда получим $h(x) = (\lambda f)(Ax) = \lambda f(Ax)$, т.е. $A'(\lambda f) = \lambda A'f$.

Так как $A'f(x) = f(Ax)$, то $\|A'f\| \leqslant \|f\|\,\|A\|$, т.е. $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ по теореме Ха́на–Ба́наха существует $f \in \boldsymbol{F}'$, т.ч. $f(Ax) = \|Ax\|$ и $\|f\| = 1$. Тогда $\|Ax\| = A'f(x) \leqslant \|A'f\|\,\|x\| \leqslant \|A'\|\,\|x\|$. Поэтому $\|A'\| = \|A\|$.

Теорема. *Если* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$*, то имеют место следующие равенства:*

$$1)\ \ker A = (\operatorname{Im} A')_\perp;\ 2)\ \ker A' = (\operatorname{Im} A)^\perp;\ 3)\ (\ker A')_\perp = \overline{\operatorname{Im} A};\ 4)\ (\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A'}.$$

где $\overline{\operatorname{Im} A}$ *является замыканием множества* $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{F}$*, а* $\overline{\operatorname{Im} A'}$ *является слабым* замыканием множества* $\operatorname{Im} A' \subset \boldsymbol{E}'$.

Доказательство. Элемент $x \in \ker A$ тогда и только тогда, когда $Ax = 0$. Так как по теореме Хана–Банаха $\boldsymbol{F}'$ тотально на $\boldsymbol{F}$, то это равносильно тому, что $f(Ax) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}'$, т.е. $x \in (\operatorname{Im} A')_\perp$. Таким образом, первое равенство доказано.

Функционал $f \in \ker A'$ тогда и только тогда, когда $f(Ax) = 0$ при $x \in \boldsymbol{E}$. Последнее равносильно включению $f \in (\operatorname{Im} A)^\perp$. Таким образом, второе равенство доказано.

Для доказательства третьего и четвертого равенств достаточно применить лемму о бианнуляторах соответственно ко второму и первому равенству. В самом деле, имеем $(\ker A')_\perp = (\operatorname{Im} A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{Im} A}$ и $(\ker A)^\perp = (\operatorname{Im} A'_\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A'}$. □

Следствие. *Если оператор* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$*, заданный в банаховых пространствах* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{F}$*, имеет замкнутый образ* $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{F}$*, то* $\operatorname{Im} A = (\ker A')_\perp$ *и* $\operatorname{Im} A' = (\ker A)^\perp$.

Первое равенство следствие теоремы. Докажем второе. Ясно, что $\operatorname{Im} A' \subset (\ker A)^\perp$. Если $f \in (\ker A)^\perp$, то $\ker A \subset \ker f$. Применяя теорему о трех гомоморфизмах, а затем теорему Ха́на–Ба́наха, построим такой функционал $g \in \boldsymbol{F}'$, что $f(x) = g(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому $f = A'g \in \operatorname{Im} A^*$ и значит имеет место $\operatorname{Im} A' = (\ker A)^\perp$.

Определение. Пусть $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{H}$ всюду плотное линейное подпространство гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$. *Эрмитово-сопряженным* к линейному оператору $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}$ называется оператор $A^* : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{H}$, т.ч. $\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $y \in \boldsymbol{F}$, где

$$\boldsymbol{F} \doteqdot \{y \in \boldsymbol{H} \mid \exists z \in \boldsymbol{H} : \langle Ax,y\rangle = \langle x,z\rangle, \forall x \in \boldsymbol{E}\}.$$

область определения оператора A^*. Заметим, что если $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H}$ и оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ является ограниченным, то для него эрмитово-сопряженный оператор $A^* : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ определяется равенством $\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle$ при всех $x,y \in \boldsymbol{H}$ (см. свойство 3).

1. *Эрмитово-сопряженный оператор является линейным.*

Если равенства $\langle Ax,y_1\rangle = \langle x,z_1\rangle$ и $\langle Ax,y_2\rangle = \langle x,z_2\rangle$ выполняются при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то равенство $\langle Ax,y_1+y_2\rangle = \langle x,z_1+z_2\rangle$ имеет место при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Отсюда следует, что $A^*(y_1+y_2) = A^*y_1+A^*y_2$. Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и равенство $\langle Ax,y\rangle = \langle x,z\rangle$ выполняется при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то $\langle Ax,\lambda y\rangle = \langle x,\lambda z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому $A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$.

2. *Эрмитово-сопряженный оператор является замкнутым.*

Определим в прямом произведении $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}$ оператор $U(x,y)=(-y,x)$ и скалярное произведение $\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle \doteqdot \langle x_1,x_2\rangle+\langle y_1,y_2\rangle$. Тогда равенство $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$ при всех $x\in L$, определяющее оператор A^*, равносильно тому, что $U(x,Ax)\perp(y,A^*y)$ при всех $x\in L$. Следовательно, график $\mathrm{gr}A^*=(U\,\mathrm{gr}A)^{\perp}$ будет замкнутым.

3. *Если оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$ ограничен, то эрмитово-сопряженный оператор определен на всем $\boldsymbol{H}$, является ограниченным $A^*\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ и норма $\|A^*\|=\|A\|$.*

Поскольку $\boldsymbol{E}$ всюду плотно в $\boldsymbol{H}$, то можно продолжить A по непрерывности на все $\boldsymbol{H}$, при этом норма $\|A\|$ не изменится. Рассмотрим линейный функционал $\alpha(x)\doteqdot\langle Ax,y\rangle$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем $|\alpha(x)|\leqslant\|Ax\|\,\|y\|\leqslant\|A\|\,\|x\|\,\|y\|$, т.е. $\|\alpha\|\leqslant\|A\|\,\|y\|$. Отсюда по теореме Ри́сса–Фреше́ существует $z\in\boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x)=\langle x,z\rangle$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$ и $\|\alpha\|=\|z\|$.

Таким образом, имеем равенство $\langle Ax,y\rangle=\langle x,z\rangle$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$, где $\|z\|\leqslant\|A\|\,\|y\|$. Следовательно, $A^*y=z$ и $\|A^*y\|\leqslant\|A\|\,\|y\|$, т.е. $\|A^*\|\leqslant\|A\|$. Нетрудно проверить, что эрмитово-сопряженный к оператору $A^*:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ совпадает на подпространстве $\boldsymbol{E}$ с оператором A. Поэтому имеем $\|A\|\leqslant\|A^{**}\|\leqslant\|A^*\|$ и значит $\|A\|=\|A^*\|$.

Определение. Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$, заданный в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *эрми́товым*, если $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$. Множество эрмитовых операторов обозначается через $\mathscr{H}(\boldsymbol{E})$.

Теорема (Хе́ллингера–Тёплица). *Эрми́товый оператор $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, заданный в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, является ограниченным $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$.*

Доказательство. Если оператор $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ является эрмитовым, то выполняется равенство $A=A^*$. По свойству 2 оператор A^* будет замкнутым. Поэтому по теореме о замкнутом графике оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ является ограниченным. □

Определение. Говорят, что линейный оператор $P:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ является *проектором* на подпространство $L\subset\boldsymbol{E}$ нормированного пространства, если $P^2=P$ и $\mathrm{Im}\,P=L$.

1. *Ограничение проектора $P|_L=I$ является тождественным оператором в L.*

Действительно, если $y=Px$, то $Py=P^2x=Px=y$ при всех $y\in L$.

2. *Справедливы равенства* $\ker(I-P)=\mathrm{Im}\,P$ *и* $\mathrm{Im}(I-P)=\ker P$.

Если $x\in\ker(I-P)$, то $x-Px=0$ и значит $x\in\mathrm{Im}\,P$. Если $y=Px\in\mathrm{Im}\,P$, то имеем $(I-P)y=(P-P^2)x=0$, т.е. $y\in\ker(I-P)$. Аналогично, получаем второе равенство.

3. *$\boldsymbol{E}=L\oplus M$ является прямой суммой подпространств $L=\mathrm{Im}\,P$ и $M=\ker P$.*

Поскольку $I=P+(I-P)$, то $\boldsymbol{E}=L+M$. Если $y\in L\cap M$, то $y=Px=x-Px$, т.е. $x=2Px$. Применяя к этому равенству P, получим $Px=2Px$ и значит $y=Px=0$.

Определение. Линейное подпространство $L\subset\boldsymbol{E}$ будем называть *дополняемым* в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, если оно является замкнутым в $\boldsymbol{E}$ и существует замкнутое подпространство $M\subset\boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E}=L\oplus M$.

Теорема. *Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда является дополняемым в банаховом пространству $\boldsymbol{E}$, когда существует непрерывный проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L.*

Доказательство. Необходимость. Если $\boldsymbol{E} = L \oplus M$, где L и M образуют замкнутые подпространства, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют единственные элементы $y \in L$ и $z \in M$, т.ч. $x = y + z$. Полагая $Px \doteqdot y$, получим проектор P на подпространство L. Если последовательность $x_n \to x$ сходится и $Px_n = y_n \to y$, то $z_n = x_n - y_n \to z = x - y$. Так как в силу замкнутости подпространств $y \in L$ и $z \in M$, то из единственности разложения $x = y + z$ вытекает $Px = y$. Следовательно, оператор P имеет замкнутый график и по теореме о замкнутом графике он является непрерывным.

