1 ПРОСТРАНСТВА СХОДИМОСТИ

Пусть $\boldsymbol{E}$ является *линейным пространством* над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Через $\zeta_{\boldsymbol{E}}$ будет обозначаться *сходимость* в пространстве $\boldsymbol{E}$, т.е. множество всех последовательностей $\{x_n\}$, которые называются *сходящимися* и удовлетворяют следующим *аксиомам Фреше́*:

a) для каждой $\{x_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$ существует единственный предел $\lim x_n = x \in \boldsymbol{E}$;

b) если $x_n = x$ для всех n, то последовательность $\{x_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$ и предел $\lim x_n = x$;

c) если $\{x_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$, то всякая подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$ и $\lim x_{n_k} = \lim x_n$;

Сходимость называется *регулярной*, если для каждой двойной последовательности $\{x_{nm}\}$ из существования предела по строкам $x_n = \lim x_{nm}$ и предела $x = \lim x_n$ следует существование возрастающей последовательности $\{m_n\}$, т.ч. $\lim x_{nm_n} = x$. Например, сходимость $\zeta_{\mathbb{F}}$ в поле $\mathbb{F}$ является регулярной.

Определение. Пара $(\boldsymbol{E}, \zeta_{\boldsymbol{E}})$ называется *пространством сходимости*, если в $\boldsymbol{E}$ задана сходимость $\zeta_{\boldsymbol{E}}$, которая удовлетворяет следующим двум свойствам:

a) если $\{x_n\}, \{y_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$, то $\{x_n + y_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$ и $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$;

b) если $\{x_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$ и $\{\lambda_n\} \in \zeta_{\mathbb{F}}$, то $\{\lambda_n x_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$ и $\lim \lambda_n x_n = \lim \lambda_n \cdot \lim x_n$.

Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ пространств сходимости называется *непрерывным*, если для каждой $\{x_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$ и $x = \lim x_n$ следует, что $\{f(x_n)\} \in \zeta_{\boldsymbol{F}}$ и $\lim f(x_n) = f(x)$.

Лемма 1. *Всякое метрическое линейное пространство $(\boldsymbol{E}, \rho)$ является пространством сходимости, в котором сходимость регулярна.*

Доказательство. Свойства a) и b) пространства сходимости вытекают из непрерывности линейных операций. Докажем регулярность. Пусть $\lim \rho(x_{nm}, x_n) = 0$ и $\lim \rho(x_n, x) = 0$. Выберем последовательность $m_n \to \infty$, т.ч. $\rho(x_{nm_n}, x_n) < 1/n$. Тогда получим $\rho(x_{nm_n}, x) \leqslant \rho(x_{nm_n}, x_n) + \rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. □

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *безусловно суммируемой*, если для каждой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$.

Говорят, что в пространстве сходимости $(\boldsymbol{E}, \zeta_{\boldsymbol{E}})$ выполняется *аксиома полноты*, если для всякой последовательности $\{x_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$ с пределом $\lim x_n = 0$ существует безусловно суммируемая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Лемма 2. *Во всяком полном метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$, т.е. в пространстве Фреше́, выполняется аксиома полноты.*

Доказательство. Пусть $\|x\| \doteqdot \rho(x, 0)$ обозначает квазинорму в $\boldsymbol{E}$ и $\lim \|x_n\| = 0$. Выберем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $\|x_{n_k}\| < 1/2^k$. Тогда полагая $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} x_{n_k}$, имеем $\|s_m - s_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|x_{n_k}\| < 1/2^n$ при всех $m > n$. Следовательно, $\{s_n\}$ является последовательностью Коши и в силу полноты пространства ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ сходится. Аналогично доказывается, что всякий подряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_{k_i}}$ сходится. □

Пример 1. Рассмотрим пространство $C_0(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с компактным носителем. Сходимость в нем $\varphi_n\to\varphi$ определяется следующими условиями: 1) существует компакт $K\Subset\mathbb{R}$, т.ч. $\operatorname{supp}\varphi_n\subset K$ при всех n; 2) $\varphi_n\rightrightarrows\varphi$ сходится равномерно на K. Напомним, что носителем $\operatorname{supp}\varphi$ непрерывной функции φ называется замыкание множества точек $x\in\mathbb{R}$, в которых $\varphi(x)\neq 0$.

В силу леммы 2 в пространстве $C_0(\mathbb{R})$ выполняется аксиома полноты. Докажем, что сходимость в $C_0(\mathbb{R})$ не регулярна. Пусть $\eta(x)\doteqdot 1-|x|$ при $|x|\leqslant 1$ и $\eta(x)=0$ при $|x|>1$. Тогда функции $\varphi_{nm}(x)\doteqdot\eta(x/n)/m$ сходятся по строкам $\varphi_{nm}\to 0$ при $m\to\infty$, однако $\varphi_{nm_n}\nrightarrow 0$ для любых $m_n\to\infty$. Поэтому сходимость в $C_0(\mathbb{R})$ не метризуема.

Определение. Пусть $(E',\zeta_{E'})$ есть *сопряженное пространство* к пространству сходимости (E,ζ), где E' множество всех непрерывных линейных функционалов $f:E\to\mathbb{F}$ и сходимость $f_n\to f$ определяется поточечно, т.е. $\lim f_n(x)=f(x)$ при всех $x\in E$. Сопряженное пространство $(E',\zeta_{E'})$ называется *полным*, если для всякой последовательности $f_n\in E'$, т.ч. $f_n\to f$, следует, что $f\in E'$.

Лемма 3. *Предположим, что задана двойная последовательность чисел $\{a_{nm}\}$, $a_{nm}\in\mathbb{F}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

a) существует предел по строкам $\lim a_{nm}=b_n$ при всех n;

b) существует такое $\varepsilon>0$, что $|b_n|>\varepsilon$ при всех n;

c) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm}|<\infty$ сходится абсолютно при всех m.

Тогда существуют последовательности $\{n_l\}$ и $\{m_k\}$, т.ч. $\lim|\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_lm_k}|=\infty$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть действительный случай $a_{mn}\in\mathbb{R}$. В силу a) и b) найдется возрастающая последовательность $\{m_n\}$, т.ч. $|a_{nm}|>\varepsilon$ при всех $m\geqslant m_n$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm_k}|\geqslant\sum_{n=1}^{k}|a_{nm_k}|>k\varepsilon$, т.е. $\lim\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm_k}|=\infty$. Следовательно, предел $\lim\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm_k}^{+}=\infty$ или предел $\lim\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm_k}^{-}=\infty$, где $a^{\pm}\doteqdot\max\{\pm a,0\}$. Значит существует возрастающая последовательность $\{n_l\}$, т.ч. $\lim|\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_lm_k}|=\infty$. $\square$

Теорема. *Пусть в пространстве сходимости (E,ζ_E) выполняется аксиома полноты. Тогда сопряженное пространство $(E',\zeta_{E'})$ является полным.*

Доказательство. Предположим, что функционалы $f_n\in E'$ и $f_n\to f$, однако $f\notin E'$, т.е. функционал f не является непрерывным в нуле, Тогда существуют $\varepsilon>0$ и $\{x_n\}\in\zeta_E$, т.ч. $\lim x_n=0$ и $|f(x_n)|>\varepsilon$. В силу аксиомы полноты можно считать, что последовательность $\{x_n\}$ является безусловно суммируемой.

Обозначим через $a_{nm}\doteqdot f_m(x_n)$ двойную последовательность чисел. Поскольку всякий подряд ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}$ является сходящимся, то этот ряд будет сходиться абсолютно. Следовательно, выполнены все условия леммы 3. Поэтому существуют последовательности $\{n_l\}$ и $\{m_k\}$, т.ч. $\lim|\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_lm_k}|=\infty$. Положим $x=\sum_{l=1}^{\infty}x_{n_l}$, тогда $x\in E$ и в силу непрерывности функционалов $f_{m_k}\in E'$ имеет место равенство $|f(x)|=\lim|f_{m_k}(x)|=\lim|\sum_{l=1}^{\infty}f_{m_k}(x_{n_l})|=\infty$, что невозможно. $\square$

Определение. Пара $(\boldsymbol{E},\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}})$ называется *полинормированным пространством*, если в пространстве $\boldsymbol{E}$ определена система полунорм $\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}}$ и из $\boldsymbol{p}(x)=0$ для всех $\boldsymbol{p}\in\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}}$ вытекает, что $x=0$. Полинормированное пространство $(\boldsymbol{E},\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}})$ называется *счетно-нормированным*, если система полунорм $\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}}$ не более, чем счетная.

Последовательность $\{x_n\}$ *сходится* $x_n\to x$ в полинормированном пространстве $(\boldsymbol{E},\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}})$ к элементу $x\in\boldsymbol{E}$, если для любой $\boldsymbol{p}\in\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}}$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется N, т.ч. $\boldsymbol{p}(x_n-x)<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$, т.е. $\lim\boldsymbol{p}(x_n-x)=0$ при всех $\boldsymbol{p}\in\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши́* в полинормированном пространстве $(\boldsymbol{E},\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}})$, если для каждой $\boldsymbol{p}\in\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}}$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется N, т.ч. $\boldsymbol{p}(x_n-x_m)<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$. Полинормированное пространство $(\boldsymbol{E},\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}})$ называется *полным*, если всякая последовательность Коши́ сходится.

Всякое полинормированное пространство является пространством сходимости. В силу доказанной теоремы сопряженное пространство $(\boldsymbol{E}',\zeta_{\boldsymbol{E}'})$ к пространству сходимости $(\boldsymbol{E},\zeta_{\boldsymbol{E}})$, в котором выполняется аксиома полноты, является полным полинормированным пространством с системой полунорм $\boldsymbol{p}_x(f)\doteqdot|f(x)|$, где $x\in\boldsymbol{E}$.

Теорема (метризуемости)**.** *Сходимость в счетно-нормированном пространстве $(\boldsymbol{E},\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}})$ со счетной системой полунорм $\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}}\doteqdot\{\boldsymbol{p}_k\}$ равносильна сходимости в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho_{\boldsymbol{E}})$ относительно метрики*

$$\rho_{\boldsymbol{E}}(x,y)\doteqdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\boldsymbol{p}_k(x-y)}{1+\boldsymbol{p}_k(x-y)},\quad x,y\in\boldsymbol{E}.$$

Доказательство. Проверим аксиомы метрики. Если $\rho_{\boldsymbol{E}}(x,y)=0$, то $\boldsymbol{p}_k(x-y)=0$ при всех k и, следовательно, $x=y$. Свойство симметричности очевидно. Поскольку функция $\varphi(t)=t/(t+1)$ возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+$ и является полуаддитивной $\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b)$ при всех $a,b\in\mathbb{R}_+$, то выполняется неравенство треугольника $\rho_{\boldsymbol{E}}(x,y)\leqslant\rho_{\boldsymbol{E}}(x,z)+\rho_{\boldsymbol{E}}(z,y)$. Докажем равносильность сходимостей.

Необходимость. Для каждого $\varepsilon>0$ выберем число m, т.ч. $1/2^m<\varepsilon/2$. Так как последовательность $x_n\to x$ сходится, то для каждого k найдется число n_k, т.ч. $\boldsymbol{p}_k(x_n-x)<\varepsilon/2m$ при всех $n\geqslant n_k$. Тогда, полагая $N\doteqdot\max_{1\leqslant k\leqslant m}n_k$, получим

$$\rho_{\boldsymbol{E}}(x_n,x)\leqslant\textstyle\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{p}_k(x_n-x)+\sum_{k=m+1}^{\infty}1/2^k<\varepsilon \text{ при всех } n\geqslant N.$$

Достаточность. Для каждого $\varepsilon>0$ выберем N, т.ч. $\rho_{\boldsymbol{E}}(x_n,x)<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$. Отсюда для любого k выполняется неравенство $\boldsymbol{p}_k(x_n-x)/2^k\big(\boldsymbol{p}_k(x_n-x)+1\big)<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$. Тогда при всех $n\geqslant N$ и $\varepsilon<1/2^k$ имеем $\boldsymbol{p}_k(x_n-x)\leqslant\varepsilon 2^k/(1-\varepsilon 2^k)$. Следовательно, существует предел $\lim\boldsymbol{p}_k(x_n-x)=0$ при всех k.

Аналогично доказывается, что $\{x_n\}$ тогда и только тогда является последовательностью Коши́ в счетно-нормированном пространстве $(\boldsymbol{E},\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}})$, когда $\{x_n\}$ есть последовательность Коши́ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho_{\boldsymbol{E}})$. $\square$

Следствие. *Счетно-нормированное пространство тогда и только тогда полно, когда полно соответствующее метрическое пространство.*

Определение. Линейное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ полинормированных пространств называется *ограниченным*, если для каждого $\boldsymbol{p} \in \mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$ найдутся $c > 0$ и конечное число полунорм $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathscr{P}_{\boldsymbol{E}}$, т.ч. $\boldsymbol{p}(f(x)) \leqslant c \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Теорема. *Пусть* $(\boldsymbol{E}, \mathscr{P}_{\boldsymbol{E}})$ *является счетно-нормированным пространством, а* $(\boldsymbol{F}, \mathscr{P}_{\boldsymbol{F}})$ *есть полинормированное пространство. Тогда линейное отображение* $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *ограничено в том и только в том случае, когда оно непрерывно.*

Доказательство. Очевидно, что ограниченное линейное отображение непрерывно. Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathscr{P}_{\boldsymbol{E}} \doteqdot \{\boldsymbol{p}_k\}$ и $\boldsymbol{q}_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k(x)$. Допустим, что f не является ограниченным отображением. Тогда существуют $\boldsymbol{p} \in \mathscr{P}_{\boldsymbol{F}}$ и $\{x_n\}$, т.ч. $\boldsymbol{p}(f(x_n)) > n\boldsymbol{q}_n(x_n)$ при всех n. Полагая $y_n \doteqdot x_n / \sqrt{n}\boldsymbol{q}_n(x_n)$, получим неравенство $\boldsymbol{p}_k(y_n) \leqslant 1/\sqrt{n}$ при всех $k \leqslant n$. Отсюда $y_n \to 0$, однако $\boldsymbol{p}(f(y_n)) > \sqrt{n}$ при всех n, т.е. $f(y_n) \nrightarrow 0$ не сходится к нулю, что противоречит непрерывности f. □

Определение. Функция $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ называется *бесконечно дифференцируемой*, т.е. $\varphi \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, если у ней существуют частные производные $\partial^\alpha \varphi(x) \doteqdot \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial^{\alpha_1}x_1 \ldots \partial^{\alpha_m}x_m}$ любого порядка при всех $x \in \mathbb{R}^m$. Величина $|\alpha| \doteqdot \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ называется *порядком мультииндекса* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, где $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$ при $j = 1, \ldots, m$.

Носителем непрерывной функции $\varphi \in \boldsymbol{C}(\mathbb{R}^m)$ называется замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}^m$, для которых функция $\varphi(x) \neq 0$, и обозначается через $\operatorname{supp}\varphi$.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ обозначает множество всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \Subset X$, где множество $X \subset \mathbb{R}^m$ имеет непустую внутренность. Счетная система полунорм

$$\boldsymbol{p}_k(\varphi) \doteqdot \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

определяет структуру счетно-нормированного пространства в $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$. Сходимость в $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ равносильна равномерной сходимости функций и всех производных на множестве X. Все операторы дифференцирования $\partial^\alpha : \boldsymbol{C}_0^\infty(X) \to \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ являются непрерывными отображениями. По доказанной теореме $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ есть метрическое линейное пространство, в котором сходимость относительно указанной системы полунорм совпадает со сходимостью, определяемой метрикой

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\boldsymbol{p}_k(\varphi - \psi)}{1 + \boldsymbol{p}_k(\varphi - \psi)}, \quad \varphi, \psi \in \boldsymbol{C}_0^\infty(X).$$

По известной теореме из математического анализа, если последовательность функций $\{\varphi_n\}$ пространства $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ сходится равномерно $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ вместе со всеми производными $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leqslant k$ на множестве X, то функция φ имеет непрерывные производные $\partial^\alpha \varphi = \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leqslant k$ на множестве X. Поэтому, если X компактно, то $\varphi \in \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ и значит счетно-нормированное пространство $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ будет полным метрическим линейным пространством, т.е. *пространством Фреше́*. Отсюда, если X компактно, то по лемме 2 в пространстве $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ будет выполняться аксиома полноты и его сопряженное пространство будет полным.

2 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Как и ранее $\mathbb{R}^m$ обозначает евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x,y\rangle \doteqdot \sum_{k=1}^m x_k y_k$ и нормой $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x,x\rangle}$, где $x=(x_1,\ldots,x_m)$ и $y=(y_1,\ldots,y_m)$.

Пример 1. Пусть $e(t)\doteqdot e^{-1/t}$ при $t>0$ и $e(t)\doteqdot 0$ при $t\leqslant 0$. При помощи правила Лопита́ля нетрудно проверить, что функция $e(t)$ бесконечно дифференцируема. Функция $\xi(x)\doteqdot e(1-\|x\|^2)$ при всех $x\in\mathbb{R}^m$ является бесконечно дифференцируемой, неотрицательной и имеет носитель $\operatorname{supp}\xi = \boldsymbol{S}_1 \doteqdot \{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x\|\leqslant 1\}$.

Система функций $\theta_r(x)\doteqdot c_r\xi(x/r)$ называется *аппроксимативной единицей*, где $r>0$ и константы $c_r>0$ подобраны так, чтобы интеграл $\int_{\mathbb{R}^m}\theta_r(x)\,dx=1$. Заметим, что функции $\theta_r(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми, неотрицательными и имеют носитель $\operatorname{supp}\theta_r = \boldsymbol{S}_r \doteqdot \{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x\|\leqslant r\}$ в шаре радиуса r.

Пусть $\eta(x)\doteqdot\int_{\boldsymbol{S}_2}\theta_1(x-y)\,dy$, тогда $\eta(x)=1$ при $x\in\boldsymbol{S}_1$ и $\eta(x)=0$ при $x\notin\boldsymbol{S}_3$. Функция $\eta(x)$ является бесконечно дифференцируемой, неотрицательной и имеет носитель $\operatorname{supp}\eta=\boldsymbol{S}_3$ в шаре радиуса $r=3$.

Пусть $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ обозначает пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{F}$ с компактным носителем $\operatorname{supp}(\varphi)\Subset X$ на множестве $X\subset\mathbb{R}^m$ вместе со сходимостью, определяемой системой полунорм

$$\boldsymbol{p}_k(\varphi)\doteqdot\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in X}|\partial^\alpha\varphi(x)|,\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Определение. *Пространством основных функций* $\mathscr{D}(X)$ на множестве $X\subset\mathbb{R}^m$ называется пространство $\mathscr{D}(X)=\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$, в котором сходимость $\varphi_n\to\varphi$ задается следующими двумя условиями: a) при всех $k\in\mathbb{Z}_+$ выполняется $\boldsymbol{p}_k(\varphi_n-\varphi)\to 0$ при $n\to\infty$ и b) существует компакт $K\Subset X$, т.ч. $\operatorname{supp}\varphi_n\subset K$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

Пространством обобщенных функций $\mathscr{D}'(X)$ на множестве $X\subset\mathbb{R}^m$ называется сопряженное пространство сходимости к пространству основных функций $\mathscr{D}(X)$.

Обозначим через $\langle f,\varphi\rangle$ значение линейного функционала $f\in\mathscr{D}'(X)$ на основной функции $\varphi\in\mathscr{D}(X)$. Из определения вытекают следующие свойства:

1) обобщенная функция $f\in\mathscr{D}'(X)$ является линейным функционалом, т.е. $\langle f,\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\rangle=\lambda_1\langle f,\varphi_1\rangle+\lambda_2\langle f,\varphi_2\rangle$ при всех $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$ и $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{D}(X)$;

2) обобщенная функция $f\in\mathscr{D}'(X)$ является непрерывным функционалом, т.е. если $\varphi_n\to\varphi$ сходится в пространстве $\mathscr{D}(X)$, то $\langle f,\varphi_n\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$ сходится;

3) последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции, т.е. если $f_n\in\mathscr{D}'(X)$ и $\langle f_n,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$ при всех $\varphi\in\mathscr{D}(X)$, то $f\in\mathscr{D}'(X)$.

Последнее свойство вытекает из теоремы о полноте сопряженного пространства $\mathscr{D}'(X)$ к пространству сходимости $\mathscr{D}(X)$. В самом деле, все носители сходящейся в $\mathscr{D}(X)$ последовательности функций $\varphi_n\to 0$ находятся на одном компакте $K\Subset X$. Поэтому $\varphi_n\to 0$ сходится в $\mathscr{D}(K)=\boldsymbol{C}_0^\infty(K)$. Поскольку $\boldsymbol{C}_0^\infty(K)$ является полным метрическим линейным пространством, то в нем выполняется аксиома полноты.

Пример 2. Обобщенная функция $\delta(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ называется *δ-функцией Дира́ка* и определяется по формуле $\langle \delta(x), \varphi \rangle \doteqdot \varphi(0)$ при $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Сдвинутая δ-функция $\delta(x - x_0) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ определяются равенством $\langle \delta(x - x_0), \varphi \rangle \doteqdot \varphi(x_0)$ при $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

Обобщенная функция $\mathscr{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ называется *главным значением* функции $\frac{1}{x}$ и определяется по формуле $\langle \mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi \rangle \doteqdot \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Для доказательства существования предела и непрерывности функционала, имеем

$$\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right) \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx.$$

Так как по формуле Лагра́нжа существует $t \in \mathbb{R}$, т.ч. $\varphi(x) - \varphi(-x) = 2x\varphi'(t)$, то $|\langle \mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi \rangle| \leqslant 2a \max_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)|$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(-a, a)$. Поэтому $\mathscr{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Рассмотрим действия с обобщенными функциями $f \in \mathscr{D}'(X)$ на $X \subset \mathbb{R}^m$.

1. *Каждая локально интегрируемая функция $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$, т.е. интегрируемая по Лебе́гу на всяком компакте $K \Subset X$, определяет регулярную обобщенную функцию по формуле $\langle f, \varphi \rangle \doteqdot \int_X f(x)\varphi(x)\, dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.*

Непрерывность этого функционала f в $\mathscr{D}(X)$ следует из теоремы Лебе́га.

2. *Произведение обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ на бесконечно дифференцируемую функцию $\psi \in \boldsymbol{C}^{\infty}(X)$ определяется так $\langle \psi f, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, \psi\varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.*

Непрерывность функционала ψf в $\mathscr{D}(X)$ вытекает из непрерывности оператора умножения $M_{\psi}(\varphi) \doteqdot \psi\varphi$ на функцию $\psi \in \boldsymbol{C}^{\infty}(X)$ в пространстве $\mathscr{D}(X)$.

