1 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $X \times Y \doteqdot \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ — прямое произведение множеств X и Y.

Определение. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* в X, если

a) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ при всех $x,y \in X$ (симметричность);

b) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ при всех $x,y,z \in X$ (неравенство треугольника);

c) $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (невырожденность).

Пара (X,ρ) называется *метрическим пространством*. Если выполнены (a) и (b), то ρ называется *полуметрикой*, а (X,ρ) *полуметрическим пространством*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся* $x_n \to x$ к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x,x_n) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши́*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$ при всех $n,m \geqslant N$.

Если всякая последовательность Коши́ является сходящейся к некоторой точке $x \in X$, то метрическое пространство (X,ρ) называется *полным*.

Всюду далее через $\boldsymbol{E}$ мы будем обозначать линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел.

Определение. Функция $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$ называется *нормой* в $\boldsymbol{E}$, если

a) $\boldsymbol{p}(\lambda x) = |\lambda| \boldsymbol{p}(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \boldsymbol{E}$ (однородность);

b) $\boldsymbol{p}(x+y) \leqslant \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{p}(y)$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$ (неравенство треугольника);

c) $\boldsymbol{p}(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (невырожденность).

Норма обозначается через $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$ и пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ называется *нормированным пространством*. Если выполнены (a) и (b), то $\boldsymbol{p}$ называется *полунормой*, а $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ *полунормированным пространством*. Метрика (полуметрика) ρ в нормированном (полунормированном) пространстве определяется равенством $\rho(x,y) \doteqdot \|x-y\|$.

Полное нормированное пространство называется *ба́наховым пространством*.

Пример 1. Нормированное пространство $\mathbb{F}^n \doteqdot \{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid x_k \in \mathbb{F}, k = 1,\ldots,n\}$ с нормой $\|x\| \doteqdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ называется *евклидовым пространством*.

Пример 2. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *ограниченной* на множестве X, если существует число $c > 0$, т.ч. $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in X$. Нормированное пространство $\boldsymbol{B}(X) \doteqdot \{f \mid f : X \to \mathbb{F} \text{ ограничена}\}$, состоящее из ограниченных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством ограниченных функций*.

Пример 3. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *непрерывной* в (X,ρ), если для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$.

Нормированное пространство $\boldsymbol{C}(X) \doteqdot \{f \mid f : X \to \mathbb{F} \text{ непрерывна и ограничена}\}$, состоящее из ограниченных и непрерывных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством непрерывных функций*.

Лемма. *Пространства* $\boldsymbol{B}(X)$ *и* $\boldsymbol{C}(X)$ *являются ба́наховыми.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\boldsymbol{B}(X)$, то для любого $\varepsilon>0$ существует $N\in\mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ при всех $x\in X$ и при всех $n,m\geqslant N$. По критерию Коши равномерной сходимости она сходится равномерно $f_n\rightrightarrows f$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $N\in\mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ при всех $x\in X$ и $n\geqslant N$. Отсюда $\|f_n-f\|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Так как $\|f\|\leqslant\|f_n-f\|+\|f_n\|$, то $f\in\boldsymbol{B}(X)$.

Поскольку равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, то $\boldsymbol{C}(X)$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{B}(X)$ и, следовательно, также будет ба́наховым пространством. □

Открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве обозначаются через $\boldsymbol{U}_r(x)\doteqdot\{y\in X\mid\rho(x,y)<r\}$ и $\boldsymbol{S}_r(x)\doteqdot\{y\in X\mid\rho(x,y)\leqslant r\}$; $\boldsymbol{U}_r\doteqdot\boldsymbol{U}_r(0)$ и $\boldsymbol{S}_r\doteqdot\boldsymbol{S}_r(0)$. Для каждого множества $A\subset X$ введем следующие обозначения:

$\mathring{A}\doteqdot\{x\in X\mid\exists\ r>0,\ \boldsymbol{U}_r(x)\subset A\}$ — множество *внутренних* точек;

$\acute{A}\doteqdot\{x\in X\mid\forall\ r>0,\ \boldsymbol{U}_r(x)\cap A=\{\infty\}\}$ — множество *предельных* точек;

$\tilde{A}\doteqdot\{x\in X\mid\exists\ r>0,\ \boldsymbol{U}_r(x)\cap A=\{x\}\}$ — множество *изолированных* точек;

$\overline{A}\doteqdot\{x\in X\mid\forall\ r>0,\ \boldsymbol{U}_r(x)\cap A\neq\{\emptyset\}\}$ — множество точек *прикосновения*.