Достаточность. Поскольку проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L является непрерывным, то $L = \operatorname{Im} P = \ker(I - P)$ и $M = \ker P = \operatorname{Im}(I - P)$ являются замкнутыми подпространствами. Так как $I = P + (I - P)$, то имеет место $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. □

Лемма. *Всякое замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, имеющее конечную размерность $\dim L < \infty$ или конечную коразмерность $\operatorname{codim} L \doteqdot \dim \boldsymbol{E}/L < \infty$, является дополняемым.*

Выберем базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в подпространстве L, а затем определим подпространство $M \doteqdot \bigcap_{k=1}^n \ker f_k$, где $\{f_k\}_{k=1}^n$ обозначает биортогональную систему к базису $\{e_k\}_{k=1}^n$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим элементы $y \doteqdot \sum_{k=1}^n f_k(x)\, e_k$ и $z \doteqdot x - y$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Рассмотрим базис $\{\widehat{e}_k\}_{k=1}^m$ для факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$, а затем обозначим через $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{E}$ найдутся $\lambda_k \in \mathbb{F}$, т.ч. $\widehat{x} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \widehat{e}_k$. Определим элементы $z \doteqdot \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ и $y \doteqdot x - z$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Замечание. Замкнутое подпространство банахова пространства, изоморфное $\boldsymbol{\ell}_\infty$, и замкнутое подпространство сепарабельного банахова пространства, изоморфное $\boldsymbol{c}_0$, являются дополняемыми. Приведем примеры недополняемых подпространств.

Подпространство $\boldsymbol{c}_0 \subset \boldsymbol{\ell}_\infty$ (Р. С. Фи́ллипс) и подпространство $\boldsymbol{C}[0,1] \subset \boldsymbol{L}_\infty[0,1]$ (Г. М. Фихтенго́льц и Л. В. Канторо́вич) является недополняемыми.

Подпространства функций $H_p \subset \boldsymbol{L}_p[0, 2\pi]$, у которых все коэффициенты Фурье с отрицательными индексами равны нулю, являются дополняемыми при $1 < p < \infty$ (М. Рисс) и является недополняемым при $p = 1$ (Д. Нью́ман).

Подпространство $\boldsymbol{A}(D) \subset \boldsymbol{C}(D)$, состоящее из голоморфных функций в круге $\mathring{D} \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, является недополняемым в пространстве $\boldsymbol{C}(D)$ непрерывных функций в замкнутом круге $D \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ (У. Ру́дин).

8 СПЕКТР ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Далее через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$ обозначается банахова алгебра всех ограниченных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, действующих в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{C}$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным* для оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ обратим, т.е. $A_\lambda^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Множество всех регулярных чисел обозначается через $\rho(A)$. Дополнение $\sigma(A) \doteqdot \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром*. Обратный оператор $R_\lambda \doteqdot A_\lambda^{-1}$ при $\lambda \in \rho(A)$ называется *резольвентой*.

Лемма. *Если $\|A\| < 1$, то оператор $B \doteqdot I - A$ обратим и $B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Доказательство. Пусть $C_n \doteqdot \sum_{k=0}^{n} A^k$ и $\|A\| = r < 1$. Так как $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$, то по неравенству треугольника имеем $\|C_m - C_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|A\|^k < r^{n+1}/(1-r)$. Поэтому $\{C_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́наховом пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Тогда существует предел $\lim C_n \doteqdot C \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Отсюда получаем следующие равенства:

$$BC = \lim BC_n = \lim \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \lim (I - A^{n+1}) = I,$$
$$CB = \lim C_n B = \lim \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \lim (I - A^{n+1}) = I,$$

т.к. предел $\lim A^{n+1} = 0$. Таким образом, $C = B^{-1}$ является обратным к B. □

Определение. Функция $f : \Omega \to \boldsymbol{E}$, определенная в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *голоморфной* в Ω, если для каждого $z_0 \in \Omega$ существуют $r > 0$ и такие элементы $c_n \in \boldsymbol{E}$, что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n$ при всех $z \in \boldsymbol{U}_r(z_0)$, где $\boldsymbol{U}_r(z_0) \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ обозначает открытый круг в области Ω.

Заметим, что сходимость степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n$ определяется здесь по норме пространства $\boldsymbol{E}$ и его радиус сходимости в точке z_0 вычисляется по формуле Коши́–Адама́ра $1/r = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|}$. Если функция $f(z)$ голоморфна в Ω, то этот радиус равен расстоянию $r = \inf_{z \in \partial\Omega} |z_0 - z|$ от точки $z_0 \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Теорема (о резольвенте). *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то множество $\rho(A)$ открыто, резольвента R_λ голоморфна в каждой связной компоненте множества $\rho(A)$ и ее норма $\|R_\lambda\| \geqslant 1/d_\lambda$, где $d_\lambda \doteqdot \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda - z|$ обозначает расстояние от точки $\lambda \in \rho(A)$ до спектра $\sigma(A)$.*

Доказательство. Пусть число $\lambda \in \rho(A)$, тогда $A_z = A_\lambda - (\lambda - z)I = A_\lambda (I - (\lambda - z)R_\lambda)$. Если $z \in \mathbb{C}$, т.ч. $|z - \lambda|\,\|R_\lambda\| < 1$, то по лемме получим сходящийся по норме ряд

$$R_z = (I - (\lambda - z)R_\lambda)^{-1} R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - z)^n R_\lambda^{n+1}.$$

Поэтому $z \in \rho(A)$ и резольвента $R_z \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным оператором. Кроме того, множество регулярных чисел $\rho(A)$ является открытым и функция R_λ будет голоморфной на каждой связной компоненте множества $\rho(A)$. Таким образом, если $\lambda \in \rho(A)$, то в силу доказанного выполняется неравенство $\|R_\lambda\| \geqslant |\lambda - z|^{-1}$ при всех $z \in \sigma(A)$, т.е. имеет место неравенство $\|R_\lambda\| \geqslant 1/d_\lambda$. □

Теорема (о спектре)**.** *Спектр ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является непустым, замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Если $|\lambda| > \|A\|$, то $R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$. Поэтому $R_\lambda \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $\|R_\lambda\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Следовательно, спектр находится в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \|A\|\}$ радиуса $\|A\|$. Для каждого функционала $f \in \mathscr{L}'(\boldsymbol{E})$ функция $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda)$ голоморфна при $\lambda \in \rho(A)$ и $F(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если $\rho(A) = \mathbb{C}$, то по теореме Лиувúлля $F(\lambda) = f(R_\lambda) = 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда по теореме Хáна–Бáнаха получим $R_\lambda = 0$, что невозможно. Поэтому имеем $\sigma(A) \neq \emptyset$. □

Свойства спектра сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

1. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то спектр сопряженного оператора $\sigma(A') = \sigma(A)$.*

Так как $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$, то $A'_\lambda = \lambda I - A'$. Поскольку для ограниченного обратимого оператора выполняется равенство $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, то $(R_\lambda)' = (A_\lambda^{-1})' = (A'_\lambda)^{-1} = R'_\lambda$. Следовательно, множества регулярных чисел $\rho(A') = \rho(A)$ совпадают.

2. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$, то спектр эрмитово-сопряженного $\sigma(A^*) = \overline{\sigma}(A)$.*

По определению эрмитово-сопряженного оператора имеют место равенства

$$\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle \lambda x - Ax, y\rangle = \langle x, \bar{\lambda} y - A^* y\rangle = \langle x, (A^*)_{\bar{\lambda}}\, y\rangle, \text{ т.е. } (A_\lambda)^* = (A^*)_{\bar{\lambda}}.$$

Отсюда $(R_\lambda)^* = (A_\lambda^{-1})^* = (A^*_{\bar{\lambda}})^{-1}$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\rho(A^*) = \overline{\rho}(A)$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным* для оператора A, если существует $e \in \boldsymbol{E} \setminus 0$, т.ч. $Ae = \lambda e$. Следующие множества называются

$\sigma_p(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$ точечным спектром оператора A;

$\sigma_c(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\mathrm{Im} A_\lambda} = \boldsymbol{E}, \mathrm{Im} A_\lambda \neq \boldsymbol{E}\}$ непрерывным спектром A;

$\sigma_r(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\mathrm{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}$ остаточным спектром оператора A.

Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ ограничен, то из теоремы Банаха об обратном операторе вытекает равенство $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$.

Число $\lambda \in \sigma_p(A)$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение $A_\lambda x = 0$ имеет ненулевое решение, т.е. λ является собственным числом для оператора A. Число $\lambda \in \sigma_c(A)$ тогда и только тогда, когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ плотно разрешимо, т.е. существует единственное решение для всюду плотного множества элементов $y \in \boldsymbol{E}$. Число $\lambda \in \sigma_r(A)$ тогда и только тогда , когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ не плотно разрешимо, т.е. существует единственное решение только для не всюду плотного множества элементов $y \in \boldsymbol{E}$.