3. *Операторы сдвига и растяжения обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ можно определить по формулам $\langle \tau_{x_0} f, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, \tau_{-x_0}\varphi \rangle$ и $\langle \rho_{\lambda} f, \varphi \rangle \doteqdot |\lambda|^{-m} \langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, где $\tau_{x_0}\varphi(x) \doteqdot \varphi(x - x_0)$ и $\rho_{\lambda}\varphi(x) \doteqdot \varphi(\lambda x)$.*

Непрерывность функционалов $\tau_{x_0} f$ и $\rho_{\lambda} f$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ вытекает из непрерывности соответствующих операторов сдвига τ_{x_0} и растяжения ρ_{λ} в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

4. *Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линейное преобразование с определителем $\det A \neq 0$. Замена переменных обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ определяется формулой $\langle T_A f, \varphi \rangle \doteqdot |\det A|^{-1} \langle f, T_{A^{-1}}\varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, где $T_A\varphi(x) = \varphi(Ax)$.*

Непрерывность функционала $T_A f$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ вытекает из непрерывности оператора замены переменных $T_A\varphi$ в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

5. *Производная $\partial^{\alpha} f$ обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ определяется по формуле $\langle \partial^{\alpha} f, \varphi \rangle \doteqdot (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^{\alpha}\varphi \rangle$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$.*

Непрерывность функционала $\partial^{\alpha} f$ в $\mathscr{D}(X)$ вытекает из непрерывности оператора дифференцирования $\partial^{\alpha}\varphi$ в пространстве $\mathscr{D}(X)$. Справедлива следующая *формула Ле́йбница*: $\partial_i(\psi f) = (\partial_i\psi) f + \psi(\partial_i f)$, где $\partial_i \doteqdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\psi \in \boldsymbol{C}^{\infty}(X)$. В самом деле,

$$\langle \partial_i(\psi f), \varphi \rangle = -\langle f, \psi(\partial_i\varphi) \rangle = \langle f, (\partial_i\psi)\varphi - \partial_i(\psi\varphi) \rangle = \langle (\partial_i\psi) f, \varphi \rangle + \langle \psi(\partial_i f)\varphi \rangle.$$

Пример 3. *Формула Сохóцкого*: $\frac{1}{x+i0} = \mathscr{P}\frac{1}{x} - \pi i\delta(x)$, где обобщенная функция $\frac{1}{x+i0} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ определяется по формуле $\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi\rangle \doteqdot \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. В самом деле, если $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi \subset (-a,a)$, то получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big\{\int_{-a}^{a}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\,dx + \varphi(0)\int_{-a}^{a}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\Big\} =$$
$$= \int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx - i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-a}^{a}\frac{\varepsilon\,dx}{x^2+\varepsilon^2} = \int_{0}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx - \pi i\varphi(0)\,.$$

Теорема (о локальной структуре). *Для любой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ и компактного множества $K \Subset X$ существуют непрерывная функция $g \in C(X)$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, т.ч. $\langle f,\varphi\rangle = \langle \partial^\alpha g,\varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$.*

Доказательство. Применяя формулу замены переменных, мы можем считать, что $K \subset \Delta \doteqdot [0,1]^m$. Поскольку функционал $f \in \mathscr{D}'(X)$ непрерывен на подпространстве $\mathscr{D}(K) \subset \mathscr{D}(X)$, то он ограничен на этом подпространстве по системе полунорм

$$p_k(\varphi) \doteqdot \textstyle\sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in\Delta} |\partial^\alpha\varphi(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+\,,\ \varphi \in \mathscr{D}(K).$$

Следовательно, существуют $c > 0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, т.ч. $|\langle f,\varphi\rangle| \leqslant c\,p_k(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. Так как $\varphi(0) = 0$, то по формуле Лагрáнжа $\sup_{x\in\Delta}|\varphi(x)| \leqslant \sup_{x\in\Delta}|\partial_i\varphi(x)|$, где $\partial_i \doteqdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $i = 1,\ldots,m$. В силу этого неравенства имеем

$$\sup_{x\in\Delta}|\partial^\alpha\varphi(x)| \leqslant \sup_{x\in\Delta}|D^k\varphi(x)| \ \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(K) \text{ и } |\alpha| \leqslant k,$$

где $D \doteqdot \partial_1\ldots\partial_m$ обозначает дифференциальный оператор. Применяя далее формулу Лéйбница для функций многих переменных $x = (x_1,\ldots,x_m) \in \Delta$

$$\varphi(x) = \textstyle\int_{\Delta_x} D\varphi(y)\,dy, \text{ где } \Delta_x \doteqdot [0,x_1]\times\ldots\times[0,x_m],$$

а также неравенства Кошú–Буняќовского в $L_2(\Delta)$, получим для всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leqslant c\,p_k(\varphi) \leqslant c_k \sup_{x\in\Delta}|D^k\varphi(x)| \leqslant c_k \textstyle\int_\Delta |D^{k+1}\varphi(x)|\,dx \leqslant c_k\|D^{k+1}\varphi\|_{L_2}.$$

Заметим, что линейный оператор $A \doteqdot D^{k+1} : \mathscr{D}(K) \to \mathscr{D}(K)$ является непрерывным и взаимно однозначным в $\mathscr{D}(K)$. Следовательно, корректно определен линейный функционал $F(\psi) \doteqdot \langle f, A^{-1}\psi\rangle$ при всех $\psi = A\varphi$ и $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. В силу доказанного выше неравенства функционал $F(\psi)$ ограничен на подпространстве $\mathscr{D}(K) \subset L_2(\Delta)$. Поэтому по теореме Хáна–Бáнаха существует его ограниченное продолжение на все пространство $L_2(\Delta)$. По теореме Рúсса о представлении функционалов в $L_2(\Delta)$ найдется функция $h \in L_2(\Delta)$, т.ч. $F(\psi) = \int_\Delta h(x)\psi(x)\,dx$ при всех $\psi = A\varphi$ и $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Пусть $h(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^m \setminus \Delta$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\langle f,\varphi\rangle = \textstyle\int_\Delta h(x)\,D^{k+1}\varphi(x)\,dx = (-1)^m \int_\Delta \big(\int_{\Delta_x} h(y)\,dy\big)\,D^{k+2}\varphi(x)\,dx =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\textstyle\int_\Delta g(x)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx = \langle \partial^\alpha g,\varphi\rangle\,.$$

при всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$, где функция $g(x) \doteqdot (-1)^{|\alpha|+m}\int_{\Delta_x} h(y)\,dy$ является непрерывной в $\mathbb{R}^m$ и $\alpha \doteqdot (k+2,\ldots,k+2)$. □

Определение. Говорят, что обобщенные функции $f,g \in \mathscr{D}'(X)$ совпадают $f=g$ на множестве $A \subset X$, если $\langle f,\varphi\rangle = \langle g,\varphi\rangle$ для всех функций $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset O_A$ в некоторой окрестности O_A множества A.

В частности, обобщенные функции $f,g \in \mathscr{D}'(X)$ совпадают $f(x)=g(x)$ в точке $x \in X$, если они совпадают в некоторой ее окрестности $O_x \cap X$. Множество

$$\operatorname{supp} f \doteqdot \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

называется *носителем обобщенной функции* $f \in \mathscr{D}'(X)$. Очевидно, он является замкнутым множеством в X. В силу теоремы о локальной структуре для каждой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ с компактным носителем $\operatorname{supp} f \Subset X$ существуют непрерывная функция $g \in C(X)$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, т.ч. $f = \partial^\alpha g$.

Теорема. *Пусть* $f \in \mathscr{D}'(X)$ *имеет носитель* $\operatorname{supp} f = \{x_0\}$ *в точке* $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^m$. *Тогда существуют числа* $c_\alpha \in \mathbb{F}$ *при* $|\alpha| \leqslant k$, *т.ч.* $f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x-x_0)$.

Эту теорему принимаем без доказательства. Она устанавливает структуру всех обобщенных функций $f \in \mathscr{D}'(X)$, у которых носитель состоит из одной точки.

Лемма. *Если* $f \in \mathscr{D}'(a,b)$ *и* $f' = 0$, *то* $f = c$ *является константой на* (a,b).

Доказательство. Пусть $\langle f,\varphi'\rangle = 0$ при $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$. Следующие подпространства

$$L \doteqdot \{\psi \in \mathscr{D}(a,b) \mid \textstyle\int_a^b \psi(x)\,dx = 0\}, \quad M \doteqdot \{\psi \in \mathscr{D}(a,b) \mid \exists \varphi \in \mathscr{D}(a,b) : \psi = \varphi'\}$$

совпадают. В самом деле, если $\psi \in M$, то получаем $\int_a^b \psi(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) = 0$. Обратно, если $\psi \in L$, то $\varphi(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt$ принадлежит $\mathscr{D}(a,b)$ и $\psi(x) = \varphi'(x)$.

Для доказательства леммы рассмотрим функцию $\eta \in \mathscr{D}(a,b)$, т.ч. $\int_a^b \eta\,dt = 1$. Каждая функция $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ допускает представление $\varphi(x) = \psi(x) + d\,\eta(x)$, где $\psi \in L$ и $d = \int_a^b \varphi(x)\,dx$. Так как $\psi \in M$, то $\langle f,\psi\rangle = 0$ и мы имеем равенство

$$\langle f,\varphi\rangle = \langle f, d\,\eta\rangle = \textstyle\int_a^b \langle f,\eta\rangle\,\varphi(x)\,dx = \langle c,\varphi\rangle \text{ для всех } \varphi \in \mathscr{D}(a,b), \text{ где } c \doteqdot \langle f,\eta\rangle.$$

Следовательно, функционал $f = c$ является константой на (a,b). □

Теорема (о существовании первообразной)**.** *Для всякой обобщенной функции* $f \in \mathscr{D}'(a,b)$ *существует обобщенная функция* $g \in \mathscr{D}'(a,b)$, *т.ч.* $g' = f$.

Доказательство. Определим функционал g на подпространстве $M \subset \mathscr{D}(a,b)$ по формуле $\langle g,\varphi'\rangle \doteqdot -\langle f,\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$. Поскольку функция $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ имеет представление в виде $\varphi(x) = \psi(x) + d\,\eta(x)$, где $\psi \in L = M$ и $d = \int_a^b \varphi(x)\,dx$, то этот функционал g можно продолжить на все пространство $\mathscr{D}(a,b)$ по формуле

$$\langle g,\varphi\rangle = \langle g,\psi\rangle + \langle g,\eta\rangle \textstyle\int_a^b \varphi\,dt = -\langle f, A\varphi\rangle + \langle c,\varphi\rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(a,b),$$

где $c \doteqdot \langle g,\eta\rangle$ константа и линейный оператор $A\varphi(x) \doteqdot \int_a^x \big(\varphi(y) - \eta(y)\int_a^b \varphi(t)\,dt\big)\,dy$ является непрерывным на пространстве $\mathscr{D}(a,b)$. Поэтому функционал $g \in \mathscr{D}'(a,b)$. Кроме того, в силу леммы любая обобщенная функция, удовлетворяющая условию теоремы, отличается от g на аддитивную постоянную. □

3 ПОДПРОСТРАНСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Пусть далее $X \subset \mathbb{R}^m$ является открытым множеством. Обозначим через $\mathscr{E}(X)$ пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : X \to \mathbb{F}$, в котором сходимость $\varphi_n \to \varphi$ определяется системой полунорм:

$$p_{k,K}(\varphi) \doteqdot \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \text{ где } k \in \mathbb{Z}_+ \text{ и } K \Subset X \text{ компактно.}$$

Сопряженное пространство $\mathscr{E}'(X)$ к пространству сходимости $\mathscr{E}(X)$ называется пространством *обобщенных функций с компактным носителем*.

Из определения вытекают следующие свойства:

1) обобщенная функция $f \in \mathscr{E}'(X)$ является линейным функционалом, т.е. $\langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle$ при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{E}(X)$;

2) обобщенная функция $f \in \mathscr{E}'(X)$ является непрерывным функционалом, т.е. если $\varphi_n \to \varphi$ сходится в пространстве $\mathscr{E}(X)$, то $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$;

3) последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции, т.е. если $f_n \in \mathscr{E}'(X)$ и $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(X)$, то $f \in \mathscr{E}'(X)$.

Докажем последнее утверждение. Пусть $K_k \doteqdot \{x \in X \mid \|x\| \leqslant k, \rho(x, \partial X) \geqslant 1/k\}$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда получим последовательность вложенных компактов, объединение которых совпадает с $\bigcup_{k=1}^\infty K_k = X$. Система полунорм

$$q_k(\varphi) \doteqdot \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in K_k} |\partial^\alpha \varphi(x)| \text{ при } k \in \mathbb{N}$$

определяет в $\mathscr{E}(X)$ структуру счетно нормированного пространства. Заметим, что сходимость по системе полунорм $\{q_k\}$, где $k \in \mathbb{N}$, будет равносильна сходимости по системы полунорм $\{p_{k,K}\}$, где $k \in \mathbb{Z}_+$ и $K \Subset X$. Поэтому по доказанной ранее теореме $\mathscr{E}(X)$ является метрическим линейным пространством. В силу известной теоремы из математического анализа, если последовательность функций сходится равномерно $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^m$ вместе с производными $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leqslant k$, то функция φ имеет непрерывные производные $\partial^\alpha \varphi = \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leqslant k$ в этой области D. Поэтому $\mathscr{E}(X)$ является полным счетно-нормированным пространством, т.е. пространством Фреше́. Таким образом, по доказанному ранее, в пространстве $\mathscr{E}(X)$ выполняется аксиома полноты и, следовательно, сопряженное пространство $\mathscr{E}'(X)$ будет полным.

Теорема. *Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(X)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда существует функция $g \in \mathscr{E}'(X)$, т.ч. $g|_{\mathscr{D}(X)} = f$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задана обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(X)$ с компактным носителем $\operatorname{supp} f \Subset X$. Рассмотрим следующие основные функции:

$$\eta_k(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} \theta_{1/4k}(x-y)\chi_{K_{4k/3}}(y)\,dy = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K_k; \\ 0, & \text{если } x \notin K_{2k}. \end{cases}$$

Определим функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$ по формуле $\langle g, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, \eta_k \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(X)$, где число $k \in \mathbb{N}$ выбрано так, чтобы $\operatorname{supp} f \subset K_k$. Поскольку линейный оператор $A_k \varphi \doteqdot \eta_k \varphi$ умножения на функцию η_k является непрерывным в $\mathscr{E}(X)$, то $g \in \mathscr{E}'(X)$ и носитель $\operatorname{supp} g \subset K_{2k}$. Так как $\varphi(x) = \eta_k(x)\varphi(x)$ при всех $x \in K_k$, то имеет место равенство $\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \eta_k \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi - \eta_k \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.

Достаточность. Если $g \in \mathscr{E}'(X)$, то $f \doteqdot g|_{\mathscr{D}(X)}$ является линейным функционалом в $\mathscr{D}(X)$. При этом, если $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathscr{D}(X)$, то $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathscr{E}(X)$ и, следовательно, $\lim \langle f, \varphi_n \rangle = \lim \langle g, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$. Потому функционал $f \in \mathscr{D}'(X)$ является непрерывным. Так как функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$ непрерывен, то он ограничен в $\mathscr{E}(X)$. Следовательно, существуют $k \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle g, \varphi \rangle| \leqslant \boldsymbol{q}_k(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(X)$. Поэтому имеем $\langle g, \varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, т.ч. $\operatorname{supp} \varphi \subset X \setminus K_k$. Таким образом, носитель $\operatorname{supp} f \subset K_k$ является компактным. $\square$

Определение. Пусть $\{\theta_r\}_{r>0}$ аппроксимативная единица. *Усреднением в смысле Со́болева функции* $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ называется следующая система функций:

$$f_r(x) \doteqdot \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x-y)\, f(y)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y)\, \tau_y f(x)\, dy \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^m \text{ и } r > 0,$$

где $\tau_y f(x) \doteqdot f(x-y)$ и мы полагаем $f(x) = 0$ при всех $x \notin X$.

1. *Функции f_r являются бесконечно дифференцируемыми, т.е. $f_r \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$.*

Так как функции $\theta_r \in \boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ являются бесконечно дифференцируемыми, то по теореме Лебе́га усреднение можно дифференцировать под знаком интеграла.

2. *Носитель $\operatorname{supp} f_r$ содержится в множестве $B_r(X) \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \rho(x, X) \leqslant r\}$.*

Так как $\operatorname{supp} \theta_r \subset \boldsymbol{S}_r$, то $f_r(x) = 0$, если выполняется неравенство $\rho(x, X) > r$.

3. *Если $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ и $1 \leqslant p < \infty$, то $\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$ и $\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ при $r \to 0$.*

Из обобщенного неравенства Минко́вского следует, что $\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$. Так как множество $\boldsymbol{C}_0(X)$ непрерывных функций с компактным носителем плотно в $\boldsymbol{L}_p(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $g \in \boldsymbol{C}_0(X)$, т.ч. $\|f - g\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/3$. Из равномерной непрерывности g найдется $\delta > 0$, т.ч. $\|\tau_y g - g\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/3$ при всех $\|y\| < \delta$. Отсюда

$$\|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|\tau_y f - \tau_y g\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|\tau_y g - g\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g - f\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon \text{ при всех } \|y\| < \delta.$$

Так как $f_r(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) \big(\tau_y f(x) - f(x)\big)\, dy$ в силу равенства $\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x)\, dx = 1$, то, применяя обобщенное неравенство Минко́вского, мы получим

$$\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) \|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy \leqslant \sup_{\|y\|<r} \|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon \text{ при всех } 0 < r < \delta.$$

Лемма (о плотности)**.** *Если функция $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ при $1 \leqslant p < \infty$, то существует последовательность основных функций $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(X)$, т.ч.*

a) $|\varphi_n(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ *при всех* $x \in X$;

b) $\|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем компактное множество $K \Subset X$, т.ч. выполняется неравенство $\int_{X\setminus K} |f(x)|^p dx < (\varepsilon/2)^p$. Положим $g(x) = f(x)\chi_K(x)$. Так как $d = \rho(K, \partial X) > 0$ и $\operatorname{supp} g_r \Subset X$ при всех $0 < r < d$, то в силу свойства 3 существует $0 < \delta < d$, т.ч. $\|g - g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/2$ при всех $0 < r < \delta$. Тогда по неравенству треугольника получим $\|f - g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g - g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon$ при всех $0 < r < \delta$. Таким образом, функции $\varphi_n(x) \doteqdot g_{d/n}(x)$ удовлетворяют условиям леммы. □

Следствие. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченное множество и $f \in \boldsymbol{L}_\infty(X)$ является ограниченной функцией. Тогда существует $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(X)$, т.ч.*

a) $|\varphi_n(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ при всех $x \in X$;

b) $\varphi_n(x) \to f(x)$ при п.в. $x \in X$ и $n \to \infty$.

Для доказательства применяем лемму в случае $p = 1$, а затем выделяем такую подпоследовательность, которая сходится п.в. на множестве X.

Определение. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ локально интегрируемая функция на множестве $X \subset \mathbb{R}^m$. Функционал $f \in \mathscr{D}'(X)$, определенный по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle \doteqdot \int_X f(x)\,\varphi(x)\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X),$$

называется *регулярной обобщенной функцией.*

Доказательство непрерывности регулярного функционала на пространстве $\mathscr{D}(X)$ вытекает из теоремы Лебéга о предельном переходе под знаком интеграла.

Сходимость в пространстве $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ можно определить сходимостью в системе полунорм $\boldsymbol{p}_k(f) \doteqdot \int_{K_k} |f(x)|\,dx$, где $k \in \mathbb{N}$. Так как объединение последовательности компактов равно $\bigcup_{k=1}^{\infty} K_k = X$, то сходимость последовательности функций $f_n \to f$ в пространстве $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ будет равносильна ее сходимости в пространстве $\boldsymbol{L}_1(K)$ на каждом компакте $K \Subset X$. Поскольку пространство $\boldsymbol{L}_1(K)$ полно для любого $K \Subset X$, то пространство $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ также полно, т.е. является пространством Фреше́.

Теорема. *Отображение $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \hookrightarrow \mathscr{D}'(X)$ является непрерывным вложением.*

Доказательство. В силу неравенства $\langle f_n - f, \varphi \rangle \leqslant \max|\varphi(x)| \int_K |f_n(x) - f(x)|\,dx$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$ отображение является непрерывным. Докажем вложение.

Предположим, что выполняется равенство $\int_X f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Определим ограниченную функцию $e(x) \doteqdot |f(x)|/f(x)$, если $f(x) \neq 0$, и $e(x) = 0$, если $f(x) = 0$. Применяя доказанное следствие к множеству $X_k \doteqdot \{x \in X \mid \|x\| < k\}$, построим последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(X_k)$, т.ч. $|\varphi_n(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in X_k$ и $\varphi_n(x) \to e(x)$ при п.в. $x \in X_k$. Тогда по теореме Лебéга о предельном переходе

$$\int_{X_k} |f(x)|\,dx = \int_{X_k} f(x)\,e(x)\,dx = \lim \int_{X_k} f(x)\,\big(e(x) - \varphi_n(x)\big)\,dx = 0.$$

Следовательно, $f(x) = 0$ при п.в. $x \in X_k$. Поскольку это равенство выполняется при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X$, то $f(x) = 0$ при п.в. $x \in X$. Таким образом, функция f определяет нулевой элемент пространства $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$. □

Определение. Говорят, что для функции $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ на множестве X существует *производная $\partial^\alpha f$ в смысле Со́болева*, если найдется функция $g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$, т.ч.

$$\int_X g(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_X f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X).$$

По доказанной теореме производная в смысле Со́болева $\partial^\alpha f \doteqdot g$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности функций п.в. на множестве X.

Пространство Со́болева $\mathrm{W}_p^k(X)$ состоит из классов эквивалентности функций $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$, у которых при всех $|\alpha| \leqslant k$ существуют производные в смысле Со́болева, принадлежащие $\partial^\alpha f \in \boldsymbol{L}_p(X)$, где $k \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Норма функции $f \in \mathrm{W}_p^k(X)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ определяется по формуле

$$\|f\|_{\mathrm{W}_p^k} \doteqdot \sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_{\boldsymbol{L}_p}.$$

Теорема. *Пространство Соболева* $\mathrm{W}_p^k(X)$ *является ба́наховым пространством при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{L}_p(X)$ является нормированным пространством, то $\mathrm{W}_p^k(X)$ также будет нормированным пространством. При этом, если $\|f\|_{\mathrm{W}_p^k} = 0$, то функция $f(x) = 0$ при почти всех $x \in X$. Докажем полноту.

Пусть $\{f_n\}$ задает последовательность Коши́ в пространстве $\mathrm{W}_p^k(X)$. Тогда в силу определения нормы в $\mathrm{W}_p^k(X)$ последовательность производных в смысле Со́болева $\{\partial^\alpha f_n\}$ является последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{L}_p(X)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$. Поскольку пространство $\boldsymbol{L}_p(X)$ полно, то $f_n \to f$ сходится в $\boldsymbol{L}_p(X)$ и все производные порядка $|\alpha| \leqslant k$ сходятся $\partial^\alpha f_n \to g_\alpha$ в $\boldsymbol{L}_p(X)$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|\langle f_n - f, \varphi\rangle| \leqslant \int_X |f_n(x) - f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leqslant \|f_n - f\|_{\boldsymbol{L}_p}\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_q} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $1/p + 1/q = 1$ и $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Следовательно, $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ и аналогично имеем $\langle \partial^\alpha f_n, \varphi\rangle \to \langle g_\alpha, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Отсюда по определению производной

$$\langle g_\alpha, \varphi\rangle = \lim_n \langle \partial^\alpha f_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lim_n\langle f_n, \partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X),$$

т.е. $\partial^\alpha f = g_\alpha$. Таким образом, $f_n \to f$ сходится в пространстве $\mathrm{W}_p^k(X)$. □

Пример 1. Докажем, что δ-функция $\delta(x)$ не является регулярной обобщенной функцией. Рассмотрим основную функцию $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| > 3$. Затем положим $\varphi_n(x) \doteqdot \eta(nx)$. Если δ-функция является регулярной, то для некоторой функции $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ получим $\langle \delta(x), \varphi_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Однако это невозможно, поскольку последовательность $\varphi_n(x) \to 0$ при всех $x \neq 0$ и значит по теореме Лебе́га интеграл также стремится к нулю.

