1 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $X \times Y \doteqdot \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ — прямое произведение множеств X и Y.

Определение. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой*, если выполняются

a) симметричность: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ при всех $x,y \in X$;

b) неравенство треугольника: $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ при всех $x,y,z \in X$;

c) невырожденность: $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Пара (X,ρ) называется *метрическим пространством*. Если выполнены (a) и (b), то ρ называется *полуметрикой*, а (X,ρ) *полуметрическим пространством*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся* $x_n \to x$ к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x,x_n) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши́*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$ при всех $n,m \geqslant N$.

Если всякая последовательность Коши́ является сходящейся к некоторой точке $x \in X$, то метрическое пространство (X,ρ) называется *полным*.

Всюду далее через $\boldsymbol{E}$ мы будем обозначать линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел.

Определение. Функция $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$ называется *нормой*, если выполняются

a) однородность: $\boldsymbol{p}(\lambda x) = |\lambda| \boldsymbol{p}(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \boldsymbol{E}$;

b) неравенство треугольника: $\boldsymbol{p}(x+y) \leqslant \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{p}(y)$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$;

c) невырожденность: $\boldsymbol{p}(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Норма обозначается через $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$ и пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ называется *нормированным пространством*. Если выполнены (a) и (b), то $\boldsymbol{p}$ называется *полунормой*, а $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ *полунормированным пространством*. Метрика (полуметрика) ρ в нормированном (полунормированном) пространстве определяется равенством $\rho(x,y) \doteqdot \|x-y\|$.

Полное нормированное пространство называется *ба́наховым пространством*.

Пример 1. Нормированное пространство $\mathbb{F}^n \doteqdot \{x = \{x_k\}_{k=1}^n) \mid x_k \in \mathbb{F}\}$ с нормой $\|x\| \doteqdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ называется конечномерным *евклидовым пространством*.

Пример 2. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *ограниченной* на множестве X, если существует число $c > 0$, т.ч. $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in X$. Нормированное пространство $\boldsymbol{B}(X) \doteqdot \{f : X \to \mathbb{F} \mid f \text{ ограничена}\}$, состоящее из ограниченных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством ограниченных функций*.

Пример 3. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *непрерывной* в (X,ρ), если для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$.

Нормированное пространство $\boldsymbol{C}(X) \doteqdot \{f : X \to \mathbb{F} \mid f \text{ ограничена и непрерывна}\}$, состоящее из ограниченных и непрерывных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством непрерывных функций*.

Лемма. *Нормированные пространства* $\boldsymbol{B}(X)$ *и* $\boldsymbol{C}(X)$ *являются полными.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\boldsymbol{B}(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и при всех $n,m \geqslant N$. По критерию Коши равномерной сходимости она сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и $n \geqslant N$. Отсюда $\|f_n - f\| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Так как $\|f\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_n\|$, то $f \in \boldsymbol{B}(X)$.

Поскольку равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, то $\boldsymbol{C}(X)$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{B}(X)$ и, следовательно, также будет полным нормированным пространством. □

Открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве обозначаются через $\boldsymbol{U}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) < r\}$ и $\boldsymbol{S}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) \leqslant r\}$; $\boldsymbol{U}_r \doteqdot \boldsymbol{U}_r(0)$ и $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \boldsymbol{S}_r(0)$. Для каждого множества $A \subset X$ введём следующие обозначения:

$\mathring{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \subset A\}$ — множество *внутренних* точек;

$\acute{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A = \{\infty\}\}$ — множество *предельных* точек;

$\tilde{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A = \{x\}\}$ — множество *изолированных* точек;

$\overline{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A \neq \{\emptyset\}\}$ — множество точек *прикосновения*.

Множества $\mathring{A}$ и $\overline{A}$ называются *внутренностью* и *замыканием* множества A.

Если $\mathring{A} = A$, то множество A называется *открытым*.
Если $\overline{A} = A$, то множество A называется *замкнутым*.
Если $\overline{A} = X$, то множество A называется *всюду плотным*.
Если $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, то множество A называется *нигде не плотным*.

Определение. Метрическое пространство (X,ρ) называется *сепара́бельным*, если существует счётное и всюду плотное подмножество $A \subset X$.

Рассмотрим свойства операции замыкания в метрическом пространстве (X,ρ).

1. $\overline{A} = \{x \in X \mid \exists x_n \in A,\ \textit{т.ч. } x_n \to x\}$.

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Точка $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда существуют $x_n \in A$, т.ч. $x_n \in A \cap \boldsymbol{U}_{1/n}(x)$, что равносильно неравенству $\rho(x,x_n) < 1/n$. Отсюда следует, что $x_n \to x$.

Если $x \in \overline{A \cup B}$, то существуют точки $x_n \in A \cup B$, т.ч. $x_n \to x$. Тогда существует подпоследовательность точек x_{n_k}, принадлежащая A либо B, т.ч. $x_{n_k} \to x$. Поэтому справедливо включение $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Обратное включение очевидно.

Ясно, что $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Пусть $x \in \overline{\overline{A}}$, тогда найдется последовательность точек $x_n \in \overline{A}$, т.ч. $x_n \to x$. Кроме того, для каждого n найдётся последовательность точек $x_{nm} \in A$, т.ч. $x_{nm} \to x_n$. Выберем подпоследовательность m_n, т.ч. $\rho(x_{nm_n},x_n) < 1/n$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x_{nm_n},x) \leqslant \rho(x_{nm_n},x_n) + \rho(x_n,x) \to 0$, т.е. $x_{nm_n} \to x \in \overline{A}$.

Определение. Отображение $F:X\to Y$ метрических пространств (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) называется *непрерывным*, если для каждого $x\in X$ и для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\rho_Y(F(x),F(y))<\varepsilon$ для всех $y\in X$, удовлетворяющих $\rho_X(x,y)<\delta$.

Отображение $F:X\to Y$ называется *изометричным*, если для всех $x,y\in X$ имеет место $\rho_Y(F(x),F(y))=\rho_X(x,y)$. Если, кроме того, образ $F(X)=Y$, то отображение называется *изометрией*, а пространства X и Y называются *изометричными*.

Изометричное отображение метрических пространств является инъективным и непрерывным. Если отображение $F:X\to Y$ является изометрией, то оно биективно и обратное отображение $F^{-1}:Y\to X$ также является изометрией.

Теорема (о пополнении). *Для каждого метрического пространства (X,ρ_X) существует такое полное метрическое пространство (Y,ρ_Y) и изометричное отображение $F:X\to Y$, что образ $F(X)\subset Y$ является всюду плотным в Y. При этом любые два таких пополнения (Y,ρ_Y) являются изометричными.*

Доказательство. Пусть $f_x(y)\doteqdot\rho_X(x,y)-\rho_X(x_0,y)$, где точка $x_0\in X$ фиксирована. Тогда $|f_x(y)|\leqslant\rho_X(x,x_0)$ для всех $y\in X$, т.е. $f_x\in\boldsymbol{B}(X)$ при всех $x\in X$. Определим отображение $F:X\to\boldsymbol{B}(X)$ по формуле $F(x)\doteqdot f_x$ и положим $Y\doteqdot\overline{F(X)}$. Так как

$$\rho_Y(F(x_1),F(x_2))=\sup_{y\in X}|f_{x_1}(y)-f_{x_2}(y)|=\sup_{y\in X}|\rho_X(x_1,y)-\rho_X(x_2,y)|=\rho_X(x_1,x_2),$$

то отображение F является изометричным. Пусть существуют два отображения $F:X\to Y$ и $F_1:X\to Y_1$, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда для каждого $y\in Y$ найдётся последовательность $x_n\in X$, т.ч. $F(x_n)\to y$. Отсюда $F_1(x_n)\to y_1\in Y_1$. Определим отображение $J:Y\to Y_1$ по формуле $J(y)\doteqdot y_1$. Тогда при всех $y,y'\in Y$

$$\rho_Y(y,y')=\lim_{n\to\infty}\rho_Y(F(x_n),F(x_n'))=\lim_{n\to\infty}\rho_X(x_n,x_n')=\lim_{n\to\infty}\rho_{Y_1}(F_1(x_n),F_1(x_n'))=\rho_{Y_1}(y_1,y_1').$$

Таким образом, отображение J является изометрией пространств Y и Y_1. □

Определение. Отображение $F:X\to X$ метрического пространства (X,ρ) в себя называется *сжимающим*, если для некоторого $0<\lambda<1$ выполняется неравенство $\rho(F(x),F(y))\leqslant\lambda\rho(x,y)$ при всех $x,y\in X$.

Каждое сжимающее отображение, очевидно, является непрерывным.

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Пусть $F:X\to X$ — сжимающее отображение полного метрического пространства (X,ρ). Тогда существует и единственная неподвижная точка $x\in X$, т.ч. $F(x)=x$.*

Доказательство. Пусть $x_0\in X$ и $x_1\doteqdot F(x_0),x_2\doteqdot F(x_1),\ldots$, т.е. $x_n=F^n(x_0)$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим при всех $n<m$ и $0<\lambda<1$

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}\rho(x_k,x_{k+1})=\sum_{k=n}^{m-1}\rho(F^k(x_0),F^k(x_1))\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}\lambda^k\rho(x_0,x_1)\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(x_0,x_1).$$

Поэтому $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Так как $F(x_{n-1}) = x_n$, то, переходя к пределу и используя непрерывность F, получим $F(x) = x$. Если существует еще одна точка $y \in X$, т.ч. $F(y) = y$, то из неравенства $\rho(x,y) = \rho(F(x),F(y)) \leqslant \lambda\rho(x,y)$ следует, что $\rho(x,y) = 0$, т.е. имеет место равенство $x = y$. □

Лемма (о вложенных шарах). *Если в полном метрическом пространстве (X,ρ) задана последовательность вложенных шаров $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \supset \boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \supset \ldots$ и предел радиусов $\lim r_n = 0$, то их пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$ не пусто.*

Доказательство. Поскольку по условию $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $n < m$ и $\lim r_n = 0$, то $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $m \to \infty$, получим $\rho(x_n,x) \leqslant r_n$. Следовательно, эта точка принадлежит $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$. □

Определение. Множество $A \subset X$ в метрическом пространстве (X,ρ) называется множеством *первой категории*, если является счётным объединением $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ нигде не плотных множеств $A_n \subset X$. Множество $A \subset X$ называется множеством *второй категории*, если оно не является множеством первой категории.

Теорема (Бэ́ра). *Каждое полное метрическое пространство (X,ρ) является множеством второй категории.*

Доказательство. Предположим обратное $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества A_n нигде не плотны. Тогда существуют $x_1 \in X \setminus \overline{A}_1$ и $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \subset X \setminus \overline{A}_1$. Аналогично, существуют $x_2 \in \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и $\boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \subset \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и т.д. Поэтому имеем последовательность вложенных шаров $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \supset \boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \supset \ldots$. Выберем радиусы $r_n > 0$, т.ч. $\lim r_n = 0$. Тогда по лемме существует точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$. Отсюда $x \notin A_n$ при всех n, что невозможно. Таким образом, X не является множеством первой категории. □

Пример 4. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ является множеством первой категории, т.к. $\mathbb{Q}$ есть счётное объединение точек. По теореме Бэ́ра множество действительных чисел $\mathbb{R}$ будет множеством второй категории. Отсюда множество иррациональных чисел $\mathbb{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ является множеством второй категории.

Пример 5. Построим пример последовательности вложенных шаров в полном метрическом пространстве с пустым пересечением. Рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{N},\rho)$ с метрикой $\rho(n,m) \doteqdot 1 + 1/(n+m)$, если $n \neq m$, и $\rho(n,n) = 0$.

Замкнутые шары $\boldsymbol{S}_{r_n}(n) = \{n, n+1, \ldots\}$, где $r_n = 1 + 1/2n$, являются вложенными и их пересечение пусто. Заметим, что это метрическое пространство $(\mathbb{N},\rho)$ полно, поскольку всякая последовательность Коши́ стационарна. По теореме Бэра пространство $\mathbb{N}$ является множеством второй категории. В этом пространстве все множества открыты и замкнуты, т.е. $(\mathbb{N},\rho)$ имеет дискретную топологию. Поэтому в нем не существует нигде не плотных множеств, кроме пустого множества $\emptyset$.

2 МЕТРИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathbf{2}^X$ обозначает множество всех подмножеств X, включая пустое множество. Непустое подмножество $\tau \subset \mathbf{2}^X$ называется *системой множеств* в X.

Определение. Пара (X,τ) называется *топологическим пространством*, если в X задана система множеств $\tau \subset \mathbf{2}^X$, называемая *топологией*, т.ч.

a) пустое множество $\emptyset \in \tau$ и все множество $X \in \tau$;

b) объединение $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ для всякой системы множеств $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$.

c) пересечение $\bigcap_{k=1}^n B_k \in \tau$ для всякой конечной системы множеств $\{B_k\}_{k=1}^n \subset \tau$.

Система множеств $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии* τ, если любое множество $A \in \tau$ является объединением $A = \bigcup_{i\in I} B_i$ некоторых множеств $B_i \in \beta$.

В топологическом пространстве (X,τ) множества $A \in \tau$ называются *открытыми*, а их дополнения $A' \doteqdot X \setminus A$ *замкнутыми*. Множество $O_x \subset X$ называется *окрестностью* точки $x \in X$, если существует $A \in \tau$, т.ч. $x \in A \subset O_x$.

С помощью окрестностей, также как в метрическом пространстве, можно ввести понятия внутренних, предельных, изолированных точек, точек прикосновения, понятие замыкания, всюду плотного и нигде не плотного множества.

1. *В метрическом пространстве (X,ρ) система множеств $\tau_X \doteqdot \{A \subset X \mid \mathring{A} = A\}$ является топологией. Открытые шары $\boldsymbol{U}_r(x)$ образуют базу топологии τ_X.*

В самом деле, если $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, то $x \in A_i$ при некотором $i \in I$. Тогда существует шар $\boldsymbol{U}_r(x) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Если $x \in \bigcap_{k=1}^n B_k$, то $x \in B_k$ при $k = 1,\ldots,n$. Тогда существуют шары $\boldsymbol{U}_{r_k}(x) \subset B_k$ при $k = 1,\ldots,n$. Пусть $r \doteqdot \min_{1\leqslant k\leqslant n} r_k$, тогда $\boldsymbol{U}_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^n B_k$. Кроме того, по определению система всех открытых шаров $\boldsymbol{U}_r(x) \subset X$ образует базу топологии метрического пространства.

2. *Топология в произведении $X = X_1 \times X_2$ метрических пространств (X_1,ρ_{X_1}) и (X_2,ρ_{X_2}) определяется следующей метрикой:*

$$\rho_X(x,y)) \doteqdot \sqrt{\rho_{X_1}^2(x_1,y_1) + \rho_{X_2}^2(x_2,y_2)},\ \textit{где } x = (x_1,x_2),\, y = (y_1,y_2) \in X_1 \times X_2\,.$$

Метрику в произведении $X = X_1 \times X_2$ можно определить другим эквивалентным способом, например, по формуле $\rho_X'(x,y) \doteqdot \rho_X(x_1,y_1) + \rho_{X_2}(x_2,y_2)$. Применяя элементарные неравенства $\rho_X(x,y)/2 \leqslant \rho_X'(x,y) \leqslant 2\,\rho_X(x,y)$, легко показать, что топология в метрике ρ_X совпадает с топологией в метрике ρ_X'.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если для любого $A \in \tau_Y$ прообраз $f^{-1}(A) \in \tau_X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *открытым*, если для любого $A \in \tau_X$ образ $f(A) \in \tau_Y$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно одновременно является биективным, непрерывным и открытым отображением.

Теорема. *Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) являются метрическими пространствами. Тогда следующие условия непрерывности отображения эквивалентны:*

a) *отображение $f : X \to Y$ является непрерывным;*

b) *для каждого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. для всех $y \in X$, $\rho_X(x,y) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$;*

c) *для любой сходящейся последовательности $x_n \to x$ в X ее образ является сходящейся последовательностью $f(x_n) \to f(x)$ в Y.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (a) и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $x \in X$ существует шар $\boldsymbol{U}_\delta(x) \subset f^{-1}(\boldsymbol{U}_\varepsilon(f(x)))$, что равносильно (b). Пусть выполнено (b) и последовательность сходится $x_n \to x$ в X, т.е. для заданного $\delta > 0$ существует N, т.ч. $\rho_X(x,x_n) < \delta$ для всех $n \geqslant N$. В силу (b) выполняется $\rho_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Отсюда $f(x_n) \to f(x)$, т.е. выполнено (c). Пусть $A \subset Y$ замкнутое множество. Если $x_n \in f^{-1}(A)$ и $x_n \to x$, то по условию (c) получим $f(x_n) \to f(x)$ и из замкнутости $f(x) \in A$, т.е. $x \in f^{-1}(A)$. Поэтому прообраз замкнутого множества замкнут. Это равносильно тому, что прообраз открытого множества открыт. □

Определение. Пара $(\boldsymbol{E},\rho)$ называется *метрическим линейным пространством*, если $\boldsymbol{E}$ линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, в котором определена метрика $\rho(x,y)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

a) $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$ при всех $x,y,z \in \boldsymbol{E}$, т.е. метрика инвариантна;

b) отображение $f : \mathbb{F} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $f(\lambda,x) \doteqdot \lambda x$, является непрерывным.

Полное метрическое линейное пространство называется *пространством Фреше*.

Функция $\|x\| \doteqdot \rho(x,0)$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ называется *квазинормой*. Она удовлетворяет неравенству треугольника $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, симметрична $\|-x\| = \|x\|$ и не вырождена, т.е. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Однако свойство однородности $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ может не выполняться.

Лемма. *В метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ операция сложения является непрерывной. Каждое нормированное пространство $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ является метрическим линейным пространством.*

Доказательство. Непрерывность операции сложения доказывается при помощи следующего неравенства треугольника:

$$\|(x+y) - (x_0+y_0)\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \varepsilon, \text{ если } \|x - x_0\| < \varepsilon/2 \text{ и } \|y - y_0\| < \varepsilon/2.$$

Для доказательства непрерывности операции умножения λx в нормированном пространстве $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ достаточно применить следующее неравенство:

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leqslant |\lambda - \lambda_0|\,\|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0|\,\|x_0\| + |\lambda_0|\,\|x - x_0\| < \varepsilon,$$

если $|\lambda_0| < a$, $\|x_0\| < b$, $\|x - x_0\| < \varepsilon/3a$ и $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon/3b < a$. □

Определение. Отображение $f: X \to Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x, y \in X$, удовлетворяющих $\rho_X(x,y) < \delta$.

Система $\{f_i\}_{i \in I}$ отображений $f_i: X \to Y$ называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$ выполняется для всех индексов $i \in I$ и для всех $x, y \in X$, удовлетворяющих $\rho_X(x,y) < \delta$.

Пример 1. Говорят, что отображение $f: X \to Y$ удовлетворяет условию Ли́пшица, если существует $c > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) \leqslant c\rho_X(x,y)$ при всех $x, y \in X$. Ясно, что такое отображение является равномерно непрерывным.

Метрика $\rho: X \times X \to \mathbb{R}_+$ является равномерно непрерывной функцией в (X, ρ). Для доказательства нужно применить неравенство треугольника:

$$|\rho(x,y) - \rho(x_0,y_0)| \leqslant |\rho(x,y) - \rho(x_0,y)| + |\rho(x_0,y) - \rho(x_0,y_0)| \leqslant \rho(x,x_0) + \rho(y,y_0).$$

Определение. Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$ называется *ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon$ для всех $x \in A$, что равносильно выполнению включения $\lambda A \subset \boldsymbol{U}_\varepsilon(0)$.

1. *Всякое ограниченное множество $A \subset \boldsymbol{E}$ содержится в некотором шаре. В нормированном пространстве это условие необходимо и достаточно.*

В самом деле, по определению существует $\lambda > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \delta$ при всех $x \in A$. Тогда в силу непрерывности операции умножения в нуле $\|x\| \leqslant n\|\lambda x / n\lambda\| < n\varepsilon \doteqdot r$ при всех $x \in A$ и достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Обратно, если $\|x\| < r$ при всех $x \in A$, то по свойству однородности нормы $\|\lambda x\| = \lambda\|x\| < \varepsilon$ при всех $x \in A$ и $0 < \lambda < \varepsilon/r$.

2. *Всякая сходящаяся последовательность $x_n \to x$ является ограниченной.*

Из непрерывности операции умножения в нуле существуют $\delta > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|\lambda(x_n - x)\| < \varepsilon/2$ при всех $n > N$ и $0 < \lambda < \delta$. А из непрерывности этой операции в нуле по переменной λ получим $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ и $\|\lambda(x_n - x)\| < \varepsilon/2$ при $n = 1, \ldots, N$ и при некотором $0 < \lambda < \delta$. Поэтому $\|\lambda x_n\| \leqslant \|\lambda x\| + \|\lambda(x_n - x)\| < \varepsilon$ при всех n.

Определение. Отображение $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ линейных пространств над $\mathbb{F}$ называется *линейным*, если $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Отображение $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если образ $f(A) \subset \boldsymbol{F}$ любого ограниченного множества $A \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством.

Теорема. *Для линейного отображения $f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ метрических линейных пространств следующие условия эквивалентны: отображение непрерывно; отображение равномерно непрерывно; отображение ограничено.*

Доказательство. Заметим, что непрерывность линейного отображения равносильна непрерывности в одной точке, например, в точке нуль. Если f непрерывно в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| < \varepsilon$ при $\|x - y\| < \delta$, т.е. f равномерно непрерывно.

Пусть $A \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством. Тогда для $\delta > 0$ существует $\lambda > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \delta$ при всех $x \in A$. Тогда в силу непрерывности f в нуле получим $\|\lambda f(x)\| = \|f(\lambda x)\| < \varepsilon$ при всех $x \in A$. Следовательно, образ $f(A)$ ограничен.

Пусть $x_n \to 0$. Выберем последовательность n_k, т.ч. $\|x_n\| < 1/k^2$ при всех $n \geqslant n_k$. Положим $\lambda_n \doteqdot k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Отсюда следует $\lambda_n \to \infty$ и $\lambda_n x_n \to 0$, поскольку $\|\lambda_n x_n\| \leqslant \lambda_n \|x_n\| < 1/k$ при всех $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Поэтому $\{\lambda_n x_n\}$ ограничена, а в силу условия (c) $\{f(\lambda_n x_n)\}$ ограничена. Тогда по определению ограниченного множества $f(x_n) = f(\lambda_n x_n)/\lambda_n \to 0$. Таким образом, отображение f непрерывно в нуле. □

Теорема (принцип равностепенной непрерывности)**.** *Предположим, что задана система* $\{f_i\}_{i\in I}$ *непрерывных линейных отображений* $f_i : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *пространства Фреше́* $(\boldsymbol{E}, \rho_E)$ *в метрическое линейное пространство* $(\boldsymbol{F}, \rho_F)$ *и для любого* $x \in \boldsymbol{E}$ *множества* $M_x \doteqdot \{y = f_i(x) \mid i \in I\}$ *являются ограниченными в пространстве* $\boldsymbol{F}$. *Тогда эта система отображений* $\{f_i\}_{i\in I}$ *равностепенно непрерывна.*

Доказательство. При заданном $\varepsilon > 0$ рассмотрим замкнутые множества

$$E_n \doteqdot \bigcap_{i\in I} \Big\{ x \in \boldsymbol{E} \,\Big|\, \Big\| \frac{f_i(x)}{n} \Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Big\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

По условию ограниченности множеств M_x и непрерывности операции умножения в нуле для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|f_i(x)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $i \in I$. Следовательно, имеет место равенство $\boldsymbol{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

В силу теоремы Бэ́ра некоторое множество E_n содержит некоторый шар $\boldsymbol{U}_r(x_0)$, что равносильно неравенству $\|f_i(x_0 + y)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $y \in \boldsymbol{U}_r$ и $i \in I$. Применяя неравенство треугольника и линейность отображений, получим

$$\Big\| \frac{f_i(y)}{n} \Big\| \leqslant \Big\| \frac{f_i(x_0 + y)}{n} \Big\| + \Big\| \frac{f_i(x_0)}{n} \Big\| \leqslant \varepsilon \ \text{ при всех } y \in \boldsymbol{U}_r \text{ и } i \in I.$$

Если $\|y\| < r/n$, то по неравенству треугольника $\|ny\| \leqslant n\|y\| < r$, т.е. $n\boldsymbol{U}_{r/n} \subset \boldsymbol{U}_r$. Таким образом, выполняются неравенства $\|f_i(x + y) - f_i(x)\| = \|f_i(ny)/n\| \leqslant \varepsilon$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, $y \in \boldsymbol{U}_\delta$, $i \in I$, где $\delta \doteqdot r/n$. □

Следствие. *Если в линейном пространстве* $\boldsymbol{E}$ *задана инвариантная метрика* $\rho(x, y)$, *относительно которой* $(\boldsymbol{E}, \rho)$ *полно, и операция умножения* $f(\lambda, x) = \lambda x$ *непрерывна по каждой переменной* $\lambda \in \mathbb{F}$ *и* $x \in \boldsymbol{E}$ *в отдельности, то операция умножения является непрерывной по совокупности переменных* $(\lambda, x) \in \mathbb{F} \times \boldsymbol{E}$.

Проверим непрерывность операции умножения $f(\lambda, x) = \lambda x$ в точке (λ_0, x_0). В силу неравенства $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leqslant \|(\lambda - \lambda_0)(x - x_0)\| + \|(\lambda - \lambda_0)x_0\| + \|\lambda_0(x - x_0)\|$ нам достаточно доказать непрерывность в точке $(0, 0)$. Для этого следует рассмотреть систему линейных отображений $f_\lambda : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, где $f_\lambda(x) \doteqdot \lambda x$ при $|\lambda| < 1$. Тогда по теореме для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon$ при всех $|\lambda| < 1$ и $\|x\| < \delta$. Отсюда следует непрерывность операции $f(\lambda, x) = \lambda x$ в точке $(0, 0)$.

3 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и задано число $\varepsilon > 0$.

Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью множества* $M \subset X$, если имеет место включение $M \subset \bigcup_{x\in A} \boldsymbol{S}_\varepsilon(x)$, т.е. для любого $y \in M$ найдется $x \in A$, т.ч. $\rho(x,y) \leqslant \varepsilon$.

Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным* (или *предкомпактным*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ множества M.

1. *Всякое вполне ограниченное множество $M \subset X$ содержится в некотором шаре $\boldsymbol{S}_r(x)$ пространства (X,ρ).*

Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ образует 1-сеть множества M и $r_1 \doteqdot \max_{2\leqslant k\leqslant n} \rho(x_1,x_k)+1$. Тогда для каждого $y \in M$ существует k, т.ч. $\rho(x_1,y) \leqslant \rho(x_1,x_k)+\rho(x_k,y) \leqslant r_1$. Отсюда вытекает включение $M \subset \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1)$.

2. *Если множество $M \subset X$ является вполне ограниченным, то его замыкание $\overline{M}$ будет также вполне ограниченным.*

Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ образует ε-сеть множества M. Так как $M \subset \bigcup_{k=1}^n \boldsymbol{S}_\varepsilon(x_k)$, то из замкнутости объединения шаров следует $\overline{M} \subset \bigcup_{k=1}^n \boldsymbol{S}_\varepsilon(x_k)$, т.е. A есть ε-сеть $\overline{M}$.

3. *Всякое вполне ограниченное множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ является ограниченным.*

Пусть $\varepsilon > 0$. По непрерывности операции умножения λx существуют $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ при всех $0 < \lambda < \delta$ и $\|x\| \leqslant \delta$. Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ является δ-сетью множества M. Выберем величину $0 < \lambda < \delta$, т.ч. $\|\lambda x_k\| < \varepsilon/2$ при всех $k = 1,\ldots,n$. Тогда для каждого $x \in M$ существует k, т.ч. $\|\lambda x\| \leqslant \|\lambda x_k\| + \|\lambda(x-x_k)\| < \varepsilon$.

Пример 1. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено. Необходимость этого утверждения следует из свойства 1. Докажем достаточность. Рассмотрим куб с ребром $a > 0$, содержащий M. Разобьем этот куб на кубики с ребром $\delta \doteqdot a/k$. Тогда вершины кубиков $\{x_j\}_{j=1}^m$ образуют ε-сеть M, где $m = (k+1)^n$ и $\varepsilon = \sqrt{n}\delta/2 = \sqrt{n}a/2k$ есть половина диагонали кубика.

Определение. Рассмотрим несколько определений для свойства компактности множества $K \subset X$ в метрическом пространстве (X,ρ):

a) множество $K \subset X$ называется *компактным*, если всякое открытое покрытие $K \subset \bigcup_{i\in I} B_i$, где $\mathring{B}_i = B_i$, имеет конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{k=1}^n B_{i_k}$, где $i_k \in I$;

b) множество $K \subset X$ называется *счетно компактным*, если всякое бесконечное подмножество $A \subset K$ имеет предельную точку $x \in \acute{A}$, т.ч. $x \in K$;

c) множество $K \subset X$ называется *секвенциально компактным*, если для всякой последовательности $\{x_n\} \subset K$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k} \to x$ и $x \in K$.