Множества $\mathring{A}$ и $\overline{A}$ называются *внутренностью* и *замыканием* множества A.

Если $\mathring{A}=A$, то множество A называется *открытым*.
Если $\overline{A}=A$, то множество A называется *замкнутым*.
Если $\overline{A}=X$, то множество A называется *всюду плотным*.
Если $\mathring{\overline{A}}=\emptyset$, то множество A называется *нигде не плотным*.

Определение. Метрическое пространство (X,ρ) называется *сепара́бельным*, если существует счетное и всюду плотное подмножество $A\subset X$.

Рассмотрим свойства операции замыкания в метрическом пространстве (X,ρ).

1. $\overline{A}=\{x\in X\mid\exists x_n\in A,\ \text{т.ч. } x_n\to x\}$.

2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

3. $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

Точка $x\in\overline{A}$ тогда и только тогда, когда существуют $x_n\in A$, т.ч. $x_n\in A\cap\boldsymbol{U}_{1/n}(x)$, что равносильно неравенству $\rho(x,x_n)<1/n$. Отсюда следует, что $x_n\to x$.

Если $x\in\overline{A\cup B}$, то существуют точки $x_n\in A\cup B$, т.ч. $x_n\to x$. Тогда существует подпоследовательность точек x_{n_k}, принадлежащая A либо B, т.ч. $x_{n_k}\to x$. Поэтому справедливо включение $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. Обратное включение очевидно.

Ясно, что $\overline{A}\subset\overline{\overline{A}}$. Пусть $x\in\overline{\overline{A}}$, тогда найдется последовательность точек $x_n\in\overline{A}$, т.ч. $x_n\to x$. Кроме того, для каждого n найдется последовательность точек $x_{nm}\in A$, т.ч. $x_{nm}\to x_n$. Выберем подпоследовательность m_n, т.ч. $\rho(x_{nm_n},x_n)<1/n$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x_{nm_n},x)\leqslant\rho(x_{nm_n},x_n)+\rho(x_n,x)\to 0$, т.е. $x_{nm_n}\to x\in\overline{A}$.

Определение. Отображение $F: X \to Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называется *непрерывным*, если для любого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(F(x), F(y)) < \varepsilon$ выполняется для всех $y \in X$, $\rho_X(x, y) < \delta$.

Отображение $F: X \to Y$ называется *изометричным*, если для всех $x, y \in X$ имеет место $\rho_Y(F(x), F(y)) = \rho_X(x, y)$. Если, кроме того, образ $F(X) = Y$, то отображение называется *изометрией*, а пространства X и Y называются *изометричными*.

Изометричное отображение метрических пространств является инъективным и непрерывным. Если отображение $F: X \to Y$ является изометрией, то оно биективно и обратное отображение $F^{-1}: Y \to X$ является изометрией.

Теорема (о пополнении)**.** *Для метрического пространства (X, ρ_X) существует такое полное метрическое пространство (Y, ρ_Y) и изометричное отображение $F: X \to Y$, что образ $F(X) \subset Y$ является всюду плотным в Y. При этом любые два таких пространства (Y, ρ_Y) являются изометричными.*

Доказательство. Пусть $f_x(y) \doteqdot \rho_X(x, y) - \rho_X(x_0, y)$, где точка $x_0 \in X$ фиксирована. Тогда $|f_x(y)| \leqslant \rho_X(x, x_0)$ для всех $y \in X$, т.е. $f_x \in \boldsymbol{B}(X)$ при всех $x \in X$. Определим отображение $F: X \to \boldsymbol{B}(X)$ по формуле $F(x) \doteqdot f_x$ и положим $Y \doteqdot \overline{F(X)}$. Так как

$$\rho_Y(F(x_1), F(x_2)) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = \sup_{y \in X} |\rho_X(x_1, y) - \rho_X(x_2, y)| = \rho_X(x_1, x_2),$$