Для того чтобы линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы $\ker A = 0$ и $\mathrm{Im} A = \boldsymbol{E}$. При этом условие $\ker A = 0$ равносильно существованию левого обратного $B : \mathrm{Im} A \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $BA = I$, а условие $\mathrm{Im} A = \boldsymbol{E}$ равносильно существованию правого обратного $C : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $AC = I$.

Лемма. *Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является обратимым слева, т.е. существует ограниченный левый обратный $B \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}A, \boldsymbol{E})$, в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих условий:*

a) *оператор A ограничен снизу, т.е.* $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| > 0$*;*

b) *ядро* $\ker A = 0$ *и образ* $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{E}$ *является замкнутым.*

Доказательство. Если $B \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}A, \boldsymbol{E})$ левый обратный, то $\|x\| = \|BAx\| \leqslant \|B\|\|Ax\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|B\|^{-1} > 0$. Предположим теперь, что $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, где $c > 0$. Если $y_n = Ax_n \to y$ сходится, то $\|x_n - x_m\| \leqslant \|y_n - y_m\|/c \to 0$. Отсюда $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и существует предел $\lim x_n = x$. В силу непрерывности оператора $Ax = y \in \mathrm{Im}A$. Таким образом, оператор имеет замкнутый образ $\mathrm{Im}A$ и его ядро $\ker A = 0$. По теореме Ба́наха об обратном операторе существует $B \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}A, \boldsymbol{E})$, т.ч. $BA = I$. □

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *полурегулярным* для оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ имеет ограниченный левый обратный $B_\lambda \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}A_\lambda, \boldsymbol{E})$. Множество полурегулярных значений обозначается через $\rho_l(A)$. Дополнительное множество $\sigma_l(A) = \mathbb{C} \setminus \rho_l(A)$ называется *предельным спектром* оператора A.

По лемме *предельный спектр* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ определяется множеством

$$\sigma_l(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}.$$

Дополнительное множество $\sigma_d(A) \doteqdot \sigma(A) \setminus \sigma_l(A)$ называется *дефектным спектром* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Дефектный спектр содержится в остаточном спектре, т.к.

$$\sigma_d(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \mathrm{Im}A_\lambda = \overline{\mathrm{Im}A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\} \subset \sigma_r(A).$$

Число $\lambda \in \rho_l(A)$ тогда и только тогда является полурегулярным значением, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *корректно разрешимо*, т.е. существует ограниченный обратный оператор $B_\lambda : \mathrm{Im}A_\lambda \to \boldsymbol{E}$ на подпространстве $\mathrm{Im}A_\lambda$. Поэтому $\lambda \in \sigma_l(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ не является корректно разрешимым.

Теорема (о границе спектра)**.** *Граница спектра $\partial\sigma(A)$ ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ содержится $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$ в предельном спектре.*

Доказательство. Если $\lambda \in \partial\sigma(A)$, то существует $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, т.ч. $\lambda_n \to \lambda$. Тогда получим $d_{\lambda_n} \doteqdot \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda_n - z| \leqslant |\lambda_n - \lambda| \to 0$. Так как $A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = I$, то имеет место

$$A_\lambda R_{\lambda_n} = (\lambda - \lambda_n) R_{\lambda_n} + A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = (\lambda - \lambda_n) R_{\lambda_n} + I.$$

По определению нормы оператора R_{λ_n} существует последовательность $\{y_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|R_{\lambda_n} y_n\| > \|R_{\lambda_n}\|/2$. Поэтому, полагая $x_n \doteqdot R_{\lambda_n} y_n / \|R_{\lambda_n} y_n\|$ и применяя указанное выше соотношение, получим следующее равенство:

$$A_\lambda x_n = A_\lambda R_{\lambda_n} y_n / \|R_{\lambda_n} y_n\| = (\lambda - \lambda_n) x_n + y_n / \|R_{\lambda_n} y_n\|.$$

Поскольку $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и по теореме о резольвенте $\|R_{\lambda_n} y_n\| > \|R_{\lambda_n}\|/2 \geqslant 1/2d_{\lambda_n}$, то $\|A_\lambda x_n\| \leqslant |\lambda - \lambda_n| + 2d_{\lambda_n} \leqslant 3|\lambda - \lambda_n| \to 0$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_l(A)$. □

Теорема (о спектральном радиусе). *Спектральный радиус* $r(A) \doteqdot \sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$ *ограниченного оператора* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ *вычисляется по формуле* $r(A) = \lim \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Поскольку $\lambda^n - z^n = (\lambda - z)P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$, то $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)P_{n-1}(A) = P_{n-1}(A)(\lambda I - A)$. Если оператор $\lambda^n I - A^n$ является обратимым, то, умножая указанное равенство справа и слева на его обратный, мы получим, что оператор $\lambda I - A$ обратим. Поскольку это противоречит нашему предположению, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ про всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $|\lambda|^n \leqslant \|A^n\|$ и, следовательно, имеет место неравенство $r(A) \leqslant \varliminf \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

С другой стороны, ранее было получено разложение $R_\lambda = \sum_{n=0}^\infty A^n/\lambda^{n+1}$ при всех $|\lambda| > \|A\|$. Если $f \in \mathscr{L}'(\boldsymbol{E})$ ограниченный функционал, то функция $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda)$ голоморфна в каждой связной компоненте $\rho(A)$. Значит ряд $F(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty f(A^n)/\lambda^{n+1}$ сходится при всех $|\lambda| > r(A)$ и $\sup_n |f(A^n/\lambda^n)| < \infty$ при всех $f \in \mathscr{L}'(\boldsymbol{E})$ и $|\lambda| > r(A)$. Так как из слабой ограниченности следует сильная ограниченность, то существует $c_\lambda > 0$, т.ч. $\|A^n/\lambda^n\| \leqslant c_\lambda$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда имеем $\varlimsup \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant |\lambda|$ при всех $|\lambda| > r(A)$, т.е. выполняется неравенство $\varlimsup \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A)$. Таким образом, предел $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$ совпадает со спектральным радиусом $r(A)$. □

Пример. Пусть $A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$ — диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$ при всех $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \sup|\lambda_n| < \infty$.

Пусть $e_i \doteqdot \{\delta_{ij}\}$. Тогда $Ae_n = \lambda_n e_n$, т.е. $\lambda_n \in \sigma_p(A)$ будут собственными числами. Если $\lambda \neq \lambda_n$, то оператор $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$ тогда и только тогда имеет ограниченный обратный $(R_\lambda y)_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, когда его норма $\|R_\lambda\| = \sup|\lambda - \lambda_n|^{-1} < \infty$. Значит спектр A совпадает с замыканием $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$ множества $\{\lambda_n\}$.

Пусть $\lambda \in \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ предельная точка, т.е. существует подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$, т.ч. $\lim \lambda_{n_k} = \lambda$. Тогда $\|A_\lambda e_{n_k}\|_{\ell_p} = |\lambda - \lambda_{n_k}| \to 0$, т.е. $\lambda \in \sigma_l(A)$. Если $1 \leqslant p < \infty$, то образ $\operatorname{Im} A_\lambda$ содержит множество всех финитных последовательностей и значит будет всюду плотным в $\boldsymbol{\ell}_p$, т.е. $\lambda \in \sigma_c(A)$. Если $p = \infty$, то для всех элементов $y = \{y_n\} \in \operatorname{Im} A_\lambda$ получим $\lim y_{n_k} = 0$. Применяя теорему Ха́на–Ба́наха, построим продолжение функционала $f(y) = \lim y_{n_k}$ на все пространство $\boldsymbol{\ell}_\infty$ с сохранением нормы. Поэтому образ $\operatorname{Im} A_\lambda \subset \ker f$ не является всюду плотным, т.е. $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Структура спектра диагонального оператора						
Спектр оператора A	$\sigma(A)$	$\sigma_p(A)$	$\sigma_c(A)$	$\sigma_r(A)$	$\sigma_l(A)$	$\sigma_d(A)$
$A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p,\ 1 \leqslant p < \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$
$A : \boldsymbol{\ell}_\infty \to \boldsymbol{\ell}_\infty,\ p = \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$

9 КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, действующий в нормированных пространствах, называется *компактным*, если образ $A(M) \subset \boldsymbol{F}$ каждого ограниченного множества $M \subset \boldsymbol{E}$ является предкомпактным. Обозначим через $\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ пространство всех компактных операторов и $\mathscr{K}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$.

1. *Оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ тогда и только тогда является компактным, когда образ $A(\boldsymbol{S}_1) \subset \boldsymbol{F}$ единичного шара $\boldsymbol{S}_1 \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ будет предкомпактным.*

В самом деле, по определению множество $M \subset \boldsymbol{E}$ ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant r\}$, где $r > 0$.

2. *Компактный оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ограниченным.*

Поскольку множество $A(\boldsymbol{S}_1)$ предкомпактно, то оно является ограниченным.