Теорема (Ха́усдорфа)**.** *Множество $K \subset X$ компактно в том и только в том случае, когда оно d) вполне ограничено и полно.*

Докажем, что в произвольном метрическом пространстве условия компактности (a), (b), (c), (d) равносильны друг другу и справедлива теорема Ха́усдорфа.

$(a) \Rightarrow (b)$. Пусть $A \subset K$ бесконечно. Если $\acute{A} \cap K = \emptyset$ пусто, то для всякой точки $x \in K$ существует $r > 0$, т.ч. $\boldsymbol{U}_r(x) \cap A$ конечно. Так как шары $\boldsymbol{U}_r(x)$ покрывают K, то выбирая конечное подпокрытие, получим, что A конечно. Противоречие.

$(b) \Rightarrow (c)$. Пусть $A = \{x_n\}$ последовательность различных точек множества K. По условию существует точка $x \in \acute{A} \cap K$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k} \in \boldsymbol{U}_{1/k}(x)$. Отсюда следует сходимость $x_{n_k} \to x \in K$.

$(c) \Leftrightarrow (d)$. Полнота K очевидно вытекает из (c). Докажем вполне ограниченность. Пусть $\varepsilon > 0$ и точка $x_0 \in K$. Тогда существует точка $x_1 \in K$, т.ч. $\rho(x_1, x_0) > \varepsilon$, иначе точка $\{x_0\}$ образует ε-сеть в K. Аналогично, существует точка $x_2 \in K$, т.ч. $\rho(x_2, x_0) > \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$, иначе $\{x_0, x_1\}$ образуют ε-сеть в K, и т.д. По индукции существует $x_n \in K$, т.ч. $\rho(x_n, x_k) > \varepsilon$ при $k = 1, \ldots, n-1$. Если процесс выбора точек x_n оборвется на некотором шаге n, то $\{x_k\}_{k=1}^n$ образует конечную ε-сеть K. Иначе последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

Обратно, пусть $\{x_n\} \subset K$. В силу условия вполне ограниченности существует конечное покрытие K шарами радиуса $r_1 = 1$. Следовательно, найдется шар $\boldsymbol{S}_{r_1}(y_1)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$. Аналогично существует конечное покрытие K шарами радиуса $r_2 = 1/2$ и найдется шар $\boldsymbol{S}_{r_2}(y_2)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$, и т.д.

По индукции при $r_k = 1/k$ существует подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$, содержащаяся в некотором шаре $\boldsymbol{S}_{r_k}(y_k)$. Обозначим через $z_n \doteqdot x_n^{(n)}$ диагональную подпоследовательность. Так как $\rho(z_n, z_m) \leqslant \rho(z_n, y_n) + \rho(y_n, z_m) \leqslant 2/n$ при $m > n$, то $\{z_n\}$ есть последовательность Коши. В силу полноты она имеет предел в K.

$(d) \Rightarrow (a)$. Пусть задано открытое покрытие $K \subset \bigcup_{i \in I} B_i$. Докажем вначале, что существует $\varepsilon > 0$, т.ч. для любого $x \in K$ найдется такой индекс $i \in I$, что $\boldsymbol{S}_\varepsilon(x) \subset B_i$. Предположим обратное. Тогда существуют $x_n \in K$, т.ч. $\boldsymbol{S}_{1/n}(x_n) \not\subset B_i$ при всех $i \in I$. По условию (c) найдется сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K$. Так как открытые множества B_i покрывают K, то существуют $i \in I$ и $r > 0$, т.ч. $\boldsymbol{S}_r(x) \subset B_i$.

Выберем индекс $n_k > 2/r$, т.ч. $\rho(x_{n_k}, x) < r/2$. Тогда имеют место включения $\boldsymbol{S}_{1/n_k}(x_{n_k}) \subset \boldsymbol{S}_{r/2}(x_{n_k}) \subset \boldsymbol{S}_r(x) \subset B_i$, что противоречит предположению. Пусть теперь $A = \{y_k\}_{k=1}^m$ является ε-сетью в множестве K. По доказанному свойству найдется индекс $i_k \in I$, т.ч. $\boldsymbol{S}_\varepsilon(y_k) \subset B_{i_k}$. Поэтому $K \subset \bigcup_{k=1}^m \boldsymbol{S}_\varepsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^m B_{i_k}$.

Следствие. *Замыкание $\overline{M}$ вполне ограниченного множества $M \subset X$ в полном метрическом пространстве (X, ρ) является компактным.*

Поскольку в полном метрическом пространстве замыкание множества является полным, то утверждение следует из теоремы Ха́усдорфа и свойства 2. Рассмотрим свойства непрерывных отображений, определенных на компактном множестве.

1. *Всякое непрерывное отображение $f: X \to Y$, определенное на компакте X, является равномерно непрерывным.*

Предположим обратное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < 1/n$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$ при всех n. В силу компактности X найдутся сходящиеся подпоследовательности $x_{n_k} \to x$ и $y_{n_k} \to y$. Так как по условию $\rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$, то $x = y$. В силу непрерывности отображения f существует n_k, т.ч. $\rho_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leqslant \rho_Y(f(x_{n_k}), f(x))) + \rho_Y(f(y), f(y_{n_k})) < \varepsilon$. Противоречие.

2. *Образ $f(K) \subset Y$ любого компактного множества $K \subset X$ при непрерывном отображении $f: X \to Y$ является компактным множеством.*

Пусть $\{y_n\} \subset f(K)$. Тогда $y_n = f(x_n)$, где $x_n \in K$. В силу компактности K найдется сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K$. Тогда из непрерывности f получим $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$. Поэтому образ $f(K)$ является компактным.

3. Теорема Алекса́ндрова. *Предположим, что X компактно, а отображение $f: X \to Y$ является биективным и непрерывным. Тогда обратное отображение $f^{-1}: Y \to X$ будет непрерывным.*

В самом деле, всякое замкнутое множество $A \subset X$ является компактным. Тогда в силу свойства 2 его образ $f(A) \subset Y$ является компактным и значит замкнутым. Поэтому образ любого открытого множества является открытым.

Теорема (принцип продолжения по непрерывности)**.** *Пусть $f: A \to Y$ является равномерно непрерывным отображением, определенным на всюду плотном множестве $A \subset X$ метрического пространства (X, ρ_X), со значениями в полном метрическом пространстве (Y, ρ_Y). Тогда существует только одно равномерно непрерывное отображение $g: X \to Y$, т.ч. $g(x) = f(x)$ при всех $x \in A$.*

Доказательство. В силу равномерной непрерывности отображения f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x, y \in A$: $\rho_X(x, y) < \delta$. Так как A всюду плотно в X, то для каждого $x \in X$ существуют $x_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$.

Выберем число N, т.ч. $\rho_X(x_n, x_m) < \delta$ при всех $n, m \geqslant N$. Тогда $\rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Поэтому $\{f(x_n)\}$ есть последовательность Коши и существует предел $g(x) \doteqdot \lim f(x_n)$. Если взять другую сходящуюся последовательность $y_n \to x$, то, полагая $z_n \doteqdot x_k$ при $n = 2k-1$ и $z_n \doteqdot y_k$ при $n = 2k$, мы получим, что $z_n \to x$. Тогда $g(x) = \lim f(z_n) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n)$. Значит $g(x)$ не зависит от выбора сходящейся последовательности и определение отображения g единственно.

Пусть $x, y \in X$ и $\rho_X(x, y) < \delta$. Выберем последовательности точек $x_n, y_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Тогда существует N, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < \delta$ при всех $n \geqslant N$. В силу равномерной непрерывности отображения f имеем неравенство $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $\rho_Y(g(x), g(y)) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, отображение $g: X \to Y$ равномерно непрерывно. □

Пример 2. Рассмотрим пространство ℓ_p последовательностей $x = \{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{F}$, имеющих конечную величину (квазинормы при $0 < p < 1$ и нормы при $1 \leqslant p < \infty$)

$$\|x\| \doteqdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, & \text{если } 0 < p < 1; \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

В случае $0 < p < 1$ неравенство треугольника для квазинормы вытекает из элементарного неравенства $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$ при $a, b > 0$, а в случае $1 \leqslant p < \infty$ неравенство треугольника для нормы вытекает из неравенства Минко́вского.

Пространство ℓ_p при $0 < p < 1$ является метрическим линейным пространством, а при $1 \leqslant p < \infty$ нормированным пространством. Для каждого $x \in \ell_p$ обозначим через $s_m(x) = y$ финитную последовательность $y = \{y_n\}$, т.ч. $y_n = x_n$ при $n \leqslant m$ и $y_n = 0$ при $n > m$. Тогда $s_m(x) \to x$ сходится в метрике ℓ_p при $m \to \infty$, т.к.

$$\|x - s_m(x)\| \doteqdot \begin{cases} \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p, & \text{если } 0 < p < 1; \\ \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

Имеют место непрерывные вложения $\ell_p \subset \ell_q$ этих пространств при $0 < p < q$. Для доказательства заметим, что справедливо следующе неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \text{ при всех } 0 < p < q \text{ и } x = \{x_n\} \in \ell_p.$$

В самом деле, если разделить левую часть на правую, то для доказательства этого неравенства достаточно расмотреть случай, когда $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$. В этом случае $|x_n| \leqslant 1$ и, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$ при всех $0 < p < q$.

Теорема. *Пространства ℓ_p, $0 < p < \infty$, являются полными и сепарабельными.*

Доказательство. Пусть $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}$ является последовательностью Коши, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется N, т.ч. $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon$ при всех $k, l \geqslant N$. Отсюда $|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| < \varepsilon$ при всех $k, l \geqslant N$ и $n \geqslant 1$. Поэтому $\{x_n^{(k)}\}$ является последовательностью Коши для каждого $n \geqslant 1$ и значит существует предел $\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n$. Тогда, полагая $x = \{x_n\}$ и переходя к пределу в неравенстве, получим, что $\|x^{(k)} - x\| \leqslant \varepsilon$ при всех $k \geqslant N$. Из неравенства треугольника вытекает, что $\|x\| \leqslant \|x^{(k)}\| + \varepsilon$ при $k \geqslant N$. Таким образом, элемент $x \in \ell_p$ и последовательность $x^{(k)}$ сходится к x в метрике ℓ_p.

Для доказательства сепарабельности пространства ℓ_p заметим, что существует предел $\lim_{m\to\infty} s_m(x) = x$ в метрике ℓ_p для всех $x \in \ell_p$. Поэтому множество финитных последовательностей всюду плотно в ℓ_p. Следовательно, в пространстве ℓ_p всюду плотно подпространство, состоящее из всех финитных последовательностей рациональных или комплексно-рациональных чисел поля $\mathbb{F}$. Поскольку это подпространство является счетным, то пространство ℓ_p является сепарабельным. □

4 КРИТЕРИИ ПРЕДКОМПАКТНОСТИ

Теорема (Ри́сса)**.** *Множество $M \subset \ell_p$ предкомпактно в ℓ_p, $0 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

a) множество M ограничено в пространстве ℓ_p;

b) для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x - s_m(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \in M$.

Доказательство. Необходимость. Ограниченность $M \subset \ell_p$ вытекает из его вполне ограниченности. Докажем второе условие. Пусть $A = \{x^{(k)}\}_{k=1}^l$ является $\varepsilon/3$-сетью множества M. Для каждого k выберем $m_k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x^{(k)} - s_{m_k}(x^{(k)})\| < \varepsilon/3$, а затем возьмем среди них наибольшее $m = \max_{1 \leqslant k \leqslant l} m_k$. Так как A является $\varepsilon/3$-сетью, то для любого $x \in M$ найдется k, т.ч. $\|x - x^{(k)}\| \leqslant \varepsilon/3$ и по неравенству треугольника

$$\|x - s_m(x)\| \leqslant \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - s_m(x^{(k)})\| + \|s_m(x^{(k)}) - s_m(x)\| < \varepsilon$$

при всех $x \in M$, т.е. выполнено второе условие (b).

Достаточность. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $M_m \doteqdot \{s_m(x) \mid x \in M\}$ в подпространстве ℓ_p, где m определяется из второго условия для $\varepsilon/3$. Так как M_m содержится в конечномерном подпространстве ℓ_p и является ограниченным в метрике ℓ_p, то оно будет вполне ограничено в метрике ℓ_p. В самом деле, для этого достаточно заметить, что имеют место элементарные неравенства

$$\Big(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^m |x_n|^p\Big)^{1/p} \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant m} |x_n| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^m |x_n|^p\Big)^{1/p} \ \text{при } 0 < p < \infty,$$

и применить аналогичные рассуждения, как в примере 1 из предыдущей лекции.

Для заданного $\varepsilon > 0$ обозначим через $\{y^{(k)}\}_{k=1}^l$ $\varepsilon/3$-сеть множества M_m, а через $\{x^{(k)}\}_{k=1}^l$ элементы прообраза $y^{(k)} = s_m(x^{(k)})$. Тогда для любого $x \in M$ найдется k, т.ч. $\|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\| \leqslant \varepsilon/3$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\|x - x^{(k)}\| \leqslant \|x - s_m(x)\| + \|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\| + \|s_m(x^{(k)}) - x^{(k)}\| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{x^{(k)}\}_{k=1}^l$ образует ε-сеть M, т.е. M вполне ограничено в ℓ_p. □

Определение. Величина верхней грани $O(f,A) \doteqdot \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$ называется *колебанием функции* f на множестве A. Колебание функции $O(f,A)$ совпадает с диаметром образа множества A в пространстве $\mathbb{F}$, т.е. $O(f,A) = \operatorname{diam} f(A)$.

Теорема (Ве́реш)**.** *Множество $M \subset \boldsymbol{B}(X)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда M ограничено и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $X = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$, т.ч. $O(f, A_k) < \varepsilon$ для всех $f \in M$ и $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $X = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ указанное разбиение для числа $\varepsilon/2$. Выберем точки $x_k \in A_k$ и для каждой функции $f \in M$ определим функции $h_f(x) \doteqdot y_k$ при $x \in A_k$, где $y_k \doteqdot f(x_k)$. Тогда по условию $\|f - h_f\| < \varepsilon/2$.

Заметим, что каждая функции $h_f(x)$ взаимно однозначно определяется набором чисел $y = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n$. Соответствующее множество $y \in Y \subset \mathbb{F}^n$ является ограниченным и значит будет вполне ограниченным. Обозначим через $\{h_j\}_{j=1}^m$ элементы прообраза $\varepsilon/2$-сети множества Y. Тогда для каждой функции $f \in M$ существует такой индекс j, что $\|f - h_j\| \leqslant \|f - h_f\| + \|h_f - h_j\| < \varepsilon$. Таким образом, система функций $\{h_j\}_{j=1}^m$ образует ε-сеть множества M. □

Теорема (Арце́ла–Аско́ли)**.** *Множество $M \subset \boldsymbol{C}(K)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность M в $\boldsymbol{C}(K)$ вытекает из вполне ограниченности. Докажем равностепенную непрерывность. По условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/3$-сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$ множества M. Следовательно, для любого $f \in M$ существует k, т.ч. $|f(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in K$. Поскольку функция f_k равномерно непрерывна, то существует $\delta_k > 0$, т.ч. $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$ при всех $x, y \in K$, $\rho(x,y) < \delta_k$. Обозначим через $\delta \doteqdot \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta_k$, тогда

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

при всех $x, y \in K$, $\rho(x,y) < \delta$. Таким образом, M равностепенно непрерывно.

Достаточность. Из условия равностепенной непрерывности M для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ для всех $f \in M$ и $x, y \in K$, $\rho(x,y) \leqslant \delta$. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ является δ-сетью компакта K и $F : M \to \mathbb{F}^m$ обозначает отображение, заданное по формуле $F(f) \doteqdot \{f(x_j)\}_{j=1}^m$. Поскольку $F(M) \subset \mathbb{F}^m$ ограничено, то оно вполне ограничено. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset M$ обозначает элементы прообраза $\varepsilon/3$-сети $\{F(f_k)\}_{k=1}^n$ множества $F(M)$. Для любого $x \in K$ выберем j, т.ч. $\rho(x, x_j) \leqslant \delta$ и для любого $f \in M$ выберем k, т.ч. $\|F(f) - F(f_k)\|_{\mathbb{F}^m} \leqslant \varepsilon/3$. Тогда получим

$$|f(x) - f_k(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_k(x_j)| + |f_k(x_j) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{f_k\}_{k=1}^n$ является ε-сетью множества M. □

Определение. Два нормированных пространства $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p_E})$ и $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{p_F})$ называются *изоморфными* или *эквивалентными* $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p_E}) \sim (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{p_F})$, если найдется биективное линейное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, для которого f и f^{-1} непрерывны.

Два нормированные пространства $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p_E})$ и $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{p_F})$ называются *изометрически изоморфными* и обозначаются через $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p_E}) \simeq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{p_F})$, если найдется биективное, линейное и изометричное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, т.е. для которого выполняется равенство $\|f(x)\|_{\boldsymbol{F}} = \|x\|_{\boldsymbol{E}}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Если нормированные пространства изоморфны и одно из них является полным или сепарабельным, то другое также будет соответственно полным или сепарабельным. Изометрически изоморфные пространства являются изоморфными.

Из следующей теоремы вытекает, что нормированные пространства одной и той же конечной размерности являются изоморфными.

Теорема. *Всякое нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности над полем $\mathbb{F}$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, где $n = \dim \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ обозначает базис $\boldsymbol{E}$. Поэтому для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ найдется единственный элемент $\lambda \doteqdot \{\lambda_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n$, т.ч. $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Определим отображение $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$ по формуле $f(x) \doteqdot \lambda$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда отображение f является линейным и биективным. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) \doteqdot \|x\|$. Применяя неравенство треугольника и неравенство Коши, получим

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda')| \leqslant \|x - x'\| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda - \lambda'| \, \|e_k\| \leqslant \|\lambda - \lambda'\|_{\mathbb{F}^n} \Big(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \Big)^{1/2}.$$

Поэтому функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{F}^n$ величина нижней грани $\inf_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1} \varphi(\lambda) = a$ положительна, а величина верхней грани $\sup_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1} \varphi(\lambda) = b$ конечна. Следовательно, в силу свойства однородности функции $\varphi(\lambda)$ получаем $a\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant \|x\| \leqslant b\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}^n$. Из этих неравенств вытекает ограниченность и непрерывность отображений f и f^{-1}. □

Следствие 1. *Всякое нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности является банаховым, а всякое его ограниченное и замкнутое подмножество $M \subset \boldsymbol{E}$ является компактным.*

Это утверждение вытекает из полноты пространства $\mathbb{F}^n$ и теоремы Хаусдорфа.

Следствие 2. *В линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ конечной размерности $n = \dim \boldsymbol{E}$ любые две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$, т.е. существует такое число $c > 0$, что $c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Пусть $f(x) = \lambda$ обозначает изоморфизм $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$. Используя обозначения теоремы, имеем $\|x\|_1 \leqslant b_1\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant b_1 a_1^{-1}\|x\|_1$ и $\|x\|_2 \leqslant b_2\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant b_2 a_2^{-1}\|x\|_2$. Поэтому, полагая $c \doteqdot \max\{b_1 a_1^{-1}, b_2 a_2^{-1}\}$, получим неравенство $c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1$.

Определение. Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства. Величина $\rho(x, L) \doteqdot \inf_{y \in L} \|x - y\|$ называется *наилучшим приближением* элемента $x \in \boldsymbol{E}$ подпространством L. Всякий элемент $y_0 \in L$, для которого $\rho(x, L) = \|x - y_0\|$, называется *элементом наилучшего приближения*.

Теорема (существования наилучшего приближения)**.** *Если подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность, то для всякого $x \in \boldsymbol{E}$ существует хотя бы один элемент $y_0 \in L$ наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $x \in \boldsymbol{E}$, тогда имеем $\rho(x, L) \leqslant \|x\|$. Рассмотрим множество $K_x \doteqdot \{y \in L \mid \|x - y\| \leqslant \|x\|\}$. Поскольку K_x является замкнутым, ограниченным и содержится в конечномерном пространстве, то в силу следствия 1 оно компактно. Поэтому непрерывная функция $\varphi_x(y) \doteqdot \|x - y\|$ будет достигать своей нижней грани на компакте K_x. Следовательно, существует $y_0 \in K_x$, т.ч. $\varphi_x(y_0) = \inf_{y \in K_x} \varphi_x(y)$. □

Определение. Нормированное пространство называется *строго нормированным*, если равенство $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ выполняется в том и только в том случае, когда $x = \lambda y$ при некотором $\lambda \geqslant 0$.

Пример 1. В дальнейшем будет доказано, что евклидово пространство $\mathbb{F}^n$ строго нормировано. Пространство непрерывных функций $\boldsymbol{C}[0,1]$ не является строго нормированным, т.к. если $f(x) = 1$ и $g(x) = x$, то $\|f+g\| = \|f\|+\|g\| = 2$.

Теорема (единственности наилучшего приближения)**.** *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ является подпространством строго нормированного пространства, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ может существовать не более одного элемента наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $\rho(x,L) = \|x-y_0\| = \|x-y_1\|$, где $y_0, y_1 \in L$. Тогда имеем

$$\rho(x,L) \leqslant \left\|x - \frac{y_0+y_1}{2}\right\| = \left\|\frac{x-y_0}{2} + \frac{x-y_1}{2}\right\| \leqslant \left\|\frac{x-y_0}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y_1}{2}\right\| = \rho(x,L).$$

Следовательно, вместо неравенств имеют место равенства. В силу условия строгой нормированности $x - y_1 = \lambda(x-y_0)$ при некотором $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 1$, то $y_0 = y_1$. Если $\lambda \neq 1$, то $x = (y_1 - \lambda y_0)/(1-\lambda) \in L$ и значит $x = y_0 = y_1$. □

Лемма (Ф. Ри́сса о почти перпендикуляре)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым подпространством нормированного пространства. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x \in \boldsymbol{E} \setminus L$, т.ч. $\|x\| = 1$ и $\|x-y\| > 1-\varepsilon$ при всех $y \in L$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \boldsymbol{E}\setminus L$, тогда $d \doteqdot \rho(x_0, L) > 0$. Выберем элемент $y_0 \in L$, т.ч. $\|x_0 - y_0\| < d/(1-\varepsilon)$. Тогда если $x \doteqdot (x_0-y_0)/\|x_0-y_0\|$, то при всех $y \in L$ имеем

$$\|x-y\| = \left\|\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|} - y\right\| = \frac{\|x_0-y_1\|}{\|x_0-y_0\|} \geqslant \frac{d}{\|x_0-y_0\|} > 1-\varepsilon\,,$$

где элемент $y_1 \doteqdot y_0 + \|x_0-y_0\|\, y \in L$. □

Теорема. *Замкнутый единичный шар $\boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ является компактным в том и только в том случае, когда пространство имеет конечную размерность $\dim \boldsymbol{E} < \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\dim \boldsymbol{E} = \infty$. Если точка $x_1 \in \boldsymbol{S}$ и $L_1 \doteqdot \operatorname{sp}\{x_1\}$ есть линейная оболочка x_1, то по лемме существует $x_2 \in \boldsymbol{S}\setminus L_1$, т.ч. $\|x_2-x_1\| > 1/2$. Аналогично, если $L_2 \doteqdot \operatorname{sp}\{x_1,x_2\}$ есть линейная оболочка x_1 и x_2, то существует $x_3 \in \boldsymbol{S}\setminus L_2$, т.ч. $\|x_3-x_1\| > 1/2$, $\|x_3-x_2\| > 1/2$ и т.д. По индукции имеем $L_n \doteqdot \operatorname{sp}\{x_1,\ldots,x_n\}$ и существует $x_{n+1} \in \boldsymbol{S}\setminus L_n$, т.ч. $\|x_{n+1}-x_k\| > 1/2$ при $k = 1,\ldots,n$. Тогда $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. т.е. шар некомпактный.

Достаточность. Пусть $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$ — изоморфизм, где $n = \dim \boldsymbol{E}$. Тогда образ шара $f(\boldsymbol{S}) \subset \mathbb{F}^n$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{F}^n$. Поэтому $f(\boldsymbol{S})$ компактно в $\mathbb{F}^n$ и, следовательно, $\boldsymbol{S}$ компактно в силу непрерывности f^{-1}. □

5 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ обозначают нормированные линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел.

Определение. Отображение $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *линейным оператором*, если

$$A(x+y)=A(x)+A(y) \text{ и } A(\lambda x)=\lambda A(x) \text{ при всех } x,y\in\boldsymbol{E} \text{ и } \lambda\in\mathbb{F}.$$

Норма линейного оператора $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ вычисляется по формулам:

$$\|A\| \doteqdot \sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|A(x)\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|A(x)\|}{\|x\|}, \text{ где } \boldsymbol{S}\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E} \mid \|x\|\leqslant 1\}.$$

Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если он отображает ограниченные множества в ограниченные. Это равносильно тому, что $\|A\|<\infty$. Через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначим пространство ограниченных операторов из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$.

Пример. Пусть $Af(x)\doteqdot\varphi(x)f(x)$ оператор умножения на функцию $\varphi\in\boldsymbol{L}_\infty[a,b]$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p[a,b]$. Докажем, что $\|A\|=\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}\doteqdot\operatorname{ess\,sup}_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|$. В случае $p=\infty$ это следует из определения нормы в $\boldsymbol{L}_\infty[a,b]$. Пусть $1\leqslant p<\infty$. Поскольку

$$\|A(f)\|^p=\int_a^b|\varphi(x)f(x)|^p dx\leqslant\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}^p\int_a^b|f(x)|^p dx=\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}^p\|f\|^p,$$

то $\|A\|\leqslant\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Для любого $\varepsilon>0$ существует множество $M\subset[a,b]$ положительной меры, т.ч. $|\varphi(x)|>\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}-\varepsilon$ для всех $x\in M$. Тогда, полагая $f(x)=\chi_M(x)$, имеем

$$\|A(f)\|^p=\int_a^b|\varphi(x)\chi_M(x)|^p dx>(\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}-\varepsilon)^p\int_a^b|\chi_M(x)|^p\,dx=(\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}-\varepsilon)^p\|f\|^p.$$

Поэтому $\|A\|>\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}-\varepsilon$ и, следовательно, $\|A\|=\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$.

Теорема. *Если $\boldsymbol{F}$ — ба́нахово пространство, то пространство ограниченных операторов $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ также является ба́наховым пространством.*

Доказательство. Пусть $A,B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Сумма операторов $A+B$ и умножение на число λA определяются по формулам $(A+B)(x)\doteqdot A(x)+B(x)$ и $(\lambda A)(x)\doteqdot\lambda A(x)$. Очевидно, что $\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|$ и выполняется неравенство треугольника

$$\|A+B\|=\sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|A(x)+B(x)\|\leqslant\sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|A(x)\|+\sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|B(x)\|=\|A\|+\|B\|.$$

Следовательно, $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ — нормированное пространство. Докажем его полноту.

Пусть $\{A_n\}$ есть последовательность Коши́ в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует N, т.ч. $\|A_n-A_m\|<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$. Из определения операторной нормы вытекает неравенство $\|A_n(x)-A_m(x)\|<\varepsilon\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $n,m\geqslant N$. Следовательно, $\{A_n(x)\}$ есть последовательность Коши́ в $\boldsymbol{F}$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. В силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $A(x)\doteqdot\lim_{n\to\infty}A_n(x)$. Ясно, что A является линейным оператором. Переходя к пределу в неравенстве, указанном выше, получим, что $\|A_n(x)-A(x)\|\leqslant\varepsilon\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $n\geqslant N$, т.е. $\|A_n-A\|\leqslant\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Поэтому $A_n\to A$ сходится по норме. Так как $\|A\|\leqslant\|A_n\|+\|A_n-A\|$, то $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. $\square$

Теорема (Ба́наха–Штейнга́уза). *Если $\boldsymbol{E}$ — банахово пространство и система операторов $\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ по точечно ограничена в $\boldsymbol{F}$, то система $\{A_i\}_{i\in I}$ равномерно ограничена в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

Доказательство. По условию множества $M_x \doteqdot \{y=A_i(x)\mid i\in I\}$ ограничены в $\boldsymbol{F}$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Применяя *принцип равностепенной непрерывности* получаем, что система операторов $\{A_i\}_{i\in I}$ является равностепенно непрерывной. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч.$\|A_i(x)\|<\varepsilon$ при всех $\|x\|<\delta$ и $i\in I$. Отсюда следует, что $\|A_i\|=\sup_{\|x/\delta\|\leqslant 1}\|A_i(x/\delta)\|\leqslant\varepsilon/\delta$ при всех $i\in I$. □

Следствие. *Если последовательность операторов $\{A_n\}\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сходится по точечно на ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$, т.е. $\lim A_n(x)=A(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, то нормы операторов равномерно ограничены, т.е. $\sup\|A_n\|<\infty$.*

Так как последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится в $\boldsymbol{F}$, то она ограничена в $\boldsymbol{F}$.