У *функции Хевиса́йда* $\theta(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)$ существует в $\mathbb{R}$ обобщенная производная $\theta'(x) = \delta(x)$, которая является δ-функцией. Так как δ-функция $\delta(x)$ не является регулярной, то функция Хевиса́йда $\theta(x)$ не имеет на прямой $\mathbb{R}$ производной $\theta'(x)$ в смысле Со́болева. Однако она имеет производную в смысле Со́болева, равную нулю, на каждом интервале, не содержащим точки $x = 0$.

4 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Обозначим через $x^\beta \doteqdot x_1^{\beta_1}\dots x_m^{\beta_m}$, где $x \doteqdot (x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ и $\beta \doteqdot (\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathbb{Z}_+^m$. Бесконечно дифференцируемая функция $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ называется быстро убывающей, если $\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|x^\beta\partial^\alpha\varphi(x)|<\infty$ при всех $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^m$.

Определение. *Пространством Шва́рца* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ называется пространство быстро убывающих функций со сходимостью $\varphi_n\to\varphi$, определяемой системой полунорм:

$$p_k(\varphi)\doteqdot\textstyle\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in\mathbb{R}^m}(1+\|x\|)^k|\partial^\alpha\varphi(x)|,\ \text{где } k\in\mathbb{Z}_+$$

Сопряженное пространство Шва́рца $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ к пространству сходимости $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ называется пространством *обобщенных функций медленного роста*.

Из определения вытекают следующие свойства:

1) обобщенная функция $f\in\mathscr{S}'(X)$ является линейным функционалом, т.е. $\langle f,\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\rangle=\lambda_1\langle f,\varphi_1\rangle+\lambda_2\langle f,\varphi_2\rangle$ при всех $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$ и $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{S}(X)$;

2) обобщенная функция $f\in\mathscr{S}'(X)$ является непрерывным функционалом, т.е. если $\varphi_n\to\varphi$ сходится в пространстве $\mathscr{S}(X)$, то $\langle f,\varphi_n\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$;

3) последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции, т.е. если $f_n\in\mathscr{S}'(X)$ и $\langle f_n,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$ при всех $\varphi\in\mathscr{S}(X)$, то $f\in\mathscr{S}'(X)$.

Докажем последнее утверждение. Вначале заметим, что система полунорм $\{p_k\}$ определяет в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ структуру счетно-нормированного пространства. Поскольку $|x^\beta\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant(1+\|x\|)^k|\partial^\alpha\varphi(x)|$ при всех $|\beta|\leqslant k$, то сходимость $\varphi_n\to\varphi$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ по этой системе полунорм равносильна равномерной сходимости в $\mathbb{R}^m$ всех функций вида $x^\beta\partial^\alpha\varphi_n(x)\rightrightarrows x^\beta\partial^\alpha\varphi(x)$. Следовательно, по доказанной ранее теореме $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ является метрическим линейным пространством с указанной сходимостью.

В силу известной теоремы из математического анализа, если последовательность непрерывно дифференцируемых функций сходится равномерно вместе со своими производными, то предельная функция имеет непрерывные производные.

Поэтому предельная функция любой последовательности Коши в пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ также принадлежит $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ является полным счетно-нормированным пространством, т.е. пространством Фреше́. Значит по доказанному ранее в пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ выполняется аксиома полноты и, следовательно, сопряженное пространство $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ будет полным.

Лемма. *Пространство основных функций $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. Пусть $\eta\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\eta(x)\geqslant0$, $\eta(x)=1$ при $\|x\|\leqslant1$ и $\eta(x)=0$ при $\|x\|\geqslant3$. Для каждой функции $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ положим $\varphi_n(x)\doteqdot\eta(x/n)\varphi(x)$. Тогда $\varphi_n\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Применяя формулу Ле́йбница для функций многих переменных, имеем

$$\partial^\alpha\big(\varphi_n(x)-\varphi(x)\big)=\partial^\alpha\big((\eta(x/n)-1)\,\varphi(x)\big)=\textstyle\sum_{\gamma\leqslant\alpha}c_{\alpha\gamma}\partial^\gamma\big(\eta(x/n)-1\big)\partial^{\alpha-\gamma}\varphi(x).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N, т.ч. $|x^\beta \partial^{\alpha-\gamma}\varphi(x)| < \varepsilon$ при всех $\|x\| > N$ и $\gamma \leqslant \alpha$. Так как $\big(\eta(x/n) - 1\big) = 0$ при всех $\|x\| \leqslant n$, то получаем $|x^\beta \partial^\alpha\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)| < c\varepsilon$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ и $n \geqslant N$, где константа $c \doteqdot \sum_{\gamma\leqslant\alpha} c_{\alpha\gamma} \max|\partial^\gamma \eta(x)|$. Таким образом, последовательность $\varphi_n \to \varphi$ сходится в пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. □

Пример 1. Функция $f(x) \doteqdot e^{x^2} \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ определяет регулярный функционал $\langle f, \varphi\rangle \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Покажем, что $f \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, т.е. функционал $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, заданный на подпространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$, не имеет непрерывного продолжения на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. В самом деле, пусть $\varphi(x) = e^{-x^2/2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Как и в лемме построим последовательность функций $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, т.ч. $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Тогда по определению этой последовательности имеем $\langle f, \varphi_n\rangle \geqslant \int_{-n}^{n} e^{x^2/2} dx \to \infty$.

Теорема. *Отображение $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным вложением.*

Доказательство. Так как $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, то любому функционалу $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ соответствует линейный функционал $g \doteqdot f|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)}$ на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, то $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, и значит $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$, т.е. $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\langle f, \varphi\rangle = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Применяя лемму, для любой $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ существуют $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\langle f, \varphi\rangle = \lim\langle f, \varphi_n\rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Отсюда функционал $f = 0$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ и, следовательно, отображение является вложением. Если $f_n \to f$ в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, то соответствующие $g_n \to g$ в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, вложение непрерывно. □

Рассмотрим действия с обобщенными функциями медленного роста.

1. *Операторы сдвига и растяжения обобщенной функции $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ определяются по формулам $\langle \tau_a f, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle$ и $\langle \rho_\lambda f, \varphi\rangle \doteqdot |\lambda|^{-m}\langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{S}(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R}\setminus 0$, где $\tau_a\varphi(x) \doteqdot \varphi(x-a)$ и $\rho_\lambda\varphi(x) \doteqdot \varphi(\lambda x)$.*

2. *Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линейное преобразование с определителем $\det A \neq 0$. Замена переменных в обобщенной функции $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ задается по формуле $\langle T_A f, \varphi\rangle \doteqdot |\det A|^{-1}\langle f, T_{A^{-1}}\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{S}(X)$, где $T_A\varphi(x) = \varphi(Ax)$.*

3. *Производная $\partial^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathscr{S}'(X)$ определяется по формуле $\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle \doteqdot (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle$ для всех функций $\varphi \in \mathscr{S}(X)$.*

Доказательство непрерывности в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ соответствующих функционалов в этих свойствах аналогично доказательству, проведенному ранее для $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

Определение. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^m x_k y_k$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$,

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle} dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) e^{i\langle x,y\rangle} dy, \quad \text{где } \varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}.$$

Линейные операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* функции $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, интегрируемой по Лебе́гу.

Заметим, что в силу теоремы Фубини многомерное преобразование Фурье в $\mathbb{R}^m$ есть произведение одномерных преобразование Фурье по каждой переменной.

Пример 2. Преобразование Фурье́ $\widehat{f}(x)=f(x)$, где $f(x)=e^{-\|x\|^2/2}$ и $\|x\|^2=\sum_{k=1}^m x_k^2$. В силу теоремы Фуби́ни достаточно рассмотреть одномерный случай $m=1$.

$$\widehat{f}(x)=\varkappa\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2/2-ixy}dy=\varkappa e^{-x^2/2}\int_{\mathbb{R}}e^{-(y+ix)^2/2}dy=e^{-x^2/2},$$

т.к. по теореме Коши́ интеграл $\int_{\Im z=x}e^{-z^2/2}dz=\int_{\Im z=0}e^{-z^2/2}dz=\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2/2}dy=\sqrt{2\pi}$.

Лемма. *Преобразование Фурье́ $\mathcal{F}:\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным и биективным линейным оператором в пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. Дифференцируя и интегрируя по частям, для всех $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x)=\varkappa^m\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)(-iy)^\alpha e^{-i\langle x,y\rangle}dy \quad\text{и}\quad \widehat{\partial^\alpha\varphi}(x)=\varkappa^m(ix)^\alpha\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)e^{-i\langle x,y\rangle}dy.$$

Отсюда $x^\beta\partial^\alpha\widehat{\varphi}=(-i)^{|\alpha+\beta|}\,\widehat{\partial^\beta y^\alpha\varphi}$. Так как $\int_{\mathbb{R}^m}\frac{dy}{(1+\|y\|)^{2m}}\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{(1+|t|)^2}\right)^m=2^m$, то

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|x^\beta\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x)|\leqslant\varkappa^m\int_{\mathbb{R}^m}|\partial^\beta(y^\alpha\varphi(y))|\,dy\leqslant(2\varkappa)^m\max|(1+\|y\|)^{2m}\partial^\beta(y^\alpha\varphi(y))|.$$

Следовательно, если $\varphi_n\to\varphi$ сходится в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, то $\widehat{\varphi}_n\to\widehat{\varphi}$ сходится в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, т.е. оператор $\mathcal{F}$ непрерывен в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Для доказательства биективности покажем, что $\widetilde{\widehat{\varphi}}(x)=\varphi(x)$. По теореме Фубини достаточно это доказать в случае $m=1$.

$$\widetilde{\widehat{\varphi}}(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(y)\,e^{ixy-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)e^{-iyz}dz\right)e^{ixy-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-i(z-x)y-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy\right)dz=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varkappa^2}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-i(\frac{z-x}{\varepsilon})y-\frac{y^2}{2}}dy\right)dz=$$

$$\text{(см. пример 2)}\ =\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varkappa}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)^2}dz=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\varphi(x+\varepsilon t)e^{-\frac{t^2}{2}}dz=\varphi(x).$$

Аналогично $\widehat{\widetilde{\varphi}}(x)=\varphi(x)$. Таким образом, оператор $\mathcal{F}$ биективен в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. □

Определение. Для каждой функции $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ по определению полагаем

$$\langle\widehat{f},\varphi\rangle\doteqdot\langle f,\widehat{\varphi}\rangle,\quad\langle\widetilde{f},\varphi\rangle\doteqdot\langle f,\widetilde{\varphi}\rangle\qquad\text{при всех }\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^m).$$

Линейные операторы $\mathcal{F}(f)\doteqdot\widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f)\doteqdot\widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* обобщенных функций $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста.

Теорема. *Преобразование Фурье́ $\mathcal{F}:\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ является линейным, непрерывным и биективным оператором.*

Доказательство. В силу леммы, если $\varphi_n\to\varphi$ сходится в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, то $\widehat{\varphi}_n\to\widehat{\varphi}$ сходится в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\widehat{f}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ при всех $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. Кроме того, если $f_n\to f$ сходится в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, то преобразования Фурье́ $\widehat{f}_n\to\widehat{f}$ сходятся в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, т.е. оператор $\mathcal{F}$ непрерывен в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. Так как по лемме выполняются равенства

$$\langle\widetilde{\widehat{f}},\varphi\rangle=\langle f,\widehat{\widetilde{\varphi}}\rangle=\langle f,\varphi\rangle\ \text{и}\ \langle\widehat{\widetilde{f}},\varphi\rangle=\langle f,\widetilde{\widehat{\varphi}}\rangle=\langle f,\varphi\rangle\ \text{при всех }\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^m),$$

то произведение операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ совпадает с тождественным оператором, т.е. $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}\cdot\mathcal{F}=I$. Таким образом, оператор $\mathcal{F}$ биективен в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. □

Рассмотрим формулы преобразования Фурье́ обобщенных функций.

1. *Формулы сдвига. Если $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$, где $a \in \mathbb{R}^m$, то*

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-i\langle a,x\rangle}\mathcal{F}f(x)\,, \quad \tau_a\mathcal{F}f = \mathcal{F}(e^{i\langle a,y\rangle}f).$$

Для всех функции $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ эти формулы легко доказываются из определения преобразования Фурье́. Поэтому, применяя эти формулы, получим

$$\langle \mathcal{F}(\tau_a f), \varphi\rangle = \langle f, \tau_{-a}(\mathcal{F}\varphi)\rangle = \langle f, \mathcal{F}(e^{-i\langle a,y\rangle}\varphi)\rangle = \langle e^{-i\langle a,x\rangle}\mathcal{F}f, \varphi\rangle.$$

Аналогично доказывается вторая формула.

2. *Формулы замены переменных. Если $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ невырожденный линейный оператор, A' транспонированный оператор и $T_A\varphi(x) \doteqdot \varphi(Ax)$, то*

$$\mathcal{F}(T_A f) = |\det A'|^{-1}T_{A'^{-1}}\mathcal{F}f, \quad T_A\mathcal{F}f = |\det A'|^{-1}\mathcal{F}(T_{A'^{-1}}f).$$

В самом деле, эти формулы просто доказываются для всех функций $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому по определению замены переменных обобщенной функции получим

$$\langle \mathcal{F}(T_A f), \varphi\rangle = |\det A|^{-1}\langle f, T_{A^{-1}}\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}(T_{A'}\varphi)\rangle = |\det A'|^{-1}\langle T_{A'^{-1}}\mathcal{F}f, \varphi\rangle,$$

Аналогично доказывается вторая формула.

3. *Формулы дифференцирования. Если $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^m_+$*

$$\partial^\alpha(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha f(y))\,, \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha\mathcal{F}f(x),$$

где производные берутся в смысле обобщенных функций.

Дифференцируя и интегрируя по частям преобразование Фурье́, эти формулы нетрудно доказываются для всех функций $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Применяя эти формулы и используя определение преобразования Фурье́ обобщенных функций, получим

$$\langle \partial^\alpha(\mathcal{F}f), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \mathcal{F}\partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, (\boldsymbol{i}x)^\alpha\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha f(y)), \varphi\rangle.$$

Отсюда вытекает первая формула и аналогично вторая.

4. *Формулы для многочлена. Если $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, $P(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha x^\alpha$ многочлен и $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha \partial^\alpha$ дифференциальный оператор, то*

$$\mathcal{F}(P f) = P(\boldsymbol{i}\partial)\mathcal{F}f\,, \quad \mathcal{F}(P(\partial)\,f) = P(\boldsymbol{i}x)\mathcal{F}f(x).$$

В силу свойства линейности преобразования Фурье́ $\mathcal{F}$ эти формулы являются простым следствием из доказанных выше формул дифференцирования.

Пример 3. Преобразование Фурье́ производной δ-функции $\partial^\alpha\delta(x)$. По определению преобразования Фурье́ и производной, для всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\langle \mathcal{F}\partial^\alpha\delta(x), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \delta(x), \partial^\alpha\mathcal{F}\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\mathcal{F}\varphi(0) = \varkappa^m \textstyle\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)\,(\boldsymbol{i}y)^\alpha dy.$$

Таким образом, имеем формулы $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta(x)) = \varkappa^m(\boldsymbol{i}y)^\alpha$ и $\mathcal{F}^{-1}((\boldsymbol{i}y)^\alpha) = \varkappa^{-m}\partial^\alpha\delta(x)$. Поэтому преобразование Фурье степени $\mathcal{F}(y^\alpha) = \mathcal{F}^{-1}((-y)^\alpha) = \varkappa^{-m}\boldsymbol{i}^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta(x)$.

5 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ́ В ПРОСТРАНСТВАХ $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$

Определение. Операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$, определенные по формуле

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{-i\langle x,y\rangle} dy \quad \text{и} \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{i\langle x,y\rangle} dy,$$

называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* функций $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, где $\varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\langle x,y\rangle \doteqdot \sum_{k=1}^m x_k y_k$.

Лемма (Ри́мана-Лебе́га). *Если $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, то преобразование Фурье́ имеет следующие свойства: $\widehat{f} \in \boldsymbol{C}(\mathbb{R}^m)$, $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa^m \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}$ и $\lim_{\|x\|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.*

Доказательство. Ясно, что $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa^m \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}$. Пусть $\tau_a f(x) \doteqdot f(x-a)$, тогда

$$|\tau_a \widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)| \leqslant \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|\, |e^{i\langle x+a,y\rangle} - e^{-i\langle x,y\rangle}|\, dy = 2\varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|\, |\sin \tfrac{\langle a,y\rangle}{2}|\, dy.$$

По теореме Лебе́га последний интеграл стремится к нулю при $a \to 0$. Поэтому функция $\widehat{f}$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m$. Так как $\widehat{\tau_a f} = -\widehat{f}$ при $a \doteqdot \frac{\pi x}{\langle x,x\rangle}$, то

$$|\widehat{f}(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}\|\widehat{f} - \widehat{\tau_a f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \tfrac{\varkappa^m}{2}\|f - \tau_a f\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant \tfrac{\varkappa^m}{2}\big(\|f-g\|_{\boldsymbol{L}_1} + \|g - \tau_a g\|_{\boldsymbol{L}_1} + \|\tau_a g - \tau_a f\|_{\boldsymbol{L}_1}\big).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем непрерывную функцию $g \in \boldsymbol{C}_0(\mathbb{R}^m)$ и число $\delta > 0$, т.ч.

$$\|f - g\|_{\boldsymbol{L}_1} = \|\tau_a f - \tau_a g\|_{\boldsymbol{L}_1} < \tfrac{2\varepsilon}{3\varkappa^m} \quad \text{и} \quad \|g - \tau_a g\|_{\boldsymbol{L}_1} < \tfrac{2\varepsilon}{3\varkappa^m} \text{ при всех } \|a\| < \delta$$

в силу равномерной непрерывности g. Тогда $|\widehat{f}(x)| < \varepsilon$ при всех $\|x\| > \pi/\delta$. □

Теорема (условие Ди́ни). *Если функция $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и в точке $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие Дини $\int_{-\delta}^{\delta} \big|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\big|\, dt < \infty$ при $\delta > 0$, то существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = f(x).$$

Доказательство. По теореме Фуби́ни, меняя порядок интегрирования, получим

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = \varkappa^2 \int_{\mathbb{R}} f(z) \Big(\int_{-n}^{n} e^{i(x-z)y} dy\Big)\, dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{x-z}\, dz.$$

Производя замену переменных $t = x - z$ и используя равенство $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$, имеем

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin nt}{t}\, dt - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt\, dt - \frac{f(x)}{\pi}\int_{|t|>n\delta} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Первые два интеграла стремятся к нулю при $n \to \infty$ по лемме Ри́мана–Лебе́га, а последний интеграл стремится к нулю в силу сходимости в бесконечности. □

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$.

1. *Формула умножения. Если $f, g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, то выполняется равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx.$$

В самом деле, применяя теорему Фуби́ни, получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^m}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,e^{-i\langle x,y\rangle}dy\Big)\,g(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,\Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\,e^{-i\langle x,y\rangle}dx\Big)\,dy.$$

В частности, из формулы умножения вытекает, что преобразование Фурье́ любой интегрируемой функции совпадает п.в. с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если функция и преобразование Фурье́ $f,\widehat{f}\in L_1(\mathbb{R}^m)$, то выполняются равенства $\widetilde{\widehat{f}}(x)=\widehat{\widetilde{f}}(x)=f(x)$ при п.в. $x\in\mathbb{R}^m$.*

Применяя формулы умножения и обращения для функций $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^m}\widetilde{\widehat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Поэтому $\widetilde{\widehat{f}}(x)=f(x)$ при п.в. $x\in\mathbb{R}^m$. Аналогично $\widehat{\widetilde{f}}(x)=f(x)$ при п.в. $x\in\mathbb{R}^m$.

3. *Формулы дифференцирования. Если функция $f\in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $x^\alpha f(x)\in L_1(\mathbb{R}^m)$, то $\partial^\alpha\widehat{f}(x)=\widehat{(-iy)^\alpha f(y)}$ при всех $x\in\mathbb{R}^m$. Если функция $f\in \mathrm{W}_1^k(\mathbb{R}^m)$ и $|\alpha|\leqslant k$, то $\widehat{\partial^\alpha f}(x)=(ix)^\alpha\widehat{f}(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}^m$.*

Первая формула доказывается дифференцированием преобразования Фурье́ под знаком интеграла Лебе́га. Для доказательства второй формулы нужно вспомнить определение производной в смысле Со́болева. Тогда при всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\langle\widehat{\partial^\alpha f},\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha\widehat{\varphi}\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\widehat{(-iy)^\alpha\varphi(y)}\rangle=\langle(ix)^\alpha\widehat{f}(x),\varphi\rangle.$$

Отсюда следует, что равенство $\widehat{\partial^\alpha f}(x)=(ix)^\alpha\widehat{f}(x)$ выполняется при п.в. $x\in\mathbb{R}^m$, а так как функции непрерывны, то это равенство выполняется всюду.

4. *Формула свертки. Свертка $f*g(x)\doteqdot\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,g(x-y)\,dy$ функций $f,g\in L_1(\mathbb{R}^m)$ принадлежит $f*g\in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{f*g}(x)=\varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}^m$.*

Линейное преобразование $A(x,y)=(y,x-y)$ отображает биективно измеримые множества в $\mathbb{R}^{2m}$ в измеримые в $\mathbb{R}^{2m}$. Поэтому из измеримости функции $f(x)g(y)$ следует измеримость функции $f(y)g(x-y)$. При помощи обобщенного неравенства Минко́вского получим $\|f*g\|_{L_1}\leqslant\|f\|_{L_1}\|g\|_{L_1}$. Отсюда $f*g\in L_1(\mathbb{R}^m)$ и

$$\varkappa^m\int_{\mathbb{R}^m}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(z)g(y-z)\,dz\Big)\,e^{-i\langle x,y\rangle}dy=\varkappa^m\int_{\mathbb{R}^m} f(z)\Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(y-z)\,e^{-i\langle x,y-z\rangle}dy\Big)\,e^{-i\langle x,z\rangle}dz.$$

Производя замену переменных $y\to y-z$, имеем указанное равенство.