то отображение F является изометричным. Пусть существуют два отображения $F: X \to Y$ и $F_1: X \to Y_1$, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда для каждого $y \in Y$ найдется последовательность $x_n \in X$, т.ч. $F(x_n) \to y$. Отсюда $F_1(x_n) \to y_1 \in Y_1$. Определим отображение $J: Y \to Y_1$ по формуле $J(y) \doteqdot y_1$. Тогда при всех $y, y' \in Y$

$$\rho_Y(y, y') = \lim_{n \to \infty} \rho_Y(F(x_n), F(x'_n)) = \lim_{n \to \infty} \rho_X(x_n, x'_n) = \lim_{n \to \infty} \rho_{Y_1}(F_1(x_n), F_1(x'_n)) = \rho_{Y_1}(y_1, y'_1).$$

Таким образом, отображение J является изометрией пространств Y и Y_1. □

Определение. Отображение $F: X \to X$ метрического пространства (X, ρ) в себя называется *сжимающим*, если для некоторого $0 < \lambda < 1$ выполняется неравенство $\rho(F(x), F(y)) \leqslant \lambda \rho(x, y)$ при всех $x, y \in X$.

Каждое сжимающее отображение, очевидно, является непрерывным.

Теорема (принцип сжимающих отображений)**.** *Пусть $F: X \to X$ — сжимающее отображение полного метрического пространства (X, ρ). Тогда существует и единственная неподвижная точка $x \in X$, т.ч. $F(x) = x$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $x_1 \doteqdot F(x_0), x_2 \doteqdot F(x_1), \ldots$, т.е. $x_n = F^n(x_0)$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим при $n < m$ и $0 < \lambda < 1$

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{m-1} \rho(F^k(x_0), F^k(x_1)) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k \rho(x_0, x_1) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \rho(x_0, x_1).$$

Поэтому $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Так как $F(x_{n-1}) = x_n$, то, переходя к пределу и используя непрерывность F, получим $F(x) = x$. Если существует еще одна точка $y \in X$, т.ч. $F(y) = y$, то из неравенства $\rho(x,y) = \rho(F(x),F(y)) \leqslant \lambda\rho(x,y)$ следует, что $\rho(x,y) = 0$, т.е. имеет место равенство $x = y$. □

Лемма (о вложенных шарах). *Пусть в полном метрическом пространстве* (X,ρ) *имеется последовательность вложенных шаров* $S_{r_1}(x_1) \supset S_{r_2}(x_2) \supset \ldots$ *и предел радиусов* $\lim r_n = 0$. *Тогда пересечение* $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$ *не пусто.*

Доказательство. Поскольку по условию $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $n < m$ и $\lim r_n = 0$, то $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $m \to \infty$, получим $\rho(x_n,x) \leqslant r_n$. Следовательно, эта точка принадлежит $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{r_n}(x_n)$. □

Определение. Множество $A \subset X$ в метрическом пространстве (X,ρ) называется множеством *первой категории*, если является счетным объединением $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ нигде не плотных множеств $A_n \subset X$. Множество $A \subset X$ называется множеством *второй категории*, если оно не является множеством первой категории.

Теорема (Бэ́ра). *Каждое полное метрическое пространство* (X,ρ) *является множеством второй категории.*

Доказательство. Предположим обратное $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества A_n нигде не плотны. Тогда существуют $x_1 \in X \setminus \overline{A}_1$ и $S_{r_1}(x_1) \subset X \setminus \overline{A}_1$. Аналогично, существуют $x_2 \in S_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и $S_{r_2}(x_2) \subset S_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и т.д. Поэтому имеем последовательность вложенных шаров $S_{r_1}(x_1) \supset S_{r_2}(x_2) \supset \ldots$. Выберем радиусы $r_n > 0$, т.ч. $\lim r_n = 0$. Тогда по лемме существует точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{r_n}(x_n)$. Отсюда $x \notin A_n$ при всех n, что невозможно. Таким образом, X не является множеством первой категории. □

Пример 4. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ является множеством первой категории, т.к. $\mathbb{Q}$ есть счетное объединение точек. По теореме Бэ́ра множество действительных чисел $\mathbb{R}$ будет множеством второй категории. Отсюда множество иррациональных чисел $\mathbb{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ является множеством второй категории.

Пример 5. Построим пример последовательности вложенных шаров в полном метрическом пространстве с пустым пересечением. Рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{N},\rho)$ с метрикой $\rho(n,m) \doteqdot 1 + 1/(n+m)$, если $n \neq m$, и $\rho(n,n) = 0$.