Определение. Множество X называется *упорядоченным*, если в этом множестве X определено *отношение порядка* $x\leqslant y$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $x\leqslant x$; 2) если $x\leqslant y$ и $y\leqslant z$, то $x\leqslant z$; 3) если $x\leqslant y$ и $y\leqslant x$, то $x=y$.

Множество $A\subset X$ называется *цепью*, если $x\leqslant y$ или $y\leqslant x$ для всех пар $x,y\in A$. Элемент $y\in X$ называется *мажорантой* множества A, если $x\leqslant y$ при всех $x\in A$. Элемент $x\in X$ называется *максимальным* в X, если из $x\leqslant y$ следует $x=y$.

Например, отношением порядка является *отношение включения* множеств, т.е. $A\leqslant B$, если $A\subset B$. Следующая лемма принимается за аксиому теории множеств.

Лемма (Цо́рна). *Если любая цепь $A\subset X$ упорядоченного множества X имеет мажоранту, то в множестве X существует максимальный элемент.*

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}$ является нормированным пространством над полем $\mathbb{F}$. Отображение $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$ называется *линейным функционалом* на пространстве $\boldsymbol{E}$, если $f(x+y)=f(x)+f(y)$ и $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda\in\mathbb{F}$. Линейный функционал называется *ограниченным*, если его норма $\|f\|\doteqdot\sup_{x\in\boldsymbol{S}}|f(x)|$ конечна.

Нормированное пространство $\boldsymbol{E}^*\doteqdot\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\mathbb{F})$ всех ограниченных функционалов называется *сопряженным пространством* к пространству $\boldsymbol{E}$. По теореме о полноте пространства ограниченных операторов $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, сопряженное пространство $\boldsymbol{E}^*$ является ба́наховым пространством.

Пусть $L\subset M\subset\boldsymbol{E}$ подпространства линейного подпространства $\boldsymbol{E}$. Линейный функционал $g:M\to\mathbb{F}$ называется *продолжением* линейного функционала $f:L\to\mathbb{F}$, если $g(x)=f(x)$ для всех $x\in L$. В каждом множестве линейных функционалов, заданных на некоторых подпространствах $\boldsymbol{E}$, *отношение продолжения* является отношением порядка и обозначается через $\{f,L\}\leqslant\{g,M\}$.

Напомним, что *полунормой* на линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ называется функция $p:\boldsymbol{E}\to\mathbb{R}_+$, т.ч. $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ и $p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda\in\mathbb{F}$. При этом пара $(\boldsymbol{E},p)$ называется *полунормированным пространством*.

Теорема (Xáна–Бáнаха). *Если линейный функционал $f : L \to \mathbb{F}$ определён на линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$ полунормированного пространства $(\boldsymbol{E}, p)$ и $|f(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in L$, то существует такое его продолжение $g : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ на все пространство $\boldsymbol{E}$, что $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим действительный случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Пусть $e_1 \notin L$ и $M_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{L, e_1\}$ обозначает линейную оболочку L и e_1. Так как при всех $x, y \in L$

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x-e_1) + p(y+e_1),$$

то $f(x) - p(x-e_1) \leqslant p(y+e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Поэтому существует $c_1 \in \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - p(x-e_1) \leqslant c_1 \leqslant p(y+e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Заменяя x и y на x/λ, а затем умножая на λ, получим $f(x) \pm \lambda c_1 \leqslant p(x \pm \lambda e_1)$ при всех $\lambda > 0$ и $x \in L$.

Определим на подпространстве M_1 функционал по формуле $g_1(z) \doteqdot f(x) + \lambda c_1$, где $z = x + \lambda e_1$, $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $g_1(x) = f(x)$ при всех $x \in L$ и по доказанному $g_1(z) \leqslant p(z)$ при всех $z \in M_1$. Так как $p(-z) = p(z)$, то $|g_1(z)| \leqslant p(z)$ при всех $z \in M_1$. Таким образом, построили продолжение функционала f на подпространство M_1. Если существует элемент $e_2 \notin M_1$, то аналогично можно доказать существование продолжения функционала g_1 на подпространство $M_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{M_1, e_2\}$ и т.д.

Рассмотрим множество всех продолжений $\{g, M\}$ функционала f на некоторые подпространства $M \subset \boldsymbol{E}$, удовлетворяющих условию теоремы. Определяем в этом множестве отношение порядка, как отношение продолжения. Тогда для каждой цепи таких продолжений $\{g_i, M_i\}_{i \in I}$ существует мажоранта $\{g, M\}$, где $M = \cup_{i \in I} M_i$ и $g|_{M_i} = g_i$. Следовательно, по лемме Цóрна существует максимальное продолжение функционала f. Поскольку по доказанному выше каждый функционал можно продолжить на более широкое подпространство, то максимальное продолжение определено на всем $\boldsymbol{E}$ и удовлетворяет утверждению теоремы.

Переход от действительного к комплексному случаю производится следующим образом. Пусть $f(x) = u(x) + \boldsymbol{i}v(x)$, где $u(x) = \Re f(x)$ и $v(x) = \Im f(x)$. Так как в силу линейности $f(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}f(x)$, то $u(\boldsymbol{i}x) + \boldsymbol{i}v(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}u(x) - v(x)$ и значит $v(x) = -u(\boldsymbol{i}x)$, т.е. $f(x) = u(x) - \boldsymbol{i}u(\boldsymbol{i}x)$. Пусть функционал h определяет продолжение функционала u, удовлетворяющее условию теоремы. Тогда для функционала $g(x) \doteqdot h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)$ выполняется свойство линейности $g(\boldsymbol{i}x) = h(\boldsymbol{i}x) - \boldsymbol{i}h(-x) = \boldsymbol{i}(h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)) = \boldsymbol{i}g(x)$.

Следовательно, функционал g является линейным над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и задает продолжение функционала f. Докажем неравенство $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если $g(x) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}|g(x)|$, то $|g(x)| = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}g(x) = g(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = h(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) \leqslant p(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = p(x)$. Таким образом, функционал g удовлетворяет всем условиям теоремы. □

Следствие. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, то для каждого $f \in L^*$ существует $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|_L$.*

Для доказательства определим $p(x) \doteqdot \|f\|_L \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда по теореме существует функционал g, т.ч. $g|_L = f$ и $|g(x)| \leqslant \|f\|_L \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому имеем $\|g\| \leqslant \|f\|_L$, а в силу условия $g|_L = f$ получим равенство $\|g\| = \|f\|_L$.

Теорема. *Для каждого ограниченного функционала* $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ *существует единственная функция* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, *т.ч.* $F(a)=0$ *и непрерывна слева на* (a,b), *ее вариация* $\mathbf{V}_a^b(F) = \|\alpha\|$ *и* $\alpha(f) = \int_a^b f(x)\,dF(x)$ *для всех* $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$.

Доказательство. По следствию из теоремы Ха́на–Ба́наха функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ имеет продолжение на $\boldsymbol{B}[a,b]$ с сохранением его нормы. Обозначим его также через α. Пусть $F(t) \doteqdot \alpha(u_t)$, где $u_t(x) \doteqdot \chi_{[a,t)}(x)$ при $a \leqslant t < b$ и $u_b(x) = 1$. Тогда $F(a) = 0$. Докажем, что $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$. Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ разбиение отрезка $[a,b]$ и $\theta_k \doteqdot \arg\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big)$. Представим вариационную сумму в следующим виде:

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\big(\alpha(u_{x_k}) - \alpha(u_{x_{k-1}})\big) = \alpha\Big(\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}(u_{x_k} - u_{x_{k-1}})\Big).$$

Поскольку $\|\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}(u_{x_k} - u_{x_{k-1}})\| = 1$, то $\mathbf{V}_a^b(F) \leqslant \|\alpha\|$ и значит $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$.

Для каждой функции $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ введём ступенчатые функции следующего вида: $f_\tau(x) \doteqdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(u_{x_k}(x) - u_{x_{k-1}}(x))$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Из равномерной непрерывности f следует, что они сходятся $f_\tau \rightrightarrows f$ равномерно на $[a,b]$, когда диаметр разбиения $d_\tau \to 0$. Отсюда в силу непрерывности функционала $\alpha \in \boldsymbol{B}^*[a,b]$ получим

$$\alpha(f) = \lim_{d(\tau)\to 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \int_a^b f\,dF.$$

Поскольку $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, то она имеет точки разрыва первого рода и их не более, чем счётно. Интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса не зависит от изменения $F(t)$ на счётном множестве точек из (a,b). Поэтому $F(t)$ можно считать непрерывной слева в (a,b). При таком изменении $F(t)$ вариация не увеличится. Так как при $\|f\| \leqslant 1$

$$|\alpha(f)| = \Big|\int_a^b f\,dF\Big| \leqslant \sup_\tau \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\,|F(x_k) - F(x_{k-1})| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^b(F), \text{ то } \|\alpha\| = \mathop{\mathbf{V}}_a^b(F).$$

Докажем единственность. Пусть $t_n \nearrow t$ и функция $g_n \in \boldsymbol{C}[a,b]$, т.ч. $g_n(x) = 1$ при $x \in [a, t_n]$, $g_n(x) = 0$ при $x \in [t,b]$, а в интервале (t_n, t) является линейной. Тогда в силу непрерывности функции слева $F(t) = F(t-0)$ мы получим, что при $n \to \infty$

$$|\alpha(g_n) - F(t_n)| = \Big|\int_a^t g_n dF - \int_a^{t_n} dF\Big| = \Big|\int_{t_n}^t g_n dF\Big| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_{t_n}^t(F) \to 0.$$

Следовательно, имеет место равенство $\lim \alpha(g_n) = \lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t)$. □

Теорема. *Для каждого ограниченного функционала* $\alpha \in \boldsymbol{L}_p^*[a,b]$ *существует единственный элемент* $g \in \boldsymbol{L}_q[a,b]$, *т.ч.* $\alpha(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ *при всех* $f \in \boldsymbol{L}_p[a,b]$ *и* $\|\alpha\| = \|g\|_{\boldsymbol{L}_q}$, *где* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $1/p + 1/q = 1$.

Эту теорему мы оставим без доказательства. Из предыдущей теоремы вытекает, что сопряжённое пространство $\boldsymbol{C}^*[a,b]$ изометрически изоморфно подпространству $\boldsymbol{BV}_0[a,b]$ функций $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, $F(a) = 0$ и непрерывных слева в интервале (a,b), а в силу последней теоремы сопряжённое пространство $\boldsymbol{L}_p^*[a,b]$ будет изометрически изоморфным пространству $\boldsymbol{L}_q[a,b]$, где $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$ и $1/p + 1/q = 1$.

6 СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим нормированное пространство $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченных операторов.

Определение. Пусть $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ — последовательность операторов. Если $\{A_n\}$ сходится по норме, то $\{A_n\}$ называется *равномерно сходящейся*. Если $\{A_n\}$ сходится по точечно, т.е. существует предел $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то $\{A_n\}$ называется *сильно сходящейся* к A. Если существует предел $\lim \alpha(A_n(x)) = \alpha(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\alpha \in \boldsymbol{F}^*$, то $\{A_n\}$ называется *слабо сходящейся* к A

Пусть $M \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ — множество операторов. Если M ограничено по норме, то M называется *равномерно ограниченным*. Если M ограничено по точечно, т.е. множества $M_x \doteqdot \{y = A(x) \mid A \in M\}$ ограничены в $\boldsymbol{F}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то M называется *сильно ограниченным*. Если множества $M_{x,\alpha} \doteqdot \{y = \alpha(A(x)) \mid A \in M\}$ ограничены в $\mathbb{F}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\alpha \in \boldsymbol{F}^*$, то M называется *слабо ограниченным*.

1. *Из равномерной сходимости (ограниченности) следует сильная сходимость (ограниченность). Из сильной сходимости (ограниченности) следует слабая.*

2. *Если $\{A_n\}$ сходится сильно к A, то $\{A_n\}$ сильно ограничена и $\|A\| \leqslant \underline{\lim} \|A_n\|$.*

3. *Если $\boldsymbol{E}$ является банаховым пространством, то множество $M \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сильно ограничено тогда и только тогда, когда M равномерно ограничено.*

Доказательство 1 легко вытекает из определений сходимости и ограниченности. Поскольку по условию 2 последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится, то она ограниченна и значит $\{A_n\}$ сильно ограничена. Выберем индексы n_k, т.ч. $\underline{\lim} \|A_n\| = \lim \|A_{n_k}\|$. Тогда $\|A(x)\| = \lim \|A_{n_k}(x)\| \leqslant \lim \|A_{n_k}\| = \underline{\lim} \|A_n\|$ при всех $x \in \boldsymbol{S}$, т.е. $\|A\| \leqslant \underline{\lim} \|A_n\|$. Необходимость 3 получается из теоремы Ба́наха–Штейнга́уза, а достаточность 3 следует из неравенства $\|A(x)\| \leqslant \|A\| \, \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{L}_p[a,b]$ при $1 \leqslant p < \infty$ последовательность операторов $A_n f(x) \doteqdot \varphi_n(x) f(x)$, где $\varphi_n = \chi_{[a_n,b]}$ характеристическая функция отрезка $[a_n,b]$ и $a_n \searrow a$. Так как $\|A_n(f) - f\|^p = \int_a^{a_n} |f(x)|^p dx \to 0$, то $A_n \to I$ сходится сильно к тождественному оператору $I(f) = f$. Однако последовательность $\{A_n\}$ не сходится равномерно к оператору I, т.к. нормы $\|A_n - I\| = \|\chi_{[a,a_n]}\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = 1$ при $a_n \neq a$.

Лемма. *Если $\boldsymbol{E}$ является банаховым пространством и последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сходится сильно $A_n \to A$, то $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

Доказательство. В силу существования предела $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ линейный, а в силу следствия теоремы Ба́наха-Штейнга́уза $\sup \|A_n\| < \infty$. Так как $\|A\| \leqslant \underline{\lim} \|A_n\| \leqslant \sup \|A_n\|$, то $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. □

Для каждого множества $X \subset \boldsymbol{E}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ существует наименьшее линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, содержащее X, которое называется *линейной оболочкой* $L \doteqdot \mathrm{sp} X$. При этом говорят, что X порождает L. Множество $X \subset \boldsymbol{E}$ называется *полным* в $\boldsymbol{E}$, если замкнутая линейная оболочка $\overline{\mathrm{sp}} X = \boldsymbol{E}$.

Теорема (критерий сильной сходимости). *Последовательность ограниченных операторов* $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, *действующих в банаховых пространствах* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{F}$, *тогда и только тогда сходится сильно к* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, *когда* $\sup\|A_n\| < \infty$ *и найдется полная система элементов* $X \subset \boldsymbol{E}$, *т.ч.* $\lim A_n(x) = A(x)$ *при всех* $x \in X$.

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы Ба́наха–Штейнга́уза.

Докажем достаточность. Каждый элемент $y \in L$ из линейной оболочки $L \doteqdot \mathrm{sp}X$ может быть представлен линейной комбинацией $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k \in \mathbb{F}$ и $x_k \in X$. В силу линейности операторов существует предел $\lim A_n(y) = A(y)$ при всех $y \in L$. Поскольку линейная оболочка L всюду плотна в пространстве $\boldsymbol{E}$, то для любого $x \in \boldsymbol{E}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in L$, т.ч. $\|x-y\| < \varepsilon/4c$, где $c \doteqdot \sup\|A_n\| > 0$. Для этого элемента $y \in L$ выберем N, т.ч. $\|A_n(y) - A_m(y)\| < \varepsilon/2$ при всех $n,m \geqslant N$. Так как $\|A_n(x) - A_n(y)\| \leqslant \|A_n\|\,\|x-y\| < \varepsilon/4$, то при всех $n,m \geqslant N$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leqslant \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\| < \varepsilon.$$

Отсюда $\{A_n(x)\}$ является последовательностью Коши при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и в силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $\lim A_n(x) \doteqdot A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Таким образом, по лемме оператор A является линейным и ограниченным, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$. □

Определение. Сходимость по норме $\boldsymbol{E}^*$ обычно называют *сильной сходимостью*. Если существует предел $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *слабо* сходящейся* к f в $\boldsymbol{E}^*$. Если же для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ множества $M_x \doteqdot \{y = f(x) \mid f \in M\}$ ограничены в $\mathbb{F}$, то множество функционалов $M \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *слабо* ограниченным* в $\boldsymbol{E}^*$.

Из свойств сильной сходимости операторов следуют свойства слабой* сходимости.

1. *Если* $f_n \to f$ *сходится сильно, то* $f_n \to f$ *сходится слабо*.*

2. *Если* $f_n \to f$ *сходится слабо*, то* $\{f_n\}$ *слабо* ограничена и* $\|f\| \leqslant \underline{\lim}\|f_n\|$.

3. *Если* $\boldsymbol{E}$ *является банаховым пространством, то множество* $M \subset \boldsymbol{E}^*$ *слабо* ограничено тогда и только тогда, когда* M *сильно ограничено.*

Теорема (критерий слабой* сходимости). *Последовательность функционалов* $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}^*$, *действующих в банаховом пространстве* $\boldsymbol{E}$, *тогда и только тогда сходится слабо* к* $f \in \boldsymbol{E}^*$, *когда* $\sup\|f_n\| < \infty$ *и существует полная система элементов* $X \subset \boldsymbol{E}$, *т.ч.* $\lim f_n(x) = f(x)$ *при всех* $x \in X$.

Пример 2. Рассмотрим последовательность $\delta_{x_n} \subset \boldsymbol{C}^*[a,b]$ функционалов Дира́ка, т.е. $\delta_{x_n}(f) \doteqdot f(x_n)$ при всех $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. Если $x_n \to x$, то $\delta_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) = \delta_x(f)$ в силу непрерывности функций $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. Поэтому $\delta_{x_n} \to \delta_x$ сходится слабо* в $\boldsymbol{C}^*[a,b]$. Однако $\{\delta_{x_n}\}$ не сходится по норме, т.к. $\|\delta_{x_n} - \delta_x\| = 2$ при $x_n \neq x$.

Теорема. *Каноническое вложение* $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ *нормированного пространства* $\boldsymbol{E}$ *во второе сопряженное пространство* $\boldsymbol{E}^{**}$, *заданное по формуле* $J(x) \doteqdot \delta_x$, *где* $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ *есть функционал Дира́ка, является изометричным.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{E}^*$ обозначает единичный шар. Тогда $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $f \in \boldsymbol{S}^*$, т.е. $\|J(x)\| = \|\delta_x\| \leqslant \|x\|$. Докажем, что это неравенство является равенством. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим функционал $f(\lambda x) = \lambda\|x\|$, где $\lambda \in \mathbb{F}$, на линейной оболочке $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x\}$ элемента x. Так как норма $\|f\|_L = 1$, то в силу следствия из теоремы Ха́на–Ба́наха существует функционал $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g(x) = \|x\|$ и $\|g\| = 1$. Отсюда $\delta_x(g) = \|x\|$ и, следовательно, $\|\delta_x\| = \|x\|$. □

Замечание. Если каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ является сюръективным, то пространство $\boldsymbol{E}$ называется *рефлексивным*. В силу *теоремы Дже́ймса* банахово пространство $\boldsymbol{E}$ рефлексивно в том и в том случае, когда всякий функционал $f \in \boldsymbol{E}^*$ достигает своей нормы, т.е. существует $x \in \boldsymbol{S}$, т.ч. $f(x) = \|f\|$.

Например, нетрудно доказать, что конечномерные нормированные пространства являются рефлексивными. По теореме, сформулированной в конце предыдущей лекции, пространства $\boldsymbol{L}_p[a,b]$ при всех $1 < p < \infty$ являются рефлексивными.

Определение. Сходимость по норме $\boldsymbol{E}$ обычно называют *сильной сходимостью*. Если существует предел $\lim f(x_n) = f(x)$ для всех $f \in \boldsymbol{E}^*$, то последовательность элементов $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ называется *слабо сходящейся* к x в $\boldsymbol{E}$. Если же для каждого $f \in \boldsymbol{E}^*$ множества $M_f \doteqdot \{y = f(x) \mid x \in M\}$ ограничены в $\mathbb{F}$, то множество элементов $M \subset \boldsymbol{E}$ называется *слабо ограниченным* в $\boldsymbol{E}$.

Используя каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$, каждый элемент $x \in \boldsymbol{E}$ можно отождествить с функционалом Дира́ка $\delta_x \in \boldsymbol{E}^{**}$ на пространстве $\boldsymbol{E}^*$. Поэтому из свойств слабой* сходимости следуют свойства слабой сходимости:

1. *Если $x_n \to x$ сходится сильно, то $x_n \to x$ сходится слабо.*

2. *Если $x_n \to x$ сходится слабо, то $\{x_n\}$ сильно ограничена и $\|x\| \leqslant \varliminf \|x_n\|$.*

3. *Множество $M \subset \boldsymbol{E}$ является слабо ограниченным тогда и только тогда, когда множество M сильно ограничено в $\boldsymbol{E}$.*

Теорема (критерий слабой сходимости)**.** *Последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда сходится слабо к x, когда $\sup\|x_n\| < \infty$ и существует полная система функционалов $X \subset \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in X$.*

Для доказательства нужно рассмотреть каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ и применить критерий слабой* сходимости в пространстве $\boldsymbol{E}^{**}$.

Пример 3. Последовательность функций $\{f_n\} \subset \boldsymbol{C}[a,b]$ сходится слабо в $\boldsymbol{C}[a,b]$ в том и только в том случае когда равномерно ограничена и сходится $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке $x \in [a,b]$. В самом деле, для доказательства необходимости нужно рассмотреть функционалы Дирака $\delta_x \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$. Для доказательства достаточности всякий функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ представим по теореме Ри́сса интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса $\alpha(f) = \int_a^b f\,dF$. Так как интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса от непрерывной функции совпадает с интегралом Лебе́га–Сти́лтьеса, то можно применить теорему Лебе́га о предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть $\boldsymbol{E}$ является *сепарабельным банаховым* пространством. Тогда существует счетная и полная система элементов $X = \{x_k\}$ пространства $\boldsymbol{E}$. Определим метрику в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$ следующей формулой:

$$\rho(f,g) \doteqdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f(x_k) - g(x_k)|}{1 + |f(x_k) - g(x_k)|} \text{ при всех } f,g \in \boldsymbol{E}^*.$$

Проверим аксиомы метрики. Симметричность $\rho(f,g) = \rho(f,g)$ очевидна. Так как функция $\varphi(t) = t/(t+1)$ возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+$ и является полуаддитивной $\varphi(t+s) \leqslant \varphi(t) + \varphi(s)$ при всех $t,s \in \mathbb{R}_+$, то выполняется неравенство треугольника $\rho(f,g) \leqslant \rho(f,h) + \rho(h,g)$. Пусть $\rho(f,g) = 0$, тогда $f(x_k) = g(x_k)$ при всех k. Поэтому $f(y) = g(y)$ для всех $y \in L \doteqdot \mathrm{sp} X$ линейной оболочки X. Так как подпространство L всюду плотно в $\boldsymbol{E}$, то для любого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют $y_n \in L$, т.ч. $y_n \to x$. Отсюда в силу непрерывности функционалов $f(x) = \lim f(y_n) = \lim g(y_n) = g(x)$.

Лемма. *Последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \boldsymbol{S}^*$ тогда и только тогда сходится слабо*, когда она сходится в метрическом пространстве $(\boldsymbol{S}^*, \rho)$.*

Доказательство. Необходимость. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем m, т.ч. $1/2^m < \varepsilon/2$. Поскольку последовательность сходится $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке $x \in \boldsymbol{E}$, то найдется N, т.ч. $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$ при всех $n \geqslant N$ и $k = 1, \ldots, m$. Отсюда

$$\rho(f_n, f) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon \text{ при всех } n \geqslant N.$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N, т.ч. $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Тогда для любого k получим $|f_n(x_k) - f(x_k)| < 2^k \varepsilon (1 + |f_n(x_k) - f(x_k)|)$ при всех $n \geqslant N$. Отсюда вытекает неравенство $|f_n(x_k) - f(x_k)| \leqslant 2^k \varepsilon / (1 - 2^k \varepsilon)$ при всех $0 < \varepsilon < 1/2^k$ и $n \geqslant N$. Следовательно, существует предел $\lim f_n(x_k) = f(x_k)$ в каждой точке $x_k \in X$. Поэтому, применяя критерий слабой* сходимости функционалов, мы получим, что последовательность сходится $f_n(x) \to f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. □

Теорема. *Если $\boldsymbol{E}$ есть сепарабельное банахово пространство, то замкнутый единичный шар $\boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{E}^*$ является слабо* компактным.*

Доказательство. В силу леммы сходимость в метрическом пространстве $(\boldsymbol{S}^*, \rho)$ совпадает со слабой* сходимостью. Для доказательства слабой* компактности $\boldsymbol{S}^*$ требуется показать, что у любой последовательности $\{f_n\} \subset \boldsymbol{S}^*$ существует слабо* сходящаяся подпоследовательность. Поскольку последовательность чисел $\{f_n(x_1)\}$ является ограниченной, то у ней существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. Поскольку последовательность чисел $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ является ограниченной, то у ней существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$, и т.д.

Таким образом, диагональная последовательность $f_{n_k} = f_k^{(k)}$ сходится в каждой точке множества X. Поэтому выполнены условия критерия слабой* сходимости последовательности функционалов $\{f_{n_k}\}$. Значит эта последовательность сходится $f_{n_k}(x) \to f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и ее предел принадлежит $f \in \boldsymbol{S}^*$. □

7 ГИ́ЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение. *Скалярным произведением* $\langle x,y\rangle \doteqdot q(x,y)$ в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ называется функция $q:\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$ двух переменных $x,y\in\boldsymbol{E}$, обладающий следующими свойствами:

a) $q(x,y)=\overline{q(y,x)}$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$;

b) $q(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\lambda_1q(x_1,y)+\lambda_2q(x_2,y)$ при всех $x_1,x_2,y\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$;

c) $q(x,x)\geqslant 0$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $q(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

Пространство $(\boldsymbol{E},q)$, в котором задано скалярное произведение $\langle x,y\rangle\doteqdot q(x,y)$, называется *евклидовым пространством*. Функция $\|x\|\doteqdot\sqrt{\langle x,x\rangle}$ называется *евклидовой нормой*, а $\rho(x,y)\doteqdot\|x-y\|$ называется *евклидовой метрикой*.

1. Неравенство Коши́–Буняко́вского: $|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$ *при всех* $x,y\in\boldsymbol{E}$.

Пусть $z=tx+\lambda y$, где $\lambda\doteqdot\langle x,y\rangle/|\langle x,y\rangle|$ и $\langle x,y\rangle\neq 0$. Тогда при всех $t\in\mathbb{R}$ имеем

$$\langle z,z\rangle=t^2\langle x,x\rangle+t\big(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle+\lambda\langle y,x\rangle\big)+|\lambda|^2\langle y,y\rangle=t^2\|x\|^2+2t|\langle x,y\rangle|+\|y\|^2\geqslant 0\,.$$

Так как дискриминант этого трехчлена не положительный, то $|\langle x,y\rangle|^2-\|x\|^2\|y\|^2\leqslant 0$. При этом равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $z=tx+\lambda y=0$ при некотором $t\in\mathbb{R}$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимы.

2. Неравенство треугольника: $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ *при всех* $x,y\in\boldsymbol{E}$.

Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, получим неравенство треугольника

$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+2\Re\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

Равенство выполняется в том и только в том случае, когда $\Re\langle x,y\rangle=\|x\|\,\|y\|$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимыми $x=\lambda y$, где $\Re\lambda=|\lambda|\geqslant 0$, и значит $\lambda\geqslant 0$. Поэтому евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным.

3. Равенство параллелограмма: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$ *при* $x,y\in\boldsymbol{E}$.

Складывая два равенства $\langle x\pm y,x\pm y\rangle=\langle x,x\rangle\pm 2\Re\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle$, получим равенство параллелограмма $\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle$.

Теорема (фон Не́ймана)**.** *Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае является евклидовым пространством, когда в нем выполняется равенство параллелограмма.*

Доказательство достаточности приведено в учебнике Колмого́рова и Фомина́. Например, пространство $\boldsymbol{B}(X)$ ограниченных функций не является евклидовым пространством. В самом деле, если $f(x)=\chi_A(x)$ и $g(x)=\chi_B(x)$, где $A\cap B=\emptyset$, то $\|f\|=\|g\|=\|f+g\|=\|f-g\|=1$. Таким образом, равенство параллелограмма не выполняется в пространстве $\boldsymbol{B}(X)$.

4. Непрерывность скалярного произведения (как функции двух переменных).