Определение. Пусть $\Delta_n\doteqdot\{x\in\mathbb{R}^m\mid \max_{1\leqslant k\leqslant m}|x_k|<n\}$ обозначает открытый куб в $\mathbb{R}^m$ с ребром $2n$. Преобразованием Фурье́ функции $f\in L_2(\mathbb{R}^m)$ называется предел преобразований Фурье́ функций $f_n\doteqdot f\chi_{\Delta_n}$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R}^m)$, т.е.

$$\widehat{f}(x)\doteqdot\lim_{n\to\infty}\widehat{f_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\varkappa^m\int_{\Delta_n} f(y)\,e^{-i\langle x,y\rangle}dy \text{ при п.в. } x\in\mathbb{R}^m.$$

В следующей теореме Планшере́ля показано, что этот предел существует для всех функций $f\in L_2(\mathbb{R}^m)$ и преобразование Фурье́ $\mathcal{F}(f)=\widehat{f}$ задает изометричное отображение $L_2(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\mathcal{F}$ является унитарным оператором в $L_2(\mathbb{R}^m)$.

Теорема (Планшере́ля)**.** *Если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то существует предел $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$ по норме $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и имеет место равенство Парсева́ля $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$.*

Доказательство. По формулам умножения и обращения для всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\|\varphi\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{\varphi}}(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(x)\overline{\widehat{\varphi}(x)}dx = \|\widehat{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Пусть вначале функция $f(x) = 0$ при всех $x \notin \Delta_r$. Тогда $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и существуют $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Delta_r)$, т.ч. $\|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$. Так как $\{\varphi_n\}$ является последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и имеет место равенство $\|\varphi_n - \varphi_{n'}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{\varphi_n - \varphi_{n'}}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi}_{n'}\|_{\boldsymbol{L}_2}$, то $\{\widehat{\varphi}_n\}$ будет последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Поскольку выполняются неравенства $\|\widehat{f} - \widehat{\varphi}_n\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa^m \|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant c_r\|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$, то $\widehat{\varphi}_n \rightrightarrows \widehat{f}$ сходится равномерно. Таким образом, $\widehat{\varphi}_n \to \widehat{f}$ сходится в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|\widehat{\varphi}_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$.

Предположим теперь, что $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Тогда $f_n(x) \doteqdot f(x)\chi_{\Delta_n}(x) = 0$ при всех $x \notin \Delta_n$ и $f_n \to f$ сходится в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Так как $\{f_n\}$ есть последовательность Коши в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и по доказанному $\|f_n - f_{n'}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{f_n} - \widehat{f_{n'}}\|_{\boldsymbol{L}_2}$, то $\{\widehat{f_n}\}$ образует последовательность Коши в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Следовательно, существует предел $\lim \widehat{f_n} \doteqdot \widehat{f}$ по норме $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и выполняется равенство $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|\widehat{f_n}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|f_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. $\square$

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

1. *Формула умножения. Если $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то выполняется равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx.$$

Это равенство вытекает из теоремы Планшере́ля и непрерывности скалярного произведения. По формуле умножения преобразование Фурье́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ совпадает п.в. в $\mathbb{R}^m$ с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.*

Применяя формулы умножения и обращения преобразования Фурье́, получим

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{f}}(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x)\, dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m).$$

Отсюда $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$. Аналогично $\widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

3. *Формула свертки. Свертка функций $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ принадлежит $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и выполняется равенство $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.*

При помощи обобщенного неравенства Минко́вского, мы получаем неравенство $\|f * g\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}\|g\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Отсюда следует, что $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и свертка непрерывна по второму аргументу в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Применяя непрерывность скалярного произведения и формулу свертки для функций из $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\langle \widehat{f * g}, \varphi\rangle = \lim\langle \widehat{f * g_n}, \varphi\rangle = \varkappa^{-m}\lim\langle \widehat{f}\,\widehat{g}_n, \varphi\rangle = \varkappa^{-m}\langle \widehat{f}\,\widehat{g}, \varphi\rangle.$$

Таким образом, выполняется равенство $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

Определение. *Функциями Эрми́та* называются следующие функции:

$$h_n(x) \doteqdot c_n e^{x^2/2} \tfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где функции $H_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ называются *многочленами Эрми́та.*

Функции Эрми́та обладают свойством ортогональности в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. В самом деле, интегрируя по частям n раз, получим при всех $n > k$

$$\int_{\mathbb{R}} h_k(x)\, h_n(x)\, dx = c_n \int_{\mathbb{R}} H_k(x) \tfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = c_n (-1)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \tfrac{d^n}{dx^n} H_k(x)\, dx = 0.$$

При $k = n$ получим $\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x)\, dx = c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}$. Поэтому при $c_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$ система функций Эрми́та $\{h_n\}$ является ортонормированной системой.

Лемма. *Пусть функция $\rho(t)$ непрерывна и $0 < |\rho(t)| \leqslant e^{-a|t|}$ при $t \in \mathbb{R}$, где $a > 0$. Тогда система функций $\varphi_n(t) \doteqdot t^n \rho(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, полна в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Докажем, что если функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ и ортогональна $f \perp \varphi_n$ всем φ_n, т.е. $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0$, то $f(x) = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Функция

$$F(z) \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-itz} \rho(t)\, dt, \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

голоморфна в полосе $|\Im z| < a$ комплексной плоскости и ее производные в нуле

$$F^{(n)}(z)|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, (-it)^n e^{-itz} \rho(t)\, dt|_{z=0} = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому $F(z) = 0$ при всех $|\Im z| < a$. В частности, имеем $F(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Отсюда по формуле обращения преобразования Фурье́ получим, что произведение $f(t)\rho(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, функция $f(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, система функций $\{\varphi_n\}$ полна в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. □

Теорема. *Система функций Эрми́та $\{h_n\}$ образует в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье́ с собственными значениями $\lambda_n = (-i)^n$, т.е. $\widehat{h_n}(x) = \lambda_n h_n(x)$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Доказательство. Поскольку функции Эрми́та $h_n(x)$ получаются ортогонализацией системы функций $\varphi_n(x) = x^n \rho(x)$, где $\rho(x) = e^{-x^2/2}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$, то полнота следует из леммы. Докажем, что $h_n(x)$ является собственной функцией оператора Фурье́.

$$\widehat{h_n}(x) = \varkappa \int_{\mathbb{R}} h_n(y)\, e^{-ixy} dy = \varkappa c_n \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{y^2 - 2ixy}{2}} \tfrac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} dy =$$

$$= \varkappa c_n e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}} \tfrac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} dy =$$

$$= \varkappa c_n (-1)^n e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \tfrac{d^n}{dy^n} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}} dy =$$

$$= \varkappa c_n (-i)^n e^{x^2/2} \tfrac{d^n}{dx^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}} dy =$$

$$= c_n (-i)^n e^{-x^2/2} \tfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-i)^n h_n(x).$$

Здесь в предпоследнем равенстве использовалось преобразование Фурье́ функции $\rho(x) = e^{-x^2/2}$, полученное ранее, которое равно $\widehat{\rho}(x) = \rho(x)$. □

6 СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\boldsymbol{E}$ обозначает нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\boldsymbol{E}^*$ его сопряженное пространство, состоящее из всех линейных непрерывных функционалов $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in \boldsymbol{S}} |f(x)|$, где $\boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ — единичный шар в $\boldsymbol{E}$. Значения линейного функционала $f \in \boldsymbol{E}^*$ на элементе $x \in \boldsymbol{E}$ далее обозначаются через $f(x) \doteqdot \langle f, x \rangle$.

Определение. Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ следует, что $\lambda_i = 0$ при $i = 1, \ldots, n$.

Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ следует, что $\lambda_j = 0$ при $j = 1, \ldots, n$.

Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$ и система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ называется *биортогональными*, если $\langle f_j, e_i \rangle = 0$ при всех $i \neq j$ и $f_i(e_i) = 1$.

Бесконечная система элементов называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима. Максимальная линейно независимая система элементов в $\boldsymbol{E}$ называется *базисом Га́меля*. Ее существование вытекает из леммы Цо́рна. Размерностью $\dim \boldsymbol{E}$ называется мощность базиса Га́меля.

Последовательность элементов $\{e_i\}_{i=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$ называется *базисом* нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, если каждый элемент $x \in \boldsymbol{E}$ имеет единственное представление в виде сходящегося по норме ряда $x = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i$. Если, кроме того, функционалы $f_j(x) \doteqdot \lambda_j$, определенные при помощи этого представления, принадлежат $f_j \in \boldsymbol{E}^*$, то система $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ называется *базисом Ша́удера* в пространстве $\boldsymbol{E}$. В банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ любой базис является базисом Ша́удера и система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}^*$ образует биортогональную систему элементов $\{e_i\}_{i=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$.

Теорема. *Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$ тогда и только тогда имеет биортогональную систему элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$, когда линейно независима.*

Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда имеет биортогональную систему функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$, когда линейно независима.

Доказательство. Вначале докажем первое утверждение теоремы.

Необходимость. Если имеет место равенство $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то в силу биортогональности, полагая $x = e_j$, получим $\lambda_j = 0$ при $j = 1, \ldots, n$.

Достаточность. При $n = 1$ имеем $f_1 \neq 0$. Поэтому найдется $e_1 \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_1(e_1) = 1$. По индукции предположим, что для $n - 1$ утверждение верно. Тогда существуют $x_i \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_j(x_i) = 0$ при $i \neq j$ и $f_i(x_i) = 1$, где $i, j = 1, \ldots, n-1$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ положим $y \doteqdot x - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) x_i$. Тогда элемент $y \in \boldsymbol{E}$ удовлетворяет условию $f_j(y) = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n-1$ и при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если выполняется равенство $f_n(y) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) f_n(x_i)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, что противоречит условию линейной независимости функционалов. Поэтому найдется элемент $x \in \boldsymbol{E}$, для которого $f_n(y) \neq 0$. Полагая $e_n \doteqdot y / f(y)$ и $e_i \doteqdot x_i - f_n(x_i) e_n$ при $i = 1, \ldots, n-1$, мы получим биортогональную систему элементов в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ во второе сопряженное пространство, заданное по формуле $J(x) \doteqdot \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ есть функционал Дирака $\delta_x \in \boldsymbol{E}^{**}$. Так как система функционалов $\{\delta_{e_i}\}_{i=1}^n \subset \boldsymbol{E}^{**}$ линейно независима тогда и только тогда, когда $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейно независима, то по доказанному выше существует биортогональная система $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$. □

Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ — нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначает пространство ограниченных линейных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ с нормой $\|A\| \doteqdot \sup_{x\in \boldsymbol{S}} \|A(x)\|$. Следующие множества:

$$\ker A \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid A(x) = 0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A \doteqdot \{y \in \boldsymbol{F} \mid y = A(x), x \in \boldsymbol{E}\}$$

называются соответственно *ядром* и *образом* линейного оператора A. Рассмотрим свойства ядра и образа для ограниченного линейного оператора.

1. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то ядро $\ker A$ является замкнутым линейным подпространством $\boldsymbol{E}$, а образ $\operatorname{Im} A$ образует линейное подпространство $\boldsymbol{F}$.*

Пусть элементы $x, y \in \ker A$. Тогда $A(x+y) = A(x) + A(y) = 0$ и $A(\lambda x) = \lambda A(x) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $x + y \in \ker A$ и $\lambda x \in \ker A$. Пусть $x = \lim x_n$ и $x_n \in \ker A$, тогда в силу непрерывности оператора $A(x) = \lim A(x_n) = 0$, т.е. $x \in \ker A$.

Пусть элементы $u, v \in \operatorname{Im} A$. Тогда получаем $u + v = A(x) + A(y) = A(x+y) \in \operatorname{Im}(A)$ и $\lambda u = \lambda A(x) = A(\lambda x) \in \operatorname{Im} A$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $u + v \in \operatorname{Im} A$ и $\lambda u \in \operatorname{Im} A$.

2. *Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ тогда и только тогда является биективным, когда он инъективный и сюръективный, т.е. $\ker A = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$.*

Если A является биективным, то $\ker A = A^{-1}(0) = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$. Обратно, если $\ker A = 0$, то из равенства $A(x) = A(y)$ следует, что $A(x-y) = 0$ и, значит, $x - y = 0$. Отсюда оператор A является инъективным отображением на свой образ $\operatorname{Im} A$.

Определение. *Произведением операторов* $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ и $B : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ называется оператор $BA : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{G}$, определенный по формуле $BA(x) \doteqdot B(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Оператор $B : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ называется *обратным к оператору* $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, если имеют место равенства $BA = I_{\boldsymbol{E}}$ и $AB = I_{\boldsymbol{F}}$, где $I_{\boldsymbol{E}}$ и $I_{\boldsymbol{F}}$ — тождественные операторы, т.е. $I_{\boldsymbol{E}}(x) = x$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. *Обратный оператор* обозначается через $A^{-1} \doteqdot B$.

1. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то $\|BA\| \leqslant \|B\|\,\|A\|$.*

В самом деле, имеем $\|BA(x)\| \leqslant \|B\|\,\|A(x)\| \leqslant \|B\|\,\|A\|\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

2. *Если оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ является линейным и биективным, то обратный оператор $A^{-1} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ также является линейным и биективным.*

Докажем линейность оператора A^{-1}. Пусть $A^{-1}(u) = x$, $A^{-1}(v) = y$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, тогда

$$A^{-1}(u+v) = A^{-1}(Ax + Ay) = A^{-1}A(x+y) = x + y = A^{-1}(u) + A^{-1}(v),$$

$$A^{-1}(\lambda u) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}(u).$$

Определение. Оператор $A^*: \boldsymbol{F}^* \to \boldsymbol{E}^*$ называется *сопряженным к оператору* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, если имеет место равенство $\langle A^*f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.е. для каждого $f \in \boldsymbol{F}^*$ его образ $A^*(f) = g$ равен $g(x) \doteqdot f(Ax)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

1. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то $A^* \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Докажем, что A^* является линейным оператором. Пусть $f, g \in \boldsymbol{F}^*$ и $A^*(f+g) = h$. Тогда имеем $h(x) = (f+g)(Ax) = f(Ax) + g(Ax)$, т.е. $A^*(f+g) = A^*f + A^*g$. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $A^*(\lambda f) = h$, тогда получим $h(x) = (\lambda f)(Ax) = \lambda f(Ax)$, т.е. $A^*(\lambda f) = \lambda A^* f$.

Докажем равенство норм. Так как $A^*f(x) = f(Ax)$, то по свойству произведения операторов имеем$\|A^*f\| \leqslant \|f\|\,\|A\|$, т.е. $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ по теореме Ха́на–Ба́наха существует $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $f(Ax) = \|Ax\|$ и $\|f\| = 1$. Поэтому $\|Ax\| = A^*f(x) \leqslant \|A^*f\|\,\|x\| \leqslant \|A^*\|\,\|x\|$. Следовательно, имеем $\|A^*\| = \|A\|$.

2. *Если операторы $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ и $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, то $(BA)^* = A^*B^*$. В частности, если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является биективным, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

Поскольку $BA \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$, то $(BA)^*g(x) = g(BAx) = B^*g(Ax) = A^*B^*g(x)$ для всех $g \in \boldsymbol{G}^*$. Второе утверждение следует из определения обратного оператора и теоремы Ба́наха об обратном операторе, которую мы докажем на следующей лекции.

Определение. Пусть $V \subset \boldsymbol{E}$ и $W \subset \boldsymbol{E}^*$, тогда следующие множества:

$$V^{\perp} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}^* \mid f(x) = 0, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = 0, f \in W\}$$

называются соответственно *аннулятором** V и *аннулятором* W. Заметим, что эти множества $W_{\perp} = \bigcap_{f \in W} \ker f$ и $V^{\perp} = \bigcap_{x \in V} \ker \delta_x$ образуются как пересечение ядер ограниченных функционалов. Поэтому будут замкнутыми подпространствами.

Теорема. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то имеют место следующие свойства:*

$$1)\ \ker A = (\operatorname{Im} A^*)_{\perp}; \qquad 3)\ \operatorname{Im} A \subset (\ker A^*)_{\perp};$$
$$2)\ \ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}; \qquad 4)\ \operatorname{Im} A^* \subset (\ker A)^{\perp}.$$

Доказательство. Доказательство этих соотношений легко вывести из указанных выше определений сопряженного оператора, ядра, образа и их аннуляторов.

1) Элемент $x \in \ker A$ тогда и только тогда, когда $Ax = 0$. По теореме Ха́на–Ба́наха это равносильно тому, что $f(Ax) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.е. $x \in (\operatorname{Im} A^*)_{\perp}$.

2) Функционал $f \in \ker A^*$ тогда и только тогда, когда $A^*f = 0$, т.е. имеет место $f(Ax) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Последнее равносильно включению $f \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

3) Если $y \in \operatorname{Im} A$, то существует $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $y = Ax$. Поэтому $f(y) = A^*f(x) = 0$ при всех $f \in \ker A^*$. Таким образом, выполняется включение $y \in (\ker A^*)_{\perp}$.

4) Если $g \in \operatorname{Im} A^*$, то существует $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $g(x) = f(Ax)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Отсюда $g(x) = 0$ при всех $x \in \ker A$. Поэтому выполняется включение $g \in (\ker A)^{\perp}$. $\square$

Замечание. В дальнешем будет доказано, что если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами и образ $\operatorname{Im} A$ оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ замкнут в пространстве $\boldsymbol{F}$, то включения 3) и 4), полученные в этой теореме, являются равенствами.

Пример 1. Если линейный оператор $A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ задан матрицей $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$, то $Ax=y$, где $y_i=\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j$ при $i=1,\ldots,m$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}^n$, $y=(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{F}^m$. Тогда по определению сопряженного оператора получим

$$\langle u,Ax\rangle=\sum_{i=1}^m u_i\big(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\big)=\sum_{j=1}^n\big(\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i\big)x_j=\langle A^*u,x\rangle,$$

т.е. $A^*u=v$, где $v_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i$, $j=1,\ldots,n$, $u=(u_1,\ldots,u_m)\in\mathbb{F}^m$ $v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{F}^n$. Поэтому оператор $A^*=\{a^*_{ij}\}_{k,l=1}^{n,m}$ имеет транспонированную матрицу $a^*_{ij}=a_{ji}$.

Пример 2. Рассмотрим интегральный оператор $A:\boldsymbol{L}_p([0,1])\to\boldsymbol{L}_p([0,1])$ в случае $1\leqslant p<\infty$, определенный по следующей формуле:

$$Af(x)\doteqdot\int_0^1 K(x,y)\,f(y)\,dy \text{ для всех } f\in\boldsymbol{L}_p([0,1]),$$

где функция $K(x,y)$ называется ядром интегрального оператора. Предположим, что $K(x,y)$ является измеримой функцией на квадрате $[0,1]^2$, для которой следующая смешанная норма в пространстве $\boldsymbol{L}_{pq}([0,1]^2)$ является конечной

$$\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}}\doteqdot\|\,\|K(x,y)\|_{\boldsymbol{L}_p}\|_{\boldsymbol{L}_q}=\|\big(\int_0^1|K(x,y)|^p\,dx\big)^{1/p}\|_{\boldsymbol{L}_q}<\infty.$$

Здесь внутренняя норма по первой переменной x берется в $\boldsymbol{L}_p([0,1])$, а внешняя норма по второй переменной y берется в $\boldsymbol{L}_q([0,1])$. При этом мы полагаем, что $q=p/(p-1)$ в случае $1<p<\infty$ и $q=\infty$ в случае $p=1$. Применяя далее обобщенное неравенство Минко́вского и неравенство Гёльдера в случае $1<p<\infty$, получаем следующие неравенства:

$$\|Af\|_{\boldsymbol{L}_p}=\big(\int_0^1|Af(x)|^p\,dx\big)^{1/p}\leqslant\int_0^1\big(\int_0^1|K(x,y)|^p\,dx\big)^{1/p}|f(y)|\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\big(\int_0^1\big(\int_0^1|K(x,y)|^pdx\big)^{q/p}dy\big)^{1/q}\big(\int_0^1|f(y)|^pdy\big)^{1/p}=\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}.$$

Применяя теорему Фуби́ни, получим аналогичное неравенство при $p=1$ и $q=\infty$. Следовательно, интегральный оператор A, действующий из $\boldsymbol{L}_p([0,1])$ в $\boldsymbol{L}_p([0,1])$, является ограниченным и его норма не превосходит $\|A\|\leqslant\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}}$.

Поскольку $Af\in\boldsymbol{L}_p([0,1])$ при всех $f\in\boldsymbol{L}_p([0,1])$, то $K(x,y)f(x)g(y)\in\boldsymbol{L}_1([0,1]^2)$ для всех $g\in\boldsymbol{L}_q([0,1])=\boldsymbol{L}^*_p([0,1])$. Поэтому, меняя порядок интегрирования при помощи теоремы Фуби́ни, получим следующие равенства:

$$\langle g,Af\rangle=\int_0^1 g(x)\big(\int_0^1K(x,y)\,f(y)\,dy\big)\,dx=\int_0^1\big(\int_0^1K(x,y)\,g(x)\,dx\big)\,f(y)\,dy=\langle A^*g,f\rangle.$$

Таким образом, сопряженный оператор A^*, действующий из $\boldsymbol{L}_q([0,1])$ в $\boldsymbol{L}_q([0,1])$, является интегральным оператором и справедлива следующая формула:

$$A^*g(y)=\int_0^1K(x,y)\,g(x)\,dx \text{ для всех } g\in\boldsymbol{L}_q([0,1]),$$

т.е. ядро интегрального оператора A^* будет транспонированным $K^*(x,y)=K(y,x)$. В силу доказанного свойства 1 сопряженный оператор A^* является ограниченным и его норма не превосходит $\|A^*\|\leqslant\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}}$.

7 ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ

Пусть $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \doteqdot \{(x,y) \mid x \in \boldsymbol{E},\ \ y \in \boldsymbol{F}\}$ есть прямое произведение нормированных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Введем в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ операции сложения, умножения и норму:

a) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \doteqdot (x_1+x_2,y_1+y_2)$ при всех $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$;

b) $\lambda(x,y) \doteqdot (\lambda x, \lambda y)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $(x,y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$;

c) $\|(x,y)\| \doteqdot \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$ при всех $(x,y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$.

Тогда $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ превращается в нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$.

Лемма. *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами, то их прямое произведение $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ также будет банаховым пространством.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Пусть $\{(x_n,y_n)\}$ образует последовательность Коши́ в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\| = \sqrt{\|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2} < \varepsilon$ при всех $n,m \geqslant N$. Тогда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются последовательностями Коши́ и в силу полноты $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ существуют пределы $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$. Отсюда $\lim(x_n,y_n) = (x,y)$ сходится в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. □

В приложениях всякий линейный оператор A имеет некоторую естественную область определения. Поэтому предположим далее, что линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{F}$ задан на линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$ банахова пространства $\boldsymbol{E}$ и принимает значения в банаховом пространстве $\boldsymbol{F}$. Это подпространство $\mathrm{dom} A \doteqdot L$ называется *областью определения*, а множество $\mathrm{gr} A \doteqdot \{(x,y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \mid y = Ax \text{ и } x \in \mathrm{dom} A\}$ *графиком* оператора A. График оператора образует линейное подпространством прямого произведения $\mathrm{gr} A \subset \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, но, вообще говоря, незамкнутое.