Замкнутые шары $S_{r_n}(n) = \{n, n+1, \ldots\}$, где $r_n = 1 + 1/2n$, являются вложенными и их пересечение пусто. Заметим, что это метрическое пространство $(\mathbb{N},\rho)$ полно, поскольку всякая последовательность Коши́ стационарна. По теореме Бэра пространство $\mathbb{N}$ является множеством второй категории. В этом пространстве все множества открыты и замкнуты, т.е. $(\mathbb{N},\rho)$ имеет дискретную топологию. Поэтому в нем не существует нигде не плотных множеств, кроме пустого множества $\emptyset$.

2 МЕТРИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathbf{2}^X$ обозначает множество всех подмножеств X, включая пустое множество. Непустое подмножество $\tau \subset \mathbf{2}^X$ называется *системой множеств* в X.

Определение. Пара (X,τ) называется *топологическим пространством*, если в X задана система множеств $\tau \subset \mathbf{2}^X$, называемая *топологией*, т.ч.

a) пустое множество $\emptyset \in \tau$ и все множество $X \in \tau$;

b) объединение $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ для всякой системы множеств $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$.

c) пересечение $\bigcap_{k=1}^n B_k \in \tau$ для всякой конечной системы множеств $\{B_k\}_{k=1}^n \subset \tau$.

Система множеств $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии* τ, если любое множество $A \in \tau$ является объединением $A = \bigcup_{i\in I} B_i$ некоторых множеств $B_i \in \beta$.

В топологическом пространстве (X,τ) множества $A \in \tau$ называются *открытыми*, а их дополнения $A' \doteqdot X \setminus A$ *замкнутыми*. Множество $O_x \subset X$ называется *окрестностью* точки $x \in X$, если существует $A \in \tau$, т.ч. $x \in A \subset O_x$.

С помощью окрестностей, также как в метрическом пространстве, можно ввести понятия внутренних, предельных, изолированных точек и точек прикосновения, а также понятия замыкания, всюду плотного и нигде не плотного множества.

1. *В метрическом пространстве* (X,ρ) *система множеств* $\tau_X \doteqdot \{A \subset X \mid \mathring{A} = A\}$ *является топологией. Открытые шары* $U_r(x)$ *образуют базу топологии* τ_X.

В самом деле, если $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, то $x \in A_i$ при некотором $i \in I$. Тогда существует шар $U_r(x) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Если $x \in \bigcap_{k=1}^n B_k$, то $x \in B_k$ при $k = 1,\ldots,n$. Тогда существуют шары $U_{r_k}(x) \subset B_k$ при $k = 1,\ldots,n$. Пусть $r \doteqdot \min_{1\leqslant k\leqslant n} r_k$, тогда $U_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^n B_k$. Кроме того, по определению система всех открытых шаров $U_r(x) \subset X$ образует базу топологии метрического пространства.

2. *Топология произведения* $X \doteqdot X_1 \times \ldots \times X_n$ *метрических пространств* (X_k,ρ_{X_k}) *определяется метрикой* $\rho_X(x,y) \doteqdot \rho_{X_1}(x_1,y_1) + \ldots + \rho_{X_n}(x_n,y_n)$ *при все* $x,y \in X$.

Метрику в произведении $X_1 \times \ldots \times X_n = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid x_k \in X_k,\, k = 1,\ldots,n\}$ можно определить другим эквивалентным способом, например, по формуле

$$\rho'_X(x,y)) \doteqdot \sqrt{\rho^2_{X_1}(x_1,y_1) + \ldots + \rho^2_{X_n}(x_n,y_n)} \text{ при всех } x,y \in X.$$

Применяя элементарное неравенство $\rho_X(x,y)/n \leqslant \rho'_X(x,y) \leqslant n\rho_X(x,y)$, легко доказать, что топология X в метрике ρ_X совпадает с топологией X в метрике ρ'_X.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *топологически непрерывным*, если для любого $A \in \tau_Y$ прообраз $f^{-1}(A) \in \tau_X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *топологически открытым*, если для любого $A \in \tau_X$ образ $f(A) \in \tau_Y$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно одновременно является биективным, топологически непрерывным и открытым отображением.

Теорема. *Пусть* (X,ρ_X) *и* (Y,ρ_Y) *являются метрическими пространствами. Тогда следующие условия непрерывности отображения эквивалентны:*

a) *отображение* $f : X \to Y$ *топологически непрерывно;*

b) *для каждого* $x \in X$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$*, т.ч. для всех* $y \in X$*:* $\rho_X(x,y) < \delta$ *выполняется неравенство* $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$*;*

c) *для любой сходящейся последовательности* $x_n \to x$ *в* X *ее образ является сходящейся последовательностью* $f(x_n) \to f(x)$ *в* Y.