3. *Если $A, B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактны, то их сумма $A+B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактна.*

Действительно, пусть $\{x_n\} \subset \boldsymbol{S}_1$. Тогда существует $\{n_k\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to y \in \boldsymbol{F}$, и существует $\{n_{k_i}\}$, т.ч. $Bx_{n_{k_i}} \to z \in \boldsymbol{F}$. Отсюда $(A+B)x_{n_{k_i}} = Ax_{n_{k_i}} + Bx_{n_{k_i}} \to y+z \in \boldsymbol{F}$. Таким образом, множество $(A+B)(\boldsymbol{S}_1) \subset \boldsymbol{F}$ является предкомпактным.

4. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то оператор $BA \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ компактный. Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то оператор $BA \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ компактный.*

Это следует из того, что всякий ограниченный оператор переводит ограниченные множества в ограниченные, а предкомпактные множества в предкомпактные.

5. *Если размерность $\dim \boldsymbol{E} < \infty$ или $\dim \boldsymbol{F} < \infty$, то ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является компактным $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

Действительно, всякое ограниченное множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в пространстве конечной размерности $\dim \boldsymbol{E} < \infty$ является предкомпактным. Поэтому единичный шар $\boldsymbol{S}_1 \subset \boldsymbol{E}$ и его образ $A(\boldsymbol{S}_1) \subset \boldsymbol{F}$ при непрерывном отображении будут предкомпактными.

6. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный и размерность $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то оператор A не имеет ограниченного левого обратного оператора и значит необратим.*

Если существует левый обратный $B \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}A, \boldsymbol{E})$, то тождественный оператор, равный $BA = I$, является компактным, что невозможно, т.к. единичный шар $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{E}$ в бесконечномерном пространстве не является предкомпактным.

7. *Если $\boldsymbol{F}$ — банахово пространство и последовательность $\{A_n\}$ компактных операторов $A_n \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сходится по норме к A, то $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный.*

По условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется n, т.ч. $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon/2$ при всех $x \in \boldsymbol{S}$. Так как $A_n(\boldsymbol{S})$ предкомпактно, то существует $\varepsilon/2$-сеть $\{y_k\}_{k=1}^m$ множества $A_n(\boldsymbol{S})$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{S}$ найдется k, т.ч. $\|y_k - Ax\| \leqslant \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$, т.е. $\{y_k\}_{k=1}^m$ является ε-сетью $A(\boldsymbol{S})$. По теореме Хаусдорфа $A(\boldsymbol{S})$ предкомпактно.

Выясним свойства спектра $\sigma(A)$ компактного оператора $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$. Напомним, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит предельному спектру $\lambda \in \sigma_l(A)$ оператора A, если выполняется равенство $\inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0$.

1. *Если размерность* $\dim \boldsymbol{E} = \infty$ *и* $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, *то* $\sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

По определению $\sigma_p(A) \subset \sigma_l(A)$ и из свойства 6 имеем $0 \in \sigma_l(A)$. Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$ и $\lambda \neq 0$, тогда существует $\{x_n\}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \to 0$. В силу компактности A существует $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to e \in \boldsymbol{E}$. Поскольку $\lambda x_{n_k} = A_\lambda x_{n_k} + Ax_{n_k}$, то $\lambda x_{n_k} \to e$. Тогда по непрерывности оператора $A(\lambda x_{n_k}) \to Ae = \lambda e$, т.е. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

2. *Если* $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, *то при любом* $\varepsilon > 0$ *вне круга* $K_\varepsilon \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \varepsilon\}$ *может существовать лишь конечное число собственных значений оператора* A.

Предположим, что найдется последовательность $|\lambda_n| > \varepsilon$ различных собственных значений. Рассмотрим последовательность $\{e_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|e_n\| = 1$ и $Ae_n = \lambda_n e_n$, и обозначим через $L_n = \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^n$ линейную оболочку. Поскольку $\{e_n\}$ линейно независимы, то $L_{n-1} \neq L_n$. По лемме Рисса о почти перпендикуляре существуют $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Представим эти элементы в виде $y_n \doteqdot c_n e_n + x_n$, где $x_n \in L_{n-1}$. Тогда $Ay_n = c_n \lambda_n e_n + Ax_n = \lambda_n y_n - \lambda_n x_n + Ax_n$, где $\lambda_n x_n - Ax_n \in L_{n-1}$. Так как $\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то получим

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m)\| > |\lambda_n|/2 > \varepsilon/2.$$

т.е. последовательность $\{Ay_n\} \subset A(\boldsymbol{S})$ не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.

Теорема (Ри́сса–Ша́удера)**.** *Если* $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ *компактный оператор в банаховом пространстве бесконечной размерности* $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, *то спектр* $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ *состоит из собственных значений и нуля, при этом ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, т.е.* $\dim E_\lambda < \infty$ *при* $\lambda \neq 0$ *и* $E_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$.

Доказательство. По свойству 1 спектра компактного оператора и по теореме о границе спектра выполняется включение $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Поскольку в силу свойства 2 вне любого круга K_ε радиуса $\varepsilon > 0$ имеется лишь конечное число собственных значений $\lambda \in \sigma_p(A)$, то там нет других точек спектра. Действительно, если множество $\varepsilon < |\lambda| \leqslant \|A\|$ имеет точки спектра, не являющиеся собственными значениями, то оно должно содержать граничные точки спектра, не являющиеся собственными значениями, что невозможно. Таким образом, спектр компактного оператора совпадает предельным спектром $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Поскольку сужение оператора $A|_{E_\lambda} = \lambda I|_{E_\lambda}$ на собственное подпространство E_λ, соответствующее собственному значению $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$, является компактным и обратимым оператором, то по свойству 6 размерность $\dim E_\lambda < \infty$. □

Теорема (Ша́удера)**.** *Если* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *ограниченный оператор, определенный в банаховых пространствах* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{F}$, *то он является компактным* $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *тогда и только тогда, когда его сопряженный компактный* $A' \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{E}')$.

Доказательство. Необходимость. По условию замкнутый образ единичного шара $K \doteqdot \overline{A(S)}$ является компактным. Рассмотрим множество M непрерывных функций $g \in \boldsymbol{C}(K)$, т.ч. $g(y) \doteqdot f(y)$ при всех $y \in K$, где $f \in \boldsymbol{S}' \subset \boldsymbol{F}'$. Поскольку

$$\sup_{y\in K}|g(y)| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|f(Ax)\| \leqslant \|A\|, \quad |g(y_1)-g(y_2)| = |f(y_1-y_2)| \leqslant \|y_1-y_2\|,$$

то множество $M \subset \boldsymbol{C}(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Арцела́–Аско́ли множество M является предкомпактным. Заметим, что M изометрично множеству $A'(\boldsymbol{S}')$, поскольку выполняется равенство

$$\|A'f\| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|A'f(x)| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|f(Ax)| = \sup_{y\in K}|g(y)| = \|g\|_{\boldsymbol{C}}.$$

Поэтому образ единичного шара $A'(\boldsymbol{S}') \subset \boldsymbol{E}'$ является предкомпактным.

Достаточность. Так как $A' \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}',\boldsymbol{E}')$, то по доказанному выше $A'' \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}'',\boldsymbol{F}'')$. Пусть $\boldsymbol{J}$ каноническое вложение во второе сопряженное пространство и скобки $\langle\ ,\ \rangle$ обозначают значение функционала. Тогда, полагая $J(x) = \delta_x$, получим

$$\langle A''J(x), f\rangle = \langle \delta_x, A'f\rangle = \langle A'f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle = \langle JA(x), f\rangle, \text{ где } x \in \boldsymbol{E} \text{ и } f \in \boldsymbol{F}',$$

т.е. $A''J = JA$. Отсюда вытекает включение $JA(\boldsymbol{S})) = A''J(\boldsymbol{S})) \subset A''(\boldsymbol{S}'')$. Так как $A''(\boldsymbol{S}'')$ предкомпактно, то $A(\boldsymbol{S})$ также будет предкомпактным. □

Пример 1. Достаточные условия компактности интегрального оператора

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b K(x,y)\,f(x)\,dy \text{ при всех } f \in \boldsymbol{L}_2[a,b],$$

действующего в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$. Рассмотрим два случая.

a) Пусть $K \in \boldsymbol{C}[a,b]^2$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, мы получим неравенство $\|Af\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant (b-a)^{1/2}\|K\|_{\boldsymbol{C}}\,\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|K(x_1,y)-K(x_2,y)| < \varepsilon$ при всех $|x_1-x_2| < \delta$, то $|Af(x_1)-Af(x_2)| < \varepsilon(b-a)^{1/2}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ при всех $|x_1-x_2| < \delta$, т.е. образ единичного шара $A(\boldsymbol{S}) \subset \boldsymbol{C}[a,b]$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По по теореме Арцела́–Аско́ли множество $A(\boldsymbol{S})$ предкомпактно в $\boldsymbol{C}[a,b]$ и значит предкомпактно в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$. Поэтому оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{L}_2)$ компактный.

b) Пусть $K \in \boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, мы получим, что $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_2}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Поскольку множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $K_n \in \boldsymbol{C}[a,b]^2$, т.ч. $\|K-K_n\|_{\boldsymbol{L}_2} < 1/n$. Определим интегральный оператор по формуле $A_nf(x) \doteqdot \int_a^b K_n(x,y)\,f(x)\,dy$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Тогда, используя указанное выше неравенство, имеем $\|Af-A_nf\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|K-K_n\|_{\boldsymbol{L}_2}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Таким образом, выполняется неравенство $\|A-A_n\| < 1/n$ и значит последовательность компактных операторов сходится по норме к оператору A. Поэтому оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{L}_2)$ компактный.