Определение. Линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{F}$, определенный на подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$, называется *замкнутым*, если его график $\mathrm{gr} A \subset \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ замкнут в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$.

Замкнутость графика $\mathrm{gr} A$ оператора A равносильно следующему условию: если последовательность элементов $(x_n,y_n) \in \mathrm{gr} A$ и $(x_n,y_n) \to (x,y)$ сходится в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, то $(x,y) \in \mathrm{gr} A$, т.е. если $x_n \in L$, $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$, то $x \in L$ и $Ax = y$. Например, легко проверить, что сопряженный оператор $A^* : M \to L^*$ к линейному оператору $A : L \to \boldsymbol{F}$ имеет область определения $M \doteqdot \{f \in \boldsymbol{F}^* \mid A^* f = g \in L^*\}$ и является замкнутым.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{C}([0,1])$ оператор дифференцирования $A : \boldsymbol{C}^{(1)}([0,1]) \to \boldsymbol{C}([0,1])$, определенный на подпространстве $\boldsymbol{C}^{(1)}([0,1]) \subset \boldsymbol{C}([0,1])$ непрерывно дифференцируемых функций по формуле $Af(x) \doteqdot f'(x)$. По теореме из курса математического анализа, если последовательность функций $f_n \in \boldsymbol{C}^{(1)}([0,1])$ сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$ вместе с производными $f_n' \rightrightarrows g$, то $f' = g$. Поэтому график оператора A замкнут. Однако он не является ограниченным, т.к. полагая $f_n(x) = x^n$, получим $\|f_n'\| = n$ и, следовательно, его норма равна $\|A\| = \infty$.

Теорема (критерий замкнутости для ограниченного оператора)**.** *Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(L,\boldsymbol{F})$ является замкнутым тогда и только тогда, когда его область определения $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнута в пространстве $\boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Если $x_n \in L$ и $x_n \to x$ в $\boldsymbol{E}$, то в силу ограниченности оператора образ $y_n = Ax_n$ образует последовательность Коши и, значит, сходится $\lim y_n = y \in \boldsymbol{F}$. Из замкнутости графика следует, что $x \in L$ и $Ax = y$. Обратно, если $x_n \to x$ в $\boldsymbol{E}$ и $Ax_n \to y$, где $x_n \in L$, то из замкнутости L имеем $x \in L$, а в силу по непрерывности оператора $Ax_n \to Ax = y$. Поэтому график $\mathrm{gr} A$ является замкнутым. □

Далее мы докажем обратное утверждение, т.е. замкнутый оператор, заданный на замкнутом подпространстве банахова пространства, является ограниченным. Обозначим через $\boldsymbol{S}_r(x) \doteqdot \{y \in \boldsymbol{E} \mid \|x-y\| \leqslant r\}$ шар радиуса $r>0$ и $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \boldsymbol{S}_r(0)$.

Лемма. *Если линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ задан на банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$, то существует $r>0$, т.ч. $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{M_1}$, где $M_k \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|Ax\| \leqslant k\}$.*

Доказательство. Так как $\boldsymbol{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, то по теореме Бэра одно из множеств M_k не является нигде не плотным, т.е. существуют $r>0$ и $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{S}_r(x) \subset \overline{M_k}$. Поскольку $M_k = -M_k$ симметрично, то $\boldsymbol{S}_r(-x) \subset \overline{M_k}$. Докажем, что $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{M_k}$.

В самом деле, пусть $y \in \boldsymbol{S}_r$, тогда $y \pm x \in \boldsymbol{S}_r(\pm x)$. Поэтому существуют такие последовательности $\{x_n^{\pm}\} \subset M_k$, что $x_n^{\pm} \to y \pm x$. Отсюда следует $x_n \doteqdot (x_n^{+} + x_n^{-})/2 \to y$ и в силу включения $x_n \in M_k$ получаем $y \in \overline{M_k}$. Таким образом, доказано, что $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{M_k}$. Используя однородность множества $M_k = kM_1$, получим $\boldsymbol{S}_{r/k} \subset \overline{M_1}$. □

Теорема (Ба́наха о замкнутом графике)**.** *Пусть линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, заданный в ба́наховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, имеет замкнутый график* $\mathrm{gr} A$. *Тогда оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ограниченным.*

Доказательство. По лемме найдется $r>0$, т.ч. $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{M_1}$. Пусть далее $r_n = r/2^n$ и $c_n = 1/2^n$, тогда получим $\boldsymbol{S}_{r_n} \subset \overline{M_{c_n}}$. Возьмем произвольный элемент $x \in \boldsymbol{S}_r$.

Поскольку $\boldsymbol{S}_r \subset \overline{M_1}$, то существует элемент $x_0 \in M_1$, т.ч. $\|x - x_0\| < r_1$. Поскольку $\boldsymbol{S}_{r_1} \subset \overline{M_{c_1}}$, то существует элемент $x_1 \in M_{c_1}$, т.ч. $\|x - x_0 - x_1\| < r_2$ и т.д. Поэтому по индукции существуют элементы $x_k \in M_{c_k}$, т.ч. $\|x - \sum_{k=0}^{n} x_k\| < r_{n+1} \to 0$. Отсюда ряд $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится в пространстве $\boldsymbol{E}$ к элементу x. Полагая далее $y_n \doteqdot \sum_{k=0}^{n} Ax_k$, получим, что при всех $m>n$ выполняются неравенства

$$\|y_m - y_n\| = \|\textstyle\sum_{k=n+1}^{m} Ax_k\| \leqslant \sum_{n+1}^{m} \|Ax_k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} 1/2^k < 1/2^n,$$

Следовательно, $\{y_n\}$ является последовательностью Коши́ в пространстве $\boldsymbol{F}$. В силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $y = \lim y_n$. Из замкнутости графика $\mathrm{gr} A$ имеем $y = Ax$. Поэтому, применяя свойство непрерывности нормы, получаем

$$\|Ax\| = \lim\nolimits_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \|Ax_k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k = 2.$$

Таким образом, доказано, что $\|Ax\| \leqslant 2$ при всех $x \in \boldsymbol{S}_r$. Отсюда $\|A\| \leqslant 2/r$. □

Определение. *Замыканием линейного оператора* $A : L \to \boldsymbol{F}$, определенного на подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$, называется линейный оператор $\overline{A} : M \to \boldsymbol{F}$, определенный на подпространстве $M \subset \boldsymbol{E}$, график которого равен замыканию $\overline{\mathrm{gr} A}$ графика A.

Линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{F}$ в том и только в том случае имеет замыкание, если из сходимости $x_n \to 0$ и $Ax_n \to y$ следует, что $y = 0$. В самом деле, это условие является необходимым, т.к. в силу линейности $\overline{A}0 = 0$. Обратно, при выполнении этого условия можно определить замкнутый оператор $\overline{A} : M \to \boldsymbol{F}$, полагая $\overline{A}x = y$, если существует последовательность $x_n \in L$, т.ч. $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{C}([0,1])$ — подпространство алгебраических многочленов $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ и задана функция $f \in \boldsymbol{C}([0,1])$, не являющаяся многочленом $f \notin \boldsymbol{P}$. Определим линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{C}([0,1])$ на линейной оболочке $L \doteqdot \mathrm{sp}\{f, \boldsymbol{P}\}$ по формуле $A(\lambda f + p) \doteqdot \lambda f$, где $\lambda \in \mathbb{F}$. В силу теоремы Вейерштраса существует последовательность многочленов $p_n \in \boldsymbol{P}$, т.ч. $p_n \rightrightarrows f$. Тогда, полагая $f_n \doteqdot f - p_n$, получим $f_n \rightrightarrows 0$ и $Af_n = f$. Таким образом, оператор A не имеет замыкания.

Пусть линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{H}$ определен на линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{H}$ ги́льбертова пространства $\boldsymbol{H}$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$.

Определение. Оператор $A^* : M \to \boldsymbol{H}$ будем называть *эрмитово-сопряженным* к оператору $A : L \to \boldsymbol{H}$, если $M \doteqdot \mathrm{dom} A^*$ и $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ при всех $x \in L$ и $y \in M$, где область определения оператора A^* определяется по формуле:

$$\mathrm{dom} A^* \doteqdot \{ y \in \boldsymbol{H} \mid \exists z \in \boldsymbol{H} : \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle, \forall x \in L \}.$$

1. *Существование. Для существования эрмитово-сопряженного оператора к оператору $A : L \to \boldsymbol{H}$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{L} = \boldsymbol{H}$.*

По определению $A^* y = z$, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ при всех $x \in L$. Покажем, что условие $\overline{L} = \boldsymbol{H}$ необходимо и достаточно, для того чтобы оператор A^* был однозначным. Из уравнений $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$ при всех $x \in L$ следует, что $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ при всех $x \in L$. Поэтому $z_1 = z_2$ только в том случае, если $L^\perp = 0$, т.е. $\overline{L} = \boldsymbol{H}$.

2. *Линейность. Эрмитово-сопряженный оператор является линейным.*

Если уравнения $\langle Ax, y_1 \rangle = \langle x, z_1 \rangle$ и $\langle Ax, y_2 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$ выполняются при всех $x \in L$, то уравнение $\langle Ax, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, z_1 + z_2 \rangle$ имеет место при всех $x \in L$. Отсюда следует, что $A^*(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$. Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и уравнение $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ выполняется при всех $x \in L$, то $\langle Ax, \lambda y \rangle = \langle x, \lambda z \rangle$ при всех $x \in L$. Поэтому $A^*(\lambda y) = \lambda z$.

3. *Замкнутость. Эрмитово-сопряженный оператор является замкнутым.*

Определим в прямом произведении $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ оператор $U(x, y) = (-y, x)$ и скалярное произведение $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \doteqdot \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$. Тогда равенство $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ при всех $x \in L$, определяющее оператор A^*, равносильно тому, что $U(x, Ax) \perp (y, A^* y)$ при всех $x \in L$. Следовательно, график $\mathrm{gr} A^* = (U\, \mathrm{gr} A)^\perp$ будет замкнутым.

4. *Ограниченность. Если $A \in \mathscr{L}(L, \boldsymbol{H})$ и $\overline{L} = \boldsymbol{H}$, то эрмитово-сопряженный оператор $A^* \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ является ограниченным и его норма $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство. Определим функционал $f(x) \doteqdot \langle Ax, y\rangle$ при всех $x \in L$. По теореме о продолжении по непрерывности функционал f будет определенным на всем $\boldsymbol{H}$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем $|f(x)| \leqslant \|Ax\|\,\|y\| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$. Отсюда следует, что $f \in \boldsymbol{H}^*$ и $\|f\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Поэтому по теореме Ри́сса существует элемент $z \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $f(x) = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|f\| = \|z\|$.

Следовательно, выполняется равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in L$. Это значит, что $A^*y = z$ и $\|A^*y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Отсюда имеем $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Нетрудно проверить, что эрмитово-сопряженный к оператору $A^* : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ совпадает с замыканием A, т.е. $A^{**} = \overline{A}$. Поэтому $\|A\| = \|\overline{A}\| \leqslant \|A^*\|$ Таким образом, $\|A\| = \|A^*\|$. □

Определение. Линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{H}$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т.е. $\mathrm{dom}A = \mathrm{dom}A^*$ и $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ при всех $x, y \in \mathrm{dom}A$. При этом в силу свойства 1 область определения $\mathrm{dom}A$ должна быть всюду плотной в $\boldsymbol{H}$.

Линейный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ называется *эрми́товым*, если $\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ при всех $x, y \in \boldsymbol{H}$. В этом случае выполняется равенство $A = A^*$ на всем $\boldsymbol{H}$.

Теорема (Хе́ллингера–Тёплица)**.** *Всякий эрми́товый оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ является ограниченным, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$.*

Доказательство. Так как имеет место равенство $A = A^*$, то оператор A замкнут по свойству 3). Поэтому по теореме о замкнутом графике $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$. □

Пример 3. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$ диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$, где $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$. Оператор $A : L \to \boldsymbol{\ell}_2$ с областью определения $L \doteqdot \{x \in \boldsymbol{\ell}_2 \mid Ax \in \boldsymbol{\ell}_2\}$ обладает следующими свойствами:

1) оператор A ограниченный тогда и только тогда, когда $\sup|\lambda_n| < \infty$;
2) оператор A самосопряженный тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
3) оператор A эрми́товый тогда и только тогда, когда $\sup|\lambda_n| < \infty$ и $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
4) оператор A замкнутый для любой последовательности чисел $\lambda_n \in \mathbb{F}$.

Заметим, что область определения L оператора A будет всюду плотной $\overline{L} = \boldsymbol{\ell}_2$, т.к. множество всех финитных последовательностей содержится в L. Свойство 1) следует из равенства $\|A\| = \sup|\lambda_n|$; 2) очевидно; 3) вытекает из 1) и того факта, что эрмитовый оператор определен на всем $\boldsymbol{\ell}_2$. Осталось доказать 4).

Введем множества индексов $I_1 \doteqdot \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| \leqslant 1\}$ и $I_2 \doteqdot \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| > 1\}$. Тогда A будет прямой суммой двух диагональных операторов $A = A_1 \oplus A_2$, при этом для оператора A_1 имеем $\sup|\lambda_n^{(1)}| \leqslant 1$, а для оператора A_2 имеем $\inf|\lambda_n^{(2)}| \geqslant 1$. Заметим, что оператор A_1 замкнут, так как является ограниченным. Оператор A_2 имеет ограниченный обратный оператор A_2^{-1}. Так как из замкнутости графика оператора A_2^{-1} следует замкнутость графика оператора A_2, то оператор A_2 также является замкнутым. Отсюда следует замкнутость оператора $A = A_1 \oplus A_2$.

8 ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ

Теорема (Ба́наха об обратном операторе)**.** *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ограниченным и биективным отображением в ба́наховых пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то его обратный оператор $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ является ограниченным.*

Доказательство. Поскольку $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ — ограниченный оператор, определенный в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$, то его график $\mathrm{gr}(A)$ является замкнутым, т.е. если $x_n \to x$ и $y_n = Ax_n \to y$, где $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $y_n \in \boldsymbol{F}$, то $Ax = y$. В силу биективности оператора получаем, что если $y_n \to y$ и $x_n = A^{-1}y_n \to x$, где $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $y_n \in \boldsymbol{F}$, то $A^{-1}y = x$. Таким образом, график $\mathrm{gr}A^{-1}$ обратного оператора A^{-1} замкнут и, следовательно, по теореме о замкнутом графике оператор $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ ограничен. □

Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ — замкнутое подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$ задает факторпространство по подпространству L. Всякий элемент $\widehat{\boldsymbol{E}}$ записывается в виде $\widehat{x} \doteqdot x + L$, где $x \in \boldsymbol{E}$. При этом факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}}$ является линейным нормированным пространством относительно следующих операций:

a) сложение элементов $\widehat{x} + \widehat{y} \doteqdot \widehat{x+y}$, где $x, y \in \boldsymbol{E}$;

b) умножение на число $\lambda\widehat{x} \doteqdot \widehat{\lambda x}$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$;

c) норма элемента $\|\widehat{x}\| \doteqdot \inf_{y \in L} \|x + y\|$, где $x \in \boldsymbol{E}$.

Проверим свойства нормы. По определению имеем следующие соотношения:

$$\|\lambda\widehat{x}\| = \|\widehat{\lambda x}\| = \inf_{y \in L} \|\lambda x + y\| = |\lambda| \inf_{y \in L} \|x + y\| = |\lambda| \|\widehat{x}\|;$$

$$\|\widehat{x+y}\| = \inf_{z \in L} \|x + y + z\| \leqslant \inf_{u \in L} \|x + u\| + \inf_{v \in L} \|y + v\| = \|\widehat{x}\| + \|\widehat{y}\|.$$

Пусть $\|\widehat{x}\| = \inf_{y \in L} \|x + y\| = 0$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $x + y_n \to 0$. Поэтому, т.к. подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ замкнуто, то $x = -\lim y_n \in L$ и значит $\widehat{x} = \widehat{0}$.

Лемма. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ — замкнутое подпространство ба́нахова пространства $\boldsymbol{E}$, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$ является банаховым.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Пусть $\{\widehat{x_n}\}$ является последовательностью Коши́. Выберем последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$, т.ч. $\|\widehat{x_n} - \widehat{x_m}\| < 1/2^k$ при всех $n, m \geqslant n_k$. Тогда существуют элементы $z_k \doteqdot x_{n_k} + y_{n_k} \in \widehat{x_{n_k}}$, т.ч. $\|z_{k+1} - z_k\| < 1/2^k$. Отсюда ряд $z = z_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(z_{k+1} - z_k) = \lim z_k$ сходится по норме пространства $\boldsymbol{E}$. Следовательно, при всех $n \geqslant n_k$ мы получим

$$\|\widehat{z} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|\widehat{z} - \widehat{x_{n_k}}\| + \|\widehat{x_{n_k}} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|z - z_k\| + 1/2^k \leqslant \textstyle\sum_{j=k}^{\infty} 1/2^j + 1/2^k < 3/2^k.$$

Таким образом, существует предел $\lim \widehat{x_n} = \widehat{z} \in \widehat{\boldsymbol{E}}$. □

Напомним, что $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *открытым отображением* нормированных пространств $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$, если образ $A(U) \subset \boldsymbol{F}$ любого открытого множества $U \subset \boldsymbol{E}$ в пространстве $\boldsymbol{E}$ является открытым множеством в пространстве $\boldsymbol{F}$.

Пусть $\pi : \boldsymbol{E} \to \widehat{\boldsymbol{E}}$ — факторотображение, определенное по формуле $\pi(x) \doteqdot \widehat{x}$. Непрерывность π вытекает из неравенства $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$. Из этого неравенства и определения нормы в факторпространстве $\widehat{\boldsymbol{E}}$ следует, что образ $\pi(\boldsymbol{U}_r)$ открытого шара $\boldsymbol{U}_r \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| < r\}$ является открытым шаром $\widehat{\boldsymbol{U}}_r \doteqdot \{\widehat{x} \in \widehat{\boldsymbol{E}} \mid \|\widehat{x}\| < r\}$ того же радиуса $r > 0$. Поэтому образ всякого открытого множества будет открытым и, следовательно, факторотображение π является открытым отображением.

Определение. Оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *гомоморфизмом* нормированных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, если он является непрерывным и открытым отображением.

Теорема (о гомоморфизме). *Если ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ задает сюръективное отображение банаховых пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то он является гомоморфизмом.*

Доказательство. Так как ядро $L \doteqdot \ker A$ является замкнутым подпространством $\boldsymbol{E}$, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$ будет банаховым пространством. Определим оператор $\widehat{A} : \widehat{\boldsymbol{E}} \to \boldsymbol{F}$, полагая $\widehat{A}(\widehat{x}) = Ax$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Заметим, что оператор $\widehat{A}$ определен корректно, т.к. если $\widehat{x} = \widehat{y}$, то $x - y \in L$ и значит $Ax = Ay$.

Легко видеть, что оператор $\widehat{A} : \widehat{\boldsymbol{E}} \to \boldsymbol{F}$ является линейным, его ядро равно нулю $\ker\widehat{A} = \{\widehat{x} \in \widehat{\boldsymbol{E}} \mid Ax = 0\} = \widehat{0}$, а его образ равен $\operatorname{Im}\widehat{A} = \operatorname{Im}A = \boldsymbol{F}$. Отсюда оператор $\widehat{A}$ задает биективное отображение. Докажем, что норма $\|\widehat{A}\| = \|A\|$. В самом деле,

$$\|\widehat{A}(\widehat{x})\| = \|Ax\| = \inf_{y\in L}\|A(x+y)\| \leqslant \|A\| \inf_{y\in L}\|x+y\| = \|A\|\,\|\widehat{x}\|.$$

Следовательно, выполняется неравенство $\|\widehat{A}\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, в силу неравенства $\|Ax\| = \|\widehat{A}(\widehat{x})\| \leqslant \|\widehat{A}\|\,\|\widehat{x}\| \leqslant \|\widehat{A}\|\,\|x\|$ справедливо равенство $\|\widehat{A}\| = \|A\|$. Таким образом, по теореме Банаха об обратном операторе $\widehat{A}$ будет гомоморфизмом. Поскольку оператор $A = \widehat{A} \cdot \pi$ является произведением двух гомоморфизмов, то он также будет гомоморфизмом пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. □

Теорема (о тройке). *Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ — банаховы пространства, оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является сюръективным и оператор $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$ удовлетворяет условию $\ker A \subset \ker B$. Тогда существует оператор $C \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$, т.ч. $B = CA$.*

Доказательство. Определим оператор $C : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ по формуле $Cy = Bx$ при всех $y = Ax$ и $x \in \boldsymbol{E}$. Если $y = Ax_1 = Ax_2$, то $x_1 - x_2 \in \ker A \subset \ker B$. Отсюда следует, что $Bx_1 = Bx_2$. Значит оператор C определен корректно. Докажем его линейность.

Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y = Ax$, то $C(\lambda y) = C(A(\lambda x)) = B(\lambda x) = \lambda B(x) = \lambda C(y)$. Если $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$, то $C(y_1+y_2) = C(A(x_1+x_2)) = B(x_1+x_2) = B(x_1)+B(x_2) = C(y_1)+C(y_2)$. Поэтому оператор C является линейным отображением.

Пусть $L = \ker A$, тогда оператор $\widehat{A} \in \mathscr{L}(\widehat{\boldsymbol{E}},\boldsymbol{F})$ биективен и при всех $y = Ax$ имеем

$$\|Cy\| = \|Bx\| = \inf_{z\in L}\|B(x+z)\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{x}\| = \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}y\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}\|\,\|y\|.$$

Таким образом, выполняется неравенство $\|C\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}\|$ и, следовательно, этот оператор $C \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ является ограниченным. □

Напомним, что для $V \subset \boldsymbol{E}$ и $W \subset \boldsymbol{E}^*$ определяются следующие множества:

$$V^{\perp} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}^* \mid f(x)=0, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x)=0, f \in W\},$$

которые называются соответственно *аннулятором** V и *аннулятором* W. Они образуют замкнутые подпространства в пространствах $\boldsymbol{E}^*$ и $\boldsymbol{E}$ соответственно.

Лемма (о бианнуляторе)**.** *Если подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым, то его бианнулятор удовлетворяет равенству $(L^{\perp})_{\perp} = L$.*

Доказательство. Включение $L \subset (L^{\perp})_{\perp}$ очевидно. Пусть элемент $x \in (L^{\perp})_{\perp}$. Если $x \notin L$, то $\|\widehat{x}\| \neq 0$. Определим функционал на линейной оболочке $M \doteqdot \mathrm{sp}\{x, L\}$ по формуле $f(\lambda x + y) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y \in L$. Он имеет конечную норму, т.к.

$$\|f\| = \sup_{z\in M} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{y\in L} \frac{|\lambda|}{\|\lambda x + y\|} = \sup_{y\in L} \frac{1}{\|x+y\|} = \frac{1}{\|\widehat{x}\|} < \infty.$$

По теореме Ха́на–Ба́наха найдется функционал $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|$. Тогда имеем $g \in L^{\perp}$ и $g(x) = 1$, т.е. элемент $x \notin (L^{\perp})_{\perp}$. Получили противоречие. □

Теорема. *Если ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, заданный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, имеет замкнутый образ $\mathrm{Im} A \subset \boldsymbol{F}$, то*

$$\mathrm{Im} A = (\ker A^*)_{\perp}, \quad \mathrm{Im} A^* = (\ker A)^{\perp}.$$

Доказательство. В силу доказанного ранее мы имеем равенство $\ker A^* = (\mathrm{Im} A)^{\perp}$. Следовательно, применяя лемму, получим $(\ker A^*)_{\perp} = ((\mathrm{Im} A)^{\perp})_{\perp} = \mathrm{Im} A$.