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ и $c > 0$, т.ч. $\delta < \min\{c, \varepsilon/3c\}$, $\max(\|x_0\|, \|y_0\|) < c$. Тогда, если $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - y_0\| < \delta$, то по неравенству Коши́–Буняко́вского

$$|q(x,y) - q(x_0,y_0)| \leqslant |q(x-x_0,y_0)| + |q(x_0,y-y_0)| + |q(x-x_0,y-y_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x-x_0\|\,\|y_0\| + \|x_0\|\,\|y-y_0\|\|x-x_0\|\,\|y-y_0\| < \varepsilon\,.$$

5. Неравенство Бе́ппо Ле́ви. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{E}$, то для всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $y, z \in L$ выполняется неравенство*

$$\|y - z\| \leqslant \sqrt{\|x-y\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x-z\|^2 - d^2}\,,\ \textit{где}\ d = \rho(x,L)\,.$$

Пусть $u \doteqdot (ty+z)/(t+1) \in L$, тогда $\|x - u\| \geqslant d$ и выполняется неравенство

$$\|t(x-y) + (x-z)\|^2 = \|(t+1)(x-u)\|^2 \geqslant (t+1)^2 d^2 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Раскрывая левую норму и перенося правую часть этого неравенства влево, получим

$$t^2(\|x-y\|^2 - d^2) + 2t(\Re\langle x-y, x-z\rangle - d^2) + (\|x-z\|^2 - d^2) \geqslant 0 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Так как дискриминант этого трехчлена не положительный, то имеем неравенство $\Re\langle x-y, x-z\rangle - d^2 \leqslant \sqrt{(\|x-y\|^2 - d^2)(\|x-z\|^2 - d^2)}$, из которого следует, что

$$\|y-z\|^2 = \|(x-y) - (x-z)\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\Re\langle x-y, x-z\rangle + \|x-z\|^2 =$$
$$= \bigl(\|x-y\|^2 - d^2\bigr) - 2\bigl(\Re\langle x-y, x-z\rangle - d^2\bigr) + \bigl(\|x-z\|^2 - d^2\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \bigl(\|x-y\|^2 - d^2\bigr) + 2\sqrt{\bigl(\|x-y\|^2 - d^2\bigr)\bigl(\|x-z\|^2 - d^2\bigr)} + \bigl(\|x-z\|^2 - d^2\bigr).$$

Замечая, что это полный квадрат, получим неравенство Беппо́ Ле́ви.

Определение. Элементы $x, y \in \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначаются через $x \perp y$, если их скалярное произведение $\langle x, y\rangle = 0$. Элемент $x \in \boldsymbol{E}$ называется *ортогональным подпространству* $L \subset \boldsymbol{E}$ и обозначается $x \perp L$, если $\langle x, y\rangle = 0$ при всех $y \in L$. Два подпространства $L, M \subset \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначаются через $L \perp M$, если $\langle x, y\rangle = 0$ для всех $x \in L$ и $y \in M$.

Лемма. *Элемент $y \in L$ является наилучшим приближением элемента $x \in \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $x - y \perp L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle x-y, z\rangle \neq 0$ при некотором $z \in L \setminus 0$. Тогда, пологая $u \doteqdot y + \lambda z \in L$, где $\lambda \doteqdot \langle x-y, z\rangle / \langle z, z\rangle$, мы получим равенство

$$\|x-u\|^2 = \|(x-y) - \lambda z\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\Re\overline{\lambda}\langle x-y, z\rangle + |\lambda|^2\langle z, z\rangle = \|x-y\|^2 - |\lambda|^2\|z\|^2.$$

Отсюда следует, что $\|x-u\| < \|x-y\| = \rho(x,L)$. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть $\langle x-y, z\rangle = 0$ при всех $z \in L$. Тогда при всех $z \in L$ имеем

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x-z\rangle \leqslant \|x-y\|\,\|x-z\|.$$

Поэтому $\|x-y\| \leqslant \|x-z\|$ при всех $z \in L$, т.е. $\rho(x,L) = \|x-y\|$. $\square$

Теорема. *Пусть* $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1,\ldots,x_n\}$ *подпространство евклидова пространства, образованное линейно независимой системой элементов* $x_1,\ldots,x_n \in \boldsymbol{E}$. *Тогда величина наилучшего приближения элемента* $x \in \boldsymbol{E}\setminus L$ *вычисляется по формуле*

$$\rho(x,L) = \sqrt{\frac{D(x_1,\ldots,x_n,x)}{D(x_1,\ldots,x_n)}}, \quad \textit{где } D(x_1,\ldots,x_n) \doteqdot \det\begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1,x_n\rangle & \ldots & \langle x_n,x_n\rangle \end{pmatrix}$$

обозначает определитель Гра́ма.

Доказательство. Поскольку евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ строго нормировано, то по доказанному ранее элемент наилучшего приближения существует и единственный. Пусть $d^2 \doteqdot \rho(x,L)^2 = \|x-y\|^2 = \langle x-y,x-y\rangle$, где $y \in L$. Поскольку $\langle x-y,y\rangle = 0$, то $\langle y,x\rangle = \langle x,x\rangle - d^2$. Кроме того, из равенств $\langle x-y,x_k\rangle = 0$ следует, что $\langle y,x_k\rangle = \langle x,x_k\rangle$ при $k=1,\ldots,n$. Подставляя в эти равенства выражение $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, мы получим систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1\langle x_1,x_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x_1\rangle & = & \langle x,x_1\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots\cdots \\ \lambda_1\langle x_1,x_n\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x_n\rangle & = & \langle x,x_n\rangle \\ \lambda_1\langle x_1,x\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x\rangle & = & \langle x,x\rangle - d^2. \end{array}\right.$$

По теореме Кро́некера–Капе́лли ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов. Поэтому определитель расширенной матрицы равен нулю. Тогда, записывая последний столбец расширенной матрицы в виде суммы двух столбцов, получим равенство $D(x_1,\ldots,x_n,x) - d^2 D(x_1,\ldots,x_n) = 0$, что и требовалось доказать. В частности, полагая здесь $x = x_{n+1}$, по индукции получаем, что $D(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ тогда и только тогда, когда система $x_1,\ldots,x_n$ линейно не зависима. $\square$

Определение. *Ги́льбертовым пространством* $\boldsymbol{H}$ называется полное евклидово пространство относительно евклидовой метрики.

Пример 1. В пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ скалярное произведение и евклидова норма определяются по формулам $\langle f,g\rangle \doteqdot \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ и $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$. Так как $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ является полным нормированным пространством и его норма евклидова, то $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ будет ги́льбертовым пространством. Заметим, что пространства $\boldsymbol{L}_p[a,b]$ при $p \neq 2$ не являются ги́льбертовыми, т.к. при $f(x) = \chi_{(a,c)}(x)$ и $g(x) = \chi_{(c,b)}(x)$, где $a < c < b$, равенство параллелограмма не выполняется.

Пример 2. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ последовательностей $x = \{x_n\}$, где $x_n \in \mathbb{F}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$ сходится. Скалярное произведение в $\boldsymbol{\ell}_2$ и евклидова норма определяются по формулам $\langle x,y\rangle \doteqdot \sum_{n=1}^\infty x_n\overline{y_n}$ и $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2\right)^{1/2}$. Так как $\boldsymbol{\ell}_2$ является полным, то оно образует ги́льбертово пространство.

Пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ является частным случаем пространства $\boldsymbol{L}_2(E,\mu)$, когда $E = \mathbb{N}$ есть множество натуральных чисел и мера любой точки $n \in \mathbb{N}$ равна единице.

Теорема (о наилучшем приближении). *Если $L \subset \boldsymbol{H}$ замкнутое подпространство в ги́льбертова пространства $\boldsymbol{H}$, то для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y \in L$ наилучшего приближения подпространством L.*

Доказательство. Пусть $d = \rho(x,L) \doteqdot \inf_{y \in L} \|x-y\|$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $d^2 \leqslant \|x-y_n\|^2 < 1/n^2 + d^2$. По неравенству Бе́ппо Ле́ви $\|y_n - y_m\| < 1/n + 1/m$, т.е. $\{y_n\}$ является последовательностью Коши́ в L. В силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ и замкнутости подпространства L получим, что $\lim y_n = y \in L$. Переходя к пределу в неравенстве $d \leqslant \|x-y_n\| < \sqrt{d^2 + 1/n^2}$, имеем $\|x-y\| = \lim \|x-y_n\| = d$.

Таким образом, мы доказали существование элемента наилучшего приближения. Единственность элемента наилучшего приближения вытекает из ранее доказанной теоремы, т.к. ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ является строго нормированным. □

Теорема (об ортогональном разложении). *Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ является замкнутым подпространством в ги́льбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда пространство $\boldsymbol{H}$ представляется в виде прямой суммы $\boldsymbol{H} = L \oplus L^{\perp}$ подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid x \perp L\}$.*

Доказательство. В силу теоремы о наилучшем приближении для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует такой единственный элемент $y \in L$, что $\rho(x,L) = \|x-y\|$. Он называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство L. Положим $P(x) \doteqdot y$. Нетрудно проверить, что оператор P является линейным и норма $\|P\| = 1$.

Пусть $z \doteqdot x - y$. Тогда по лемме $z \in L^{\perp}$. Таким образом, имеем $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$. Докажем единственность этого разложения. Пусть $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, где $y_1, y_2 \in L$ и $z_1, z_2 \in L^{\perp}$. Из этого равенства следует, что $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^{\perp}$. Поэтому $\|y_1 - y_2\| = \|z_1 - z_2\| = 0$, т.е. $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$. □

Следствие. *Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{H}$ всюду плотно в ги́льбертовом пространстве в том и только в том случае, когда $L^{\perp} = 0$.*

Необходимость. Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ всюду плотно, т.е. $\overline{L} = \boldsymbol{H}$. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{H}$ существуют $x_n \in L$, т.ч. $x_n \to x$. Если элемент $y \in L^{\perp}$, то $\langle x, y \rangle = \lim \langle x_n, y \rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и, следовательно, $y \in \boldsymbol{H}^{\perp}$. Поэтому $L^{\perp} = \boldsymbol{H}^{\perp} = 0$.

Достаточность. Пусть $L^{\perp} = 0$. Тогда, как показано выше, $\overline{L}^{\perp} = L^{\perp} = 0$. Поэтому по теореме об ортогональном разложении имеет место равенство $\boldsymbol{H} = \overline{L} \oplus \overline{L}^{\perp} = \overline{L}$, т.е. подпространство L является всюду плотным в $\boldsymbol{H}$.

Пример 3. Покажем, что в неполном евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ утверждение этого следствия, вообще говоря, неверно. Рассмотрим пространство непрерывных функций $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C}[a,b]$ как подпространство в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ с соответствующим скалярным произведением. Пусть M обозначает подпространство в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$, состоящее из всех многочленов, ортогональных функции $\chi_{[a,c]}$, где $a < c < b$. Тогда $M \subset \boldsymbol{E}$ и его ортогональное дополнение в $\boldsymbol{E}$ равно $M^{\perp} = 0$ нулю. Однако M не является всюду плотным в $\boldsymbol{E}$, т.к. иначе M будет всюду плотным в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$, что невозможно.

8 ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть $\boldsymbol{H}$ обозначает гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел, а $\boldsymbol{H}^*$ его сопряженное пространство.

Теорема (о представлении)**.** *Для каждого $\alpha \in \boldsymbol{H}^*$ существует единственный элемент $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x) = \langle x, y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|\alpha\| = \|y\|$.*

Доказательство. Обозначим через $L = \ker(\alpha) \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid \alpha(x) = 0\}$ ядро функционала α. Поскольку $\alpha \in \boldsymbol{H}^*$ непрерывный функционал, то L является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{H}$. Если $L^\perp = 0$, то из следствия теоремы об ортогональном разложении имеем $L = \boldsymbol{H}$, т.е. в этом случае $\alpha = 0$ и элемент $y = 0$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 0$, т.е. $L \neq \boldsymbol{H}$. Тогда существует элемент $z \in L^\perp$, т.ч. $\|z\| = 1$. Для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ имеем $u = \alpha(x)z - \alpha(z)x \in L$, т.к. $\alpha(u) = 0$. Отсюда выполняется равенство $\langle u, z\rangle = \alpha(x)\langle z, z\rangle - \alpha(z)\langle x, z\rangle = \alpha(x) - \langle x, y\rangle = 0$, где $y \doteqdot \overline{\alpha(z)}z$. Таким образом, получаем представление $\alpha(x) = \langle x, y\rangle$ для всех $x \in \boldsymbol{H}$.

Для доказательства единственности представления допустим, что $\langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Тогда имеем $\langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и значит $y_1 - y_2 = 0$.

Из неравенства Коши́–Буняко́вского вытекает, что $|\alpha(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. При этом, если $x = y/\|y\|$, то $|\alpha(x)| = \|y\|$. Поэтому норма $\|\alpha\| = \|y\|$. □

Следствие. *Пространства $\boldsymbol{H} \simeq \boldsymbol{H}^*$ изометрически изоморфны.*

Пример 1. В пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$ всякий ограниченный функционал представляется в виде $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ при всех $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$, где $y = \{y_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$ — некоторый фиксированный элемент и норма этого функционала равна $\|\alpha\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{1/2}$.

Пример 2. В пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ всякий ограниченный функционал представляется в виде $\alpha(f) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, где $g \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$ — некоторая фиксированная функция и норма этого функционала равна $\|\alpha\| = \left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$.

Определение. Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *ортогональной*, если $e_n \perp e_m$ при всех $n \neq m$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ называется *ортонормированной* в $\boldsymbol{E}$, если она является ортогональной и $\|e_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Полная ортонормированная система называется *ортонормированным базисом* пространства $\boldsymbol{E}$.

Множество элементов $M \subset \boldsymbol{E}$ называется *тота́льным* в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$, если всякий элемент $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $x \perp y$ при всех $y \in M$, равен нулю $x = 0$.

Если задана ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$, то для каждого элемента $x \in \boldsymbol{E}$ определяются *коэффициенты Фурье́* $c_n \doteqdot \langle x, e_n\rangle$, а соответствующий ряд $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ называется *рядом Фурье́* элемента x. Говорят, что ряд Фурье сходится в пространстве $\boldsymbol{E}$, если последовательность его частичных сумм $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ имеет предел $x = \lim s_n$ по норме пространства $\boldsymbol{E}$.

1. Неравенство Бе́сселя*:* *$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Поскольку система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной, то для частичных сумм ряда Фурье $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ выполняется следующее равенство:

$$\|x-s_n\|^2 = \langle x-s_n, x-s_n\rangle = \langle x.x\rangle - 2\Re\langle x, s_n\rangle + \langle s_n, s_n\rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает неравенство Бéсселя.

2. Равенство Парсевáля: *равенство Парсевáля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ выполняется тогда и только тогда, когда ряд Фурье элемента $x \in \boldsymbol{E}$ сходится в $\boldsymbol{E}$.*

В самом деле, по доказанному выше $\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$. Следовательно, $\|x-s_n\| \searrow 0$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

3. Обобщенное равенство Парсевáля: *равенство Парсевáля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ выполняется в $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда в $\boldsymbol{E}$ справедливо обобщенное равенство Парсевáля $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d_n}$, где $c_n = \langle x, e_n\rangle$ и $d_n = \langle y, e_n\rangle$.*

Так как $\langle x + \lambda y, e_n\rangle = c_n + \lambda d_n$, то применяя равенство Парсевáля, получим

$$\|x+\lambda y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n + \lambda d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{\lambda d_n}) + |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2.$$

Поскольку $\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2$, то $\Re(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{\lambda d_n})$. Полагая здесь $\lambda = 1$, а затем $\lambda = \boldsymbol{i}$, получим обобщенное равенство Парсевáля.

Теорема (Стеклóва)**.** *Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда в $\boldsymbol{E}$ выполняется равенство Парсевáля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$, где $c_n \doteqdot \langle x, e_n\rangle$.*

Доказательство. Необходимость. Если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна, то для всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\varepsilon > 0$ существует $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, т.ч. $\|x - y\| < \varepsilon$. Пусть $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{n}$ обозначает линейную оболочку системы $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Так как $x - s_n \perp L_n$, то суммы s_n является наилучшим приближением элемента x подпространством L_n. Поэтому имеет место неравенство $\|x - s_m\| \leqslant \|x - s_n\| \leqslant \|x - y\| < \varepsilon$ при всех $m \geqslant n$. Отсюда ряд Фурье сходится в $\boldsymbol{E}$ и, следовательно, выполняется равенство Парсевáля.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Парсевáля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$. Так как $\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\|x - s_n\| < \varepsilon$. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$. □

Следствие. *Ортонормированная система полна в гильбертовом пространстве тогда и только тогда, когда она тотальна.*

В самом деле, если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна, то выполняется равенство Парсевáля. Так как из условия $c_n \doteqdot \langle x, e_n\rangle = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ следует $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 0$, то эта система тотальна. Обратно, если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является тотальной, то ортогональное дополнение ее линейной оболочки равно нулю. Поэтому в силу следствия теоремы об ортогональном разложении система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет полной.

В бесконечномерном евклидовом пространстве из тотальности ортонормированной системы не следует полнота, т.е. существуют тотальные ортонормированные системы, которые не являются ортонормированным базисом.

Пример 3. Пусть M есть подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{E} \doteqdot \boldsymbol{C}[a,b]$, построенное в примере 3 на предыдущей лекции. Оно состоит из многочленов и его ортогональное дополнение в $\boldsymbol{E}$ равно нулю. Поскольку многочлены, имеющие рациональные коэффициенты, всюду плотны в M и их счетное число, то, выбирая линейно независимую систему и применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, можно построить ортонормированную систему многочленов из M, которая будет тотальной в $\boldsymbol{E}$, но не является полной в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$.

Теорема (метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта)**.** *Для всякой полной линейно независимой системы элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ существует полная ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\boldsymbol{E}$, т.ч. ее элементы e_n являются линейными комбинациями элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n}$.*

Доказательство. Пусть $y_1 = x_1$ и $e_1 \doteqdot y_1/\|y_1\|$. Затем полагаем $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ и определим $e_2 \doteqdot y_2/\|y_2\|$, и т.д. На n-том шаге полагаем $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, e_k\rangle e_k$ и определим $e_n \doteqdot y_n/\|y_n\|$. Поскольку система $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ линейно независима, то $y_n \neq 0$ при всех n. Таким образом, матрица A_n преобразования системы $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ в систему $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ является треугольной

$$\begin{cases} e_1 &= a_{11}x_1 \\ e_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{kk} = 1/\|y_k\| \neq 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Обратная матрица также будет треугольной. Поэтому система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда полна система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нетрудно проверить, что явное выражение элементов e_n имеет следующий вид:

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_{n-1}\rangle & \cdots & \langle x_n, x_{n-1}\rangle \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

где $D_n \doteqdot D(x_1, \ldots, x_n) = \det\{\langle x_k, x_l\rangle\}_{k,l=1}^{n}$ обозначают определители Гра́ма. □

Теорема (Ри́сса–Фи́шера)**.** *Каждое сепарабельное ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ изометрически изоморфно, либо конечномерному евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, либо бесконечномерному пространству $\boldsymbol{\ell}_2$.*

Доказательство. Пусть задана счетная и полная в $\boldsymbol{H}$ система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, отбрасывая из этой системы все элементы, которые выражаются линейно через предыдущие, мы получим счетную, полную и линейно независимую систему элементов в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$.

Рассмотрим случай, когда эта система является бесконечной, т.е. $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. В случае, когда эта система конечна, т.е. $\dim \boldsymbol{H} < \infty$, доказательство полностью аналогично. Применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, построим счетную и полную в $\boldsymbol{H}$ ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме Стекло́ва всякий элемент $x \in \boldsymbol{H}$ представляется в виде ряда Фурье $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, сходящегося к x по норме пространства $\boldsymbol{H}$, где $c_n = \langle x, e_n \rangle$ коэффициенты Фурье́ элемента x.

Определим линейное отображение $F : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(x) = c$, где $c = \{c_n\}$ обозначает последовательность коэффициентов Фурье́ элемента $x \in \boldsymbol{H}$. Так как в силу теоремы Стекло́ва выполняется равенство Парсева́ля $\|F(x)\| = \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то отображение F является изометричным. Осталось доказать, что образ этого отображения $F(\boldsymbol{H})$ совпадает с пространством $\boldsymbol{\ell}_2$.

Для каждого элемента $c = \{c_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$ рассмотрим последовательность частичных сумм $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ ряда Фурье. Так как в силу свойства ортогональности

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j} \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0 \text{ при } n, m \to \infty,$$

то $\{s_n\}$ является последовательностью Коши́ и в силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ существует предел $\lim s_n = x$ по норме $\boldsymbol{H}$. Применяя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle x, e_n \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle s_m, e_n \rangle = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $F(x) = c$ Таким образом, $F : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ является изометричным и биективным отображением гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$ на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$. □

Пример 4. Докажем, что тригонометрическая система $e_n(x) \doteqdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}nx}/\sqrt{2\pi}$, где $n \in \mathbb{Z}$, является ортонормированной и полной в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$.

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(n-m)x} dx = \frac{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(n-m)\pi} - \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}(n-m)\pi}}{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)} = 0 \ \ (n \neq m), \quad \langle e_n, e_n \rangle = 1,$$

т.е. система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированной в пространстве $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$.

Докажем полноту. Так как множество непрерывных функций $\boldsymbol{C}[-\pi, \pi]$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$, то для любой $f \in \boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $g \in \boldsymbol{C}[-\pi, \pi]$, т.ч. $\|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/3$. Изменяя функцию g на достаточно малом отрезке $[\pi - \delta, \pi]$ и полагая там ее линейной, мы построим функцию $h \in \boldsymbol{C}[-\pi, \pi]$, т.ч. $h(-\pi) = h(\pi)$ и $\|g - h\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/3$. Тогда по теореме Вейерштрасса об аппроксимации найдется тригонометрический полином $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}kx}$, т.ч. $\|h - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/3\sqrt{2\pi}$. Так как $\|h - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \sqrt{2\pi}\|h - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/3$, то выполняется неравенство

$$\|f - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|g - h\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|h - T\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon.$$

Таким образом, тригонометрическая система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ полна в $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$.

При помощи теоремы Ри́сса-Фи́шера определяется изометрический изоморфизм пространства $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$ на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(f) = c$, где $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ обозначает совокупность всех коэффициентов Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$, т.е. $c_n \doteqdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}nx} dx/\sqrt{2\pi}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. В силу теоремы Стекло́ва выполняется равенство Парсева́ля $\|F(f)\| = \|f\|$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$. Поэтому указанное отображение $F : \boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi] \to \boldsymbol{\ell}_2$ является изометричным и, как показано в теореме, его образ совпадает с $\boldsymbol{\ell}_2$.

9 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ́

Определение. *Прямым* и *обратным* преобразованием Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ называются операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$, определенные по формулам

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-ixy} dy \quad \text{и} \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{ixy} dy, \quad \text{где } \varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}.$$

Лемма (Ри́мана-Лебе́га). *Преобразование Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ обладает следующими свойствами: $\widehat{f} \in \boldsymbol{C}(\mathbb{R})$, $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}$ и $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.*

Доказательство. Ясно, что $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa^m \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}$. Пусть $\tau_t f(x) \doteqdot f(x-t)$, тогда

$$|\tau_t \widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)| \leqslant \varkappa \textstyle\int_{\mathbb{R}} |f(y)\,(e^{i(x+t)y} - e^{-ixy})|\, dy = 2\varkappa \textstyle\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|\sin\frac{ty}{2}|\, dy.$$

По теореме Лебе́га последний интеграл стремится к нулю при $t \to 0$. Поэтому функция $\widehat{f}$ равномерно непрерывна. Так как при $t \doteqdot \pi/x$ имеем $\widehat{\tau_t f} = -\widehat{f}$, то

$$|\widehat{f}(x)| \leqslant \tfrac{1}{2} \|\widehat{f} - \widehat{\tau_t f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \tfrac{\varkappa}{2} \|f - \tau_t f\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant \tfrac{\varkappa}{2} \big(\|f-g\|_{\boldsymbol{L}_1} + \|g - \tau_t g\|_{\boldsymbol{L}_1} + \|\tau_t g - \tau_t f\|_{\boldsymbol{L}_1} \big).$$

Для $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ и непрерывную финитную функцию $g \in \boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$, т.ч.

$$\|f-g\|_{\boldsymbol{L}_1} = \|\tau_t(f-g)\|_{\boldsymbol{L}_1} < \tfrac{2\varepsilon}{3\varkappa}, \quad \|g - \tau_t g\|_{\boldsymbol{L}_1} < \tfrac{2\varepsilon}{3\varkappa}$$

при всех $|t| = |\pi/x| < \delta$. Тогда получим $|\widehat{f}(x)| < \varepsilon$ при всех $|x| > \pi/\delta$. □

Теорема (условие Ди́ни). *Если функция $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и в точке $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие Дини $\int_{-\delta}^{\delta} \big|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\big|\, dt < \infty$, где $\delta > 0$, то существует предел, равный*

$$\lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = f(x).$$

Доказательство. Меняя порядок интегрирования по теореме Фуби́ни, имеем

$$\varkappa \textstyle\int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \big(\int_{-n}^{n} e^{i(x-z)y} dy \big)\, dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{x-z}\, dz.$$

Полагая в интеграле $t = x - z$ и используя равенство $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$, мы получим

$$\varkappa \textstyle\int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin nt}{t}\, dt - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt =$$

$$= \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{|t|\leqslant\delta} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt\, dt - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|t|>n\delta} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Первые два интеграла стремятся к нулю при $n \to \infty$ по лемме Ри́мана–Лебе́га, а последний интеграл стремится к нулю в силу его сходимости в бесконечности. □

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$.

1. Формулы умножения. *Если $f, g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, то выполняются равенства*

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widetilde{g}(x)\, dx.$$

В самом деле, применяя теорему Фуби́ни, получаем равенство

$$\varkappa \textstyle\int_{\mathbb{R}} \big(\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-ixy} dy \big)\, g(x)\, dx = \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y) \big(\int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-ixy} dx \big)\, dy.$$

2. Формулы дифференцирования. *Если функция* $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ *и* $x^n f(x) \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, *то* $\widehat{f}^{(k)}(x) = \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^k f(y)}$ *при всех* $x \in \mathbb{R}$ *и* $k \leqslant n$. *Если функция имеет производные* $f^{(k)} \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ *при* $k \leqslant n$, *то* $\widehat{f^{(k)}}(x) = (\boldsymbol{i}x)^k \widehat{f}(x)$ *при всех* $x \in \mathbb{R}$ *и* $k \leqslant n$.

Первая формула доказывается дифференцированием преобразования Фурье́ под знаком интеграла Лебе́га. Доказательство второй формулы получается при помощи интегрирования по частям, т.к. $\lim_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$ при $k = 1, \ldots, n-1$.

3. Формула свертки. *Свертка* $f * g(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy$ *функций* $f, g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ *принадлежит* $f * g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ *и* $\varkappa \widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x)\, \widehat{g}(x)$ *при всех* $x \in \mathbb{R}$.

Линейное преобразование $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное по формуле $A(x, y) = (y, x-y)$, отображает измеримые множества в измеримые. Поэтому из измеримости функции $f(x)g(y)$ вытекает измеримость функции $f(y)g(x-y)$. Применяя теорему Фуби́ни, получим $\|f * g\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_1} \|g\|_{\boldsymbol{L}_1}$. Таким образом, свертка $f * g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Переставляя порядок интегрирования при помощи теоремы Фуби́ни, имеем

$$\varkappa^2 \int_{\mathbb{R}} \big(\int_{\mathbb{R}} f(z) g(y-z)\, dz \big)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy} dy = \varkappa^2 \int_{\mathbb{R}} f(z) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xz} \big(\int_{\mathbb{R}} g(y-z)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}x(y-z)} dy \big)\, dz.$$

Производя здесь замену переменных, получаем указанное равенство.

Определение. Бесконечно дифференцируемая функция $\varphi \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R})$ называется *быстро убывающей*, если $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n \varphi^{(k)}(x)| < \infty$ при всех $n, k \in \mathbb{Z}_+$. Пространство $\mathscr{S}$ всех быстро убывающих функций называется *пространством Шва́рца*.

Лемма. *Пространство* $\mathscr{S}$ *образует всюду плотное подпространство в* $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ *и преобразование Фурье отображает его в себя биективно и изометрично.*

Доказательство. Как известно, что множество ступенчатых финитных функций всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Так как каждая ступенчатая функция является линейной комбинацией функций $\chi_{(a,b)}$, а каждая такая функция является пределом в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ последовательности финитных функций $\varphi_n(x) = \int_{a+1/n}^{b-1/n} \omega_n(x-y)\, dy$ пространства $\mathscr{S}$, где $\omega_n(t) = c_n e^{\frac{1}{n^2t^2-1}}$ при $|t| < 1/n$, $\omega_n(t) = 0$ при $|t| \geqslant 1/n$ и $\int_{\mathbb{R}} \omega_n(t)\, dt = 1$, то даже множество финитных функций из $\mathscr{S}$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

Если $\varphi \in \mathscr{S}$, то, применяя формулы дифференцирования, получим $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}$. Так как по условию Ди́ни $\widetilde{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(x)$, то из формулы умножения вытекает, что

$$\|\varphi\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\widehat{\varphi}}(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\varphi}(x)} dx = \|\widehat{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Аналогичное равенство в $\mathscr{S}$ имеет место для обратного преобразования Фурье. □

Определение. Преобразованием Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ называется предел преобразований Фурье́ функций $f_n \doteqdot f \chi_{(-n,n)}$ по норме пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, т.е.