Определение. Операторы $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F})$ называются *эквивалентными* $A \sim B$, если существует обратимый оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, т.ч. $BT = TA$.

Если, кроме того, оператор T является изометричным отображением $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{F}$, то эти операторы называются *изометрически эквивалентными* $A \approx B$. Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ гильбертовы пространства, то $A \approx B$ называются *унитарно эквивалентными*.

1. *Если $A \sim B$ эквивалентны, то $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$ и $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$.*

Поскольку $A_\lambda = \lambda I - A$ и $B_\lambda = \lambda I - B$, то $B_\lambda T = TA_\lambda$. Поэтому операторы $A_\lambda \sim B_\lambda$ эквивалентны. Следовательно, A_λ обратим тогда и только тогда, когда B_λ обратим. При этом имеют место равенства $\ker B_\lambda = T \ker A_\lambda$ и $\mathrm{Im} B_\lambda = T\,\mathrm{Im} A_\lambda$ при $\lambda \in \rho(A)$. Отсюда легко вытекают указанные равенства спектров.

2. *Если, кроме того, $A \approx B$ изометрически эквивалентны, то $\|A\| = \|B\|$.*

Поскольку в силу изометричности $B = TAT^{-1}$ и $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, то имеют место неравенства $\|B\| \leqslant \|A\|$ и $\|A\| \leqslant \|B\|$. Откуда следует, что $\|A\| = \|B\|$.

Пример 2. Выясним структуру спектра оператора свертки с функцией $K \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, определенного следующей формулой:

$$Af(x) = K * f(x) = \textstyle\int_{\mathbb{R}} K(x-y)\, f(y)\, dy, \text{ где } f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}).$$

Применяя обобщенное неравенство Минко́вского, получим $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_1} \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Значит $\mathrm{Im} A \subset \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и в качестве оператора T можно взять преобразование Фурье́. Тогда из формулы свертки вытекает, что $\widehat{Af}(x) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{K}(x)\,\widehat{f}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

По лемме Ри́мана–Лебе́га $\varphi(x) \doteqdot \sqrt{2\pi}\,\widehat{K}(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Поэтому функцию $\varphi(x)$ мы можем считать заданной на множестве $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ и непрерывной, т.е. $\varphi(\pm\infty) = 0$. Пусть $Bg(x) \doteqdot \varphi(x)\, g(x)$ обозначает оператор умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Тогда $B_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))\, g(x)$ и $R_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))^{-1} g(x)$. Резольвента R_λ является ограниченным оператором в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\|R_\lambda\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda - \varphi(x)|^{-1} < \infty$. Поэтому $\sigma(B) = \varphi(\overline{\mathbb{R}})$. Поскольку операторы $A \approx B$ унитарно эквивалентны, то выполняются следующие свойства:

a) норма оператора $\|A\| = \|B\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$;

b) спектр оператора $\sigma(A) = \sigma(B) = \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \doteqdot \{\lambda = \varphi(x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$;

c) точечный спектр $\sigma_p(A) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \text{мера } \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$;

d) непрерывный спектр $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \text{мера } \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0\}$;

e) предельный спектр $\sigma_l(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) = \sigma(A)$.

В самом деле, если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$ положительна, то функция $e(x) \doteqdot \chi_E(x)$, где $E \subset \varphi^{-1}(\lambda)$ есть измеримое множество положительной меры $\mu(E) > 0$, является собственной функцией оператора B, т.е. $Be(x) = \lambda e(x)$. Поэтому $\lambda \in \sigma_p(B)$.

Докажем теперь, что при $\lambda \neq 0$ и $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$ замыкание образа $\overline{\mathrm{Im} B_\lambda} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим открытое множество O_δ меры меньше $\delta > 0$ и содержащее $\varphi^{-1}(\lambda)$. Для каждой функции $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ определим следующую функцию: $g_\delta(x) \doteqdot 0$, если $x \in O_\delta$; $g_\delta(x) \doteqdot (\lambda - \varphi(x))^{-1} g(x)$, если $x \notin O_\delta$. Так как $|g_\delta(x)| \leqslant c\,|g(x)|$ при некотором $c > 0$, то $g_\delta \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и из абсолютной непрерывности интеграла Лебе́га получим

$$\|g - B_\lambda g_\delta\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \textstyle\int_{\mathbb{R}} |g(x) - B_\lambda g_\delta(x)|^2 dx = \int_{O_\delta} |g(x)|^2 dx \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Поэтому имеем $\lambda \in \sigma_c(B)$ и $\sigma_l(B) = \sigma_p(B) \sqcup \sigma_c(B) = \sigma(B)$. Аналогичным образом, рассматривается случай, когда $\lambda = 0$ и $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$.

10 ФРЕДГО́ЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ обозначают банаховы пространства. Напомним, что *коразмерностью* подпространства $L \subset \boldsymbol{E}$ называется размерность факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$.

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *фредго́льмовым*, если его ядро конечной размерности $\dim(\ker A) = n$, а образ конечной коразмерности $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = m$. Величина $\operatorname{ind} A \doteqdot n - m$ называется *индексом* A. Множество всех фредго́льмовых операторов обозначим через $\mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\mathscr{F}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$.

Лемма. *Если оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ фредго́льмовый, то его образ замкнут.*

Доказательство. Пусть $\{\widehat{e}_k\}_{k=1}^m$ — базис факторпространства $\widehat{\boldsymbol{F}} \doteqdot \boldsymbol{F}/\operatorname{Im} A$. Так как всякий элемент $z \in \boldsymbol{F}$ допускает представление $z = z_0 + \sum_{k=1}^m c_k e_k$, где $z_0 \in \operatorname{Im} A$, то $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A \oplus M$, где $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ обозначает линейную оболочку. Рассмотрим оператор $B : \boldsymbol{E} \times M \to \boldsymbol{F}$, определенный по формуле $B(x,y) \doteqdot Ax + y$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $y \in M$. Так как оператор B ограниченный и сюръективный, то он является гомоморфизмом. Поэтому образ $B(\boldsymbol{E} \times 0) = \operatorname{Im} A$ будет замкнутым подпространством в $\boldsymbol{F}$. □

Пример 1. Всякий биективный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является фредгольмовым. Компактный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ не является фредгольмовым, если $\dim \boldsymbol{E} = \infty$ или $\dim \boldsymbol{F} = \infty$. В самом деле, иначе по теореме о гомоморфизме образ единичного шара $A(\boldsymbol{S})$ является окрестностью нуля в $\operatorname{Im} A$ и, следовательно, имеет конечную размерность $\dim A(\boldsymbol{S}) < \infty$ в силу предкомпактности. Тогда $\dim(\operatorname{Im} A) < \infty$, а значит $\dim \boldsymbol{F} < \infty$ и $\dim \boldsymbol{E} < \infty$, что невозможно по предположению.

Теорема (о каноническом операторе Фредго́льма)**.** *Если оператор $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ является компактным, то оператор $A \doteqdot I - K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})$ фредго́льмовый.*

Доказательство. Так как по теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A$ имеет конечную размерность, то существует замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$. Докажем, что оператор $B \doteqdot A|_L$ имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A$.

Заметим, что B ограничен снизу. В самом деле, иначе существует $\{x_n\} \subset L$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to 0$. В силу компактности K существует подпоследовательность, т.ч. $Kx_{n_i} \to x$ сходится по норме. Так как $x_{n_i} = Ax_{n_i} + Kx_{n_i} \to x$, то $Ax_{n_i} \to Ax$. Поэтому из замкнутости L следует, что $x \in L$, $\|x\| = 1$ и $Ax = 0$. Таким образом, $\ker B \neq 0$, что противоречит выбору L. В силу леммы, доказанной ранее, из ограниченности снизу оператора B вытекает, что он имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} B$.

Поскольку образ замкнут, то в силу соотношений ядра и образа $\operatorname{Im} A = (\ker A')_{\perp}$. По теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A'$ имеет конечную размерность m. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ образует базис ядра $\ker A'$ и $\{e_k\}_{k=1}^m$ — соответствующая биортогональная система. Тогда имеем $\operatorname{Im} A = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Обозначим через $L \doteqdot \operatorname{Im} A$ и $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку. Всякий элемент $x \in \boldsymbol{E}$ допускает разложение $x = y + z$, где $z = \sum_{k=1}^m f_k(x)\, e_k \in M$ и $y = x - z \in L$. Таким образом, $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ и коразмерность образа равна $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = \dim(\ker A') = m$ размерности ядра $\ker A'$. □

Из курса линейной алгебры известна следующая *альтернатива Фредго́льма*: либо система n линейных уравнений с n неизвестными однозначно разрешима для любой правой части, либо соответствующая однородная система имеет ненулевое решение. Теоремы Фредго́льма в бесконечномерном банаховом пространстве устанавливают аналогичные связи между решениями однородного и неоднородного уравнений, определяемых каноническим оператором Фредго́льма.