Докажем второе равенство. Ранее было уже доказано включение $\mathrm{Im} A^* \subset (\ker A)^{\perp}$. Если функционал $f \in (\ker A)^{\perp}$, то $\ker A \subset \ker f$. Применяя теорему о тройке, а затем теорему Ха́на–Ба́наха, мы получим $g \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $f(x) = g(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому функционал $f = A^* g \in \mathrm{Im} A^*$ и, следовательно, $\mathrm{Im} A^* = (\ker A)^{\perp}$. □

Определение. Линейный оператор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ называется *проектором* на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, если выполняются равенства $P^2 = P$ и $\mathrm{Im} P = L$.

Рассмотрим свойства проектора $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$.

1. *Ограничение проектора $P|_L = I_L$ есть тождественный оператор в L.*

Действительно, если $y = Px$, то $Py = P^2 x = Px = y$ при всех $y \in L$.

2. *Справедливы равенства $\ker(I - P) = \mathrm{Im} P$ и $\mathrm{Im}(I - P) = \ker P$.*

Если $x \in \ker(I - P)$, т.е. $x - Px = 0$, то $x \in \mathrm{Im} P$. Если $y = Px \in \mathrm{Im} P$, то $(I - P)y = (P - P^2)x = 0$, т.е. $y \in \ker(I - P)$. Аналогично, получаем второе равенство.

3. *Пространство $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ является прямой суммой $L = \mathrm{Im} P$ и $M = \ker P$.*

Поскольку $I = P + (I - P)$, то $\boldsymbol{E} = L + M$. Кроме того, если $y \in L \cap M$, то мы имеем равенство $y = Px = x - Px$, т.е. $x = 2Px$. Тогда, применяя P, получим $y = Px = 0$.

Определение. Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ называется *дополняемым*, если оно является замкнутым и существует замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Теорема. *Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда будет дополняемым, когда существует ограниченный проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L.*

Доказательство. Необходимость. Если $\boldsymbol{E} = L \oplus M$, где L и M задают замкнутые подпространства, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют единственные элементы $y \in L$ и $z \in M$, т.ч. $x = y + z$. Полагая $Px \doteqdot y$, заметим, что оператор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ имеет замкнутый график. В самом деле, если последовательности $x_n \to x$ и $Px_n = y_n \to y$ сходятся, то $x_n - y_n = z_n \to z = x - y$. В силу замкнутости L и M имеем $y \in L$ и $z \in M$. Поэтому из единственности разложения $x = y + z$ получим $Px = y$. Следовательно, по теореме о замкнутом графике оператор P является ограниченным.

Достаточность. Поскольку проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L является непрерывным, то $L = \operatorname{Im} P = \ker(I - P)$ и $M = \ker P = \operatorname{Im}(I - P)$ являются замкнутыми подпространствами, пересечение которых $L \cap M = 0$. Так как $I = P + (I - P)$, то отсюда следует разложение в прямую сумму $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. □

Лемма. *Если замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность $n \doteqdot \dim L < \infty$ или конечную коразмерность $m \doteqdot \operatorname{codim} L \dim \widehat{\boldsymbol{E}} < \infty$, то оно является дополняемым.*

Доказательство. Введем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ подпространства L. Обозначим через $M \doteqdot \bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k$, где $\{f_1, \ldots, f_n\}$ образует биортогональную систему к $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ положим $y \doteqdot \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$ и $z \doteqdot x - y$. Тогда имеем $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Рассмотрим базис $\{\widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_m\}$ факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$. Обозначим через $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_1, \ldots, e_m\}$ линейную оболочку векторов $e_1, \ldots, e_m$. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$, т.ч. $\widehat{x} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \widehat{e}_k$. Если $z \doteqdot \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k$ и $y \doteqdot x - z$, то $x = y + z$, при этом $y \in L$ и $z \in M$, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. □

Пример. Применяя по координатно теорему Ха́на–Ба́наха, можно показать, что всякое замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ банахова пространства $\boldsymbol{E}$, изометрически $L \simeq \boldsymbol{\ell}_\infty$ изоморфное пространству всех ограниченных последовательностей $x = \{x_n\}$ с нормой $\|x\| \doteqdot \sup |x_n|$, является дополняемым.

С другой стороны, как впервые показал Р. Фи́ллипс, подпространство $\boldsymbol{c}_0 \subset \boldsymbol{\ell}_\infty$ всех последовательностей $x = \{x_n\}$, сходящихся к нулю $\lim x_n = 0$, недополняемо в пространстве $\boldsymbol{\ell}_\infty$. Можно также доказать, что подпространство $\boldsymbol{C}([0,1]) \subset \boldsymbol{L}_\infty([0,1])$ непрерывных функций недополняемо в пространстве ограниченных измеримых функций, а подпространство $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}) \subset \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$, состоящее из голоморфных функций внутри круга $\mathring{\boldsymbol{S}} \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, недополняемо в пространстве всех непрерывных функций $f : \boldsymbol{S} \to \mathbb{C}$ в замкнутом круге $\boldsymbol{S} \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

9 СПЕКТР ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$ обозначается ба́нахово пространство всех ограниченных операторов $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$, действующих в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{C}$.

Определение. Число $\lambda\in\mathbb{C}$ называется *регулярным значением* для оператора $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ имеет ограниченный обратный $A_\lambda^{-1}\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, где I — тождественный оператор в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Множество всех регулярных значений обозначается через $\rho(A)$. Его дополнение $\sigma(A)\doteqdot\mathbb{C}\setminus\rho(A)$ называется *спектром* оператора A. Обратный оператор $R_\lambda\doteqdot A_\lambda^{-1}$, определенный при всех $\lambda\in\rho(A)$, называется *резольвентой* оператора A.

Для того чтобы линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы A был биективным, т.е. $\ker A = 0$ и $\mathrm{Im} A = \boldsymbol{E}$. Условие $\ker A = 0$ равносильно существованию левого обратного $B:\mathrm{Im}A\to\boldsymbol{E}$, т.е. $BA = I$, а условие $\mathrm{Im}A=\boldsymbol{E}$ равносильно существованию правого обратного $C:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$, т.е. $AC=I$.

Лемма 1. *Оператор $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ тогда и только тогда имеет ограниченный левый обратный $B\in\mathscr{L}(\mathrm{Im}A,\boldsymbol{E})$, когда он ограничен снизу, т.е.* $\inf_{\|x\|=1}\|Ax\|>0$.

Доказательство. Если оператор $B\in\mathscr{L}(\mathrm{Im}A,\boldsymbol{E})$ является левым обратным $BA=I$, то $\|x\|=\|BAx\|\leqslant\|B\|\|Ax\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, т.е. $\inf_{\|x\|=1}\|Ax\|\geqslant\|B\|^{-1}>0$. Обратно, по условию $\|Ax\|\geqslant c\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, где $c>0$. Если $y_n=Ax_n\to y$ сходится, то $\|x_n-x_m\|\leqslant\|y_n-y_m\|/c\to 0$. Отсюда $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и существует предел $\lim x_n = x$. В силу непрерывности оператора $Ax=y\in\mathrm{Im}A$. Таким образом, оператор имеет замкнутый образ $\mathrm{Im}A$ и его ядро $\ker A=0$. По теореме Ба́наха об обратном операторе $B\in\mathscr{L}(\mathrm{Im}A,\boldsymbol{E})$. □

Лемма 2. *Если $\|A\|<1$, то оператор $B\doteqdot I-A$ обратим и $B^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$.*

Доказательство. Пусть $C_n\doteqdot\sum_{k=0}^{n}A^k$ и $\|A\|=r<1$. Так как $\|A^k\|\leqslant\|A\|^k$, то по неравенству треугольника имеем $\|C_m-C_n\|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\|A\|^k<r^{n+1}/(1-r)$. Поэтому $\{C_n\}$ является последовательностью Коши́ в ба́наховом пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Тогда существует предел $\lim C_n\doteqdot C\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Отсюда получим

$$BC=\lim BC_n=\lim\textstyle\sum_{k=0}^{n}(A^k-A^{k+1})=\lim(I-A^{n+1})=I,$$

т.к. $\lim A^{n+1}=0$. Аналогично имеем $CB=I$. Таким образом, оператор $C=B^{-1}$. □

Определение. Функция $f:\Omega\to\boldsymbol{E}$, определенная в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *голоморфной* в Ω, если для каждого $z_0\in\Omega$ существуют $r>0$ и такие элементы $c_n\in\boldsymbol{E}$, что $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n c_n$ при всех $z\in\boldsymbol{U}_r(z_0)$, где $\boldsymbol{U}_r(z_0)\doteqdot\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<r\}$ обозначает открытый круг в Ω.

Заметим, что сходимость степенного ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n c_n$ определяется здесь по норме пространства $\boldsymbol{E}$ и его радиус сходимости вычисляется по формуле Коши́–Адама́ра $1/r=\overline{\lim}\sqrt[n]{\|c_n\|}$. Если функция голоморфна в Ω, то этот радиус равен $r=\inf_{z\in\partial\Omega}|z_0-z|$ расстоянию от точки $z_0\in\Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Теорема (о резольвенте). *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то множество регулярных значений $\rho(A)$ открыто, функция R_λ голоморфна в каждой связной компоненте $\rho(A)$ и норма $\|R_\lambda\| \geqslant 1/d_\lambda$, где $d_\lambda \doteqdot \inf_{z\in\sigma(A)} |\lambda - z|$ обозначает расстояние от точки $\lambda \in \rho(A)$ до спектра $\sigma(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(A)$ и точка $z \in \mathbb{C}$, т.ч. $|z-\lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$. Поскольку $A_z = A_\lambda - (\lambda - z)I = A_\lambda(I - (\lambda - z)R_\lambda)$, то по лемме 2 получим

$$R_z = (I - (\lambda - z)R_\lambda)^{-1}R_\lambda = \textstyle\sum_{n=0}^\infty (\lambda - z)^n R_\lambda^{n+1}.$$

Так как $|\lambda - z|\,\|R_\lambda\| < 1$, то ряд сходится по норме и, следовательно, $R_z \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$. Поэтому множество регулярных значений $\rho(A)$ является открытым и функция R_λ является голоморфной в $\rho(A)$. Кроме того, если $\lambda \in \rho(A)$, то в силу доказанного выполняется неравенство $|\lambda - z| \geqslant \|R_\lambda\|^{-1}$ при всех $z \in \sigma(A)$. □

Теорема (о спектре). *Спектр ограниченного оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является непустым, замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Если $|\lambda| > \|A\|$, то $R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty A^n/\lambda^{n+1}$. Поэтому $R_\lambda \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $\|R_\lambda\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Следовательно, спектр находится в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \|A\|\}$ радиуса $\|A\|$. Кроме того, для каждого функционала $f \in \mathscr{L}^*(\boldsymbol{E})$ функция $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda)$ голоморфна в $\rho(A)$ и $|F(\lambda)| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если $\rho(A) = \mathbb{C}$, то по теореме Лиуви́лля $F(\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда, применяя теорему Ха́на–Ба́наха, получим $R_\lambda = 0$, что невозможно. Поэтому $\sigma(A) \neq \emptyset$. □

Спектр сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

1. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то спектр сопряженного оператора равен $\sigma(A^*) = \sigma(A)$.*

Так как $A_\lambda = \lambda I - A$, то $A_\lambda^* = \lambda I - A^*$. Поскольку для ограниченного обратимого оператора выполняется равенство $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, то $(R_\lambda)^* = (A_\lambda^{-1})^* = (A_\lambda^*)^{-1} = R_\lambda^*$. Следовательно, множества регулярных значений $\rho(A^*) = \rho(A)$ совпадают.

2. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H})$, то спектр эрмитово-сопряженного равен $\sigma(A^*) = \overline{\sigma}(A)$.*

По определению эрмитово-сопряженного оператора имеют место равенства

$$\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle \lambda x - Ax, y\rangle = \langle x, \bar{\lambda} y - A^* y\rangle = \langle x, (A^*)_{\bar\lambda}\, y\rangle, \text{ т.е. } (A_\lambda)^* = (A^*)_{\bar\lambda}.$$

Отсюда $(R_\lambda)^* = (A_\lambda^{-1})^* = (A_{\bar\lambda}^*)^{-1}$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\rho(A^*) = \overline{\rho}(A)$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* оператора A, если существует элемент $e \in \boldsymbol{E} \setminus 0$, т.ч. $Ae = \lambda e$. Следующие множества:

$\sigma_p(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$, состоящее из собственных значений;

$\sigma_c(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \boldsymbol{E}, \operatorname{Im} A_\lambda \neq \boldsymbol{E}\}$;

$\sigma_r(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}$;

называются соответственно *точечным*, *непрерывным* и *остаточным* спектром A.

3. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то имеет место равенство* $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$.

Это равенство вытекает прямо из определений. Заметим, число $\lambda \in \sigma_p(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *неоднозначно разрешимо*, т.е. однородное уравнение $A_\lambda x = 0$ имеет ненулевое решение. Число $\lambda \in \sigma_c(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *плотно разрешимо*, т.е. имеет единственное решение для всюду плотного множества элементов $y \in \mathrm{Im} A_\lambda$. Число $\lambda \in \sigma_r(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *неплотно разрешимо*, т.е. имеет единственное решение для не всюду плотного множества элементов $y \in \mathrm{Im} A_\lambda$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *полурегулярным значением* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор A_λ имеет ограниченный левый обратный $B_\lambda \in \mathscr{L}(\mathrm{Im} A_\lambda, \boldsymbol{E})$.

Множество полурегулярных значений обозначается через $\rho_l(A)$. Дополнительное множество $\sigma_l(A) = \mathbb{C} \setminus \rho_l(A)$ называется *предельным спектром* оператора A.

В силу леммы 1 *предельный спектр* оператора A совпадает с множеством:

$$\sigma_l(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}.$$

Следующее множество называется *дефектным спектром* оператора A:

$$\sigma_d(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \mathrm{Im} A_\lambda = \overline{\mathrm{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}.$$

4. *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то имеет место равенство* $\sigma(A) = \sigma_l(A) \sqcup \sigma_d(A)$.

Если $\lambda \in \sigma_l(A)$, то оператор A_λ не имеет ограниченного обратного оператора и значит $\sigma_l(A) \subset \sigma(A)$. Если $\lambda \notin \sigma_l(A)$, то $\lambda \in \rho_l(A)$ и, как показано в лемме 1, образ $\mathrm{Im} A_\lambda$ является замкнутым, т.е. $\overline{\mathrm{Im} A_\lambda} = \mathrm{Im} A_\lambda$. Отсюда $\sigma(A) \setminus \sigma_l(A) = \sigma_d(A)$.

Заметим, что число $\lambda \in \rho_l(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ будет *корректно разрешимым*, т.е. существует непрерывный обратный оператор $A_\lambda^{-1} : \mathrm{Im} A_\lambda \to \boldsymbol{E}$, определенный на подпространстве $\mathrm{Im} A_\lambda$. Число $\lambda \in \sigma_l(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ не является *корректно разрешимым*.

Теорема (о границе спектра). *Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, то $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \partial\sigma(A)$. Найдется последовательность $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, т.ч. $\lambda_n \to \lambda$. По определению величины расстояния $d_{\lambda_n} \doteqdot \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda_n - z| \leqslant |\lambda_n - \lambda| \to 0$. Так как произведение $A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = I$ является тождественным оператором, где R_{λ_n} есть резольвента A_{λ_n}, то для операторов $B_n \doteqdot R_{\lambda_n}/\|R_{\lambda_n}\|$ выполняется соотношение

$$A_\lambda B_n = (\lambda - \lambda_n) B_n + A_{\lambda_n} B_n = (\lambda - \lambda_n) B_n + I/\|R_{\lambda_n}\|.$$

Поскольку $\|B_n\| = 1$, то существует последовательность $\{y_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|B_n y_n\| > 1/2$. Положим $x_n \doteqdot B_n y_n / \|B_n y_n\|$. Применяя указанное выше соотношение для оператора $A_\lambda B_n$, получим при всех $n \in \mathbb{N}$ следующее равенство:

$$A_\lambda x_n = (A_\lambda B_n y_n)/\|B_n y_n\| = (\lambda - \lambda_n) x_n + y_n / \|R_{\lambda_n}\| \, \|B_n y_n\|.$$

Так как по построению $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и по теореме о резольвенте $\|R_{\lambda_n}\| \geqslant 1/d_{\lambda_n}$, то $\|A_\lambda x_n\| \leqslant |\lambda - \lambda_n| + 2d_\lambda \leqslant 3|\lambda - \lambda_n| \to 0$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_l(A)$. $\square$

Теорема (о спектральном радиусе). *Если* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, *то* $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, *где* $r(A) \doteqdot \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ *спектральный радиус оператора* A.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Поскольку $\lambda^n - z^n = (\lambda - z)P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$, то $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)P_{n-1}(A) = P_{n-1}(A)(\lambda I - A)$. Если оператор $\lambda^n I - A^n$ является обратимым, то, умножая указанное равенство справа и слева на его обратный, мы получим, что оператор $\lambda I - A$ обратим. Поскольку это противоречит нашему предположению, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ про всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $|\lambda|^n \leqslant \|A^n\|$ и, следовательно, имеет место неравенство $r(A) \leqslant \varliminf \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

С другой стороны, ранее было получено разложение $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$ при всех $|\lambda| > \|A\|$. Если функционал $f \in \mathscr{L}^*(\boldsymbol{E})$, то $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda)$ является голоморфной функцией в каждой связной компоненте $\rho(A)$ в силу теореме о резольвенте. Тогда ряд $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(A^n)/\lambda^{n+1}$ сходится при всех $|\lambda| > r(A)$ и значит существует $c_f > 0$, т.ч. $|f(A^n)/\lambda^n| \leqslant c_f$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Так как из слабой ограниченности последовательности вытекает сильная ограниченность, то существует $c > 0$, т.ч. $\|A^n/\lambda^n\| \leqslant c$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда имеем $\varlimsup \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant |\lambda|$ при всех $|\lambda| > r(A)$, т.е. выполняется неравенство $\varlimsup \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A)$. Таким образом, верхний и нижний пределы совпадают со спектральным радиусом $r(A)$ оператора A. □

Пример. Пусть $A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$ — *диагональный оператор*, определенный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$ при всех $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма $\|A\| = \sup|\lambda_n|$.

Пусть элемент $e_n \in \boldsymbol{\ell}_p$ имеет координаты, равные 0, кроме n-й, равной 1. Тогда имеем $Ae_n = \lambda_n e_n$, т.е. числа $\lambda_n \in \sigma_p(A)$ являются собственными значениями. Если $\lambda \neq \lambda_n$, то оператор $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$, $n = 1,2,\ldots$, в том и только в том случае будет иметь ограниченный обратный $(R_\lambda y)_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, $n = 1,2,\ldots$, когда норма $\|R_\lambda\| = \sup|\lambda - \lambda_n|^{-1} < \infty$ конечна. Следовательно, спектр диагонального оператора совпадает с замыканием $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$ множества диагональных элементов $\{\lambda_n\}$.

Пусть $\lambda \in \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$, т.е. существует такая подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$, что $\lim \lambda_{n_k} = \lambda$. Поэтому имеем $\|A_\lambda e_{n_k}\| = |\lambda - \lambda_{n_k}| \to 0$, т.е. число λ принадлежит предельному спектру $\lambda \in \sigma_l(A)$. Если $1 \leqslant p < \infty$, то образ $\operatorname{Im} A_\lambda$ содержит множество всех финитных последовательностей и, следовательно, будет всюду плотным в $\boldsymbol{\ell}_p$, т.е. $\lambda \in \sigma_c(A)$. Если $p = \infty$, то предел $\lim y_{n_k} = 0$ для всех $y = \{y_n\} \in \operatorname{Im} A_\lambda$. Применяя теорему Ха́на–Ба́наха, построим продолжение функционала $f(y) = \lim y_{n_k}$, заданного на подпространстве $\boldsymbol{c} \subset \boldsymbol{\ell}_\infty$ сходящихся последовательностей, на все пространство $\boldsymbol{\ell}_\infty$ с сохранением его нормы. Тогда получим, что $\operatorname{Im} A_\lambda \subset \ker f$, т.е. $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Структура спектра диагонального оператора						
Спектр оператора A	$\sigma(A)$	$\sigma_p(A)$	$\sigma_c(A)$	$\sigma_r(A)$	$\sigma_l(A)$	$\sigma_d(A)$
$A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$, $1 \leqslant p < \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$
$A : \boldsymbol{\ell}_\infty \to \boldsymbol{\ell}_\infty$, $p = \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$

10 КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами над полем $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

Определение. Операторы $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ и $B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{F})$ называются *эквивалентными* $A\sim B$, если существует обратимый оператор $T\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, т.ч. $BT=TA$.

Если, кроме того, оператор T является изометричным отображением $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{F}$, то эти операторы называются *изометрически эквивалентными* $A\approx B$.

1. *Если $A\sim B$, то $\sigma(A)=\sigma(B)$ и $\sigma_*(A)=\sigma_*(B)$, где $*=p,c,r,l,d$.*

Поскольку $A_\lambda=\lambda I-A$, то $B_\lambda=\lambda I-B$, то $B_\lambda T=TA_\lambda$. Поэтому операторы $A_\lambda\sim B_\lambda$ эквивалентны. Следовательно, A_λ обратим тогда и только тогда, когда B_λ обратим. При этом $\ker B_\lambda=T(\ker A_\lambda)$, $\operatorname{Im}B_\lambda=T(\operatorname{Im}A_\lambda)$ и $R_\lambda(B)T=TR_\lambda(A)$ при всех $\lambda\in\rho(A)$. Отсюда легко вытекают указанные равенства спектров.

2. *Если $A\approx B$, то $\|A\|=\|B\|$.*

Поскольку в силу изометричности $B=TAT^{-1}$ и $\|T\|=\|T^{-1}\|=1$, то имеют место неравенства $\|B\|\leqslant\|A\|$ и $\|A\|\leqslant\|B\|$. Откуда следует, что $\|A\|=\|B\|$.

Пример 1. Пусть функция $K\in\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Выясним структуру спектра оператора свертки $A:\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})\to\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, определенного следующей формулой:

$$Af(x)=K*f(x)=\textstyle\int_{\mathbb{R}}K(x-y)\,f(y)\,dy,\quad f\in\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}).$$

В силу обобщенного неравенства Минко́вского $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_2}\leqslant\|K\|_{\boldsymbol{L}_1}\|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Значит образ $\operatorname{Im}A\subset\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Поэтому в качестве оператора T можно взять преобразование Фурье́. Тогда по формуле свертки получим $\widehat{Af}(x)=\sqrt{2\pi}\,\widehat{K}(x)\,\widehat{f}(x)$ при п.в. $x\in\mathbb{R}$.