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} f(y)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}xy} dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} f(y)\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}xy} dy.$$

Теорема (Планшере́ля). *Преобразование Фурье́ в пространстве* $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ *является унитарным оператором, т.е. биективным и изометричным.*

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и $f(x) = 0$ при всех $x \notin (-r,r)$. Тогда $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и существуют финитные функции $\varphi_n \in \mathscr{S}$, т.ч. $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-r,r]$ и $\|f-\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$. Так как выполняются неравенства $\|\widehat{f}-\widehat{\varphi}_n\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa\|f-\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant \varkappa\sqrt{2r}\|f-\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$, то последовательность $\widehat{\varphi}_n \rightrightarrows \widehat{f}$ сходится равномерно к непрерывной функции $\widehat{f}$. Поскольку $\{\varphi_n\}$ есть последовательность Коши́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и имеет место равенство $\|\varphi_n-\varphi_m\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{\varphi}_n-\widehat{\varphi}_m\|_{\boldsymbol{L}_2}$, то $\{\widehat{\varphi}_n\}$ является последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Поэтому $\widehat{\varphi}_n \to \widehat{f}$ сходится в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и $\|f\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|\widehat{\varphi}_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2}$.

Предположим теперь, что $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и $f_n(x) \doteqdot f(x)\chi_{(-n,n)}(x)$. Тогда $\|f-f_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$. Поэтому $\{f_n\}$ является последовательностью Коши. Так как по доказанному выше $\|f_n-f_m\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{f}_n-\widehat{f}_m\|_{\boldsymbol{L}_2}$, то $\{\widehat{f}_n\}$ также будет последовательность Коши и значит существует предел $\lim\widehat{f}_n \doteqdot \widehat{f}$ по норме пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. При этом выполняется равенство Парсева́ля $\|f\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|f_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|\widehat{f}_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Аналогичным образом существует предел $\lim\widetilde{f}_n \doteqdot \widetilde{f}$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и выполняется равенство $\|f\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widetilde{f}\|_{\boldsymbol{L}_2}$.

В силу леммы найдутся функции $\varphi_n \in \mathscr{S}$, т.ч. $\varphi_n \to f$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. По доказанному выше $\varphi_n = \widehat{\widetilde{\varphi_n}} \to \widehat{\widetilde{f}}$. Поэтому образ оператора Фурье совпадает с $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. □

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

1. Формулы умножения. *Если $f,g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, то выполняются равенства*

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widetilde{g}(x)\,dx.$$

Пусть $f_n(x) \doteqdot f(x)\chi_{(-n,n)}(x)$ и $g_n(x) \doteqdot g(x)\chi_{(-n,n)}(x)$, тогда достаточно применить непрерывность скалярного произведения и аналогичные равенства в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$.

2. Формулы обращения. *Если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, то $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при почти всех $x \in \mathbb{R}$, т.е. $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f) = f$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.*

Первое равенство $\widehat{\widetilde{f}} = f$ доказано в конце доказательства теоремы Планшере́ля. Аналогично доказывается второе равенство $\widetilde{\widehat{f}} = f$.

3. Формула свертки. *Свертка $f*g(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy$ функций $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ принадлежит $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и $\varkappa\widehat{f*g}(x) = \widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.*

Как было показано выше из измеримости функции $f(x)g(y)$ следует измеримость функции $f(y)g(x-y)$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем

$$\textstyle|f*g(x)|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|^2 dy.$$

Интегрируя это неравенство по теореме Фуби́ни, а затем делая замену переменных, получим $\|f*g\|^2_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f\|^2_{\boldsymbol{L}_1}\|g\|^2_{\boldsymbol{L}_2}$. Поэтому $f*g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и свертка непрерывна по второму аргументу в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Пусть $g_n(x) \doteqdot g(x)\chi_{(-n,n)}(x)$, тогда $g_n \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и $g_n \to g$ сходится в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Применяя формулу свертки в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, получим

$$\varkappa\widehat{f*g}(x) = \lim\nolimits_{n\to\infty} \varkappa\widehat{f*g_n}(x) = \lim\nolimits_{n\to\infty} \widehat{f}(x)\,\widehat{g_n}(x) = \widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x),$$

где предел берется в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Таким образом, $\varkappa\widehat{f*g}(x) = \widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

Определение. *Функциями Эрми́та* называются следующие функции:

$$h_n(x) \doteqdot c_n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где функции $H_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ называются *многочленами Эрми́та.*

Система функций Эрми́та обладает свойством ортогональности в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. В самом деле, интегрируя по частям n раз, получим при всех $n > k$

$$\int_{\mathbb{R}} h_k(x)\, h_n(x)\, dx = c_n \int_{\mathbb{R}} H_k(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = c_n(-1)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} H_k(x)\, dx = 0.$$

При $k = n$ получим $\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x)\, dx = c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}$. Поэтому при $c_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$ система функций Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной.

Лемма. *Если функция $\rho(t)$ измерима и $0 < |\rho(x)| \leqslant a e^{-b|x|}$ п.в. на $\mathbb{R}$, где $a, b > 0$, то система функций $\varphi_n(x) \doteqdot x^n \rho(x)$ при $n \geqslant 0$ полна в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Докажем, что если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и ортогональна $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\varphi_n(x)}\, dt = 0$ всем функциям $\varphi_n(x)$, то $f(x) = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что функция

$$F(z) \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\rho(x)}\, e^{-\boldsymbol{i}xz} dx, \quad z = u + \boldsymbol{i}v \in \mathbb{C},$$

голоморфна в полосе $|\Im z| < b$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ее производные в нуле

$$F^{(n)}(z)|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\rho(x)}\, (-\boldsymbol{i}x)^n e^{-\boldsymbol{i}xz} dt|_{z=0} = (-\boldsymbol{i})^n \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\varphi_n(x)}\, dt = 0.$$

Поэтому $F(z) = 0$ при всех $|\Im z| < b$. В частности, функция $F(u) = 0$ при всех $u \in \mathbb{R}$. Отсюда по формуле обращения преобразования Фурье́ получим, что произведение $f(x)\overline{\rho(x)} = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, функция $f(x) = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. $\square$

Теорема. *Система функций Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье́, т.е. $\widehat{h_n}(x) = \lambda_n h_n(x)$ при всех $n \geqslant 0$, где $\lambda_n = (-\boldsymbol{i})^n$ собственные значения.*

Доказательство. Поскольку функции Эрми́та $h_n(x)$ получаются ортогонализацией системы функций $\varphi_n(x) = x^n \rho(x)$, где $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$, то полнота следует из леммы. Докажем, что $h_n(x)$ является собственной функцией оператора Фурье́.

$$\widehat{h_n}(x) = \varkappa \int_{\mathbb{R}} h_n(y)\, e^{-\boldsymbol{i}xy} dy = \varkappa c_n \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{y^2 - 2\boldsymbol{i}xy}{2}} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} dy =$$

$$= \varkappa c_n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(y-\boldsymbol{i}x)^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} dy = \varkappa c_n (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{\frac{(y-\boldsymbol{i}x)^2}{2}} dy =$$

$$= \varkappa c_n (-\boldsymbol{i})^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} e^{\frac{(y-\boldsymbol{i}x)^2}{2}} dy = \varkappa c_n (-\boldsymbol{i})^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\boldsymbol{i}xy + \frac{x^2}{2}} dy.$$

Используя в последнем выражении преобразование Фурье́ функции $\rho(x)$, равное $\widehat{\rho}(x) = \rho(x)$ (см. примеры преобразований Фурье́ в книге Колмого́рова и Фомина́), мы получим $\widehat{h_n}(x) = c_n(-\boldsymbol{i})^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-\boldsymbol{i})^n h_n(x)$. $\square$

10 СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\boldsymbol{E}$ обозначает нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\boldsymbol{E}^*$ его сопряженное пространство, состоящее из всех линейных ограниченных функционалов $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$ с нормой $\|f\|\doteqdot\sup_{x\in\boldsymbol{S}}|f(x)|$, где $\boldsymbol{S}\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\mid\|x\|\leqslant 1\}$ есть единичный шар в $\boldsymbol{E}$. Значения линейного функционала $f\in\boldsymbol{E}^*$ на элементе $x\in\boldsymbol{E}$ далее обозначаются через $f(x)\doteqdot\langle f,x\rangle$.

Определение. Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n\subset\boldsymbol{E}$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{i=1}^n\lambda_i e_i=0$ следует, что $\lambda_i=0$ при $i=1,\ldots,n$.

Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n\subset\boldsymbol{E}^*$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{j=1}^n\lambda_j f_j(x)=0$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ следует, что $\lambda_j=0$ при $j=1,\ldots,n$.

Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n\subset\boldsymbol{E}$ и система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n\subset\boldsymbol{E}^*$ называется *биортогональными*, если $\langle f_j,e_i\rangle=0$ при всех $i\neq j$ и $\langle f_i,e_i\rangle=1$.

Бесконечная система элементов называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима. Максимальная линейно независимая система элементов в $\boldsymbol{E}$ называется *базисом Га́меля*. Его существование вытекает из леммы Цо́рна. Размерностью $\dim\boldsymbol{E}$ называется мощность базиса Га́меля.

Последовательность элементов $\{e_i\}_{i=1}^\infty\subset\boldsymbol{E}$ называется *базисом* нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, если каждый элемент $x\in\boldsymbol{E}$ имеет единственное представление в виде сходящегося по норме ряда $x=\sum_{i=1}^\infty\lambda_i e_i$. Если, кроме того, функционалы $f_j(x)\doteqdot\lambda_j$, определенные при помощи этого представления, принадлежат $f_j\in\boldsymbol{E}^*$, то система $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ называется *базисом Ша́удера* в пространстве $\boldsymbol{E}$. В банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ любой базис является базисом Ша́удера и система $\{f_j\}_{j=1}^\infty\subset\boldsymbol{E}^*$ образует биортогональную систему функционалов к системе $\{e_i\}_{i=1}^\infty\subset\boldsymbol{E}$.

Теорема. *Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n\subset\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда имеет биортогональную систему функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n\subset\boldsymbol{E}^*$, когда линейно независима.*

Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n\subset\boldsymbol{E}^*$ тогда и только тогда имеет биортогональную систему элементов $\{e_i\}_{i=1}^n\subset\boldsymbol{E}$, когда линейно независима.

Доказательство. Вначале докажем второе утверждение теоремы. Необходимость. Предположим, что имеет место равенство $\sum_{j=1}^n\lambda_j f_j(x)=0$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Тогда, полагая $x=e_j$, в силу биортогональности получим $\lambda_j=0$ при $j=1,\ldots,n$.

Достаточность. При $n=1$ имеем $f_1\neq 0$. Поэтому найдется $e_1\in\boldsymbol{E}$, т.ч. $f_1(e_1)=1$. По индукции предположим, что для $n-1$ утверждение верно. Тогда существуют $x_i\in\boldsymbol{E}$, т.ч. $f_j(x_i)=0$ при $i\neq j$ и $f_i(x_i)=1$, где $i,j=1,\ldots,n-1$. Для каждого $x\in\boldsymbol{E}$ положим $y\doteqdot x-\sum_{i=1}^{n-1}f_i(x)x_i$. Тогда элемент $y\in\boldsymbol{E}$ удовлетворяет условию $f_j(y)=0$ при всех $j=1,\ldots,n-1$ и при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Если выполняется равенство $f_n(y)=0$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, то $f_n(x)=\sum_{i=1}^{n-1}f_i(x)f_n(x_i)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, что противоречит условию линейной независимости функционалов. Поэтому найдется элемент $x\in\boldsymbol{E}$, для которого $f_n(y)\neq 0$. Полагая $e_n\doteqdot y/f(y)$ и $e_i\doteqdot x_i-f_n(x_i)e_n$ при $i=1,\ldots,n-1$, мы получим биортогональную систему элементов в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Для доказательства первого утверждения рассмотрим вложение $J: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ во второе сопряженное пространство, заданное по формуле $J(x) \doteqdot \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ есть функционал Дирака $\delta_x \in \boldsymbol{E}^{**}$. Так как система функционалов $\{\delta_{e_i}\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}^{**}$ линейно независима тогда и только тогда, когда $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейно независима, то по доказанному выше существует биортогональная система $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$. $\square$

Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ — нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначает пространство ограниченных линейных операторов $A: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ с нормой $\|A\| \doteqdot \sup_{x \in \boldsymbol{S}} \|A(x)\|$. Следующие множества:

$$\ker A \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid A(x) = 0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A \doteqdot \{y \in \boldsymbol{F} \mid y = A(x), x \in \boldsymbol{E}\}$$

называются соответственно *ядром* и *образом* линейного оператора A.

1. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то ядро $\ker A$ является замкнутым линейным подпространством $\boldsymbol{E}$, а образ $\operatorname{Im} A$ образует линейное подпространство $\boldsymbol{F}$.*

Пусть элементы $x, y \in \ker A$. Тогда $A(x+y) = A(x) + A(y) = 0$ и $A(\lambda x) = \lambda A(x) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $x + y \in \ker A$ и $\lambda x \in \ker A$. Пусть $x = \lim x_n$ и $x_n \in \ker A$, тогда в силу непрерывности оператора $A(x) = \lim A(x_n) = 0$, т.е. $x \in \ker A$.

Пусть элементы $u, v \in \operatorname{Im} A$. Тогда получаем $u + v = A(x) + A(y) = A(x+y) \in \operatorname{Im}(A)$ и $\lambda u = \lambda A(x) = A(\lambda x) \in \operatorname{Im} A$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $u + v \in \operatorname{Im} A$ и $\lambda u \in \operatorname{Im} A$.

2. *Для того чтобы линейный оператор $A: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ являлся биективеным, необходимо и достаточно, чтобы $\ker A = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$.*

Если A является биективным, то $\ker A = A^{-1}(0) = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$. Обратно, если $\ker A = 0$, то из равенства $A(x) = A(y)$ следует, что $A(x - y) = 0$ и, значит, $x - y = 0$. Отсюда оператор A является биективным отображением на свой образ $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$.

Определение. *Произведением операторов* $A: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ и $B: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ называется оператор $BA: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{G}$, определенный по формуле $BA(x) \doteqdot B(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Оператор $B: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ называется *обратным к оператору* $A: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, если имеют место равенства $BA = I_{\boldsymbol{E}}$ и $AB = I_{\boldsymbol{F}}$, где $I_{\boldsymbol{E}}$ и $I_{\boldsymbol{F}}$ — тождественные операторы, т.е. $I_{\boldsymbol{E}}(x) = x$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. *Обратный оператор* обозначается через $A^{-1} \doteqdot B$.

1. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то $BA \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\|BA\| \leqslant \|B\|\,\|A\|$.*

В самом деле, имеем $\|BA(x)\| \leqslant \|B\|\,\|A(x)\| \leqslant \|B\|\,\|A\|\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

2. *Если оператор $A: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ является линейным и биективным, то обратный оператор $A^{-1}: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ также является линейным и биективным.*

В самом деле, если существует обратный оператор, то он является биективным. Докажем линейность оператора A^{-1}. Пусть $A^{-1}(u) = x$, $A^{-1}(v) = y$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, тогда

$$A^{-1}(u+v) = A^{-1}(Ax + Ay) = A^{-1}A(x+y) = x + y = A^{-1}(u) + A^{-1}(v),$$
$$A^{-1}(\lambda u) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}(u).$$

Определение. Оператор $A^*: \boldsymbol{F}^* \to \boldsymbol{E}^*$ называется *сопряженным к оператору* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, если имеет место равенство $\langle A^*f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.е. для каждого $f \in \boldsymbol{F}^*$ его образ $A^*(f) = g$ равен $g(x) \doteqdot f(Ax)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

1. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то $A^* \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Докажем, что A^* является линейным оператором. Пусть $f, g \in \boldsymbol{F}^*$ и $A^*(f+g) = h$. Тогда имеем $h(x) = (f+g)(Ax) = f(Ax)+g(Ax)$, т.е. $A^*(f+g) = A^*f + A^*g$. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $A^*(\lambda f) = h$, тогда получим $h(x) = (\lambda f)(Ax) = \lambda f(Ax)$, т.е. $A^*(\lambda f) = \lambda A^* f$.

Докажем равенство норм. Так как $A^*f(x) = f(Ax)$, то по свойству произведения операторов имеем$\|A^*f\| \leqslant \|f\|\,\|A\|$, т.е. $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ по теореме Ха́на–Ба́наха существует $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $f(Ax) = \|Ax\|$ и $\|f\| = 1$. Поэтому $\|Ax\| = A^*f(x) \leqslant \|A^*f\|\,\|x\| \leqslant \|A^*\|\,\|x\|$. Следовательно, имеем $\|A^*\| = \|A\|$.

2. *Если операторы $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то $(BA)^* = A^*B^*$. В частности, если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является биективным, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

В самом деле, имеем $(BA)^*g(x) = g(BAx) = B^*g(Ax) = A^*B^*g(x)$ при всех $g \in \boldsymbol{G}^*$ и $x \in \boldsymbol{E}$. Второе утверждение следует из определения обратного оператора и теоремы Ба́наха об обратном операторе, которую мы докажем на следующей лекции.

Определение. Пусть $V \subset \boldsymbol{E}$ и $W \subset \boldsymbol{E}^*$ некоторые подмножества, тогда

$$V^{\perp} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}^* \mid f(x) = 0, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = 0, f \in W\}$$

называются соответственно *аннулятором** V и *аннулятором* W. Заметим, что эти множества $W_{\perp} = \bigcap_{f \in W} \ker f$ и $V^{\perp} = \bigcap_{x \in V} \ker \delta_x$ образуются как пересечение ядер ограниченных функционалов. Поэтому будут замкнутыми подпространствами.

Теорема. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то имеют место следующие свойства:*

$$1)\ \ker A = (\operatorname{Im} A^*)_{\perp}; \qquad 3)\ \operatorname{Im} A \subset (\ker A^*)_{\perp};$$
$$2)\ \ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}; \qquad 4)\ \operatorname{Im} A^* \subset (\ker A)^{\perp}.$$

Доказательство. Доказательство этих соотношений легко вывести из указанных выше определений сопряженного оператора, ядра, образа и их аннуляторов.

1) Элемент $x \in \ker A$ тогда и только тогда, когда $Ax = 0$. По теореме Ха́на–Ба́наха это равносильно тому, что $f(Ax) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.е. $x \in (\operatorname{Im} A^*)_{\perp}$.

2) Функционал $f \in \ker A^*$ тогда и только тогда, когда $A^*f = 0$, т.е. имеет место $f(Ax) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Последнее равносильно включению $f \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

3) Если $y \in \operatorname{Im} A$, то существует $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $y = Ax$. Поэтому $f(y) = A^*f(x) = 0$ при всех $f \in \ker A^*$. Таким образом, выполняется включение $y \in (\ker A^*)_{\perp}$.

4) Если $g \in \operatorname{Im} A^*$, то существует $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $g(x) = f(Ax)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Отсюда $g(x) = 0$ при всех $x \in \ker A$. Поэтому выполняется включение $g \in (\ker A)^{\perp}$. □

Замечание. В дальнейшем будет показано, что если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами и образ $\operatorname{Im} A$ оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ замкнут в пространстве $\boldsymbol{F}$, то включения 3) и 4) этой теоремы также являются равенствами.

Пример 1. Если линейный оператор $A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ задан матрицей $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$, то $Ax=y$, где $y_i=\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j$ при $i=1,\dots,m$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{F}^n$, $y=(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{F}^m$. Тогда по определению сопряженного оператора получим

$$\langle u,Ax\rangle=\sum_{i=1}^m u_i\big(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\big)=\sum_{j=1}^n\big(\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i\big)x_j=\langle A^*u,x\rangle,$$

т.е. $A^*u=v$, где $v_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i$, $j=1,\dots,n$, $u=(u_1,\dots,u_m)\in\mathbb{F}^m$ $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{F}^n$. Поэтому оператор $A^*=\{a^*_{ij}\}_{k,l=1}^{n,m}$ имеет транспонированную матрицу $a^*_{ij}=a_{ji}$.

Пример 2. Рассмотрим интегральный оператор $A:\boldsymbol{L}_p[a,b]\to\boldsymbol{L}_p[a,b]$, $1\leqslant p<\infty$, определенный по следующей формуле:

$$Af(x)\doteqdot\int_a^b K(x,y)\,f(y)\,dy\ \text{для всех}\ f\in\boldsymbol{L}_p[a,b],$$

где функция $K(x,y)$ называется ядром интегрального оператора. Предположим, что функция двух переменных $K(x,y)$ является измеримой на квадрате $[a,b]^2$, при этом одна из смешанных норм является конечной

$$\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}}\doteqdot\|\,\|K(x,y)\|_{\boldsymbol{L}_p}\|_{\boldsymbol{L}_q}\ \text{и}\ \|K\|_{\boldsymbol{L}_{qp}}\doteqdot\|\,\|K(x,y)\|_{\boldsymbol{L}_q}\|_{\boldsymbol{L}_p},\ \text{где}\ 1/p+1/q=1.$$

Здесь в случае $\boldsymbol{L}_{pq}[a,b]^2$ внутренняя норма берется по первой переменной x в $\boldsymbol{L}_p[a,b]$, а внешняя норма берется по второй переменной y в $\boldsymbol{L}_q[a,b]$, а в случае $\boldsymbol{L}_{qp}[a,b]^2$ внутренняя норма берется по второй переменной y в $\boldsymbol{L}_q[a,b]$, а внешняя норма берется по первой переменной x в $\boldsymbol{L}_p[a,b]$.

Используя обобщенное неравенство Минко́вского по переменной x и неравенство Гёльдера по переменной y, в первом случае получим следующее неравенство

$$\|Af\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant\int_a^b\big(\int_a^b|K(x,y)|^p\,dx\big)^{1/p}|f(y)|\,dy\leqslant\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}.$$

Аналогичное неравенство имеет место во втором случае, если использовать только неравенство Гёльдера по переменной y

$$\|Af\|_{\boldsymbol{L}_p}\leqslant\big(\int_a^b\big(\|K(x,y)\|_{\boldsymbol{L}_q}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}\big)^p dx\big)^{1/p}=\|K\|_{\boldsymbol{L}_{qp}}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}.$$

Таким образом, интегральный оператор $A:\boldsymbol{L}_p[a,b]\to\boldsymbol{L}_p[a,b]$ будет ограниченным в пространстве $\boldsymbol{L}_p[a,b]$, если одна из указанных смешанных норм является конечной, при этом его норма не превосходит $\|A\|\leqslant\min\{\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}},\|K\|_{\boldsymbol{L}_{qp}}\}$.

Поскольку функция двух переменных $K(x,y)f(x)g(y)\in\boldsymbol{L}_1[a,b]^2$ для всех функций $f\in\boldsymbol{L}_p[a,b]$ и $g\in\boldsymbol{L}_q[a,b]$, то, меняя порядок интегрирования при помощи теоремы Фуби́ни, мы получим равенство

$$\langle Af,g\rangle=\int_a^b\big(\int_a^b K(x,y)\,f(y)\,dy\big)\,g(x)\,dx=\int_a^b f(y)\,\big(\int_a^b K(x,y)\,g(x)\,dx\big)\,dy=\langle f,A^*g\rangle.$$

Значит сопряженный оператор к оператору A, действующий $A^*:\boldsymbol{L}_q[a,b]\to\boldsymbol{L}_q[a,b]$, является интегральным оператором и справедлива следующая формула:

$$A^*g(y)=\int_a^b K(x,y)\,g(x)\,dx\ \text{для всех}\ g\in\boldsymbol{L}_q[a,b],$$

т.е. ядро $K^*(x,y)$ оператора A^* является транспонированным $K^*(x,y)=K(y,x)$ к ядру $K(x,y)$ оператора A. В силу доказанного свойства 1 сопряженный оператор A^* является ограниченным и его норма не превосходит $\|A^*\|\leqslant\min\{\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}},\|K\|_{\boldsymbol{L}_{qp}}\}$.

11 ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ

Пусть $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F} \doteqdot \{(x,y) \mid x\in\boldsymbol{E},\ \ y\in\boldsymbol{F}\}$ есть прямое произведение нормированных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Введем в $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ операции сложения, умножения и норму:

a) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\doteqdot(x_1+x_2,y_1+y_2)$ при всех $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$;

b) $\lambda(x,y)\doteqdot(\lambda x,\lambda y)$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$ и $(x,y)\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$;

c) $\|(x,y)\|\doteqdot\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$ при всех $(x,y)\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$.

Тогда $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ превращается в нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$.

Лемма. *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами, то их прямое произведение $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ также будет банаховым пространством.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$. Пусть $\{(x_n,y_n)\}$ образует последовательность Коши́ в $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует N, т.ч. $\|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\|=\sqrt{\|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2}<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$. Тогда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются последовательностями Коши́ и в силу полноты $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ существуют пределы $\lim x_n=x$ и $\lim y_n=y$. Отсюда $\lim(x_n,y_n)=(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$. □

В приложениях всякий линейный оператор A имеет некоторую естественную область определения. Предположим далее, что линейный оператор $A:L\to\boldsymbol{F}$ задан на линейном подпространстве $L\subset\boldsymbol{E}$ банахова пространства $\boldsymbol{E}$ и принимает значения в банаховом пространстве $\boldsymbol{F}$. Подпространство $L\doteqdot\mathrm{dom}A$ называется *областью определения* оператора A, а подпространство $\mathrm{gr}A\doteqdot\{(x,y)\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}\mid x\in L \text{ и } y=Ax\}$ *графиком* оператора A. График оператора образует линейное подпространством прямого произведения $\mathrm{gr}A\subset\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$, но, вообще говоря, незамкнутое.

Определение. Линейный оператор $A:L\to\boldsymbol{F}$, определенный на подпространстве $L\subset\boldsymbol{E}$, называется *замкнутым*, если его график $\mathrm{gr}A\subset\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ замкнут в $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$.

Замкнутость графика $\mathrm{gr}A$ оператора A равносильно следующему условию: если последовательность элементов $(x_n,y_n)\in\mathrm{gr}A$ и $(x_n,y_n)\to(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$, то $(x,y)\in\mathrm{gr}A$, т.е. если $x_n\in L$, $x_n\to x$ и $Ax_n\to y$, то $x\in L$ и $Ax=y$. Например, легко проверить, что сопряженный оператор $A^*:M\to L^*$ к линейному оператору $A:L\to\boldsymbol{F}$ с областью определения $M\doteqdot\{f\in\boldsymbol{F}^*\mid A^*f=g\in L^*\}$ является замкнутым.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{C}[0,1]$ оператор дифференцирования $D:\boldsymbol{C}^{(1)}[0,1]\to\boldsymbol{C}[0,1]$, заданный на подпространстве $\boldsymbol{C}^{(1)}[0,1]\subset\boldsymbol{C}[0,1]$ непрерывно дифференцируемых функций по формуле $Df(x)\doteqdot f'(x)$ при всех $x\in[0,1]$.

Из курса математического анализа нам известно, что если последовательность функций $f_n\in\boldsymbol{C}^{(1)}[0,1]$ сходится равномерно $f_n\rightrightarrows f$ вместе со своими производными $f_n'\rightrightarrows g$, то $f\in\boldsymbol{C}^{(1)}[0,1]$ и $f'=g$. Поэтому график оператора D замкнут. Однако он не является ограниченным, т.к. полагая $f_n(x)=x^n$, мы получим $\|f_n'\|=n$ и, следовательно, его норма равна $\|D\|=\infty$.

Теорема (критерий замкнутости для ограниченного оператора)**.** *Ограниченный оператор* $A \in \mathscr{L}(L, \boldsymbol{F})$ *является замкнутым тогда и только тогда, когда его область определения* $L \subset \boldsymbol{E}$ *замкнута в пространстве* $\boldsymbol{E}$.

Доказательство. Если $x_n \in L$ и $x_n \to x$ в $\boldsymbol{E}$, то в силу ограниченности оператора образ $y_n = Ax_n$ образует последовательность Коши и, значит, сходится $\lim y_n = y \in \boldsymbol{F}$. Из замкнутости графика следует, что $x \in L$ и $Ax = y$. Обратно, если $x_n \to x$ в $\boldsymbol{E}$ и $Ax_n \to y$, где $x_n \in L$, то из замкнутости L имеем $x \in L$, а в силу по непрерывности оператора $Ax_n \to Ax = y$. Поэтому график $\mathrm{gr}A$ является замкнутым. □

Далее мы докажем обратное утверждение, т.е. замкнутый оператор, заданный на замкнутом подпространстве банахова пространства, является ограниченным. Обозначим через $\boldsymbol{S}_r(x) \doteqdot \{y \in \boldsymbol{E} \mid \|x-y\| \leqslant r\}$ шар радиуса $r > 0$ и $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \boldsymbol{S}_r(0)$.