Для доказательств теорем Фредгольма мы предположим, что $A \doteqdot I - K$ является *каноническим оператором Фредгольма* в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$, а $A' \doteqdot I - K'$ является его сопряженным оператором, при этом $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ заданный компактный оператор. По теореме Ри́сса–Ша́удера ядра этих операторов $\ker A$ и $\ker A'$ имеют конечную размерность $\dim(\ker A) = n$ и $\dim(\ker A') = m$.

Теорема (I теорема Фредго́льма)**.** *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ базис решений однородного сопряженного уравнения $A'f = 0$. Неоднородное уравнение $Ax = y$ тогда и только тогда имеет решение, когда $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Так как образ замкнут, то в силу соотношения ядра и образа $\operatorname{Im} A = (\ker A')_\perp = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Поэтому получаем, что $y \in \operatorname{Im} A$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$. □

Теорема (II теорема Фредго́льма)**.** *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ базис решений однородного уравнения $Ax = 0$. Неоднородное сопряженное уравнение $A'f = g$ тогда и только тогда имеет решение, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Так как образ замкнут, то в силу соотношения ядра и образа $\operatorname{Im} A' = (\ker A)^\perp = \bigcap_{k=1}^n \ker \delta_{x_k}$, где $\delta_{x_k} \in \boldsymbol{E}''$ и $\delta_{x_k}(f) \doteqdot f(x_k)$ при всех $f \in \boldsymbol{E}'$. Отсюда следует, что $g \in \operatorname{Im} A'$ тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. □

Теорема (III теорема, альтернатива Фредго́льма)**.** *Для того чтобы неоднородное уравнение $Ax = y$ было разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $Ax = 0$ имело только нулевое решение.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует элемент $x_1 \neq 0$, т.ч. $Ax_1 = 0$. Обозначим через $L_n \doteqdot \ker A^n$ ядро оператора A^n. Тогда включения $L_{n-1} \subset L_n$ являются строгими. Действительно, по условию существуют $x_n \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $Ax_n = x_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Поэтому $A^{n-1}x_n = x_1 \neq 0$ и значит $x_n \in L_n \setminus L_{n-1}$.

В силу леммы Ф. Рисса о почти перпендикуляре существуют элементы $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Поскольку имеют место равенства $Ky_n - Ky_m = y_n - (Ay_n + y_m - Ay_m)$ и элемент $Ay_n + y_m - Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то $\|Ky_n - Ky_m\| > 1/2$ при $n > m$, что противоречит компактности оператора K.

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = 0$ допускает только нулевое решение. Тогда по второй теореме неоднородное сопряженное уравнение $A'f = g$ разрешимо при всех $g \in \boldsymbol{E}'$ и значит по доказанной необходимости однородное сопряженное уравнение $A'f = 0$ имеет только нулевое решение. Поэтому в силу первой теоремы неоднородное уравнение $Ax = y$ разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$. □

Теорема (об индексе канонического оператора Фредго́льма)**.** *Уравнения* $Ax = 0$ *и* $A'f = 0$ *имеют равное число линейно независимых решений, т.е.* $\mathrm{ind}A = n - m = 0$.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ образует базис в подпространстве $\ker A$ и $\{f_i\}_{i=1}^n$ соответствующая биортогональная система функционалов из $\boldsymbol{E}'$. Пусть $\{g_j\}_{j=1}^m$ задает базис в подпространстве $\ker A'$ и $\{y_j\}_{i=1}^m$ соответствующая биортогональная система элементов из $\boldsymbol{E}$. Докажем, что следующие два случая невозможны.

a) $n < m$. Определим операторы $K_n x \doteqdot Kx + \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ при $x \in \boldsymbol{E}$ и $A_n \doteqdot I - K_n$. Докажем, что ядро $\ker A_n = 0$. Если элемент $x \in \ker A_n$, то получим $Ax = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$. Так как $A'g_j = 0$ при $j = 1, \ldots, m$, то $A'g_j(x) = g_j(Ax) = f_j(x) = 0$ при $j = 1, \ldots, n$. Поэтому имеем $Ax = 0$ и, следовательно, элемент $x = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i = 0$.

Поскольку оператор K_n является компактным, то по третьей теореме существует элемент $z \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $A_n z = y_m$. Поэтому $0 = A'g_m(z) = g_m(Az) = g_m(A_n z) = g_m(y_m) = 1$. Следовательно, мы получили противоречие.

b) $n > m$. Рассмотрим оператор $K'_m f \doteqdot K'f + \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$ при $f \in \boldsymbol{E}'$, который является сопряженным к оператору $K_m x \doteqdot Kx + \sum_{j=1}^m f_j(x) y_j$. Положим $A'_m = I - K'_m$. Докажем, что ядро $\ker A'_m = 0$. Если элемент $f \in \ker A'_m$, то имеем $A'f = \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$. Поскольку $Ax_i = 0$ при $i = 1, \ldots, n$, то $A'f(x_i) = f(Ax_i) = f(y_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, m$. Поэтому получаем $A'f = 0$ и, следовательно, элемент $f = \sum_{j=1}^m f(y_j) g_j = 0$.

Поскольку оператор K'_m является компактным, то по третьей теореме существует элемент $h \in \boldsymbol{E}'$, т.ч. $A'_m h = f_n$. Поэтому $0 = h(Ax_n) = h(A_m x_n) = A'_m h(x_n) = f_n(x_n) = 1$. Таким образом, мы получили противоречие. □

Определение. Оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ будем называть *почти обратимым*, если существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ компактные операторы.

Теорема (Никольского)**.** *Ограниченный оператор* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *тогда и только тогда является почти обратим, когда он фредго́льмовый.*

Доказательство. Необходимость. Так как по условию $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами, то по доказанной выше теореме операторы $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$ являются фредго́льмовыми. А так как $\ker A \subset \ker TA$ и $\mathrm{Im}AT \subset \mathrm{Im}A$, то оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ также будет фредго́льмовым.

Достаточность. Поскольку размерность ядра $\ker A \subset \boldsymbol{E}$ конечна, то существует замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$. Так как коразмерность образа $\mathrm{Im}A$ конечна, то существует замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{F}$, т.ч. $\boldsymbol{F} = \mathrm{Im}A \oplus M$. Обозначим через $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ проектор на L, а через $Q : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ проектор на $\mathrm{Im}A$, и положим $P_1 \doteqdot I - P$ и $Q_1 \doteqdot I - Q$. Тогда проекторы P_1 и Q_1 имеют конечномерные образы $\mathrm{Im}P_1 = \ker A$ и $\mathrm{Im}Q_1 = M$, а значит являются компактными.

Поскольку оператор $B \doteqdot A|_L : L \to \mathrm{Im}A$ биективный, то по теореме Ба́наха его обратный $B^{-1} : \mathrm{Im}A \to L$ является ограниченным. Пусть $T \doteqdot PB^{-1}Q$, тогда имеют место равенства $TA = PB^{-1}A = P = I - P_1$ и $AT = AB^{-1}Q = Q = I - Q_1$. Ещё заметим, что оператор $T \in \mathscr{F}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ фредгольмовый и его индекс $\mathrm{ind}T = -\mathrm{ind}A$. □

Теорема (об устойчивости при компактных возмущениях). *Если* $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *и* $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$*, то оператор* $A+K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *и его индекс* $\operatorname{ind}(A+K) = \operatorname{ind} A$.

Доказательство. В силу теоремы Никольского существует оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами. Тогда имеют место следующие равенства:

$$T(A+K) = I - (K_1 - TK), \quad (A+K)T = I - (K_2 - KT),$$

где $K_1 - TK \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 - KT \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$. Поэтому оператор $A+K \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ почти обратим и значит является фредго́льмовым. В силу замечания при доказательстве теоремы Никольского его индекс равен $\operatorname{ind}(A+K) = -\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} A$. □

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *несущественным значением* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ является фредго́льмовым. Множество всех несущественных значений обозначается через $\rho_e(A)$. Дополнительное множество $\sigma_e(A) \doteqdot \mathbb{C} \setminus \rho_e(A)$ называется *существенным спектром* оператора A.

Весь спектр оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является объединением двух множеств

$$\sigma_e(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \notin \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\} \quad \text{и} \quad \sigma_i(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\},$$

где $\sigma_i(A)$ называется *несущественным спектром* A. По теореме об устойчивости существенный спектр не изменяется при компактных возмущениях оператора A.

Пример 2. Пусть $(Ax)_n = \lambda_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$, диагональным оператор в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$, где последовательность $\{\lambda_n\} \in \boldsymbol{\ell}_\infty$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \|\lambda\|_{\boldsymbol{\ell}_\infty} = \sup|\lambda_n|$.