В силу леммы Ри́мана–Лебе́га функция $\varphi(x)\doteqdot\sqrt{2\pi}\,\widehat{K}(x)$ непрерывна и $\varphi(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$. Поэтому ее можно считать заданной на множестве $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, т.е. $\varphi(\pm\infty)=0$. Пусть $Bg(x)\doteqdot\varphi(x)\,g(x)$ является оператором умножения на функцию в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, Тогда $B_\lambda g(x)=(\lambda-\varphi(x))\,g(x)$ и $R_\lambda g(x)=(\lambda-\varphi(x))^{-1}g(x)$. Резольвента R_λ является ограниченным оператором в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\|R_\lambda\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|\lambda-\varphi(x)|^{-1}<\infty$. Поэтому $\sigma(B)=\varphi(\overline{\mathbb{R}})$. Поскольку операторы $A\approx B$ изометрически эквивалентны, то выполняются следующие свойства:

a) норма оператора $\|A\|=\|B\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$;

b) спектр оператора $\sigma(A)=\sigma(B)=\varphi(\overline{\mathbb{R}})\doteqdot\{\lambda=\varphi(x)\mid x\in\overline{\mathbb{R}}\}$;

c) точечный спектр $\sigma_p(A)=\sigma_p(B)=\{\lambda\in\varphi(\overline{\mathbb{R}})\mid\mu(\varphi^{-1}(\lambda))>0\}$;

d) непрерывный спектр $\sigma_c(A)=\sigma_c(B)=\{\lambda\in\varphi(\overline{\mathbb{R}})\mid\mu(\varphi^{-1}(\lambda))=0\}$;

e) предельный спектр $\sigma_l(A)=\sigma_p(A)\sqcup\sigma_c(A)=\sigma(A)$.

В самом деле, если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda))>0$ положительна, то функция $e(x)\doteqdot\chi_E(x)$, где $E\subset\varphi^{-1}(\lambda)$ — измеримое множество положительной меры $\mu(E)>0$, является собственной функцией оператора B, т.е. $Be(x)=\lambda e(x)$. Поэтому $\lambda\in\sigma_p(B)$.

Докажем, что если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$, то замыкание образа $\overline{\mathrm{Im} B_\lambda} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Пусть $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и $O_\delta \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda| < \delta\}$. Определим функцию $g_\delta(x) \doteqdot 0$, если $\varphi(x) \in O_\delta$; $g_\delta(x) \doteqdot (\lambda - \varphi(x))^{-1} g(x)$, если $\varphi(x) \notin O_\delta$. Так как $|g_\delta(x)| \leqslant |g(x)|/\delta$, то $g_\delta \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебéга

$$\|g - B_\lambda g_\delta\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - B_\lambda g_\delta(x)|^2 dx = \int_{\varphi^{-1}(O_\delta)} |g(x)|^2 dx \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_c(B)$, и, следовательно, $\sigma_l(B) = \sigma_p(B) \sqcup \sigma_c(B) = \sigma(B)$.

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называется *компактным*, если образ $A(M) \subset \boldsymbol{F}$ каждого ограниченного множества $M \subset \boldsymbol{E}$ является предкомпактным в $\boldsymbol{F}$. Обозначим через $\mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ пространство всех компактных операторов, действующих из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$.

1. *Оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный тогда и только тогда, когда образ $A(\boldsymbol{S}) \subset \boldsymbol{F}$ единичного шара $\boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ является предкомпактным.*

В самом деле, по определению множество $M \subset \boldsymbol{E}$ ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant r\}$, где $r > 0$.

2. *Компактный оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ ограниченным.*

Поскольку всякое предкомпактное множество является ограниченным.

3. *Если $A, B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактны, то их сумма $A + B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактна.*

Действительно, пусть $\{x_n\} \subset \boldsymbol{S}$. Тогда существует $\{n_k\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to y \in \boldsymbol{F}$, и существует $\{n_{k_i}\}$, т.ч. $Bx_{n_{k_i}} \to z \in \boldsymbol{F}$. Отсюда $(A + B)x_{n_{k_i}} = Ax_{n_{k_i}} + Bx_{n_{k_i}} \to y + z \in \boldsymbol{F}$. Таким образом, множество $A(\boldsymbol{S}) \subset \boldsymbol{F}$ является предкомпактным.

4. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный, а $B \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ ограниченный, то оператор $BA \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный. Если $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ ограниченный, а $B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ компактный, то оператор $BA \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный.*

Первое следует из того, что ограниченный оператор переводит предкомпактные множества в предкомпактные. Второе вытекают из того, что ограниченный оператор переводит ограниченные множества в ограниченные.

5. *Если оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ ограниченный и размерность $\dim \boldsymbol{E} < \infty$ или $\dim \boldsymbol{F} < \infty$, то оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный.*

Действительно, всякое ограниченное множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в пространстве конечной размерности $\dim \boldsymbol{E} < \infty$ является предкомпактным.

6. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный и $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то оператор A необратим.*

Если A обратим, то по теореме Бáнаха об обратном операторе $A^{-1} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$. Поэтому тождественный оператор $A^{-1}A = \boldsymbol{I}$ является компактным, что невозможно, т.к. единичный шар $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{E}$ не является предкомпактным.

7. *Если $A_n \to A$ сходится по норме и $A_n \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, то $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

По условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется n, т.ч. $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon/2$ при всех $x \in \boldsymbol{S}$. Поскольку $A_n(\boldsymbol{S})$ предкомпактно, то существует $\varepsilon/2$-сеть $\{y_k\}_{k=1}^m$ в $A_n(\boldsymbol{S})$. Отсюда для каждого $x \in \boldsymbol{S}$ найдется индекс k, т.ч. $\|y_k - Ax\| \leqslant \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$. Поэтому $\{y_k\}_{k=1}^m$ является ε-сетью в $A(\boldsymbol{S})$ и значит $A(\boldsymbol{S})$ предкомпактно.

Выясним *свойства спектра компактного оператора*. Обозначим через $\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ пространство компактных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$.

1. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, то выполняется включение $\sigma_l(A) \subset \sigma_p(A) \cap \{0\}$.*

Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$ и $\lambda \neq 0$. Существует последовательность $\{x_n\}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \to 0$. В силу компактности оператора A найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to e \in \boldsymbol{E}$. С другой стороны, т.к. $x_{n_k} = (A_\lambda x_{n_k} + Ax_{n_k})/\lambda$, то $x_{n_k} \to e/\lambda$ и в силу непрерывности оператора $Ax_{n_k} \to Ae/\lambda$. Поэтому $Ae = \lambda e$, т.е. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

2. *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$, то для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Lambda_\varepsilon \doteqdot \{\lambda \in \sigma_p(A) \mid |\lambda| \geqslant \varepsilon\}$ является конечным или пустым.*

Предположим, что существует последовательность $\{\lambda_k\} \subset \Lambda_\varepsilon$ различных чисел. Тогда найдется последовательность элементов $\{e_k\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $e_k \neq 0$ и $Ae_k = \lambda_k e_k$. Пусть $L_n = \mathrm{sp}\{e_1, \ldots, e_n\}$ линейная оболочка. Поскольку $\{e_n\}$ состоит из линейно независимых элементов, то $L_n \neq L_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В силу леммы Рисса о почти перпендикуляре существуют $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Представим эти элементы в виде $y_n \doteqdot c_n e_n + x_n$, где $c_n \in \mathbb{F}$, $x_n \in L_{n-1}$. Тогда получим $Ay_n = c_n \lambda_n e_n + Ax_n = \lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n)$, где $\lambda_n x_n - Ax_n \in L_{n-1}$. Отсюда при $n > k$

$$\|Ay_n - Ay_k\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_k)\| > |\lambda_n|/2 > \varepsilon/2.$$

Следовательно, последовательность элементов $\{Ay_n\} \subset A(\boldsymbol{S})$ не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.

Теорема (Ри́сса–Ша́удера)**.** *Если $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор в банаховом пространстве бесконечной размерности $\dim \boldsymbol{E} = \infty$, то спектр $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ состоит из собственных значений и нуля, а ненулевые собственные значения $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$ имеют конечную кратность, т.е. $\dim E_\lambda < \infty$, где $E_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$.*

Доказательство. Поскольку компактный оператор необратим, то $0 \in \sigma(A)$. В силу теоремы о границе спектра и свойств спектра компактного оператора выполняются включения $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A) \subset \sigma_p(A) \cup \{0\}$ и вне любого круга $|\lambda| < \varepsilon$ может быть только конечное собственных чисел. Следовательно, точки из множества $\sigma(A) \setminus 0$ являются изолированными и совпадают с собственными значениями оператора A. Таким образом, имеют место равенства $\sigma(A) = \partial\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Поскольку ограничение оператора $A|_{E_\lambda} = \lambda I|_{E_\lambda}$ на собственное подпространство $E_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$, которое соответствует собственному значению $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$, является компактным и обратимым, то свойству 6 размерность $\dim E_\lambda < \infty$. □

Теорема (Ша́удера). *Если ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ определен в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то он тогда и только тогда компактный $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, когда его сопряженный является компактным $A^* \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$.*

Доказательство. Необходимость. По условию замкнутый образ единичного шара $K \doteqdot \overline{A(S)}$ является компактным. Для каждого функционала $f \in \boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{F}^*$ рассмотрим непрерывную функцию $g(y) \doteqdot f(y)$ при всех $y \in \boldsymbol{K}$. Множество всех таких функций $g \in \boldsymbol{C}(K)$ обозначим через $\boldsymbol{M}$. Поскольку имеют место неравенства

$$\sup_{y\in K}|g(y)| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|f(Ax)\| \leqslant \|A\|, \quad |g(y_1)-g(y_2)| = |f(y_1-y_2)| \leqslant \|y_1-y_2\|,$$

то множество $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{C}(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Арцела́–Аско́ли множество $\boldsymbol{M}$ является предкомпактным. Заметим, что $\boldsymbol{M}$ изометрично множеству $A^*(\boldsymbol{S}^*)$, поскольку выполняется равенство

$$\|A^*f\| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|A^*f(x)| = \sup_{x\in \boldsymbol{S}}|f(Ax)| = \sup_{y\in K}|g(y)| = \|g\|_{\boldsymbol{C}}.$$

Поэтому образ единичного шара $A^*(\boldsymbol{S}^*) \subset \boldsymbol{E}^*$ является предкомпактным.

Достаточность. Так как $A^* \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$, то по доказанному $A^{**} \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}^{**},\boldsymbol{F}^{**})$. Пусть $\boldsymbol{J}$ обозначает канонические вложения во второе сопряженное пространство. Тогда, полагая $\boldsymbol{J}(x) = \delta_x$, при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$ получим

$$\langle A^{**}\boldsymbol{J}(x), f\rangle = \langle \delta_x, A^*f\rangle = \langle A^*f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle = \langle JA(x), f\rangle,$$

т.е. $A^{**}\boldsymbol{J} = JA$. Отсюда вытекает включение $JA(\boldsymbol{S})) = A^{**}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})) \subset A^{**}(\boldsymbol{S}^{**})$. Так как $A^{**}(\boldsymbol{S}^{**})$ предкомпактно, то $A(\boldsymbol{S})$ также будет предкомпактным. □

Пример 2. Компактность *интегрального оператора*, определенного по формуле

$$Af(x) \doteqdot \textstyle\int_0^1 K(x,y)\,f(x)\,dy, \text{ где } f \in \boldsymbol{L}_p([0,1]),$$

и действующего из $\boldsymbol{L}_p([0,1])$ в $\boldsymbol{L}_q([0,1])$, где $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$. Разберем два случая.

a) $K \in \boldsymbol{C}([0,1]^2)$. Применяя неравенство Гёльдера, получим $|Af(x)| \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{C}}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $|K(x_1,y)-K(x_2,y)| < \varepsilon$ при $|x_1-x_2| < \delta$. Тогда $|Af(x_1)-Af(x_2)| < \varepsilon\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$ при $|x_1-x_2| < \delta$. Поскольку образ единичного шара $A(\boldsymbol{S})$ является ограниченным и равностепенно непрерывным, то по теореме Арцела́–Аско́ли множество $A(\boldsymbol{S})$ будет предкомпактным в $\boldsymbol{C}([0,1])$ и значит будет предкомпактным в $\boldsymbol{L}_q([0,1])$. Поэтому оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{L}_p,\boldsymbol{L}_q)$ компактный.

b) $K \in \boldsymbol{L}_r([0,1]^2)$, где $r = \max\{q,p'\} < \infty$ и $1/p + 1/p' = 1$. Применяя обобщенное неравенство Минко́вского и неравенство Гёльдера, получим $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_q} \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_{qp'}}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$. Выберем функцию $K_n(x,y) \in \boldsymbol{C}([0,1]^2)$, т.ч. $\|K-K_n\|_{\boldsymbol{L}_r} < 1/n$, и определим оператор $A_nf(x) \doteqdot \int_0^1 K_n(x,y)\,f(x)\,dy$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p([0,1])$. Из доказанного неравенства вытекает $\|Af - A_nf\|_{\boldsymbol{L}_q} \leqslant \|K-K_n\|_{\boldsymbol{L}_{qp'}}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$. Так как $\|K-K_n\|_{\boldsymbol{L}_{qp'}} \leqslant \|K-K_n\|_{\boldsymbol{L}_r} < 1/n$, то отсюда следует неравенство $\|A-A_n\| < 1/n$. Таким образом, последовательность компактных операторов $A_n \in \mathscr{K}(\boldsymbol{L}_p,\boldsymbol{L}_q)$ будет сходиться по норме к оператору A. Поэтому оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{L}_p,\boldsymbol{L}_q)$ компактный. В частности, при $p = p' = q = r = 2$ оператор $A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_2)$ является компактным, если $K \in \boldsymbol{L}_2([0,1]^2)$.

11 ФРЕДГО́ЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ — банаховы пространства. Коразмерностью подпространства $L \subset \boldsymbol{F}$ называется размерность $\operatorname{codim} L \doteqdot \dim \widehat{\boldsymbol{F}}$ факторпространства $\widehat{\boldsymbol{F}} \doteqdot \boldsymbol{F}/L$.

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *фредго́льмовым*, если ядро имеет конечную размерность $\dim(\ker A) = n$, а его образ имеет конечную коразмерность $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = m$. Величина $\operatorname{ind} A \doteqdot n - m$ называется *индексом* A. Множество фредго́льмовых операторов обозначается через $\mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

Лемма. *Если оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ фредго́льмовый, то его образ замкнут.*

Доказательство. Пусть $\{\widehat{y}_k\}_{k=1}^m$ — базис факторпространства $\widehat{\boldsymbol{F}}$. Так как всякий элемент $\widehat{y} \in \widehat{\boldsymbol{F}}$ имеет представление $\widehat{y} = \sum_{k=1}^m c_k \widehat{y}_k$, то $y = \sum_{k=1}^m c_k y_k + z$, где $z \in \operatorname{Im} A$. Следовательно, если $M \doteqdot \operatorname{sp}\{y_1, \ldots, y_m\}$, то $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A \oplus M$. Рассмотрим оператор $B : \boldsymbol{E} \times M \to \boldsymbol{F}$, определенный по формуле $B(x,y) \doteqdot Ax + y$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $y \in M$. Так как оператор B является ограниченным и сюръективным, то по теореме о гомоморфизме образ $B(\boldsymbol{E} \times 0) = \operatorname{Im} A$ будет замкнутым подпространством в $\boldsymbol{F}$. □

Пример 1. Всякий биективный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является фредгольмовым. Компактный оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})$ не является фредгольмовым, если $\dim \boldsymbol{E} = \infty$ или $\dim \boldsymbol{F} = \infty$. В самом деле, иначе по теореме о гомоморфизме образ единичного шара $A(\boldsymbol{S})$ является окрестностью нуля в $\operatorname{Im} A$ и, следовательно, имеет конечную размерность $\dim A(\boldsymbol{S}) < \infty$ в силу его предкомпактности. Отсюда $\dim(\operatorname{Im} A) < \infty$ и, следовательно, $\dim \boldsymbol{F} < \infty$ и $\dim \boldsymbol{E} < \infty$, что невозможно по предположению.

Теорема (о каноническом операторе Фредго́льма). *Если $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ является компактным оператором, то оператор $A \doteqdot I - K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})$ будет фредго́льмовым.*

Доказательство. Так как по теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A$ имеет конечную размерность, то существует замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$. Пусть оператор $B \doteqdot A|_L$. Докажем, что образ $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A$ является замкнутым.

Поскольку ядро $\ker B = 0$, то оператор B ограничен снизу, т.е. существует $c > 0$, т.ч. $\|Bx\| \geqslant c\|x\|$ при всех $x \in L$. В самом деле, иначе также как при доказательстве свойства 1 спектра компактного оператора получим, что $\ker B \neq 0$. Если $y \in \overline{\operatorname{Im} B}$, то существуют $x_k \in L$, т.ч. $Bx_k \to y$. Тогда $\|x_k - x_l\| \leqslant \|Bx_k - Bx_l\|/c \to 0$ при $k,l \to \infty$, т.е. $\{x_k\}$ является последовательностью Коши́ в L и, следовательно, существует предел $\lim x_k = x \in L$. Поэтому в силу непрерывности оператора $Bx = y \in \operatorname{Im} B$.

Так как образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} A = (\ker A^*)_\perp$. В силу теоремы Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker A^*$ имеет конечную размерность m. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ образует базис $\ker A^*$ и $\{e_k\}_{k=1}^m$ является биортогональной системой для системы функционалов $\{f_k\}_{k=1}^m$. Тогда $\operatorname{Im} A = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Поэтому, обозначая через $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку, всякий элемент $x \in \boldsymbol{E}$ допускает разложение $x = y + z$, где $y = \sum_{k=1}^m f_k(x)\, e_k \in M$ и $z = x - y \in \operatorname{Im} A$. Таким образом, $\boldsymbol{E} = M \oplus \operatorname{Im} A$ и значит коразмерность образа равна $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = \dim M = m$. □

Из курса линейной алгебры известна следующая *альтернатива Фредгольма*: либо система n линейных уравнений с n неизвестными однозначно разрешима для любой правой части, либо соответствующая однородная система имеет ненулевое решение. Теоремы Фредго́льма в бесконечномерном банаховом пространстве устанавливают аналогичные связи между решениями однородного и неоднородного уравнений, определяемых каноническим оператором Фредго́льма.

Для доказательств теорем Фредго́льма предположим, что $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ является компактным оператором в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и заданы операторы $A \doteqdot I - K$ и его сопряженный $A^* \doteqdot I - K^*$. В силу теоремы Ри́сса–Ша́удера их ядра имеют конечную размерность $\dim(\ker A) = n$ и $\dim(\ker A^*) = m$.

Теорема (I теорема Фредго́льма)**.** *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ базис решений однородного сопряженного уравнения $A^* f = 0$. Неоднородное уравнение $Ax = y$ тогда и только тогда имеет решение, когда $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Так как образ $\mathrm{Im}A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\mathrm{Im}A = (\ker A^*)_\perp = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Поэтому получаем, что $y \in \mathrm{Im}A$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$. □

Теорема (II теорема Фредго́льма)**.** *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ базис решений однородного уравнения $Ax = 0$. Неоднородное сопряженное уравнение $A^* f = g$ тогда и только тогда имеет решение, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Так как образ $\mathrm{Im}A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\mathrm{Im}A^* = (\ker A)^\perp = \bigcap_{k=1}^n \ker \delta_{x_k}$, где $\delta_{x_k} \in \boldsymbol{E}^{**}$ и $\delta_{x_k}(f) \doteqdot f(x_k)$ при $f \in \boldsymbol{E}^*$. Отсюда следует, что $g \in \mathrm{Im}A^*$ тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. □

Теорема (III теорема, альтернатива Фредго́льма)**.** *Для того чтобы неоднородное уравнение $Ax = y$ имело решение при всех $y \in \boldsymbol{E}$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $Ax = 0$ имело только нулевое решение.*

Доказательство. Необходимость. Пусть существует элемент $x_0 \neq 0$, т.ч. $Ax_0 = 0$. Обозначим через $L_k \doteqdot \ker A^k$ ядро оператора A^k и покажем, что все включения $L_k \subset L_{k+1}$ будут строгими. Действительно, по условию существуют $x_{k+1} \in L_{k+1}$, т.ч. $Ax_{k+1} = x_k$ при $k = 0, 1, \ldots$ Отсюда $A^k x_{k+1} = x_0 \neq 0$ и поэтому $x_{k+1} \notin L_k$.

По лемме Рисса (о почти перпендикуляре) существуют $y_k \in L_k$, т.ч. $\|y_k| = 1$ и $\|y_k - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{k-1}$. Поскольку $Ky_k = y_k - Ay_k$, то имеют место равенства $Ky_k - Ky_s = y_k - (Ay_k + y_s - Ay_s)$. Так как элемент $Ay_k + y_s - Ay_s \in L_{k-1}$ при $k > s$, то $\|Ky_k - Ky_s\| > 1/2$ при $k > s$, что противоречит компактности оператора K.

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = 0$ допускает только нулевое решение. Тогда по второй теореме неоднородное сопряженное уравнение $A^* f = g$ разрешимо при всех $g \in \boldsymbol{E}^*$ и значит по доказанной необходимости однородное сопряженное уравнение $A^* f = 0$ имеет только нулевое решение. Поэтому в силу первой теоремы неоднородное уравнение $Ax = y$ разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$. □

Теорема (IV теорема Фредго́льма)**.** *Однородные уравнения* $Ax = 0$ *и* $A^*f = 0$ *имеют одинаковое число линейно независимых решений, т.е.* $n = m$.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ образует базис в подпространстве $\ker A$ и $\{f_i\}_{i=1}^n$ соответствующая биортогональная система функционалов из $\boldsymbol{E}^*$. Пусть $\{g_j\}_{j=1}^m$ задает базис в подпространстве $\ker A^*$ и $\{y_j\}_{i=1}^m$ соответствующая биортогональная система элементов из $\boldsymbol{E}$. Докажем, что следующие два случая невозможны.

a) $n < m$. Определим операторы $K_n x \doteqdot Kx + \sum_{i=1}^n f_i(x)\, y_i$ при $x \in \boldsymbol{E}$ и $A_n \doteqdot I - K_n$. Докажем, что ядро $\ker A_n = 0$. Если элемент $x \in \ker A_n$, то получим $Ax = \sum_{i=1}^n f_i(x)\, y_i$. Так как $A^*g_j = 0$ при $j = 1, \ldots, m$, то $A^*g_j(x) = g_j(Ax) = f_j(x) = 0$ при $j = 1, \ldots, n$. Поэтому имеем $Ax = 0$ и, следовательно, элемент $x = \sum_{i=1}^n f_i(x)\, x_i = 0$.