Лемма. *Если линейный оператор* $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *задан на банаховом пространстве* $\boldsymbol{E}$, *то существуют* $r > 0$ *и* $k > 0$, *т.ч.* $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{E_k}$, *где* $E_k \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|Ax\| \leqslant k\}$.

Доказательство. Так как $\boldsymbol{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, то по теореме Бэра одно из множеств E_k не является нигде не плотным, т.е. существуют $r > 0$ и $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{S}_r(x) \subset \overline{E_k}$. Поскольку множество $E_k = -E_k$ симметрично, то $\boldsymbol{S}_r(-x) \subset \overline{E_k}$.

Покажем, что $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{E_k}$. Пусть $y \in \boldsymbol{S}_r$, тогда $y \pm x \in \boldsymbol{S}_r(\pm x)$. Поэтому существуют последовательности $\{x_n^{\pm}\} \subset E_k$, т.ч. $x_n^{\pm} \to y \pm x$. Отсюда $x_n \doteqdot (x_n^+ + x_n^-)/2 \to y$ и в силу включения $x_n \in E_k$ имеем $y \in \overline{E_k}$. Таким образом, доказано, что $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{E_k}$. □

Теорема (Ба́наха о замкнутом графике)**.** *Пусть линейный оператор* $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, *заданный в ба́наховых пространствах* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{F}$, *имеет замкнутый график* $\mathrm{gr}A$. *Тогда оператор* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *является ограниченным.*

Доказательство. По лемме найдутся $r > 0$ и $k > 0$, т.ч. $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{E_k}$. Пусть $r_n = r/2^n$ и $k_n = k/2^n$, тогда мы получим $\boldsymbol{S}_{r_n} \subset \overline{E_{k_n}}$. Возьмем произвольный элемент $x \in \boldsymbol{S}_r$. Поскольку $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{E_k}$, то существует элемент $x_0 \in E_k$, т.ч. $\|x - x_0\| < r_1$. Поскольку $\boldsymbol{S}_{r_1} \subset \overline{E_{k_1}}$, то существует элемент $x_1 \in E_{k_1}$, т.ч. $\|x - x_0 - x_1\| < r_2$ и т.д. Поэтому по индукции существуют элементы $x_n \in E_{k_n}$, т.ч. $\|x - \sum_{j=0}^n x_i\| < r_{n+1}$.

Следовательно, частичные суммы ряда $s_n = \sum_{j=0}^n x_j$ сходятся в пространстве $\boldsymbol{E}$ к элементу x, т.е. $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j$. Полагая далее $y_n \doteqdot As_n$ и применяя неравенство треугольника, мы получим, что при всех $m > n$ выполняется неравенство

$$\|y_m - y_n\| = \|\textstyle\sum_{i=n+1}^m Ax_i\| \leqslant \sum_{n+1}^m \|Ax_i\| \leqslant \sum_{i=n+1}^m k/2^i < k/2^n.$$

Следовательно, $\{y_n\}$ является последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{F}$ и в силу его полноты существует предел $y = \lim y_n$. Тогда $y = Ax$ по условию замкнутости графика $\mathrm{gr}A$. Применяя неравенство треугольника и непрерывность нормы, мы получим

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|\textstyle\sum_{j=0}^n Ax_j\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n \|Ax_j\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} k/2^j = 2k.$$

Таким образом, доказано, что $\|Ax\| \leqslant 2k$ при всех $x \in \boldsymbol{S}_r$. Отсюда следует, что норма оператора A оценивается величиной $\|A\| \leqslant 2k/r$. □

Определение. *Замыканием линейного оператора* $A: L \to \boldsymbol{F}$, определенного на подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$, называется линейный оператор $\overline{A}: M \to \boldsymbol{F}$, определенный на некотором подпространстве $M \subset \boldsymbol{E}$, график которого равен $\mathrm{gr}\overline{A} = \overline{\mathrm{gr}A}$.

Линейный оператор $A: L \to \boldsymbol{F}$ в том и только в том случае имеет замыкание, если из сходимости $x_n \to 0$ и $Ax_n \to y$ следует, что $y = 0$. В самом деле, это условие является необходимым в силу линейности оператора $\overline{A}$. Обратно, при выполнении этого условия можно определить замкнутый оператор $\overline{A}: M \to \boldsymbol{F}$, полагая $\overline{A}x = y$, если существует последовательность $x_n \in L$, т.ч. $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{C}[a,b]$ — подпространство алгебраических многочленов $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ и задана функция $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$, не являющаяся многочленом $f \notin \boldsymbol{P}$. Определим линейный оператор $A: L \to \boldsymbol{C}[a,b]$ на линейной оболочке $L \doteqdot \mathrm{sp}\{f, \boldsymbol{P}\}$ по формуле $A(\lambda f + p) \doteqdot \lambda f$, где $\lambda \in \mathbb{F}$. В силу теоремы Вейерштрасса существует последовательность многочленов $p_n \in \boldsymbol{P}$, т.ч. $p_n \rightrightarrows f$. Тогда, полагая $f_n \doteqdot f - p_n$, получим $f_n \rightrightarrows 0$ и $Af_n = f$. Таким образом, оператор A не имеет замыкания.

Пусть линейный оператор $A: L \to \boldsymbol{H}$ определен на линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{H}$ ги́льбертова пространства $\boldsymbol{H}$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$.

Определение. Оператор $A^*: M \to \boldsymbol{H}$ будем называть *эрмитово-сопряженным* к линейному оператору $A: L \to \boldsymbol{H}$, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ при всех $x \in L$ и $y \in M$, где его область определения $M \doteqdot \mathrm{dom}A^*$ определяется по формуле

$$M \doteqdot \{y \in \boldsymbol{H} \mid \exists z \in \boldsymbol{H} : \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle, \forall x \in L\}.$$

1. *Эрмитово-сопряженный оператор является линейным.*

Если уравнения $\langle Ax, y_1 \rangle = \langle x, z_1 \rangle$ и $\langle Ax, y_2 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$ выполняются при всех $x \in L$, то уравнение $\langle Ax, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, z_1 + z_2 \rangle$ имеет место при всех $x \in L$. Отсюда следует, что $A^*(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$. Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и уравнение $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ выполняется при всех $x \in L$, то $\langle Ax, \lambda y \rangle = \langle x, \lambda z \rangle$ при всех $x \in L$. Поэтому $A^*(\lambda y) = \lambda z$.

2. *Эрмитово-сопряженный оператор к оператору* $A: L \to \boldsymbol{H}$ *существует тогда и только тогда, когда* $L \subset \boldsymbol{H}$ *всюду плотно в* $\boldsymbol{H}$.

По определению $A^*y = z$, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ при всех $x \in L$. Покажем, что условие $\overline{L} = \boldsymbol{H}$ необходимо и достаточно, для того чтобы оператор A^* был однозначным. Из уравнений $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$ при всех $x \in L$ следует, что $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ при всех $x \in L$. Поэтому $z_1 = z_2$ в том и только в том случае, если $L^{\perp} = 0$, т.е. $\overline{L} = \boldsymbol{H}$.

3. *Эрмитово-сопряженный оператор является замкнутым.*

Пусть $z_n = A^*y_n$, где $y_n \in M$, при этом $y_n \to y$ и $z_n \to z$. Тогда по определению элементы z_n удовлетворяет уравнению $\langle Ax, y_n \rangle = \langle x, z_n \rangle$ при всех $x \in L$. Поэтому, переходя к пределу и используя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ при всех $x \in L$. Следовательно, $y \in M$ и $A^*y = z$.

4. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(L,\boldsymbol{H})$ ограничен и $\overline{L} = \boldsymbol{H}$, то эрмитово-сопряженный оператор $A^* \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ также ограничен и его норма $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство. По теореме о продолжении по непрерывности оператор A можно считать заданным на всем пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда определен линейный функционал $f(x) \doteqdot \langle Ax, y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем $|f(x)| \leqslant \|Ax\|\,\|y\| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$. Отсюда $f \in \boldsymbol{H}^*$ и $\|f\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Поэтому по теореме Ри́сса существует элемент $z \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $f(x) = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|f\| = \|z\|$.

Таким образом, выполняется равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Это значит, что $A^*y = z$ и $\|A^*y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Отсюда имеем $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Нетрудно проверить, что эрмитово-сопряженный к оператору $A^* : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ совпадает с A, т.е. $A^{**} = A$. Поэтому имеем $\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|$. Следовательно, $\|A\| = \|A^*\|$. □

Определение. Линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{H}$, определенный на подпространстве $L \subset \boldsymbol{H}$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т.е. $L = M$ и $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ при всех $x, y \in L$. При этом в силу свойства 2 его область определения L всюду плотна в $\boldsymbol{H}$. Самосопряженный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, определенный на всем гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, называется *эрми́товым* и обозначается через $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$.

Теорема (Хе́ллингера–Тёплица). *Всякий эрми́товый оператор, определенный в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, является ограниченным, т.е. $\mathscr{H}(\boldsymbol{H}) \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$.*

Доказательство. Если $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то имеет место равенство $A = A^*$. По свойству 3 оператор A замкнут. Поэтому по теореме о замкнутом графике $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$. □

Пример 3. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$ диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$, где $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$. Оператор $A : L \to \boldsymbol{\ell}_2$ с областью определения $L \doteqdot \{x \in \boldsymbol{\ell}_2 \mid Ax \in \boldsymbol{\ell}_2\}$ обладает следующими свойствами:

1) оператор A ограниченный тогда и только тогда, когда $\sup|\lambda_n| < \infty$;
2) оператор A самосопряженный тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
3) оператор A эрми́товый тогда и только тогда, когда $\sup|\lambda_n| < \infty$ и $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
4) оператор A замкнутый для любой последовательности чисел $\lambda_n \in \mathbb{F}$.

Заметим, что область определения L оператора A будет всюду плотной $\overline{L} = \boldsymbol{\ell}_2$, т.к. множество всех финитных последовательностей содержится в L. Свойство 1) следует из равенства $\|A\| = \sup|\lambda_n|$; 2) очевидно; 3) вытекает из 1) и того факта, что эрмитовый оператор определен на всем $\boldsymbol{\ell}_2$. Осталось доказать 4).

Введем множества индексов $I_1 \doteqdot \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| \leqslant 1\}$ и $I_2 \doteqdot \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| > 1\}$. Тогда A будет прямой суммой двух диагональных операторов $A = A_1 \oplus A_2$, при этом для оператора A_1 имеем $\sup|\lambda_n^{(1)}| \leqslant 1$, а для оператора A_2 имеем $\inf|\lambda_n^{(2)}| \geqslant 1$. Заметим, что оператор A_1 замкнут, так как является ограниченным. Оператор A_2 имеет ограниченный обратный оператор A_2^{-1}. Так как из замкнутости графика оператора A_2^{-1} следует замкнутость графика оператора A_2, то оператор A_2 также является замкнутым. Отсюда следует замкнутость оператора $A = A_1 \oplus A_2$.

12 ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ

Теорема (Ба́наха об обратном операторе)**.** *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ограниченным и биективным отображением в ба́наховых пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то его обратный оператор $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ является ограниченным.*

Доказательство. Поскольку $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ — ограниченный оператор, определенный в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$, то его график $\mathrm{gr}(A)$ является замкнутым, т.е. если $x_n \to x$ и $y_n = Ax_n \to y$, где $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $y_n \in \boldsymbol{F}$, то $Ax = y$. В силу биективности оператора получаем, что если $y_n \to y$ и $x_n = A^{-1}y_n \to x$, где $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $y_n \in \boldsymbol{F}$, то $A^{-1}y = x$. Таким образом, график $\mathrm{gr}A^{-1}$ обратного оператора A^{-1} замкнут и, следовательно, по теореме о замкнутом графике оператор $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ ограничен. □

Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ — замкнутое подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$ задает факторпространство по подпространству L. Всякий элемент $\widehat{\boldsymbol{E}}$ записывается в виде $\widehat{x} \doteqdot x+L$, где $x \in \boldsymbol{E}$. При этом факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}}$ является линейным нормированным пространством относительно следующих операций:

a) сложение элементов $\widehat{x}+\widehat{y} \doteqdot \widehat{x+y}$, где $x,y \in \boldsymbol{E}$;

b) умножение на число $\lambda\widehat{x} \doteqdot \widehat{\lambda x}$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$;

c) норма элемента $\|\widehat{x}\| \doteqdot \inf_{y\in L}\|x+y\|$, где $x \in \boldsymbol{E}$.

Проверим свойства нормы. По определению имеем следующие соотношения:

$$\|\lambda\widehat{x}\| = \|\widehat{\lambda x}\| = \inf_{y\in L}\|\lambda x+y\| = |\lambda|\inf_{y\in L}\|x+y\| = |\lambda|\|\widehat{x}\|;$$

$$\|\widehat{x+y}\| = \inf_{z\in L}\|x+y+z\| \leqslant \inf_{u\in L}\|x+u\| + \inf_{v\in L}\|y+v\| = \|\widehat{x}\| + \|\widehat{y}\|.$$

Пусть $\|\widehat{x}\| = \inf_{y\in L}\|x+y\| = 0$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $x+y_n \to 0$. Поэтому, т.к. подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнуто, то $x = -\lim y_n \in L$ и значит $\widehat{x} = \widehat{0}$.

Лемма. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ есть замкнутое подпространство ба́нахова пространства, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$ является ба́наховым.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Пусть $\{\widehat{x_n}\}$ является последовательностью Коши́. Выберем последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$, т.ч. $\|\widehat{x_n} - \widehat{x_m}\| < 1/2^k$ при всех $n,m \geqslant n_k$. Тогда существуют $y_{n_k} \in L$, т.ч. $z_k \doteqdot x_{n_k} + y_{n_k} \in \widehat{x_{n_k}}$ и $\|z_{k+1} - z_k\| < 1/2^k$. Отсюда ряд $z = z_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(z_{k+1} - z_k) = \lim z_k$ сходится по норме пространства $\boldsymbol{E}$. Следовательно, при всех $n \geqslant n_k$ мы получим

$$\|\widehat{z} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|\widehat{z} - \widehat{x_{n_k}}\| + \|\widehat{x_{n_k}} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|z - z_k\| + 1/2^k \leqslant \textstyle\sum_{j=k}^{\infty} 1/2^j + 1/2^k < 3/2^k.$$

Таким образом, существует предел $\lim \widehat{x_n} = \widehat{z} \in \widehat{\boldsymbol{E}}$. □

Заметим, что если образ $A(\boldsymbol{U}_r) \subset \boldsymbol{F}$ любого открытого шара $\boldsymbol{U}_r$ в пространстве $\boldsymbol{E}$ является открытым множеством в пространстве $\boldsymbol{F}$, то линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ определяет *открытое отображение* нормированных пространств.

Пусть $\pi : \boldsymbol{E} \to \widehat{\boldsymbol{E}}$ — фактоотображение, определенное по формуле $\pi(x) \doteqdot \widehat{x}$. Непрерывность π вытекает из неравенства $\|\widehat{x}\| \leqslant \|x\|$. Из этого неравенства и определения нормы в факторпространстве $\widehat{\boldsymbol{E}}$ следует, что образ $\pi(\boldsymbol{U}_r)$ открытого шара $\boldsymbol{U}_r \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| < r\}$ является открытым шаром $\widehat{\boldsymbol{U}}_r \doteqdot \{\widehat{x} \in \widehat{\boldsymbol{E}} \mid \|\widehat{x}\| < r\}$ того же радиуса $r > 0$. Поэтому образ всякого открытого множества будет открытым и, следовательно, фактоотображение π является открытым отображением.

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *гомоморфизмом*, если он является непрерывным и открытым отображением.

Теорема (о гомоморфизме)**.** *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ задает сюръективное отображение банаховых пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то он является гомоморфизмом.*

Доказательство. Так как ядро $L \doteqdot \ker A$ является замкнутым подпространством $\boldsymbol{E}$, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$ будет банаховым пространством. Определим оператор $\widehat{A} : \widehat{\boldsymbol{E}} \to \boldsymbol{F}$, полагая $\widehat{A}(\widehat{x}) \doteqdot Ax$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Заметим, что оператор $\widehat{A}$ определен корректно, т.к. если $\widehat{x} = \widehat{y}$, то $x - y \in L$ и значит $Ax = Ay$.

Легко видеть, что оператор $\widehat{A} : \widehat{\boldsymbol{E}} \to \boldsymbol{F}$ является линейным, его ядро равно нулю $\ker\widehat{A} = \{\widehat{x} \in \widehat{\boldsymbol{E}} \mid Ax = 0\} = \widehat{0}$, а его образ равен $\operatorname{Im}\widehat{A} = \operatorname{Im}A = \boldsymbol{F}$. Поэтому $\widehat{A}$ задает биективное отображение. Докажем, что норма $\|\widehat{A}\| = \|A\|$. В самом деле,

$$\|\widehat{A}(\widehat{x})\| = \|Ax\| = \inf_{y \in L} \|A(x+y)\| \leqslant \|A\| \inf_{y \in L} \|x+y\| = \|A\|\,\|\widehat{x}\|.$$

Следовательно, выполняется неравенство $\|\widehat{A}\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, в силу неравенства $\|Ax\| = \|\widehat{A}(\widehat{x})\| \leqslant \|\widehat{A}\|\,\|\widehat{x}\| \leqslant \|\widehat{A}\|\,\|x\|$ справедливо равенство $\|\widehat{A}\| = \|A\|$. Таким образом, по теореме Банаха об обратном операторе $\widehat{A}$ будет гомоморфизмом. Поскольку оператор $A = \widehat{A} \cdot \pi$ является произведением двух гомоморфизмов, то он также будет гомоморфизмом пространства $\boldsymbol{E}$ на пространство $\boldsymbol{F}$. □

Теорема (о тройке)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ являются банаховыми пространствами, оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ сюръективным и оператор $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{G})$ удовлетворяет условию $\ker A \subset \ker B$. Тогда существует оператор $C \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$, т.ч. $B = CA$.*

Доказательство. Определим оператор $C : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ по формуле $Cy = Bx$ при всех $y = Ax$ и $x \in \boldsymbol{E}$. Если $y = Ax_1 = Ax_2$, то $x_1 - x_2 \in \ker A \subset \ker B$. Отсюда следует, что $Bx_1 = Bx_2$. Значит оператор C определен корректно. Докажем его линейность.

Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y = Ax$, то $C(\lambda y) = C(A(\lambda x)) = B(\lambda x) = \lambda B(x) = \lambda C(y)$. Если $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$, то $C(y_1 + y_2) = C(A(x_1 + x_2)) = B(x_1 + x_2) = B(x_1) + B(x_2) = C(y_1) + C(y_2)$. Поэтому оператор C является линейным отображением.

Пусть $L = \ker A$, тогда оператор $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\widehat{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{F})$ биективен и при всех $y = Ax = \widehat{A}(\widehat{x})$

$$\|Cy\| = \|Bx\| = \inf_{z \in L} \|B(x+z)\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{x}\| = \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}y\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}\|\,\|y\|.$$

Таким образом, $\|C\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}\|$. Так как по теореме Банаха об обратном операторе $\|A^{-1}\| < \infty$, то оператор $C \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ является ограниченным. □

Напомним, что для множеств $V \subset \boldsymbol{E}$ и $W \subset \boldsymbol{E}^*$ определяются аннуляторы

$$V^{\perp} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}^* \mid f(x) = 0, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = 0, f \in W\},$$

Они задают замкнутые подпространства в пространствах $\boldsymbol{E}^*$ и $\boldsymbol{E}$ соответственно.

Лемма (о бианнуляторе)**.** *Если подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым, то его бианнулятор удовлетворяет равенству $(L^{\perp})_{\perp} = L$.*

Доказательство. Включение $L \subset (L^{\perp})_{\perp}$ очевидно. Пусть элемент $x \in (L^{\perp})_{\perp}$. Если $x \notin L$, то $\|\widehat{x}\| \neq 0$. Определим функционал на линейной оболочке $M \doteqdot \mathrm{sp}\{x, L\}$ по формуле $f(\lambda x + y) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y \in L$. Он имеет конечную норму, т.к.

$$\|f\| = \sup_{z \in M} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{y \in L} \frac{|\lambda|}{\|\lambda x + y\|} = \sup_{y \in L} \frac{1}{\|x + y\|} = \frac{1}{\|\widehat{x}\|} < \infty.$$

По теореме Ха́на–Ба́наха найдется функционал $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|$. Тогда имеем $g \in L^{\perp}$ и $g(x) = 1$, т.е. элемент $x \notin (L^{\perp})_{\perp}$. Получили противоречие. □

Теорема. *Пусть ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, заданный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, имеет замкнутый образ $\mathrm{Im} A \subset \boldsymbol{F}$. Тогда*

$$\mathrm{Im} A = (\ker A^*)_{\perp}, \quad \mathrm{Im} A^* = (\ker A)^{\perp}.$$

Доказательство. В силу доказанного ранее мы имеем равенство $\ker A^* = (\mathrm{Im} A)^{\perp}$. Следовательно, применяя лемму, получим $(\ker A^*)_{\perp} = ((\mathrm{Im} A)^{\perp})_{\perp} = \mathrm{Im} A$.

Докажем второе равенство. Ранее было уже доказано включение $\mathrm{Im} A^* \subset (\ker A)^{\perp}$. Если функционал $f \in (\ker A)^{\perp}$, то $\ker A \subset \ker f$. Применяя теорему о тройке, а затем теорему Ха́на–Ба́наха, получим функционал $g \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $f(x) = g(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому $f = A^* g \in \mathrm{Im} A^*$ и, следовательно, $\mathrm{Im} A^* = (\ker A)^{\perp}$. □

Определение. Линейный оператор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ называется *проектором* на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, если выполняются равенства $P^2 = P$ и $\mathrm{Im} P = L$.

Рассмотрим свойства проекторов P на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$.

1. *Ограничение проектора $P|_L$ является тождественным оператором в L.*

Действительно, если $y = Px$, то $Py = P^2 x = Px = y$ при всех $y \in L$.

2. *Справедливы равенства $\ker(I - P) = \mathrm{Im} P$ и $\mathrm{Im}(I - P) = \ker P$.*

Если $x \in \ker(I - P)$, то $x - Px = 0$ и значит $x \in \mathrm{Im} P$. Если $y = Px \in \mathrm{Im} P$, то имеем $(I - P)y = (P - P^2)x = 0$, т.е. $y \in \ker(I - P)$. Аналогично, получаем второе равенство.

3. *Пространство $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ является прямой суммой $L = \mathrm{Im} P$ и $M = \ker P$.*

Поскольку $I = P + (I - P)$, то $\boldsymbol{E} = L + M$. Если $y \in L \cap M$, то имеет место равенство $y = Px = x - Px$, т.е. $x = 2Px$. Применяя P, получим $Px = 2Px$ и значит $y = Px = 0$.

Определение. Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ называется *дополняемым* в $\boldsymbol{E}$, если является замкнутым и существует замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Теорема. *Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ банахова пространства тогда и только тогда является дополняемым в $\boldsymbol{E}$, когда существует ограниченный проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L.*

Доказательство. Необходимость. Если $\boldsymbol{E} = L \oplus M$, где L и M задают замкнутые подпространства, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют единственные элементы $y \in L$ и $z \in M$, т.ч. $x = y + z$. Полагая $Px \doteqdot y$, заметим, что оператор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ имеет замкнутый график. В самом деле, если последовательности $x_n \to x$ и $Px_n = y_n \to y$, то $z_n = x_n - y_n \to z = x - y$. Так как в силу замкнутости L и M имеем $y \in L$ и $z \in M$, то из единственности разложения $x = y + z$ получим $Px = y$. Следовательно, по теореме о замкнутом графике оператор P является ограниченным.

Достаточность. Поскольку проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L является непрерывным, то $L = \operatorname{Im} P = \ker(I - P)$ и $M = \ker P = \operatorname{Im}(I - P)$ являются замкнутыми подпространствами, у которых пересечение $L \cap M = 0$. Так как $I = P + (I - P)$, то отсюда следует разложение в прямую сумму $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. □

Пример. Если замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ нормированного пространства имеет конечную размерность $\dim L < \infty$ или конечную коразмерность $\operatorname{codim} L < \infty$, то оно является дополняемым.

Выберем базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в подпространстве L, а затем определим подпространство $M \doteqdot \bigcap_{k=1}^n \ker f_k$, где $\{f_k\}_{k=1}^n$ обозначает биортогональную систему к базису $\{e_k\}_{k=1}^n$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим элементы $y \doteqdot \sum_{k=1}^n f_k(x)\, e_k$ и $z \doteqdot x - y$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Рассмотрим базис $\{\widehat{e}_k\}_{k=1}^m$ для факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$, а затем обозначим через $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют $\lambda_k \in \mathbb{F}$, т.ч. $\widehat{x} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \widehat{e}_k$. Определим элементы $z \doteqdot \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ и $y \doteqdot x - z$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Замечание. Применяя по координатно теорему Ха́на-Ба́наха, нетрудно доказать, что всякое замкнутое подпространство банахова пространства, изоморфное $\boldsymbol{\ell}_\infty$, а также всякое замкнутое подпространство сепарабельного банахова пространства, изоморфное $\boldsymbol{c}_0$, являются дополняемыми. Приведем теперь примеры недополняемых подпространств, где в скобках указаны авторы этих утверждений.

Подпространство $\boldsymbol{c}_0 \subset \boldsymbol{\ell}_\infty$ (Р. С. Фи́ллипс) и подпространство $\boldsymbol{C}[0,1] \subset \boldsymbol{L}_\infty[0,1]$ (Г. М. Фихтенго́льц и Л. В. Канторо́вич) является недополняемыми.

Подпространства $H_p \subset \boldsymbol{L}_p[-\pi, \pi]$ функций, у которых все коэффициенты Фурье с отрицательными индексами равны нулю, являются дополняемыми при $1 < p < \infty$ (М. Рисс) и является недополняемым при $p = 1$ (Д. Нью́ман).

Подпространство $\boldsymbol{A}(D) \subset \boldsymbol{C}(D)$, состоящее из голоморфных функций в круге $\mathring{D} \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, является недополняемым в пространстве $\boldsymbol{C}(D)$ непрерывных функций в замкнутом круге $D \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ (У. Ру́дин).

13 СПЕКТР ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Далее через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$ обозначается банахово пространство ограниченных операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$, действующих в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{C}$.

Определение. Число $\lambda\in\mathbb{C}$ называется *регулярным значением* для оператора $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ имеет ограниченный обратный $A_\lambda^{-1}\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, где I — тождественный оператор в пространстве $\boldsymbol{E}$. Множество всех регулярных значений обозначается через $\rho(A)$. Его дополнение $\sigma(A)\doteqdot\mathbb{C}\setminus\rho(A)$ называется *спектром* оператора A. Обратный оператор $R_\lambda \doteqdot A_\lambda^{-1}$, определенный при $\lambda\in\rho(A)$, называется *резольвентой* оператора A.

Лемма. *Если $\|A\|<1$, то оператор $B\doteqdot I-A$ обратим и $B^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$.*

Доказательство. Пусть $C_n\doteqdot\sum_{k=0}^{n}A^k$ и $\|A\|=r<1$. Так как $\|A^k\|\leqslant\|A\|^k$, то по неравенству треугольника имеем $\|C_m-C_n\|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\|A\|^k<r^{n+1}/(1-r)$. Поэтому $\{C_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́наховом пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Тогда существует предел $\lim C_n\doteqdot C\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Отсюда получим

$$BC=\lim BC_n=\lim\sum_{k=0}^{n}(A^k-A^{k+1})=\lim(I-A^{n+1})=I,$$

т.к. $\lim A^{n+1}=0$. Аналогично имеем $CB=I$. Таким образом, оператор $C=B^{-1}$. □

Определение. Функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$, определенная в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *голоморфной* в Ω, если для каждого $z_0\in\Omega$ существуют $r>0$ и такие элементы $c_n\in\boldsymbol{E}$, что $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n c_n$ при всех $z\in\boldsymbol{U}_r(z_0)$, где $\boldsymbol{U}_r(z_0)\doteqdot\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<r\}$ обозначает открытый круг в Ω.