Обозначим через $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n = 0\}$ и $M = \mathbb{N} \setminus N$. Тогда $\boldsymbol{\ell}_p = \boldsymbol{\ell}_p(N) \oplus \boldsymbol{\ell}_p(M)$. Если оператор фредго́льмовый, то ядро $\ker A = \boldsymbol{\ell}_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\operatorname{Im} A = A(\boldsymbol{\ell}_p(M))$ замкнут. Тогда N конечно и оператор $A : \boldsymbol{\ell}_p(M) \to \boldsymbol{\ell}_p(M)$ имеет ограниченный обратный. Отсюда $\inf_{n\in M}|\lambda_n| > 0$. Таким образом, $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{\ell}_p)$ тогда и только тогда, когда нуль не является предельной точкой $\{\lambda_n\}$. Поскольку $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$, то существенный спектр $\sigma_e(A)$ совпадает с множеством всех предельных точек $\{\lambda_n\}$, а несущественный спектр $\sigma_i(A)$ с множеством тех точек $\lambda_n \notin \sigma_e(A)$, которые повторяются в последовательности $\{\lambda_n\}$ конечное число раз.

Пример 3. Пусть $Af(x) = \varphi(x) f(x)$ оператор умножения на функцию в $\boldsymbol{L}_p[a,b]$, где $\varphi \in \boldsymbol{L}_\infty[a,b]$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|$.

Обозначим через $N = \{x \in [a,b] \mid \varphi(x) = 0\}$ и через $M = [a,b] \setminus N$. Тогда получаем следующее представление $\boldsymbol{L}_p([a,b]) = \boldsymbol{L}_p(N) \oplus \boldsymbol{L}_p(M)$. Если оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{L}_p)$ является фредго́льмовым, то ядро $\ker A = \boldsymbol{L}_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\operatorname{Im} A = A(\boldsymbol{L}_p(M))$ замкнут. Поэтому множество N имеет меру нуль и оператор $A : \boldsymbol{L}_p(M) \to \boldsymbol{L}_p(M)$ имеет ограниченный обратный. Отсюда $\operatorname{ess\,inf}_{x\in[a,b]}|\varphi(x)| > 0$.

Таким образом, оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{L}_p)$ фредго́льмовый тогда и только тогда, когда обратим. Поскольку $A_\lambda f(x) = (\lambda - \varphi(x))f(x)$, то существенный спектр $\sigma_e(A)$ будет совпадать со спектром оператора $\sigma(A) = \sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{ess\,inf}_{x\in[a,b]}|\lambda - \varphi(x)| = 0\}$, т.е. с множеством всех существенных значений функции $\varphi(x)$.

11 ЭРМИ́ТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Напомним, что линейный оператор $A:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым*, если $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$ для всех $x,y\in\boldsymbol{H}$. Множество эрмитовых операторов образует действительное подпространство $\mathscr{H}(\boldsymbol{H})\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ ограниченных операторов.

1. *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то собственные числа $\lambda\in\sigma_p(A)$ действительны $\lambda\in\mathbb{R}$, а собственные подпространства $H_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$ ортогональны $H_{\lambda_1}\perp H_{\lambda_2}$ при $\lambda_1\neq\lambda_2$.*

Пусть $Ae=\lambda e$ и $\|e\|=1$, тогда $\lambda=\langle Ae,e\rangle=\langle e,Ae\rangle=\overline{\lambda}$, т.е. $\lambda\in\mathbb{R}$. Поэтому, если $Ae_1=\lambda_1e_1$ и $Ae_2=\lambda_2e_2$, то $\lambda_1\langle e_1,e_2\rangle=\langle Ae_1,e_2\rangle=\langle e_1,Ae_2\rangle=\lambda_2\langle e_1,e_2\rangle$, т.е. $\langle e_1,e_2\rangle=0$.

Теорема (критерий Ве́йля)**.** *Спектр эрмитова оператора $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ совпадает с его предельным спектром, т.е. $\sigma(A)=\sigma_l(A)$.*

Доказательство. Поскольку дополнительное множество к предельному спектру $\sigma(A)\setminus\sigma_l(A)\subset\sigma_r(A)$ содержится в остаточном спектре, то достаточно показать, что остаточный спектр $\sigma_r(A)$ является пустым. Предположим обратное, т.е. $\ker A_\lambda=0$ и существует $y\in\boldsymbol{H}$, т.ч. $y\neq0$ и $y\perp \operatorname{Im}A_\lambda$. Тогда $\langle A_\lambda x,y\rangle=\langle x,A_{\overline{\lambda}}y\rangle=0$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$. Отсюда следует, что $A_{\overline{\lambda}}y=0$, т.е. $\overline{\lambda}\in\sigma_p(A)$. Так как собственные значения действительны, то $A_\lambda y=0$, что противоречит нашему предположению. □

2. *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то его спектр $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$ является действительным.*

Если $\lambda=\alpha+i\beta$ и $\beta\neq0$, то $A_\lambda=A_\alpha+i\beta I$ и справедливо следующее равенство:

$$\|A_\lambda x\|^2=\langle A_\alpha x,A_\alpha x\rangle-i\beta\langle A_\alpha x,x\rangle+i\beta\langle x,A_\alpha x\rangle+\beta^2\langle x,x\rangle=\|A_\alpha x\|^2+\beta^2\|x\|.$$

Поэтому $\inf_{\|x\|=1}\|A_\lambda x\|\geqslant|\beta|>0$ и, следовательно, по критерию Ве́йля $\lambda\notin\sigma(A)$.

3. *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то спектральный радиус $r(A)=\|A\|$ равен норме оператора.*

Так как $A^2=AA$, то $\|A^2\|\leqslant\|A\|^2$. В силу неравенства Коши́–Буняко́вского

$$\|A^2\|=\sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\|A^2x\|=\sup_{x,y\in\boldsymbol{S}_1}\langle A^2x,y\rangle=\sup_{x,y\in\boldsymbol{S}_1}\langle Ax,Ay\rangle\geqslant\sup_{x\in\boldsymbol{S}_1}\langle Ax,Ax\rangle=\|A\|^2,$$

Поэтому $\|A^2\|=\|A\|^2$ и, следовательно, $\|A^{2^n}\|=\|A\|^{2^n}$. По теореме о спектральном радиусе $r(A)=\lim\sqrt[n]{\|A^n\|}=\lim\sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|}=\|A\|$.

4. *Если $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{H})\cap\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ компактный и эрмитовый, то $\sigma_p(A)\neq\emptyset$ не пуст.*

Пусть $\sigma_p(A)=\emptyset$. Так как $\sigma(A)\neq\emptyset$, то по теореме Ри́сса–Ша́удера $\sigma(A)=\{0\}$. Поэтому по свойству 3 получим $r(A)=\|A\|=0$, т.е. $A=0$, что невозможно.

Теорема (Ги́льберта–Шми́дта)**.** *Пусть оператор $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{H})\cap\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ является компактным и эрмитовым в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда существует полная ортонормированная система из собственных векторов A.*

Доказательство. В случае $\dim \boldsymbol{H} < \infty$ эта теорема доказывается в курсе линейной алгебры. Пусть $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. Так как оператор A является компактным, то множество $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$ собственных значений не более, чем счетно, и ненулевые собственные значения $\lambda_n \neq 0$ имеют конечную кратность $\dim H_{\lambda_n} < \infty$, где $H_{\lambda_n} \doteqdot \ker A_{\lambda_n}$. Поскольку оператор A является эрмитовым, то все его собственные значения действительны $\lambda_n \in \mathbb{R}$, а их собственные подпространства ортогональны $H_{\lambda_n} \perp H_{\lambda_m}$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Выберем в каждом подпространстве H_{λ_n} ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов с собственным значением λ_n. Тогда объединение всех этих ортонормированных систем образует ортонормированную систему $\{e_n\}$ в $\boldsymbol{H}$. Пусть $L \doteqdot \overline{\mathrm{sp}}\{e_n\}$ замкнутая линейная оболочка системы $\{e_n\}$. Тогда L является инвариантным подпространством для оператора $A : L \to L$, а в силу его эрмитовости ортогональное дополнение $L^\perp$ также будет инвариантным подпространством для оператора $A : L^\perp \to L^\perp$. При этом по свойству 4 подпространство $L^\perp$ должно иметь собственный вектор, что невозможно по построению. Следовательно, $L^\perp = 0$ и по теореме об ортогональном разложении получим, что $\boldsymbol{H} = L \oplus L^\perp = L$. □

Пример 1. Интегральным оператором *Ги́льберта–Шми́дта* называется оператор в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$, определенный по следующей формуле:

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy, \quad f \in \boldsymbol{L}_2[a,b],$$

у которого ядро $K(x,y)$ удовлетворяет условиям $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$, $K(x,y) \in \boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Из доказанных ранее утверждений оператор A является эрмитовым и компактным. Выведем формулу резольвенты для оператора *Ги́льберта–Шми́дта*.