Доказательство. Пусть выполнено условие (a) и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $x \in X$ существует шар $\boldsymbol{U}_\delta(x) \subset f^{-1}(\boldsymbol{U}_\varepsilon(f(x)))$, что равносильно (b). Пусть выполнено (b) и последовательность сходится $x_n \to x$ в X, т.е. для заданного $\delta > 0$ существует N, т.ч. $\rho_X(x,x_n) < \delta$ для всех $n \geqslant N$. В силу (b) выполняется $\rho_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Отсюда $f(x_n) \to f(x)$, т.е. выполнено (c). Пусть $A \subset Y$ замкнутое множество. Если $x_n \in f^{-1}(A)$ и $x_n \to x$, то по условию (c) получим $f(x_n) \to f(x)$ и из замкнутости $f(x) \in A$, т.е. $x \in f^{-1}(A)$. Поэтому прообраз замкнутого множества замкнут. Это равносильно тому, что прообраз открытого множества открыт. □

Определение. Пара $(\boldsymbol{E},\rho)$ называется *метрическим линейным пространством*, если $\boldsymbol{E}$ линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, в котором определена метрика $\rho(x,y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

a) метрика инвариантна, т.е. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$ при всех $x,y,z \in \boldsymbol{E}$;

b) операция умножения $f : \mathbb{F} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, где $f(\lambda, x) \doteqdot \lambda x$, непрерывна.

Полное метрическое линейное пространство называется *пространством Фреше*.

Функция $\|x\| \doteqdot \rho(x,0)$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ называется *квазинормой*. Она удовлетворяет неравенству треугольника $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, симметрична $\|-x\| = \|x\|$ и не вырождена, т.е. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Однако свойство однородности $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ может не выполняться.

Лемма. *В метрическом линейном пространстве* $(\boldsymbol{E},\rho)$ *операция сложения является непрерывной. Каждое нормированное пространство* $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ *является метрическим линейным пространством.*

Доказательство. Непрерывность операции сложения $x+y$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ доказывается при помощи неравенства треугольника:

$$\|(x+y)-(x_0+y_0)\| \leqslant \|x-x_0\| + \|y-y_0\| < \varepsilon, \text{ если } \|x-x_0\| < \varepsilon/2 \text{ и } \|y-y_0\| < \varepsilon/2.$$

Для доказательства непрерывности операции умножения λx в нормированном пространстве $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ достаточно применить следующее неравенство:

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leqslant |\lambda - \lambda_0|\,\|x-x_0\| + |\lambda-\lambda_0|\,\|x_0\| + |\lambda_0|\,\|x-x_0\| < \varepsilon,$$

если $|\lambda_0| < a$, $\|x_0\| < b$, $\|x-x_0\| < \varepsilon/3a$ и $|\lambda-\lambda_0| < \varepsilon/3b < a$. □

Определение. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) являются метрическими пространствами. Отображение $f:X\to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\rho_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$ для всех $x,y\in X$: $\rho_X(x,y)<\delta$.

Система $\{f_i\}_{i\in I}$ отображений $f_i:X\to Y$ называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что выполняется неравенство $\rho_Y(f_i(x),f_i(y))<\varepsilon$ для всех $x,y\in X$: $\rho_X(x,y)<\delta$ и для всех индексов $i\in I$.

Пример 1. Говорят, что отображение $f:X\to Y$ удовлетворяет *условию Ли́пшица*, если существует $c>0$, т.ч. $\rho_Y(f(x),f(y))\leqslant c\rho_X(x,y)$ при всех $x,y\in X$. Такое отображение, очевидно, является равномерно непрерывным.

Метрика $\rho:X\times X\to\mathbb{R}_+$ является равномерно непрерывной функцией в (X,ρ). Для доказательства нужно применить неравенство треугольника

$$|\rho(x,y)-\rho(x_0,y_0)|\leqslant|\rho(x,y)-\rho(x_0,y)|+|\rho(x_0,y)-\rho(x_0,y_0)|\leqslant\rho(x,x_0)+\rho(y,y_0).$$

Определение. Множество $A\subset\boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ называется *ограниченным*, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое число $\lambda>0$, что $\lambda A\subset\boldsymbol{U}_\varepsilon(0)$, т.е. выполняется неравенство $\|\lambda x\|<\varepsilon$ для всех $x\in A$.