Заметим, что сходимость степенного ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n c_n$ определяется здесь по норме пространства $\boldsymbol{E}$ и его радиус сходимости в точке z_0 вычисляется по формуле Коши́–Адама́ра $1/r=\overline{\lim}\sqrt[n]{\|c_n\|}$. Если функция $f(z)$ голоморфная в Ω, то радиус r равен расстоянию $d=\inf_{z\in\partial\Omega}|z_0-z|$ от точки $z_0\in\Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Теорема (о резольвенте). *Если оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то множество регулярных значений $\rho(A)$ открыто, функция R_λ голоморфная в каждой связной компоненте $\rho(A)$ и норма $\|R_\lambda\|\geqslant 1/d_\lambda$, где $d_\lambda\doteqdot\inf_{z\in\sigma(A)}|\lambda-z|$ обозначает расстояние от точки $\lambda\in\rho(A)$ до спектра $\sigma(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda\in\rho(A)$, тогда $A_z=A_\lambda-(\lambda-z)I=A_\lambda(I-(\lambda-z)R_\lambda)$. Если $z\in\mathbb{C}$, т.ч. $|z-\lambda|\,\|R_\lambda\|<1$, то по лемме мы получим сходящийся по норме ряд

$$R_z=(I-(\lambda-z)R_\lambda)^{-1}R_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-z)^n R_\lambda^{n+1}.$$

Поэтому $z\in\rho(A)$ и резольвента $R_z\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным оператором. Кроме того, множество регулярных значений $\rho(A)$ является открытым и функция R_λ голоморфная на каждой связной компоненте $\rho(A)$. Если $\lambda\in\rho(A)$, то в силу доказанного выполняется неравенство $\|R_\lambda\|\geqslant|\lambda-z|^{-1}$ при всех $z\in\sigma(A)$, т.е. имеет место неравенство $\|R_\lambda\|\geqslant 1/d_\lambda$. □

Теорема (о спектре). *Спектр ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является непустым, замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Если $|\lambda| > \|A\|$, то $R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$. Поэтому $R_\lambda \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $\|R_\lambda\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Следовательно, спектр находится в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \|A\|\}$ радиуса $\|A\|$. Кроме того, для каждого функционала $f \in \mathscr{L}^*(\boldsymbol{E})$ функция $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda)$ голоморфная в $\rho(A)$ и $|F(\lambda)| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если $\rho(A) = \mathbb{C}$, то по теореме Лиуви́лля $F(\lambda) = f(R_\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Применяя теорему Ха́на–Ба́наха, получим $R_\lambda = 0$, что невозможно. Поэтому $\sigma(A) \neq \emptyset$. □

Спектр сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

1. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то спектр сопряженного оператора $\sigma(A^*) = \sigma(A)$.*

Так как $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$, то $A_\lambda^* = \lambda I - A^*$. Поскольку для ограниченного обратимого оператора выполняется равенство $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, то $(R_\lambda)^* = (A_\lambda^{-1})^* = (A_\lambda^*)^{-1} = R_\lambda^*$. Следовательно, множества регулярных значений $\rho(A^*) = \rho(A)$ совпадают.

2. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$, то спектр эрмитово-сопряженного $\sigma(A^*) = \overline{\sigma}(A)$.*

По определению эрмитово-сопряженного оператора имеют место равенства

$$\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle \lambda x - Ax, y\rangle = \langle x, \bar{\lambda} y - A^* y\rangle = \langle x, (A^*)_{\bar{\lambda}}\, y\rangle, \text{ т.е. } (A_\lambda)^* = (A^*)_{\bar{\lambda}}.$$

Отсюда $(R_\lambda)^* = (A_\lambda^{-1})^* = (A_{\bar{\lambda}}^*)^{-1}$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\rho(A^*) = \overline{\rho}(A)$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* оператора A, если существует ненулевой элемент $e \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $Ae = \lambda e$. Следующие множества

$\sigma_p(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$, состоящее из собственных значений;

$\sigma_c(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \boldsymbol{E}, \operatorname{Im} A_\lambda \neq \boldsymbol{E}\}$;

$\sigma_r(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}$;

называются соответственно *точечным*, *непрерывным* и *остаточным* спектром A. Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то из этих определений и теоремы Банаха об обратном операторе вытекает равенство $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$.

Заметим, число $\lambda \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда $\lambda \in \sigma_p(A)$, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *неоднозначно разрешимо*, т.е. однородное уравнение $A_\lambda x = 0$ имеет ненулевое решение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда $\lambda \in \sigma_c(A)$, когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ *плотно разрешимо*, т.е. имеет единственное решение для всюду плотного множества элементов $y \in \operatorname{Im} A_\lambda$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда $\lambda \in \sigma_r(A)$, когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ *не плотно разрешимо*, т.е. имеет единственное решение для не всюду плотного множества элементов $y \in \operatorname{Im} A_\lambda$.

Для того чтобы линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы $\ker A = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{E}$. При этом условие $\ker A = 0$ равносильно существованию левого обратного $B : \operatorname{Im} A \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $BA = I$, а условие $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{E}$ равносильно существованию правого обратного $C : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, т.ч. $AC = I$.

Лемма. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то следующие условия эквивалентны:*

a) *оператор A имеет ограниченный левый обратный $B \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}A, \boldsymbol{E})$;*

b) *оператор A ограничен снизу, т.е. $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| > 0$;*

c) *ядро $\ker A = 0$ и образ $\mathrm{Im}A \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым.*

Доказательство. Если $B \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}A, \boldsymbol{E})$ левый обратный, то $\|x\| = \|BAx\| \leqslant \|B\|\|Ax\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|B\|^{-1} > 0$. Предположим теперь, что $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, где $c > 0$. Если $y_n = Ax_n \to y$ сходится, то $\|x_n - x_m\| \leqslant \|y_n - y_m\|/c \to 0$. Отсюда $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и существует предел $\lim x_n = x$. В силу непрерывности оператора $Ax = y \in \mathrm{Im}A$. Таким образом, оператор имеет замкнутый образ $\mathrm{Im}A$ и его ядро $\ker A = 0$. По теореме Ба́наха об обратном операторе существует $B \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}A, \boldsymbol{E})$, т.ч. $BA = I$. □

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *полурегулярным значением* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ имеет ограниченный левый обратный $B_\lambda \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}A_\lambda, \boldsymbol{E})$. Множество полурегулярных значений обозначается через $\rho_l(A)$. Дополнительное множество $\sigma_l(A) = \mathbb{C} \setminus \rho_l(A)$ называется *предельным спектром* оператора A.

По лемме *предельный спектр* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ определяется множеством

$$\sigma_l(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}.$$

Дополнительное множество спектра $\sigma_d(A) \doteqdot \sigma(A) \setminus \sigma_l(A)$ называется *дефектным спектром* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Дефектный спектр определяется множеством

$$\sigma_d(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \mathrm{Im}A_\lambda = \overline{\mathrm{Im}A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}.$$

Число $\lambda \in \rho_l(A)$ тогда и только тогда является полурегулярным значением, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *корректно разрешимо*, т.е. существует ограниченный обратный оператор $B_\lambda : \mathrm{Im}A_\lambda \to \boldsymbol{E}$ на подпространстве $\mathrm{Im}A_\lambda$. Поэтому число $\lambda \in \sigma_l(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ не является корректно разрешимым.

Теорема (о границе спектра). *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \partial\sigma(A)$, то существует последовательность $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, т.ч. $\lambda_n \to \lambda$. Поэтому $d_{\lambda_n} \doteqdot \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda_n - z| \leqslant |\lambda_n - \lambda| \to 0$. Так как $A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = I$ есть тождественный оператор, то $B_n \doteqdot R_{\lambda_n}/\|R_{\lambda_n}\|$ удовлетворяет соотношению

$$A_\lambda B_n = (\lambda - \lambda_n)B_n + A_{\lambda_n} B_n = (\lambda - \lambda_n)B_n + I/\|R_{\lambda_n}\|.$$

Поскольку $\|B_n\| = 1$, то существует последовательность $\{y_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|B_n y_n\| > 1/2$. Полагая $x_n \doteqdot B_n y_n/\|B_n y_n\|$ и применяя указанное выше соотношение к элементу $y_n/\|B_n y_n\|$, получим следующее равенство

$$A_\lambda x_n = (A_\lambda B_n y_n)/\|B_n y_n\| = (\lambda - \lambda_n)x_n + y_n/\|R_{\lambda_n}\|\,\|B_n y_n\|.$$

Так как по построению $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и по теореме о резольвенте $\|R_{\lambda_n}\| \geqslant 1/d_{\lambda_n}$, то $\|A_\lambda x_n\| \leqslant |\lambda - \lambda_n| + 2d_{\lambda_n} \leqslant 3|\lambda - \lambda_n| \to 0$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_l(A)$. □

Теорема (о спектральном радиусе). *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ ограничен, то $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, где $r(A) \doteqdot \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ спектральный радиус оператора A.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Поскольку $\lambda^n - z^n = (\lambda - z)P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$, то $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)P_{n-1}(A) = P_{n-1}(A)(\lambda I - A)$. Если оператор $\lambda^n I - A^n$ является обратимым, то, умножая указанное равенство справа и слева на его обратный, мы получим, что оператор $\lambda I - A$ обратим. Поскольку это противоречит нашему предположению, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ про всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $|\lambda|^n \leqslant \|A^n\|$ и, следовательно, имеет место неравенство $r(A) \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

С другой стороны, ранее было получено разложение $R_\lambda = \sum_{n=0}^\infty A^n/\lambda^{n+1}$ при всех $|\lambda| > \|A\|$. Если $f \in \mathscr{L}^*(\boldsymbol{E})$ ограниченный функционал на $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda)$ является голоморфной функцией в каждой связной компоненте $\rho(A)$. Поэтому ряд $F(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty f(A^n)/\lambda^{n+1}$ сходится при всех $|\lambda| > r(A)$ и значит $\sup_n |f(A^n/\lambda^n)| < \infty$ при всех $f \in \mathscr{L}^*(\boldsymbol{E})$ и $|\lambda| > r(A)$. Поскольку из слабой ограниченности вытекает сильная ограниченность, то существует $c_\lambda > 0$, т.ч. $\|A^n/\lambda^n\| \leqslant c_\lambda$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда имеем $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant |\lambda|$ при всех $|\lambda| > r(A)$. Следовательно, выполняется неравенство $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A)$. Таким образом, существует предел $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, который совпадает со спектральным радиусом $r(A)$. □

Пример. Пусть $A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$ — диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$ при всех $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \sup |\lambda_n| < \infty$.

Пусть элемент $e_n \in \boldsymbol{\ell}_p$ имеет координаты, равные 0, кроме n-й, равной 1. Тогда имеем $Ae_n = \lambda_n e_n$, т.е. числа $\lambda_n \in \sigma_p(A)$ являются собственными значениями. Если $\lambda \neq \lambda_n$, то оператор $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, в том и только в том случае имеет ограниченный обратный $(R_\lambda y)_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, когда его норма $\|R_\lambda\| = \sup |\lambda - \lambda_n|^{-1} < \infty$ конечна. Следовательно, спектр диагонального оператора совпадает с замыканием $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$ множества диагональных элементов $\{\lambda_n\}$.

Пусть $\lambda \in \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$, т.е. существует такая подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$, что $\lim \lambda_{n_k} = \lambda$. Поэтому имеем $\|A_\lambda e_{n_k}\| = |\lambda - \lambda_{n_k}| \to 0$, т.е. число λ принадлежит предельному спектру $\lambda \in \sigma_l(A)$. Если $1 \leqslant p < \infty$, то образ $\operatorname{Im} A_\lambda$ содержит множество всех финитных последовательностей и, следовательно, будет всюду плотным в $\boldsymbol{\ell}_p$, т.е. $\lambda \in \sigma_c(A)$. Если $p = \infty$, то предел $\lim y_{n_k} = 0$ для всех $y = \{y_n\} \in \operatorname{Im} A_\lambda$. Применяя теорему Ха́на–Ба́наха, построим продолжение функционала $f(y) = \lim y_{n_k}$, заданного на подпространстве $\boldsymbol{c} \subset \boldsymbol{\ell}_\infty$ сходящихся последовательностей, на все пространство $\boldsymbol{\ell}_\infty$ с сохранением его нормы. Тогда получим, что $\operatorname{Im} A_\lambda \subset \ker f$, т.е. $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Структура спектра диагонального оператора						
Спектр оператора A	$\sigma(A)$	$\sigma_p(A)$	$\sigma_c(A)$	$\sigma_r(A)$	$\sigma_l(A)$	$\sigma_d(A)$
$A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p,\ 1 \leqslant p < \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$
$A : \boldsymbol{\ell}_\infty \to \boldsymbol{\ell}_\infty,\ p = \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$

14 КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами над полем $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

Определение. Операторы $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F})$ называются *эквивалентными* $A\sim B$, если существует обратимый оператор $T\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, т.ч. $BT=TA$.

Если, кроме того, оператор T является изометричным отображением $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{F}$, то эти операторы называются *изометрически эквивалентными* $A\approx B$.

1. *Если $A\sim B$ эквивалентны, то $\sigma_p(A)=\sigma_p(B)$, $\sigma_c(A)=\sigma_c(B)$ и $\sigma_r(A)=\sigma_r(B)$.*

Поскольку $A_\lambda=\lambda I-A$ и $B_\lambda=\lambda I-B$, то $B_\lambda T=TA_\lambda$. Поэтому операторы $A_\lambda\sim B_\lambda$ эквивалентны. Следовательно, A_λ обратим тогда и только тогда, когда B_λ обратим. При этом имеют место равенства $\ker B_\lambda=T\ker A_\lambda$ и $\operatorname{Im}B_\lambda=T\operatorname{Im}A_\lambda$ при $\lambda\in\rho(A)$. Отсюда легко вытекают указанные равенства спектров.

2. *Если $A\approx B$ изометрически эквивалентны, то $\|A\|=\|B\|$.*

Поскольку в силу изометричности $B=TAT^{-1}$ и $\|T\|=\|T^{-1}\|=1$, то имеют место неравенства $\|B\|\leqslant\|A\|$ и $\|A\|\leqslant\|B\|$. Откуда следует, что $\|A\|=\|B\|$.

Пример 1. Выясним структуру спектра оператора свертки с функцией $K\in\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, определенного следующей формулой

$$Af(x)=K*f(x)=\textstyle\int_{\mathbb{R}}K(x-y)\,f(y)\,dy,\ \text{где}\ f\in\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}).$$

Применяя обобщенное неравенство Минко́вского, получим $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_2}\leqslant\|K\|_{\boldsymbol{L}_1}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Значит $\operatorname{Im}A\subset\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и в качестве оператора T можно взять преобразование Фурье́. Тогда из формулы свертки вытекает $\widehat{Af}(x)=\sqrt{2\pi}\,\widehat{K}(x)\,\widehat{f}(x)$ при п.в. $x\in\mathbb{R}$.

В силу леммы Ри́мана–Лебе́га функция $\varphi(x)\doteqdot\sqrt{2\pi}\,\widehat{K}(x)$ непрерывна и $\varphi(x)\to0$ при $x\to\pm\infty$. Поэтому ее можно считать заданной на множестве $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, т.е. $\varphi(\pm\infty)=0$. Пусть $Bg(x)\doteqdot\varphi(x)\,g(x)$ является оператором умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, Тогда $B_\lambda g(x)=(\lambda-\varphi(x))\,g(x)$ и $R_\lambda g(x)=(\lambda-\varphi(x))^{-1}g(x)$. Резольвента R_λ является ограниченным оператором в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\|R_\lambda\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|\lambda-\varphi(x)|^{-1}<\infty$. Поэтому $\sigma(B)=\varphi(\overline{\mathbb{R}})$. Поскольку операторы $A\approx B$ изометрически эквивалентны, то выполняются следующие свойства:

a) норма оператора $\|A\|=\|B\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$;

b) спектр оператора $\sigma(A)=\sigma(B)=\varphi(\overline{\mathbb{R}})\doteqdot\{\lambda=\varphi(x)\mid x\in\overline{\mathbb{R}}\}$;

c) точечный спектр $\sigma_p(A)=\sigma_p(B)=\{\lambda\in\varphi(\overline{\mathbb{R}})\mid\mu(\varphi^{-1}(\lambda))>0\}$;

d) непрерывный спектр $\sigma_c(A)=\sigma_c(B)=\{\lambda\in\varphi(\overline{\mathbb{R}})\mid\mu(\varphi^{-1}(\lambda))=0\}$;

e) предельный спектр $\sigma_l(A)=\sigma_p(A)\sqcup\sigma_c(A)=\sigma(A)$.

В самом деле, если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda))>0$ положительна, то функция $e(x)\doteqdot\chi_E(x)$, где $E\subset\varphi^{-1}(\lambda)$ есть измеримое множество положительной меры $\mu(E)>0$, является собственной функцией оператора B, т.е. $Be(x)=\lambda e(x)$. Поэтому $\lambda\in\sigma_p(B)$.

Докажем, что если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$, то замыкание образа $\overline{\mathrm{Im} B_\lambda} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Пусть $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и $O_\delta \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\lambda| < \delta\}$. Определим функцию $g_\delta(x) \doteqdot 0$, если $\varphi(x) \in O_\delta$; $g_\delta(x) \doteqdot (\lambda - \varphi(x))^{-1} g(x)$, если $\varphi(x) \notin O_\delta$. Так как $|g_\delta(x)| \leqslant |g(x)|/\delta$, то $g_\delta \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебе́га

$$\|g - B_\lambda g_\delta\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - B_\lambda g_\delta(x)|^2 dx = \int_{\varphi^{-1}(O_\delta)} |g(x)|^2 dx \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_c(B)$, и, следовательно, $\sigma_l(B) = \sigma_p(B) \sqcup \sigma_c(B) = \sigma(B)$.

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называется *компактным*, если образ $A(M) \subset \boldsymbol{F}$ каждого ограниченного множества $M \subset \boldsymbol{E}$ является предкомпактным в $\boldsymbol{F}$. Обозначим через $\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ пространство всех компактных операторов, действующих из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$ и $\mathscr{K}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$.

1. *Оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный тогда и только тогда, когда образ $A(\boldsymbol{S}) \subset \boldsymbol{F}$ единичного шара $\boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ является предкомпактным.*

В самом деле, по определению множество $M \subset \boldsymbol{E}$ ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant r\}$, где $r > 0$.

2. *Компактный оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ограниченным.*

Поскольку всякое предкомпактное множество является ограниченным.

3. *Если $A, B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактны, то их сумма $A+B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактна.*

Действительно, пусть $\{x_n\} \subset \boldsymbol{S}$. Тогда существует $\{n_k\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to y \in \boldsymbol{F}$, и существует $\{n_{k_i}\}$, т.ч. $Bx_{n_{k_i}} \to z \in \boldsymbol{F}$. Отсюда $(A+B)x_{n_{k_i}} = Ax_{n_{k_i}} + Bx_{n_{k_i}} \to y + z \in \boldsymbol{F}$. Таким образом, множество $A(\boldsymbol{S}) \subset \boldsymbol{F}$ является предкомпактным.

4. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, а $B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то оператор $BA \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный. Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, а $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то оператор $BA \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный.*

Это следует из того, что всякий ограниченный оператор переводит ограниченные множества в ограниченные, а предкомпактные множества в предкомпактные.

5. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченный и размерность $\dim \boldsymbol{E} < \infty$ или $\dim \boldsymbol{F} < \infty$, то оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный.*

Действительно, всякое ограниченное множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в пространстве конечной размерности $\dim \boldsymbol{E} < \infty$ является предкомпактным.

6. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный и размерность $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то оператор A не имеет ограниченного левого обратного оператора.*

Если существует левый обратный $B \in \mathscr{L}(\mathrm{Im} A, \boldsymbol{E})$, то тождественный оператор, равный $BA = I$, является компактным, что невозможно, т.к. единичный шар $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{E}$ в бесконечномерном пространстве не является предкомпактным.

7. *Пространство компактных операторов $\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является замкнутым, т.е. если $A_n \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $A_n \to A$ сходится по норме, то $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

По условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется n, т.ч. $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon/2$ при всех $x \in \boldsymbol{S}$. Так как $A_n(\boldsymbol{S})$ предкомпактно, то существует $\varepsilon/2$-сеть $\{y_k\}_{k=1}^m$ множества $A_n(\boldsymbol{S})$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{S}$ найдется k, т.ч. $\|y_k - Ax\| \leqslant \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$. Поэтому $\{y_k\}_{k=1}^m$ является ε-сетью $A(\boldsymbol{S})$ и значит $A(\boldsymbol{S})$ предкомпактно.

Выясним свойства спектра компактного оператора. Напомним, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит предельному спектру $\lambda \in \sigma_l(A)$ оператора A, если $\inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0$.

1. *Если* $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ *и размерность* $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, *то* $\sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

По свойству 6 имеем $0 \in \sigma_l(A)$. Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$ и $\lambda \neq 0$, тогда существует $\{x_n\}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \to 0$. В силу компактности A найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to e \in \boldsymbol{E}$. Поскольку $x_{n_k} = (A_\lambda x_{n_k} + Ax_{n_k})/\lambda$, то $x_{n_k} \to e/\lambda$ и в силу непрерывности оператора $Ax_{n_k} \to Ae/\lambda$. Поэтому имеем $Ae = \lambda e$, т.е. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

2. *Если* $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, *то вне любого круга* $K_\varepsilon \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \varepsilon\}$ *при* $\varepsilon > 0$ *может быть только конечное число собственных значений оператора* A.

Предположим, что найдется последовательность $|\lambda_n| > \varepsilon$ различных собственных значений. Рассмотрим последовательность $\{e_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|e_n\| = 1$ и $Ae_n = \lambda_n e_n$, и обозначим через $L_n = \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^n$ линейную оболочку. Поскольку $\{e_n\}$ линейно независимы, то $L_{n-1} \neq L_n$. По лемме Рисса о почти перпендикуляре существуют $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Представим эти элементы в виде $y_n \doteqdot c_n e_n + x_n$, где $x_n \in L_{n-1}$. Тогда $Ay_n = c_n \lambda_n e_n + Ax_n = \lambda_n y_n - \lambda_n x_n + Ax_n$, где $\lambda_n x_n - Ax_n \in L_{n-1}$. Так как $\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то получим

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m)\| > |\lambda_n|/2 > \varepsilon/2.$$

т.е. последовательность $\{Ay_n\} \subset A(\boldsymbol{S})$ не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.

Теорема (Ри́сса–Ша́удера)**.** *Если* $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ *компактный оператор в банаховом пространстве бесконечной размерности* $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, *то спектр* $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ *состоит из собственных значений и нуля, при этом ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, т.е.* $\dim E_\lambda < \infty$ *при* $\lambda \neq 0$ *и* $E_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$.

Доказательство. По свойству 1 спектра компактного оператора и по теореме о границе спектра выполняется включение $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Поскольку в силу свойства 2 вне любого круга K_ε имеется лишь конечное число собственных значений, то там нет других точек спектра $\sigma(A)$. Действительно, если множество $\mathbb{C} \setminus K_\varepsilon$ имеет точки спектра, которые не являются собственными значениями, то оно должно содержать граничные точки спектра, что невозможно. Таким образом, ненулевые точки спектра совпадают с собственными значениями оператора A и выполняется равенство $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Поскольку сужение оператора $A|_{E_\lambda} = \lambda I|_{E_\lambda}$ на собственное подпространство E_λ, соответствующее собственному значению $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$, является компактным и обратимым оператором, то по свойству 6 размерность $\dim E_\lambda < \infty$. $\square$

Теорема (Ша́удера)**.** *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ ограниченный оператор, определенный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то он является компактным $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ тогда и только тогда, когда его сопряженный компактный $A^* \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$.*

Доказательство. Необходимость. По условию замкнутый образ единичного шара $K \doteqdot \overline{A(S)}$ является компактным. Для каждого функционала $f \in \boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{F}^*$ рассмотрим непрерывную функцию $g(y) \doteqdot f(y)$ при всех $y \in K$. Множество всех таких функций $g \in \boldsymbol{C}(K)$ обозначим через M. Поскольку имеют место неравенства

$$\sup_{y\in K}|g(y)| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|f(Ax)\| \leqslant \|A\|, \quad |g(y_1)-g(y_2)| = |f(y_1-y_2)| \leqslant \|y_1-y_2\|,$$

то множество $M \subset \boldsymbol{C}(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Арцела́–Аско́ли множество M является предкомпактным. Заметим, что M изометрично множеству $A^*(\boldsymbol{S}^*)$, поскольку выполняется равенство

$$\|A^*f\| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|A^*f(x)| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|f(Ax)| = \sup_{y\in K}|g(y)| = \|g\|_{\boldsymbol{C}}.$$

Поэтому образ единичного шара $A^*(\boldsymbol{S}^*) \subset \boldsymbol{E}^*$ является предкомпактным.

Достаточность. Так как $A^* \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$, то по доказанному $A^{**} \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}^{**},\boldsymbol{F}^{**})$. Пусть J обозначает канонические вложения во второе сопряженное пространство. Тогда, полагая $J(x) = \delta_x$, при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$ получим

$$\langle A^{**}J(x), f\rangle = \langle \delta_x, A^*f\rangle = \langle A^*f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle = \langle JA(x), f\rangle,$$

т.е. $A^{**}J = JA$. Отсюда вытекает включение $JA(\boldsymbol{S})) = A^{**}J(\boldsymbol{S})) \subset A^{**}(\boldsymbol{S}^{**})$. Так как $A^{**}(\boldsymbol{S}^{**})$ предкомпактно, то $A(\boldsymbol{S})$ также будет предкомпактным. $\square$

Пример 2. Достаточные условия компактности интегрального оператора

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b K(x,y)\,f(x)\,dy \text{ при всех } f \in \boldsymbol{L}_2[a,b],$$

действующего в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$. Рассмотрим два случая.

a) Пусть $K \in \boldsymbol{C}[a,b]^2$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, мы получим неравенство $\|Af\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant (b-a)^{1/2}\|K\|_{\boldsymbol{C}}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|K(x_1,y) - K(x_2,y)| < \varepsilon$ при всех $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|Af(x_1) - Af(x_2)| < \varepsilon(b-a)^{1/2}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ при всех $|x_1 - x_2| < \delta$, т.е. образ единичного шара $A(\boldsymbol{S}) \subset \boldsymbol{C}[a,b]$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По по теореме Арцела́–Аско́ли множество $A(\boldsymbol{S})$ предкомпактно в $\boldsymbol{C}[a,b]$ и значит предкомпактно в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$. Поэтому оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{L}_2)$ компактный.

b) Пусть $K \in \boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, мы получим, что $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_2}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Поскольку множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $K_n \in \boldsymbol{C}[a,b]^2$, т.ч. $\|K - K_n\|_{\boldsymbol{L}_2} < 1/n$. Определим интегральный оператор по формуле $A_nf(x) \doteqdot \int_a^b K_n(x,y)\,f(x)\,dy$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Тогда, используя указанное выше неравенство, имеем $\|Af - A_nf\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|K - K_n\|_{\boldsymbol{L}_2}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Таким образом, выполняется неравенство $\|A - A_n\| < 1/n$ и значит последовательность компактных операторов сходится по норме к оператору A. Поэтому оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{L}_2)$ компактный.

15 ФРЕДГО́ЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ — банаховы пространства. Напомним, что *коразмерностью* подпространства $L \subset \boldsymbol{E}$ называется размерность факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$.

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *фредго́льмовым*, если ядро конечной размерности $\dim(\ker A) = n$, а образ конечной коразмерности $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = m$. Величина $\operatorname{ind} A \doteqdot n - m$ называется *индексом* A. Множество всех фредго́льмовых операторов обозначим через $\mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $\mathscr{F}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$.

Лемма. *Если оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ фредго́льмовый, то его образ замкнут.*

Доказательство. Пусть $\{\widehat{e}_k\}_{k=1}^m$ — базис факторпространства $\widehat{\boldsymbol{F}} \doteqdot \boldsymbol{F}/\operatorname{Im} A$. Так как всякий элемент $z \in \boldsymbol{F}$ допускает представление $z = z_0 + \sum_{k=1}^m c_k e_k$, где $z_0 \in \operatorname{Im} A$, то $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A \oplus M$, где $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ обозначает линейную оболочку. Рассмотрим оператор $B : \boldsymbol{E} \times M \to \boldsymbol{F}$, определенный по формуле $B(x,y) \doteqdot Ax + y$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $y \in M$. Так как оператор B ограниченный и сюръективный, то он является гомоморфизмом. Поэтому образ $B(\boldsymbol{E} \times 0) = \operatorname{Im} A$ будет замкнутым подпространством в $\boldsymbol{F}$. □

Пример 1. Всякий биективный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является фредгольмовым. Компактный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ не является фредгольмовым, если $\dim \boldsymbol{E} = \infty$ или $\dim \boldsymbol{F} = \infty$. В самом деле, иначе по теореме о гомоморфизме образ единичного шара $A(\boldsymbol{S})$ является окрестностью нуля в $\operatorname{Im} A$ и, следовательно, имеет конечную размерность $\dim A(\boldsymbol{S}) < \infty$ в силу предкомпактности. Тогда $\dim(\operatorname{Im} A) < \infty$, а значит $\dim \boldsymbol{F} < \infty$ и $\dim \boldsymbol{E} < \infty$, что невозможно по предположению.