Поскольку оператор K_n компактный, то по третьей теореме существует элемент $z \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $A_n z = y_m$. Тогда имеем $A_n^* g_m(z) = g_m(A_n z) = g_m(y_m) = 1$. С другой стороны, получаем $g_m(A_n z) = g_m(Az) = A^* g_m(z) = 0$, что невозможно.

b) $n > m$. Рассмотрим оператор $K_m^* f \doteqdot K^* f + \sum_{j=1}^m f(y_j)\, f_j$ при $f \in \boldsymbol{E}^*$, который является сопряженным к оператору $K_m x \doteqdot Kx + \sum_{j=1}^m f_j(x)\, y_j$ и положим $A_m^* = I - K_m^*$. Докажем, что ядро $\ker A_m^* = 0$. Если элемент $f \in \ker A_m^*$, то имеем $A^* f = \sum_{j=1}^m f(y_j)\, f_j$. Поскольку $Ax_i = 0$ при $i = 1, \ldots, n$, то $A^* f(x_i) = f(Ax_i) = f(y_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, m$. Поэтому получаем $A^* f = 0$ и, следовательно, элемент $f = \sum_{j=1}^m f(y_j)\, g_j = 0$.

Поскольку оператор K_m^* компактный, то по третьей теореме существует элемент $h \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $A_m^* h = f_n$. Тогда получим $A_m^* h(x_n) = f_n(x_n) = 1$. С другой стороны, имеем равенство $A_m^* h(x_n) = h(A_n x_n) = h(Ax_n) = 0$, что невозможно. □

Определение. Оператор $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ будем называть *почти обратимым*, если существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ компактные операторы.

Теорема (Никольского)**.** *Ограниченный оператор* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *тогда и только тогда почти обратим, когда он является фредгольмомым.*

Доказательство. Необходимость. Так как по условию $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами, то по доказанной выше теореме операторы $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$ являются фредгольмовыми. Поскольку $\ker A \subset \ker TA$ и $\operatorname{Im} AT \subset \operatorname{Im} A$, то оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ также будет фредгольмовым.

Достаточность. Поскольку размерность ядра $\ker A \subset \boldsymbol{E}$ конечна, то существует замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{E} = \ker A \oplus L$. Так как коразмерность образа $\operatorname{Im} A$ конечна, то существует замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{F}$, т.ч. $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A \oplus M$. Обозначим через $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ проектор на L, а через $Q : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ проектор на $\operatorname{Im} A$, и положим $K_1 \doteqdot I - P$ и $K_2 \doteqdot I - Q$. Тогда операторы K_1 и K_2 имеют конечномерые образы $\operatorname{Im} K_1 = \ker A$ и $\operatorname{Im} K_2 = M$, а значит являются компактными.

Поскольку оператор $B \doteqdot A|_L : L \to \operatorname{Im} A$ биективный, то по теореме Банаха его обратный $B^{-1} : \operatorname{Im} A \to L$ является ограниченным. Пусть $T \doteqdot PB^{-1}Q$, тогда имеют место равенства $TA = PB^{-1}A = P = I - K_1$ и $AT = AB^{-1}Q = Q = I - K_2$. Заметим, что оператор $T \in \mathscr{F}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ фредгольмовый и его индекс равен $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} A$. □

Теорема (об устойчивости фредгольмовости). *Если* $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *и* $K \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$, *то* $A+K \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *фредгольмовый и его индекс* $\operatorname{ind}(A+K) = \operatorname{ind}A$.

Доказательство. В силу теоремы Никольского существует оператор $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$ являются компактными операторами. Тогда имеют место следующие равенства:

$$T(A+K) = I-(K_1-TK), \quad (A+K)T = I-(K_2-KT),$$

где $K_1 - TK \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ и $K_2 - KT \in \mathscr{K}(\boldsymbol{F})$. Поэтому оператор $A+K \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{E})$ почти обратим и значит является фредгольмовым. В силу замечания при доказательстве теоремы Никольского его индекс равен $\operatorname{ind}(A+K) = -\operatorname{ind}T = \operatorname{ind}A$. □

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *несущественным значением* оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ является фредгольмовым. Множество всех несущественных значений обозначается через $\rho_e(A)$. Дополнительное множество $\sigma_e(A) \doteqdot \mathbb{C}\setminus\rho_e(A)$ называется *существенным спектром* оператора A.

Весь спектр оператора $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ является объединением двух множеств

$$\sigma_e(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \notin \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\} \quad \text{и} \quad \sigma_i(A) \doteqdot \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \in \mathscr{F}(\boldsymbol{E})\},$$

где $\sigma_i(A)$ называется *несущественным спектром* A. По теореме об устойчивости существенный спектр не изменяется при компактных возмущениях оператора A.

Пример 2. Пусть $A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$ диагональным оператор $(Ax)_n = \lambda_n x_n$, где $x = \{x_n\}$, $\{\lambda_n\} \in \boldsymbol{\ell}_\infty$ ограничена и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма равна $\|A\| = \sup|\lambda_n|$.

Обозначим через $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n = 0\}$ и $M = \mathbb{N}\setminus N$. Тогда $\boldsymbol{\ell}_p = \boldsymbol{\ell}_p(N)\oplus\boldsymbol{\ell}_p(M)$. Если оператор фредго́льмовый, то ядро $\ker A = \boldsymbol{\ell}_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\operatorname{Im}A = A(\boldsymbol{\ell}_p(M))$ замкнут. Тогда N конечно и оператор $A : \boldsymbol{\ell}_p(M) \to \boldsymbol{\ell}_p(M)$ имеет ограниченный обратный. Отсюда $\inf_{n\in M}|\lambda_n| > 0$. Таким образом, $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{\ell}_p)$ фредго́льмовый тогда и только тогда, когда нуль не является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$. Поскольку $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$, то существенный спектр $\sigma_e(A)$ совпадает с множеством предельных точек $\{\lambda_n\}$, а несущественный спектр $\sigma_i(A)$ с множеством тех λ_n, которые повторяются в $\{\lambda_n\}$ конечное число раз.

Пример 3. Пусть $A : \boldsymbol{L}_p([a,b]) \to \boldsymbol{L}_p([a,b])$ оператор умножения на непрерывную функцию $Af(x) = \varphi(x)f(x)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма равна $\|A\| = \sup_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|$.

Обозначим через $N = \{x \in [a,b] \mid \varphi(x) = 0\}$ и через $M = [a,b]\setminus N$. Тогда получаем следующее представление $\boldsymbol{L}_p([a,b]) = \boldsymbol{L}_p(N)\oplus\boldsymbol{L}_p(M)$. Если оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{L}_p)$ является фредго́льмовым, то ядро $\ker A = \boldsymbol{L}_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\operatorname{Im}A = A(\boldsymbol{L}_p(M))$ замкнут. Поэтому множество N имеет меру нуль и оператор $A : \boldsymbol{L}_p(M) \to \boldsymbol{L}_p(M)$ имеет ограниченный обратный. Отсюда $\inf_{x\in[a,b]}|\varphi(x)| > 0$.

Таким образом, оператор $A \in \mathscr{F}(\boldsymbol{L}_p)$ фредго́льмовый тогда и только тогда, когда он обратим. Поскольку оператор $A_\lambda f(x) = (\lambda - \varphi(x))f(x)$, то существенный спектр $\sigma_e(A)$ совпадает со спектром оператора $\sigma(A) = \sigma_e(A)$, т.е. совпадает с множеством значений функции $\varphi([a,b])$, а несущественный спектр $\sigma_i(A) = \emptyset$ пуст.

12 ЭРМИ́ТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть далее $\boldsymbol{H}$ обозначает гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$. Линейный оператор $A:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ называется *эрмитовым*, если $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$ для всех $x,y\in\boldsymbol{H}$. Множество $\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ всех эрмитовых операторов образует действительное подпространство $\mathscr{H}(\boldsymbol{H})\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ в пространстве $\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$ ограниченных операторов. Рассмотрим свойства спектра эрмитова оператора.

1. *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то собственные значения $\lambda\in\sigma_p(A)$ действительны $\lambda\in\mathbb{R}$, а их собственные подпространства $H_\lambda\doteqdot\ker A_\lambda$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1\neq\lambda_2$, ортогональны $H_{\lambda_1}\perp H_{\lambda_2}$.*

Если $Ae=\lambda e$ и $\|e\|=1$, то $\lambda=\langle Ae,e\rangle=\langle e,Ae\rangle=\overline{\lambda}$, т.е. $\lambda\in\mathbb{R}$. Отсюда, если $Ae_1=\lambda_1e_1$ и $Ae_2=\lambda_2e_2$, то $\lambda_1\langle e_1,e_2\rangle=\langle Ae_1,e_2\rangle=\langle e_1,Ae_2\rangle=\lambda_2\langle e_1,e_2\rangle$, т.е. $e_1\perp e_2$.

Теорема (критерий Ве́йля). *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то $\lambda\in\sigma(A)$ тогда и только тогда принадлежит спектру A, когда $\inf_{\|x\|=1}\|A_\lambda x\|=0$, т.е. его спектр $\sigma(A)=\sigma_l(A)$.*

Доказательство. Поскольку $\sigma(A)\setminus\sigma_l(A)\subset\sigma_r(A)$, то нам достаточно показать, что остаточный спектр $\sigma_r(A)=\emptyset$ пуст. Пусть $\ker A_\lambda=0$ и $y\neq0$, т.ч. $y\perp\operatorname{Im}A_\lambda$. Тогда имеет место $\langle A_\lambda x,y\rangle=\langle x,A_{\overline{\lambda}}y\rangle=0$ при всех $x\in\boldsymbol{H}$. Отсюда $A_{\overline{\lambda}}y=0$, т.е. $\overline{\lambda}\in\sigma_p(A)$. Так как $\lambda\in\mathbb{R}$ в силу свойства 1, то $A_\lambda y=0$, что противоречит условию. □

2. *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то весь спектр $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$ действительный.*

Если $\lambda=\alpha+i\beta$ и $\beta\neq0$, то $A_\lambda=A_\alpha+i\beta I$ и справедливо следующее равенство:

$$\|A_\lambda x\|^2=\langle A_\alpha x,A_\alpha x\rangle-i\beta\langle A_\alpha x,x\rangle+i\beta\langle x,A_\alpha x\rangle+\beta^2\langle x,x\rangle=\|A_\alpha x\|^2+\beta^2\|x\|.$$

Поэтому $\inf_{\|x\|=1}\|A_\lambda x\|\geqslant|\beta|>0$ и, следовательно, по критерию Ве́йля $\lambda\notin\sigma(A)$.

3. *Если $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$, то его спектральный радиус равен норме $r(A)=\|A\|$.*

Так как $A^2=AA$, то $\|A^2\|\leqslant\|A\|^2$. В силу неравенства Коши́–Буняко́вского

$$\|A^2\|=\sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|A^2x\|=\sup_{x,y\in\boldsymbol{S}}\langle A^2x,y\rangle=\sup_{x,y\in\boldsymbol{S}}\langle Ax,Ay\rangle\geqslant\sup_{x\in\boldsymbol{S}}\langle Ax,Ax\rangle=\|A\|^2,$$

где $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{H}$ — единичный шар. Поэтому $\|A^2\|=\|A\|^2$ и, следовательно, $\|A^{2^n}\|=\|A\|^{2^n}$. По теореме о спектральном радиусе $r(A)=\lim\sqrt[n]{\|A^n\|}=\lim\sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|}=\|A\|$.

4. *Если оператор $A\in\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ является компактным, то $\sigma_p(A)\neq\emptyset$.*

Пусть $\sigma_p(A)=\emptyset$. Так как $\sigma(A)\neq\emptyset$, то по теореме Ри́сса–Ша́удера $\sigma(A)=\{0\}$. Поэтому $r(A)=\|A\|=0$ в силу свойства 3, т.е. $A=0$, что невозможно.

Теорема (Ги́льберта–Шми́дта). *Для всякого компактного эрмитова оператора $A\in\mathscr{K}(\boldsymbol{H})\cap\mathscr{H}(\boldsymbol{H})$ в сепарабельном гильбертовом пространстве существует полная ортонормированная система $\{e_n\}\subset\boldsymbol{H}$ собственных векторов.*

Доказательство. В случае $\dim \boldsymbol{H} < \infty$ теорема доказана в курсе линейной алгебры. Пусть $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. Поскольку оператор A является компактным, то множество $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$ собственных значений не более, чем счетно, а ненулевые собственные значения имеют конечную кратность $\dim H_{\lambda_n} < \infty$, где $H_{\lambda_n} \doteqdot \ker A_{\lambda_n}$. Поскольку оператор A является эрмитовым, то собственные значения действительны $\lambda_n \in \mathbb{R}$, а их собственные подпространства ортогональны $H_{\lambda_n} \perp H_{\lambda_m}$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Выберем в каждом подпространстве H_{λ_n} ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов с собственным значением λ_n. Тогда объединение всех этих ортонормированных систем образует ортонормированную систему $\{e_n\}$ в $\boldsymbol{H}$. Пусть $L \doteqdot \overline{\text{sp}}\{e_n\}$ замкнутая линейная оболочка системы $\{e_n\}$. Тогда L является инвариантным подпространством для оператора $A : L \to L$ и в силу эрмитовости ортогональное дополнение $L^\perp$ также будет инвариантным подпространством для оператора $A : L^\perp \to L^\perp$. В силу свойства 4 подпространство $L^\perp$ имеет собственный вектор, что невозможно по построению. Следовательно, $L^\perp = 0$ и по теореме об ортогональном разложении получим, что $\boldsymbol{H} = L \oplus L^\perp = L$. □

Пример 1. Интегральным оператором *Ги́льберта–Шми́дта* называется оператор, определенный в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2([a,b])$ по формуле

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b K(x,y)\,f(y)\,dy, \quad f \in \boldsymbol{L}_2([a,b]),$$

где функция $K(x,y)$ удовлетворяет условиям $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$ и $K(x,y) \in \boldsymbol{L}_2([a,b]^2)$. Первое из этих условий обеспечивает нам эрмитовость, а второе компактность A. Предположим, что ненулевые собственные значения $\{\lambda_n\}$ упорядочены $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ и повторяется столько раз, какова их кратность. Соответствующею ортонормированную систему собственных функций оператора A обозначим через $\{e_n\}$.

Выведем формулу для резольвенты оператора A. По теореме Ги́льберта–Шми́дта всякий элемент $f \in \boldsymbol{L}_2([a,b])$ разлагается в ряд $f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$, где $f_0 \in \ker A$. Тогда $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$ и $\langle A_\lambda f, e_n \rangle = \langle f, A_{\overline{\lambda}} e_n \rangle = (\lambda - \lambda_n)\langle f, e_n \rangle$. Если $A_\lambda f = g$, то $(\lambda - \lambda_n)\langle f, e_n \rangle = \langle g, e_n \rangle$. Поэтому резольвента имеет следующее представление:

$$R_\lambda g = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} Af = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, e_n \rangle e_n = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} \int_a^b K_\lambda(x,y)\,g(y)\,dy,$$

где $K_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(x)\overline{e_n(y)}$. Докажем, что ряд $K_\lambda(x,y)$ сходится в $\boldsymbol{L}_2([a,b]^2)$. Функции $\varphi_n(x,y) = e_n(x)\overline{e_n(y)}$ образуют ортонормированную систему в $\boldsymbol{L}_2([a,b]^2)$. Поскольку коэффициенты Фурье функции $K(x,y)$ равны $\langle K, \varphi_n \rangle = \langle Ae_n, e_n \rangle = \lambda_n$, то ряд Фурье́ функции $K(x,y)$ сходится к функции $F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x,y)$. Так как система функций $h(x,y) = f(x)\overline{g(y)}$ полна в $\boldsymbol{L}_2([a,b]^2)$ и выполняется равенства

$$\langle K, h \rangle = \langle Ag, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, e_n \rangle \langle e_n, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \varphi_n, h \rangle = \langle F, h \rangle$$

для всех $f, g \in \boldsymbol{L}_2([a,b])$, то функции $K(x,y) = F(x,y)$ совпадают п.в. на квадрате $[a,b]^2$. Поэтому в силу равенства Парсева́ля ряд $\|K\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$ сходится. Следовательно, ряд $\|K_\lambda\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2 < \infty$ также сходится при всех $\lambda \in \rho(A)$.

Пусть функция $p(x) \in \boldsymbol{C}^1[a,b]$ положительна $p(x) > 0$, а функция $q(x) \in \boldsymbol{C}[a,b]$ принимает действительные значения. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Du(x) = -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x) \text{ при п.в. } x \in [a,b].$$

Его область определения $M \doteqdot \operatorname{dom} D$ состоит из всех функций u, у которых первая производная абсолютно непрерывна $u' \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, а вторая $u'' \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, при этом выполняются два граничных условия $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0$ и $\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0$ с действительными коэффициентами и т.ч. $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Заметим, что M всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$ и оператор D симметричен в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$, т.е. $\langle Du, v\rangle = \langle u, Dv\rangle$ для всех $u, v \in M$. В самом деле, интегрируя по частям, имеем

$$\langle Du, v\rangle - \langle u, Dv\rangle = \textstyle\int_a^b u\,d(p\overline{v}') - \int_a^b \overline{v}\,d(p\,u') = p(u\overline{v}' - u'\overline{v})|_a^b = 0,$$

где последнее равенство вытекает из граничных условий, т.к. определители

$$\det\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \overline{v}(a) & \overline{v}'(a)\end{vmatrix} = 0, \quad \det\begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \overline{v}(b) & \overline{v}'(b)\end{vmatrix} = 0.$$

Задача Шту́рма–Лиуви́лля включает в себя, во-первых, вопрос существования бесконечной системы линейно независимых собственных функций оператора D, а во-вторых, вопрос о полноте этой системы в пространстве $\boldsymbol{L}_2([a,b])$. Предположим, что $0 \notin \sigma_p(D)$ не является собственным значением, т.е. $\ker D = 0$.

Лемма. *Существует функция Гри́на $G(x,y)$ задачи Шту́рма–Лиуви́лля, т.ч.*

a) функция $G(x,y)$ действительная, симметричная и непрерывная в $[a,b]^2$;

b) функция $G(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема по y при $y \neq x$;

c) удовлетворяет уравнению $D_y G(x,y) = 0$ и граничным условиям при $y \neq x$;

d) производная $G'_y(x,y)$ по y допускает разрыв первого рода при $y = x \in (a,b)$ с величиной скачка $G'_y(x,x+0) - G'_y(x,x-0) = -1/p(x)$.

Доказательство. Решая задачу Коши, получим u_1 и u_2 действительные решения уравнения $Du = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничным условиям. Так как $\ker D = 0$, то эти решения линейно независимы и определитель Вро́нского $\Delta = u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$ не равен нулю, а функция $p\Delta \doteqdot p(u_1 u_2' - u_1' u_2)$ равна константе $\Delta_0 \neq 0$, т.к. ее производная $(p\Delta)' = u_1(p\,u_2')' - u_2(p\,u_1')' = 0$.

Определим функцию $G(x,y) \doteqdot c_1 u_1(y)$ при $y \leqslant x$ и $G(x,y) \doteqdot c_2 u_2(y)$ при $y \geqslant x$. Выберем $c_1 = c_1(x)$ и $c_2 = c_2(x)$, т.ч. функция $G(x,y)$ будет непрерывной на $[a,b]$ по переменной y, а производная по y будет иметь указанный скачок в точке x, т.е. $c_1 u_1(x) - c_2 u_2(x) = 0$ и $c_1 u_1'(x) - c_2 u_2'(x) = 1/p(x)$. Так как $\Delta_0 = p(u_1 u_2' - u_1' u_2) \neq 0$ является константой, то, полагая $c_1 \doteqdot -u_2(x)/\Delta_0$ и $c_2 \doteqdot -u_1(x)/\Delta_0$, получим, что

$$G(x,y) \doteqdot -\tfrac{1}{\Delta_0}\begin{cases} u_1(y)\,u_2(x), & \text{при } a \leqslant y \leqslant x \leqslant b; \\ u_1(x)\,u_2(y), & \text{при } a \leqslant x \leqslant y \leqslant b; \end{cases}$$

будет удовлетворять всем условиям леммы. □

Теорема. *Пусть* $\ker D = 0$ *и* $f \in \operatorname{Im} D$. *Для того чтобы функция* $u \in M$ *была решением уравнения* $Du = f$, *необходимо и достаточно, чтобы* $u = Af$, *где*

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy, \quad x \in [a,b],$$

а $G(x,y)$ *является функцией Гри́на задачи Шту́рма–Лиуви́лля.*

Доказательство. Вначале покажем, что $ADu = u$ для всех $u \in M$. Пусть $Du = f$. Интегрируя по частям и используя свойства функции Гри́на $G(x,y)$, доказанные в лемме, а также граничные условия, мы получим равенство

$$\int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy = \int_a^x Du\, G\, dy + \int_x^b Du\, G\, dy = \int_a^x u\, D_y G\, dy + \int_x^b u\, D_y G\, dy +$$

$$+ p\,(u\,G'_y - u'G)\,\big|_a^{x-0} + p\,(u\,G'_y - u'G)\,\big|_{x+0}^{b} = p\,(u\,G'_y - u'G)\,\big|_{x+0}^{x-0} = u(x).$$

Следовательно, имеет место равенство $ADu = u$ для всех $u \in M$.

Теперь докажем равенство $DAf = f$ для всех функций $f \in \operatorname{Im} D$. Так как $Af \in M$, то из симметричности операторов D и A получим $\langle DAf, u\rangle = \langle f, ADu\rangle = \langle f, u\rangle$ для всех $u \in M$. Так как подпространство M всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_2([a,b])$, то $DAf = f$ п.в. на отрезке $[a,b]$. Таким образом, оператор A, определенный на подпространстве $\operatorname{Im} D$, является обратным к оператору D. □

Следствие. *Существует полная ортонормированная система в пространстве* $\boldsymbol{L}_2([a,b])$, *состоящая из собственных функций оператора* D.

Пусть $\ker D = 0$. Тогда существование полной ортонормированной системы $\{e_n\}$ собственных функций оператора D вытекает из теоремы Ги́льберта–Шми́дта, так как собственные функции оператора D являются собственными функциями для интегрального оператора A, ядром которого является функция Гри́на.

Пусть $\ker D \neq 0$. В силу симметричности оператора D собственные функции с различными собственными значениями ортогональны. Поэтому множество всех собственных значений D не более, чем счетно. Значит существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, которое не является собственным значением. Тогда $D_0 = D - \lambda_0 I$ удовлетворяет условию $\ker D_0 = 0$. Так как собственные функции оператора D_0 являются собственными функциями оператора D и наоборот, то оператор D одновременно с D_0 обладает полной системой собственных функций в пространстве $\boldsymbol{L}_2([a,b])$.

Пример 2. Рассмотрим оператор $Du = -u''$ и граничные условия $u(0) = u(\pi) = 0$. По решениям x и $\pi - x$ уравнения $Du = 0$, построим функцию Гри́на

$$G(x,y) = \begin{cases} (\pi - x)y, & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi; \\ x(\pi - y), & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi. \end{cases}$$

Затем, решая дифференциальное уравнение $u'' + \lambda u = 0$ с граничными условиями $u(0) = u(\pi) = 0$, находим его собственные значения $\lambda_n = n^2$ и ортонормированную систему собственных функций $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, полную в $\boldsymbol{L}_2([0,\pi])$.