1. *Ограниченное множество $A\subset\boldsymbol{E}$ содержится в некотором шаре $\boldsymbol{U}_r(0)$. В нормированном пространстве множество является ограниченным тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре.*

В самом деле, по определению существует $\lambda>0$, т.ч. $\|\lambda x\|<\delta$ при всех $x\in A$. Тогда в силу непрерывности операции умножения в нуле $\|x\|\leqslant n\|\lambda x/n\lambda\|<n\varepsilon\doteqdot r$ при всех $x\in A$ и достаточно больших $n\in\mathbb{N}$. Обратно, если $\|x\|<r$ при всех $x\in A$, то по свойству однородности нормы $\|\lambda x\|=\lambda\|x\|<\varepsilon$ при всех $x\in A$ и $0<\lambda<\varepsilon/r$.

2. *Всякая сходящаяся последовательность $x_n\to x$ является ограниченной.*

Из непрерывности операции умножения в нуле существуют $\delta>0$ и $N\in\mathbb{N}$, т.ч. $\|\lambda(x_n-x)\|<\varepsilon/2$ при всех $n>N$ и $0<\lambda<\delta$. А из непрерывности этой операции в нуле по переменной λ получим $\|\lambda x\|<\varepsilon/2$ и $\|\lambda(x_n-x)\|<\varepsilon/2$ при $n=1,\ldots,N$ и при некотором $0<\lambda<\delta$. Поэтому $\|\lambda x_n\|\leqslant\|\lambda x\|+\|\lambda(x_n-x)\|<\varepsilon$ при всех n.

Определение. Отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *линейным*, если выполняются следующие условия:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad f(\lambda x)=\lambda f(x)\quad\text{при всех } x,y\in\boldsymbol{E} \text{ и } \lambda\in\mathbb{F}.$$

Отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ метрических линейных пространств $(\boldsymbol{E},\rho_E)$ и $(\boldsymbol{F},\rho_F)$ называется *ограниченным*, если для любого ограниченного множества $A\subset\boldsymbol{E}$ его образ $f(A)\subset\boldsymbol{F}$ является ограниченным множеством.

Теорема. *Для линейного отображения $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ метрических линейных пространств следующие условия эквивалентны: a) отображение непрерывно; b) отображение равномерно непрерывно; c) отображение ограничено.*

Доказательство. Если f непрерывно в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| < \varepsilon$ при $\|x-y\| < \delta$, т.е. f равномерно непрерывно.

Пусть $A \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством. Тогда для $\delta > 0$ существует $\lambda > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \delta$ при всех $x \in A$. Отсюда в силу непрерывности f в нуле получим $\|\lambda f(x)\| = \|f(\lambda x)\| < \varepsilon$ при всех $x \in A$. Следовательно, образ $f(A)$ ограничен.

Пусть $x_n \to 0$. Выберем последовательность n_k, т.ч. $\|x_n\| < 1/k^2$ при всех $n \geqslant n_k$. Положим $\lambda_n \doteqdot k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Тогда получим $\lambda_n \to \infty$ и $\lambda_n x_n \to 0$, поскольку $\|\lambda_n x_n\| \leqslant \lambda_n \|x_n\| < 1/k$ при всех $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Поэтому $\{\lambda_n x_n\}$ ограничена, а в силу условия (c) $\{f(\lambda_n x_n)\}$ ограничена. Тогда по определению ограниченного множества $f(x_n) = f(\lambda_n x_n)/\lambda_n \to 0$. Таким образом, отображение f непрерывно в нуле. □

Теорема (принцип равностепенной непрерывности). *Пусть дана система $\{f_i\}_{i \in I}$ непрерывных линейных отображений $f_i : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ пространства Фреше́ $(\boldsymbol{E}, \rho_E)$ в метрическое линейное пространство $(\boldsymbol{F}, \rho_F)$ и для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ множества $M_x \doteqdot \{y = f_i(x) \mid i \in I\}$ являются ограниченными в пространстве $\boldsymbol{F}$. Тогда эта система отображений $\{f_i\}_{i \in I}$ равностепенно непрерывна.*