Теорема (о каноническом операторе Фредго́льма)**.** *Если оператор $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ является компактным, то оператор $A \doteqdot I - K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})$ фредго́льмовый.*

Доказательство. Так как по теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A$ имеет конечную размерность, то существует замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$. Докажем, что оператор $B \doteqdot A|_L$ имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A$.

Заметим, что B ограничен снизу. В самом деле, иначе существует $\{x_n\} \subset L$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to 0$. В силу компактности K существует подпоследовательность, т.ч. $Kx_{n_i} \to x$ сходится по норме. Так как $x_{n_i} = Ax_{n_i} + Kx_{n_i} \to x$, то $Ax_{n_i} \to Ax$. Поэтому из замкнутости L следует, что $x \in L$, $\|x\| = 1$ и $Ax = 0$. Таким образом, $\ker B \neq 0$, что противоречит выбору L. В силу леммы, доказанной ранее, из ограниченности снизу оператора B вытекает, что он имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} B$.

Поскольку образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, то по теореме, доказанной ранее, $\operatorname{Im} A = (\ker A^*)_\perp$. По теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A^*$ имеет конечную размерность m. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ образует базис ядра $\ker A^*$ и $\{e_k\}_{k=1}^m$ является соответствующей биортогональной системой. Тогда получим $\operatorname{Im} A = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Отсюда, обозначая $L \doteqdot \operatorname{Im} A$ и $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку, всякий элемент $x \in \boldsymbol{E}$ допускает разложение $x = y + z$, где $z = \sum_{k=1}^m f_k(x) e_k \in M$ и $y = x - z \in L$. Таким образом, $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ и коразмерность образа равна $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = \dim(\ker A^*) = m$. □

Из курса линейной алгебры известна следующая *альтернатива Фредго́льма*: либо система n линейных уравнений с n неизвестными однозначно разрешима для любой правой части, либо соответствующая однородная система имеет ненулевое решение. Теоремы Фредго́льма в бесконечномерном банаховом пространстве устанавливают аналогичные связи между решениями однородного и неоднородного уравнений, определяемых каноническим оператором Фредго́льма.

Для доказательств теорем Фредгольма мы предположим, что $A \doteqdot I - K$ является *каноническим оператором Фредгольма* в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$, а $A^* \doteqdot I - K^*$ образует его сопряженный оператор, при этом $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ определяет компактный оператор. По теореме Ри́сса–Ша́удера ядра этих операторов $\ker A$ и $\ker A^*$ имеют конечную размерность $\dim(\ker A) = n$ и $\dim(\ker A^*) = m$.

Теорема (I теорема Фредго́льма)**.** *Пусть* $\{f_k\}_{k=1}^m$ *базис решений однородного сопряженного уравнения* $A^* f = 0$. *Неоднородное уравнение* $Ax = y$ *тогда и только тогда имеет решение, когда* $f_k(y) = 0$ *при* $k = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Так как образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} A = (\ker A^*)_\perp = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Поэтому получаем, что $y \in \operatorname{Im} A$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$. □

Теорема (II теорема Фредго́льма)**.** *Пусть* $\{x_k\}_{k=1}^n$ *базис решений однородного уравнения* $Ax = 0$. *Неоднородное сопряженное уравнение* $A^* f = g$ *тогда и только тогда имеет решение, когда* $g(x_k) = 0$ *при* $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Так как образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp = \bigcap_{k=1}^n \ker \delta_{x_k}$, где $\delta_{x_k} \in \boldsymbol{E}^{**}$ и $\delta_{x_k}(f) \doteqdot f(x_k)$ при $f \in \boldsymbol{E}^*$. Отсюда следует, что $g \in \operatorname{Im} A^*$ тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. □

Теорема (III теорема, альтернатива Фредго́льма)**.** *Для того чтобы неоднородное уравнение* $Ax = y$ *было разрешимо при всех* $y \in \boldsymbol{E}$, *необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение* $Ax = 0$ *имело только нулевое решение.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует элемент $x_1 \neq 0$, т.ч. $Ax_1 = 0$. Обозначим через $L_n \doteqdot \ker A^n$ ядро оператора A^n. Тогда включения $L_{n-1} \subset L_n$ являются строгими. Действительно, по условию существуют $x_n \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $Ax_n = x_{n-1}$ при $n = 2, 3, \ldots$ Отсюда $A^{n-1} x_n = x_1 \neq 0$ и значит $x_n \in L_n \setminus L_{n-1}$.

В силу леммы Ф. Рисса о почти перпендикуляре существуют элементы $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Поскольку имеют место равенства $Ky_n - Ky_m = y_n - (Ay_n + y_m - Ay_m)$ и элемент $Ay_n + y_m - Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то $\|Ky_n - Ky_m\| > 1/2$ при $n > m$, что противоречит компактности оператора K.

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = 0$ допускает только нулевое решение. Тогда по второй теореме неоднородное сопряженное уравнение $A^* f = g$ разрешимо при всех $g \in \boldsymbol{E}^*$ и значит по доказанной необходимости однородное сопряженное уравнение $A^* f = 0$ имеет только нулевое решение. Поэтому в силу первой теоремы неоднородное уравнение $Ax = y$ разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$. □

Теорема (об индексе канонического оператора Фредго́льма)**.** *Уравнения* $Ax=0$ *и* $A^*f=0$ *имеют равное число линейно независимых решений, т.е.* $\operatorname{ind}A=n-m=0$.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ образует базис в подпространстве $\ker A$ и $\{f_i\}_{i=1}^n$ соответствующая биортогональная система функционалов из $\boldsymbol{E}^*$. Пусть $\{g_j\}_{j=1}^m$ задает базис в подпространстве $\ker A^*$ и $\{y_j\}_{i=1}^m$ соответствующая биортогональная система элементов из $\boldsymbol{E}$. Докажем, что следующие два случая невозможны.

a) $n<m$. Определим операторы $K_nx \doteqdot Kx+\sum_{i=1}^n f_i(x)\,y_i$ при $x\in\boldsymbol{E}$ и $A_n\doteqdot I-K_n$. Докажем, что ядро $\ker A_n=0$. Если элемент $x\in\ker A_n$, то получим $Ax=\sum_{i=1}^n f_i(x)\,y_i$. Так как $A^*g_j=0$ при $j=1,\dots,m$, то $A^*g_j(x)=g_j(Ax)=f_j(x)=0$ при $j=1,\dots,n$. Поэтому имеем $Ax=0$ и, следовательно, элемент $x=\sum_{i=1}^n f_i(x)\,x_i=0$.

Поскольку оператор K_n является компактным, то по третьей теореме существует элемент $z\in\boldsymbol{E}$, т.ч. $A_nz=y_m$. Поэтому $0=A^*g_m(z)=g_m(Az)=g_m(A_nz)=g_m(y_m)=1$. Следовательно, мы получили противоречие.

b) $n>m$. Рассмотрим оператор $K_m^*f\doteqdot K^*f+\sum_{j=1}^m f(y_j)\,f_j$ при $f\in\boldsymbol{E}^*$, который является сопряженным к оператору $K_mx\doteqdot Kx+\sum_{j=1}^m f_j(x)\,y_j$. Положим $A_m^*=I-K_m^*$. Докажем, что ядро $\ker A_m^*=0$. Если элемент $f\in\ker A_m^*$, то имеем $A^*f=\sum_{j=1}^m f(y_j)\,f_j$. Поскольку $Ax_i=0$ при $i=1,\dots,n$, то $A^*f(x_i)=f(Ax_i)=f(y_i)=0$ при $i=1,\dots,m$. Поэтому получаем $A^*f=0$ и, следовательно, элемент $f=\sum_{j=1}^m f(y_j)\,g_j=0$.

Поскольку оператор K_m^* является компактным, то по третьей теореме существует элемент $h\in\boldsymbol{E}^*$, т.ч. $A_m^*h=f_n$. Поэтому $0=h(Ax_n)=h(A_mx_n)=A_m^*h(x_n)=f_n(x_n)=1$. Таким образом, мы получили противоречие. □

Определение. Оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ будем называть *почти обратимым*, если существует ограниченный оператор $T\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, т.ч. $TA=I-K_1$ и $AT=I-K_2$, где $K_1\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2\in\mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ компактные операторы.

Теорема (Никольского)**.** *Ограниченный оператор* $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *тогда и только тогда является почти обратим, когда он фредго́льмовый.*

Доказательство. Необходимость. Так как по условию $K_1\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2\in\mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами, то по доказанной выше теореме операторы $TA=I-K_1$ и $AT=I-K_2$ являются фредго́льмовыми. А так как $\ker A\subset\ker TA$ и $\operatorname{Im}AT\subset\operatorname{Im}A$, то оператор $A\in\mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ также будет фредго́льмовым.

Достаточность. Поскольку размерность ядра $\ker A\subset\boldsymbol{E}$ конечна, то существует замкнутое подпространство $L\subset\boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E}=\ker A\oplus L$. Так как коразмерность образа $\operatorname{Im}A$ конечна, то существует замкнутое подпространство $M\subset\boldsymbol{F}$, т.ч. $\boldsymbol{F}=\operatorname{Im}A\oplus M$. Обозначим через $P:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ проектор на L, а через $Q:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{F}$ проектор на $\operatorname{Im}A$, и положим $P_1\doteqdot I-P$ и $Q_1\doteqdot I-Q$. Тогда проекторы P_1 и Q_1 имеют конечномерные образы $\operatorname{Im}P_1=\ker A$ и $\operatorname{Im}Q_1=M$, а значит являются компактными.

Поскольку оператор $B\doteqdot A|_L:L\to\operatorname{Im}A$ биективный, то по теореме Ба́наха его обратный $B^{-1}:\operatorname{Im}A\to L$ является ограниченным. Пусть $T\doteqdot PB^{-1}Q$, тогда имеют место равенства $TA=PB^{-1}A=P=I-P_1$ и $AT=AB^{-1}Q=Q=I-Q_1$. Ещё заметим, что оператор $T\in\mathscr{F}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ фредгольмовый и его индекс $\operatorname{ind}T=-\operatorname{ind}A$. □

Теорема (об устойчивости при компактных возмущениях). *Если $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то оператор $A+K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и индекс* $\operatorname{ind}(A+K) = \operatorname{ind}A$.

Доказательство. В силу теоремы Никольского существует оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами. Тогда имеют место следующие равенства:

$$T(A+K) = I - (K_1 - TK), \quad (A+K)T = I - (K_2 - KT),$$

где $K_1 - TK \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 - KT \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$. Поэтому оператор $A+K \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ почти обратим и значит является фредго́льмовым. В силу замечания при доказательстве теоремы Никольского его индекс равен $\operatorname{ind}(A+K) = -\operatorname{ind}T = \operatorname{ind}A$. □

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *несущественным значением* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ является фредго́льмовым. Множество всех несущественных значений обозначается через $\rho_e(A)$. Дополнительное множество $\sigma_e(A) \doteqdot \mathbb{C} \setminus \rho_e(A)$ называется *существенным спектром* оператора A.

Весь спектр оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является объединением двух множеств

$$\sigma_e(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \notin \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\} \quad \text{и} \quad \sigma_i(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\},$$

где $\sigma_i(A)$ называется *несущественным спектром* A. По теореме об устойчивости существенный спектр не изменяется при компактных возмущениях оператора A.

Пример 2. Пусть $(Ax)_n = \lambda_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$, диагональным оператор в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$, где последовательность $\{\lambda_n\} \in \boldsymbol{\ell}_\infty$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \sup|\lambda_n|$.

Обозначим через $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n = 0\}$ и $M = \mathbb{N} \setminus N$. Тогда $\boldsymbol{\ell}_p = \boldsymbol{\ell}_p(N) \oplus \boldsymbol{\ell}_p(M)$. Если оператор фредго́льмовый, то ядро $\ker A = \boldsymbol{\ell}_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\operatorname{Im}A = A(\boldsymbol{\ell}_p(M))$ замкнут. Тогда N конечно и оператор $A : \boldsymbol{\ell}_p(M) \to \boldsymbol{\ell}_p(M)$ имеет ограниченный обратный. Отсюда $\inf_{n\in M}|\lambda_n| > 0$. Таким образом, $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{\ell}_p)$ тогда и только тогда, когда нуль не является предельной точкой $\{\lambda_n\}$. Поскольку $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$, то существенный спектр $\sigma_e(A)$ совпадает с множеством всех предельных точек $\{\lambda_n\}$, а несущественный спектр $\sigma_i(A)$ с множеством тех точек λ_n, которые повторяются в последовательности $\{\lambda_n\}$ конечное число раз.

Пример 3. Пусть $Af(x) = \varphi(x)f(x)$ оператор умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_p[a,b]$, где $\varphi \in \boldsymbol{L}_\infty[a,b]$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \operatorname{ess\,sup}_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|$.

Обозначим через $N = \{x \in [a,b] \mid \varphi(x) = 0\}$ и через $M = [a,b] \setminus N$. Тогда получаем следующее представление $\boldsymbol{L}_p([a,b]) = \boldsymbol{L}_p(N) \oplus \boldsymbol{L}_p(M)$. Если оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{L}_p)$ является фредго́льмовым, то ядро $\ker A = \boldsymbol{L}_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\operatorname{Im}A = A(\boldsymbol{L}_p(M))$ замкнут. Поэтому множество N имеет меру нуль и оператор $A : \boldsymbol{L}_p(M) \to \boldsymbol{L}_p(M)$ имеет ограниченный обратный. Отсюда $\operatorname{ess\,inf}_{x\in[a,b]}|\varphi(x)| > 0$.

Таким образом, оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{L}_p)$ фредго́льмовый тогда и только тогда, когда он обратим. Поскольку $A_\lambda f(x) = (\lambda - \varphi(x))f(x)$, то существенный спектр $\sigma_e(A)$ совпадает со спектром оператора $\sigma(A) = \sigma_e(A)$, т.е. с множеством существенных значений функции $\varphi(x)$, а несущественный спектр $\sigma_i(A)$ является пустым.

16 ЭРМИ́ТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Напомним, что линейный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым*, если $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для всех $x, y \in \boldsymbol{H}$. Множество эрмитовых операторов образует действительное подпространство $\mathscr{H}(\boldsymbol{H}) \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ ограниченных операторов.

1. *Если $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то собственные значения $\lambda \in \sigma_p(A)$ действительны $\lambda \in \mathbb{R}$, а собственные подпространства $H_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$ ортогональны $H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

Пусть $Ae = \lambda e$ и $\|e\| = 1$, тогда $\lambda = \langle Ae, e\rangle = \langle e, Ae\rangle = \overline{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому, если $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ и $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, то $\lambda_1\langle e_1, e_2\rangle = \langle Ae_1, e_2\rangle = \langle e_1, Ae_2\rangle = \lambda_2\langle e_1, e_2\rangle$, т.е. $\langle e_1, e_2\rangle = 0$.

Теорема (критерий Ве́йля). *Спектр эрмитова оператора $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ совпадает с его предельным спектром, т.е. $\sigma(A) = \sigma_l(A)$.*

Доказательство. Поскольку дополнительное множество к предельному спектру $\sigma(A) \setminus \sigma_l(A) \subset \sigma_r(A)$ содержится в остаточном спектре, то достаточно показать, что остаточный спектр $\sigma_r(A)$ является пустым. Предположим обратное, т.е. $\ker A_\lambda = 0$ и существует $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $y \neq 0$ и $y \perp \operatorname{Im} A_\lambda$. Тогда $\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle x, A_{\overline{\lambda}} y\rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Отсюда следует, что $A_{\overline{\lambda}} y = 0$, т.е. $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A)$. Так как собственные значения действительны, то $A_\lambda y = 0$, что противоречит нашему предположению. $\square$

2. *Если $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ является действительным.*

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\beta \neq 0$, то $A_\lambda = A_\alpha + i\beta I$ и справедливо следующее равенство:

$$\|A_\lambda x\|^2 = \langle A_\alpha x, A_\alpha x\rangle - i\beta\langle A_\alpha x, x\rangle + i\beta\langle x, A_\alpha x\rangle + \beta^2\langle x, x\rangle = \|A_\alpha x\|^2 + \beta^2\|x\|.$$

Поэтому $\inf_{\|x\|=1}\|A_\lambda x\| \geqslant |\beta| > 0$ и, следовательно, по критерию Ве́йля $\lambda \notin \sigma(A)$.

3. *Если $A \in \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то спектральный радиус равен норме $r(A) = \|A\|$.*

Так как $A^2 = AA$, то $\|A^2\| \leqslant \|A\|^2$. В силу неравенства Коши́–Буняко́вского

$$\|A^2\| = \sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|A^2x\| = \sup_{x,y\in\boldsymbol{S}}\langle A^2x, y\rangle = \sup_{x,y\in\boldsymbol{S}}\langle Ax, Ay\rangle \geqslant \sup_{x\in\boldsymbol{S}}\langle Ax, Ax\rangle = \|A\|^2,$$

где $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{H}$ — единичный шар. Поэтому $\|A^2\| = \|A\|^2$ и, следовательно, $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. По теореме о спектральном радиусе $r(A) = \lim\sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim\sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|} = \|A\|$.

4. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{H}) \cap \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ компактный и эрмитовый, то $\sigma_p(A) \neq \emptyset$.*

Пусть $\sigma_p(A) = \emptyset$. Так как $\sigma(A) \neq \emptyset$, то по теореме Ри́сса–Ша́удера $\sigma(A) = \{0\}$. Поэтому по свойству 3 получим $r(A) = \|A\| = 0$, т.е. $A = 0$, что невозможно.

Теорема (Ги́льберта–Шми́дта). *Пусть оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{H}) \cap \mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ является компактным и эрмитовым в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда существует полная ортонормированная система из собственных векторов A.*

Доказательство. В случае $\dim \boldsymbol{H} < \infty$ эта теорема доказывается в курсе линейной алгебры. Пусть $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. Так как оператор A является компактным, то множество $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$ собственных значений не более, чем счетно, и ненулевые собственные значения $\lambda_n \neq 0$ имеют конечную кратность $\dim H_{\lambda_n} < \infty$, где $H_{\lambda_n} \doteqdot \ker A_{\lambda_n}$. Поскольку оператор A является эрмитовым, то все его собственные значения действительны $\lambda_n \in \mathbb{R}$, а их собственные подпространства ортогональны $H_{\lambda_n} \perp H_{\lambda_m}$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Выберем в каждом подпространстве H_{λ_n} ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов с собственным значением λ_n. Тогда объединение всех этих ортонормированных систем образует ортонормированную систему $\{e_n\}$ в $\boldsymbol{H}$. Пусть $L \doteqdot \overline{\mathrm{sp}}\{e_n\}$ замкнутая линейная оболочка системы $\{e_n\}$. Тогда L является инвариантным подпространством для оператора $A : L \to L$, а в силу его эрмитовости ортогональное дополнение $L^\perp$ также будет инвариантным подпространством для оператора $A : L^\perp \to L^\perp$. При этом по свойству 4 подпространство $L^\perp$ должно иметь собственный вектор, что невозможно по построению. Следовательно, $L^\perp = 0$ и по теореме об ортогональном разложении получим, что $\boldsymbol{H} = L \oplus L^\perp = L$. □

Пример 1. Оператором *Ги́льберта–Шми́дта* называется интегральный оператор, определенный в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ по формуле

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy, \quad f \in \boldsymbol{L}_2[a,b],$$

у которого ядро $K(x,y)$ удовлетворяет условиям $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$, $K(x,y) \in \boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Из доказанных ранее утверждений оператор A является эрмитовым и компактным. Предположим далее, что его ненулевые собственные значения $\lambda_n \neq 0$ упорядочены $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ и повторяется столько раз, какова их кратность. Соответствующая им ортонормированная система собственных функций обозначается через $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Выведем формулу резольвенты оператора A. В силу теоремы Ги́льберта–Шми́дта функция $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$ разлагается в ряд $f = f_0 + \sum_{n=1}^\infty \langle f, e_n \rangle e_n$, где $f_0 \in \ker A$. Тогда $Af = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$. Если $g = A_\lambda f$, то $\langle g, e_n \rangle = \langle A_\lambda f, e_n \rangle = \langle f, A_\lambda e_n \rangle = (\lambda - \lambda_n)\langle f, e_n \rangle$. Поэтому резольвента $R_\lambda g = f$ имеет при всех $\lambda \in \rho(A)$ представление

$$R_\lambda g = \tfrac{1}{\lambda} g + \tfrac{1}{\lambda} Af = \tfrac{1}{\lambda} g + \tfrac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^\infty \tfrac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, e_n \rangle e_n = \tfrac{1}{\lambda} g + \tfrac{1}{\lambda} \int_a^b K_\lambda(x,y)\, g(y)\, dy,$$

где $K_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(x) \overline{e_n(y)}$. Докажем, что ряд $K_\lambda(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$.

Функции $\varphi_n(x,y) = e_n(x)\overline{e_n(y)}$ образуют ортонормированную систему в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Так как функция $K(x,y)$ имеет коэффициенты Фурье $\langle K, \varphi_n \rangle = \langle Ae_n, e_n \rangle = \lambda_n$, то ее ряд Фурье́ сходится к функции $F(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \varphi_n(x,y)$ из пространства $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$. Поскольку система функций $h(x,y) = f(x)\overline{g(y)}$ полна в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$ и

$$\langle K, h \rangle = \langle Ag, f \rangle = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle g, e_n \rangle \langle e_n, f \rangle = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle \varphi_n, h \rangle = \langle F, h \rangle$$

для всех $f, g \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, то функции $K(x,y) = F(x,y)$ равны п.в. на $[a,b]^2$. Поэтому в силу равенства Парсева́ля $\|K\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 < \infty$. Отсюда $\|K_\lambda\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2 < \infty$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Таким образом, ряд Фурье функции $K_\lambda(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{L}_2[a,b]^2$.

Пусть $p \in \boldsymbol{C}^1[a,b]$ положительна $p(x) > 0$, а $q \in \boldsymbol{C}[a,b]$ принимает действительные значения. Рассмотрим дифференциальный оператор Штýрма–Лиувúлля

$$Lu(x) = -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) \text{ при п.в. } x \in [a,b].$$

Его область определения $M \doteqdot \operatorname{dom} L$ состоит из функций $u \in \mathrm{W}_2^2[a,b]$, у которых первая производная абсолютно непрерывна $u' \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, а вторая $u'' \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, при этом выполняются граничные условия $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0$ и $\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0$ с действительными коэффициентами и т.ч. $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Подпространство M всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$ и оператор L симметричен, т.е. $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ для всех $u, v \in M$. В самом деле, интегрируя по частям, имеем

$$\langle Lu,v\rangle - \langle u,Lv\rangle = \int_a^b (Lu)\overline{v} - u(L\overline{v})dx = -\int_a^b \overline{v}\,d(pu') + \int_a^b u\,d(p\overline{v}') = p(u\overline{v}' - u'\overline{v})|_a^b = 0,$$

где последнее равенство вытекает из граничных условий, т.к. определители

$$\det\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \overline{v}(a) & \overline{v}'(a)\end{vmatrix} = 0, \quad \det\begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \overline{v}(b) & \overline{v}'(b)\end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим *задачу Штýрма–Лиувúлля*, которая включает, во-первых, вопрос о существовании решения уравнения $Lu = f$, где $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, а во-вторых, вопрос о полноте системы собственных функций оператора L в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$.

Лемма. *Предположим, что ядро оператора $L : M \to \boldsymbol{L}_2[a,b]$ равно нулю. Тогда существует функция Грúна $G(x,y)$ задачи Штýрма–Лиувúлля, т.ч.*

a) функция $G(x,y)$ действительная, симметричная и непрерывная в $[a,b]^2$;

b) функция $G(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема по y при $y \neq x$;

c) удовлетворяет уравнению $LG(x,y) = 0$ по y и граничным условиям при $y \neq x$;

d) производная $G'(x,y)$ по y допускает разрыв первого рода при $y = x \in (a,b)$ с величиной скачка $G'(x,x+0) - G'(x,x-0) = -1/p(x)$.

Доказательство. Так как $\ker L = 0$, то, решая задачу Коши, получим два линейно независимых действительных решения u_1 и u_2 уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничным условиям. Поэтому их определитель Врóнского $\Delta = u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$ не равен нулю, а функция $p\Delta \doteqdot p(u_1 u_2' - u_1' u_2)$ равна константе $\Delta_0 \neq 0$, т.к. ее производная $(p\Delta)' = u_1(pu_2')' - u_2(pu_1')' = 0$ равна нулю.

Определим функцию $G(x,y) \doteqdot c_1 u_1(y)$ при $y \leqslant x$ и $G(x,y) \doteqdot c_2 u_2(y)$ при $y \geqslant x$. Выберем $c_1 = c_1(x)$ и $c_2 = c_2(x)$, чтобы функция $G(x,y)$ являлась непрерывной по y на $[a,b]$ и ее производная $G'(x,y)$ по y имела указанный скачок в точке x, т.е. $c_1 u_1(x) - c_2 u_2(x) = 0$ и $c_1 u_1'(x) - c_2 u_2'(x) = 1/p(x)$. Поскольку $\Delta_0 = p(u_1 u_2' - u_1' u_2) \neq 0$ константа, то, полагая $c_1 \doteqdot -u_2(x)/\Delta_0$ и $c_2 \doteqdot -u_1(x)/\Delta_0$, мы получим функцию

$$G(x,y) \doteqdot -\tfrac{1}{\Delta_0}\begin{cases} u_1(y)\,u_2(x), & \text{при } a \leqslant y \leqslant x \leqslant b; \\ u_1(x)\,u_2(y), & \text{при } a \leqslant x \leqslant y \leqslant b; \end{cases}$$

которая будет удовлетворять всем условиям леммы. □

Теорема (о существовании решения). *Если* $\ker L = 0$ *и* $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, *то функция* $u \in M$ *тогда и только тогда удовлетворяет уравнению* $Lu = f$, *когда*

$$u(x) = Af(x) \doteqdot \int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy \text{ при всех } x \in [a,b],$$

где $G(x,y)$ *есть функция Гри́на задачи Шту́рма–Лиуви́лля.*

Доказательство. Пусть функция $f = Lu$, где $u \in M$. Тогда, интегрируя по частям и используя свойства функции Гри́на, сформулированные в доказанной лемме, а также граничные условия, мы получим

$$\int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy = \left(\int_a^x G\,(Lu)\, dy - \int_a^x (LG)\, u\, dy\right) + \left(\int_x^b G\,(Lu)\, dy - \int_x^b (LG)\, u\, dy\right) =$$

$$= p\,(uG' - u'G)\,\big|_a^{x-0} + p\,(uG' - u'G)\,\big|_{x+0}^{b} = p\,(uG' - u'G)\,\big|_{x+0}^{x-0} = u(x).$$

Следовательно, имеет место равенство $ALu = u$ при всех $u \in M$.

Теперь докажем равенство $LAf = f$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$. Поскольку $Af \in M$, то в силу симметричности операторов L и A получим $\langle LAf, u\rangle = \langle f, ALu\rangle = \langle f, u\rangle$ для всех $u \in M$. Так как подпространство M всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2[a,b]$, то $LAf = f$ п.в. на отрезке $[a,b]$. Таким образом, оператор A, определенный на пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$ со значениями в M, является обратным к оператору L. □

Теорема (о полноте собственных функций). *Существует такая полная ортонормированная система в* $\boldsymbol{L}_2[a,b]$, *которая состоит и собственных функций оператора* $L : M \to \boldsymbol{L}_2[a,b]$ *Шту́рма-Лиуви́лля.*

Доказательство. Пусть $\ker L = 0$. Тогда существование полной ортонормированной системы собственных функций L вытекает из теоремы Ги́льберта–Шми́дта, так как собственные функции L являются собственными функциями для интегрального оператора A, ядром которого является функция Гри́на.

Пусть $\ker L \neq 0$. В силу симметричности оператора L его собственные функции с различными собственными значениями ортогональны. Поэтому множество всех собственных значений не более, чем счетно, и значит существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, которое не является собственным значением. Тогда оператор $L_0 = L - \lambda_0 I$ удовлетворяет условию $\ker L_0 = 0$. Поскольку собственные функции L_0 являются собственными функциями L и наоборот, то оператор L одновременно с оператором L_0 обладает полной системой собственных функций в пространстве $\boldsymbol{L}_2[a,b]$. □

Пример 2. Рассмотрим оператор $Lu = -u''$ и граничные условия $u(0) = u(\pi) = 0$. По решениям x и $\pi - x$ уравнения $Lu = 0$, построим функцию Гри́на

$$G(x,y) = \begin{cases} (\pi - x)y, & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi; \\ x(\pi - y), & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi. \end{cases}$$

Затем, решая дифференциальное уравнение $u'' + \lambda u = 0$ с граничными условиями $u(0) = u(\pi) = 0$, находим его собственные значения $\lambda_n = n^2$ и ортонормированную систему собственных функций $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, полную в $\boldsymbol{L}_2[0,\pi]$.