Пусть ненулевые собственные значения упорядочены $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ и повторяется столько раз, какова их кратность. Соответствующая ортонормированная система собственных функций обозначается через $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. По теореме Ги́льберта–Шми́дта каждая функция $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$ представляется рядом Фурье $f = f_0 + \sum_{n=1}^\infty \langle f, e_n\rangle e_n$, где $f_0 \in \ker A$. Если $g = A_\lambda f$, то $\langle g, e_n\rangle = \langle A_\lambda f, e_n\rangle = \langle f, A_\lambda e_n\rangle = (\lambda - \lambda_n)\langle f, e_n\rangle$. Поэтому резольвента $R_\lambda g = f$ имеет при всех $\lambda \in \rho(A)$ представление

$$R_\lambda g = \tfrac{1}{\lambda} g + \tfrac{1}{\lambda} Af = \tfrac{1}{\lambda} g + \tfrac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^\infty \tfrac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, e_n\rangle e_n = \tfrac{1}{\lambda} g + \tfrac{1}{\lambda} \int_a^b K_\lambda(x,y)\, g(y)\, dy,$$

где $K_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(x)\overline{e_n(y)}$. Докажем, что ряд $K_\lambda(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Поскольку функции $\varphi_n(x,y) = e_n(x)\overline{e_n(y)}$ образуют ортонормированную систему в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$ и функция $K(x,y)$ имеет коэффициенты Фурье $\langle K, \varphi_n\rangle = \langle Ae_n, e_n\rangle = \lambda_n$, то ее ряд Фурье́ сходится к функции $F(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \varphi_n(x,y)$ из пространства $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Так как система функций $h(x,y) = f(x)\overline{g(y)}$ полна в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$, где $f, g \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, и

$$\langle K, h\rangle = \langle Ag, f\rangle = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle g, e_n\rangle \langle e_n, f\rangle = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle \varphi_n, h\rangle = \langle F, h\rangle$$

то $K(x,y) = F(x,y)$ п.в. на $[a,b]^2$. Поэтому $\|K\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 < \infty$ в силу равенства Парсева́ля. Тогда имеем $\|K_\lambda\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2 < \infty$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Таким образом, ряд Фурье функции K_λ сходится в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$ и значит функция $K_\lambda \in \boldsymbol{L}_2[a,b]^2$.

Пусть функция $p \in \boldsymbol{C}^{(1)}[a,b]$ является непрерывно дифференцируемой и положительной $p(x) > 0$, а функция $q \in \boldsymbol{C}[a,b]$ непрерывна и принимает действительные значения. Рассмотрим дифференциальный оператор Шту́рма–Лиуви́лля

$$Lu(x) = -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) \text{ при п.в. } x \in [a,b].$$

Его область определения M состоит из всех функций $u \in \mathrm{W}_2^{(2)}[a,b]$, у которых первая производная абсолютно непрерывна $u' \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, а вторая $u'' \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, при этом выполняются граничные условия $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0$ и $\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0$ с действительными коэффициентами и $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Подпространство M всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$ и оператор L является эрмитовым, т.е. $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ для всех $u, v \in M$. В самом деле, интегрируя по частям, имеем

$$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = \textstyle\int_a^b (Lu)\overline{v} - u(L\overline{v})dx = -\int_a^b \overline{v}\,d(p u') + \int_a^b u\,d(p\overline{v}') = p(u\overline{v}' - u'\overline{v})|_a^b = 0,$$

где последнее равенство вытекает из граничных условий, т.к. определители

$$\det\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \overline{v}(a) & \overline{v}'(a)\end{vmatrix} = 0, \quad \det\begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \overline{v}(b) & \overline{v}'(b)\end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим *задачу Шту́рма–Лиуви́лля*, которая включает, во-первых, вопрос о существовании решения уравнения $Lu = f$, где $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, а во-вторых, вопрос о полноте системы собственных функций оператора L в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

Лемма. *Если ядро* $\ker L = 0$*, то существует функция Гри́на* $G(x,y)$*, т.ч.*

a) функция $G(x,y)$ *действительная, симметричная и непрерывная в* $[a,b]^2$*;*

b) функция $G(x,y)$ *дважды непрерывно дифференцируема при* $y \neq x$*;*

c) удовлетворяет уравнению $L_y G(x,y) = 0$ *и граничным условиям при* $y \neq x$*;*

d) первая производная $G'_y(x,y)$ *допускает разрыв первого рода при* $y = x \in (a,b)$ *с величиной скачка* $G'_y(x, x+0) - G'_y(x, x-0) = -1/p(x)$.

Доказательство. Так как $\ker L = 0$, то, решая задачу Коши, получим два линейно независимых действительных решения u_1 и u_2 уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничным условиям. Поэтому их определитель Вро́нского $\Delta = u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$ не равен нулю, а функция $p\Delta \doteqdot p(u_1 u_2' - u_1' u_2)$ равна константе $c_0 \neq 0$, т.к. ее производная $(p\Delta)' = u_1(p u_2')' - u_2(p u_1')' = 0$ равна нулю.

Определим функцию $G(x,y) \doteqdot c_1 u_1(y)$ при $y \leqslant x$ и $G(x,y) \doteqdot c_2 u_2(y)$ при $y \geqslant x$. Выберем $c_1 = c_1(x)$ и $c_2 = c_2(x)$, чтобы функция $G(x,y)$ являлась непрерывной на отрезке $[a,b]$ и ее производная $G'_y(x,y)$ имела указанный скачок в точке x, т.е. $c_1 u_1(x) - c_2 u_2(x) = 0$ и $c_1 u_1'(x) - c_2 u_2'(x) = 1/p(x)$. Поскольку $c_0 = p(u_1 u_2' - u_1' u_2) \neq 0$ константа, то, полагая $c_1 \doteqdot -u_2(x)/c_0$ и $c_2 \doteqdot -u_1(x)/c_0$, мы получим функцию

$$G(x,y) \doteqdot -\tfrac{1}{c_0}\begin{cases} u_1(y)\,u_2(x), & \text{при } a \leqslant y \leqslant x \leqslant b; \\ u_1(x)\,u_2(y), & \text{при } a \leqslant x \leqslant y \leqslant b; \end{cases}$$

которая будет удовлетворять всем условиям леммы. □

Теорема (о существовании решения)**.** *Если* $\ker L = 0$ *и* $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$*, то функция* $u \in M$ *тогда и только тогда удовлетворяет уравнению* $Lu = f$*, когда*

$$u(x) = Af(x) \doteqdot \int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy \text{ при всех } x \in [a,b],$$

где $G(x,y)$ *есть функция Гри́на задачи Шту́рма–Лиуви́лля.*

Доказательство. Пусть $f = Lu$, где $u \in M$. Интегрируя по частям и используя свойства функции Гри́на и граничные условия по переменной y, мы получим

$$\int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy = \Big(\int_a^x G\,(Lu)\, dy - \int_a^x (L_yG)\, u\, dy\Big) + \Big(\int_x^b G\,(Lu)\, dy - \int_x^b (L_yG)\, u\, dy\Big) =$$

$$= p\,(u\,G'_y - u'G)\,\big|_a^{x-0} + p\,(u\,G'_y - u'G)\,\big|_{x+0}^{b} = p\,(u\,G'_y - u'G)\,\big|_{x+0}^{x-0} = u(x).$$

Следовательно, имеет место равенство $ALu = u$ при всех $u \in M$.

Теперь докажем равенство $LAf = f$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Поскольку $Af \in M$, то в силу эрмитовости операторов L и A мы получим $\langle LAf, u\rangle = \langle f, ALu\rangle = \langle f, u\rangle$ для всех $u \in M$. Так как подпространство M всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$, то $LAf = f$ п.в. на отрезке $[a,b]$. Таким образом, оператор A, определенный на пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ со значениями в M, является обратным к оператору L. □

Теорема (о полноте собственных функций)**.** *Существует полная ортонормированная система в* $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ *собственных функций оператора Шту́рма-Лиуви́лля.*

Доказательство. Пусть $\ker L = 0$. Тогда существование полной ортонормированной системы собственных функций вытекает из теоремы Ги́льберта–Шми́дта, так как собственные функции оператора L будут собственными функциями интегрального оператора A, ядром которого является функция Гри́на.

Пусть $\ker L \neq 0$. В силу эрмитовости оператора L его собственные функции с различными собственными числами ортогональны. Поэтому множество всех его собственных чисел не более, чем счетно, и значит существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, которое не является собственным числом. Тогда оператор $L_0 = L - \lambda_0 I$ удовлетворяет условию $\ker L_0 = 0$. Поскольку собственные функции оператора L_0 являются собственными функциями оператора L и наоборот, то оператор L одновременно с оператором L_0 обладает полной системой собственных функций в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$. □

Пример 2. Рассмотрим оператор $Lu = -u''$ и граничные условия $u(0) = u(\pi) = 0$. По решениям x и $\pi - x$ уравнения $Lu = 0$, построим функцию Гри́на

$$G(x,y) = \begin{cases} (\pi - x)y, & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi; \\ x(\pi - y), & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi. \end{cases}$$

Затем, решая дифференциальное уравнение $u'' + \lambda u = 0$ с граничными условиями $u(0) = u(\pi) = 0$, находим его собственные значения $\lambda_n = n^2$ и ортонормированную систему собственных функций $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, полную в $\boldsymbol{L}_2[0,\pi]$.