Доказательство. При заданном $\varepsilon > 0$ рассмотрим замкнутые множества

$$B_n \doteqdot \bigcap_{i \in I} \Big\{ x \in \boldsymbol{E} \Big| \Big\| \frac{f_i(x)}{n} \Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Big\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В силу ограниченности M_x существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|f_i(x)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $i \in I$. Поэтому $\boldsymbol{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Отсюда по теореме Бэ́ра существуют $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $y \in \boldsymbol{E}$ т.ч. $\boldsymbol{U}_r(y) \subset B_n$. Тогда имеем $\|f_i(z+y)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $z \in \boldsymbol{U}_r$ и $i \in I$. Используя линейность отображений и неравенство треугольника для квазинормы, получим

$$\Big\| \frac{f_i(z)}{n} \Big\| \leqslant \Big\| \frac{f_i(z+y)}{n} \Big\| + \Big\| \frac{f_i(y)}{n} \Big\| \leqslant \varepsilon \text{ при всех } z \in \boldsymbol{U}_r \text{ и } i \in I.$$

Если $z \in \boldsymbol{U}_{r/n}$, то в силу неравенства треугольника $\|nz\| \leqslant n\|z\| < r$, т.е. $nz \in \boldsymbol{U}_r$. Таким образом, выполняются неравенства $\|f_i(x+z) - f(x)\| = \|f_i(nz)/n\| \leqslant \varepsilon$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, $z \in \boldsymbol{U}_\delta$ и $i \in I$, где $\delta \doteqdot r/n$. □

Следствие. *Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ задана инвариантная метрика $\rho(x,y)$ и операция умножения $f(\lambda, x) = \lambda x$ является непрерывной по каждой переменной $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \boldsymbol{E}$ в отдельности. Тогда она является непрерывной по совокупности переменных $(\lambda, x) \in \mathbb{F} \times \boldsymbol{E}$.*

Проверим непрерывность операции умножения $f(\lambda, x) = \lambda x$ в точке (λ_0, x_0). В силу неравенства $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leqslant \|(\lambda - \lambda_0)(x - x_0)\| + \|(\lambda - \lambda_0)x_0\| + \|\lambda_0(x - x_0)\|$ нам достаточно доказать непрерывность в точке $(0,0)$. Для этого следует рассмотреть систему отображений $f_x : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, где $f_x(\lambda) \doteqdot \|\lambda x\|$ и $\|x\| \leqslant \delta$, а затем заметить, что теорема остается верной, если вместо условия линейности использовать следующие свойства этих функций: $f_x(\lambda + \mu) \leqslant f_x(\lambda) + f_x(\mu)$ и $f_x(n\lambda) \leqslant n f_x(\lambda)$.

3 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и задано число $\varepsilon > 0$.

Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью множества* $M \subset X$, если имеет место включение $M \subset \bigcup_{x\in A} S_\varepsilon(x)$, т.е. для любого $y \in M$ найдется $x \in A$, т.ч. $\rho(x,y) \leqslant \varepsilon$.

Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным* (или *предкомпактным*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ множества M.

1. *Вполне ограниченное множество $M \subset X$ содержится в некотором шаре $S_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) \leqslant r\}$.*

Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ образует 1-сеть множества M и $r_1 \doteqdot \max_{2\leqslant k\leqslant n} \rho(x_1,x_k) + 1$. Тогда для каждого $y \in M$ существует k, т.ч. $\rho(x_1,y) \leqslant \rho(x_1,x_k) + \rho(x_k,y) \leqslant r_1$. Отсюда вытекает включение $M \subset S_{r_1}(x_1)$.

2. *Если множество $M \subset X$ является вполне ограниченным, то замыкание $\overline{M}$ будет вполне ограниченным.*

Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ образует ε-сеть множества M. Так как $M \subset \bigcup_{k=1}^n S_\varepsilon(x)$, то из замкнутости объединения шаров следует $\overline{M} \subset \bigcup_{k=1}^n S_\varepsilon(x)$, т.е. A есть ε-сеть $\overline{M}$.

3. *Всякое вполне ограниченное множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ является ограниченным.*

Пусть $\varepsilon > 0$. По непрерывности операции умножения λx существуют $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ при всех $0 < \lambda < \delta$ и $\|x\| \leqslant \delta$. Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ является δ-сетью множества M. Выберем величину $0 < \lambda < \delta$, т.ч. $\|\lambda x_k\| < \varepsilon/2$ при всех $k = 1,\ldots,n$. Тогда для каждого $x \in M$ существует k, т.ч. $\|\lambda x\| \leqslant \|\lambda x_k\| + \|\lambda(x - x_k)\| < \varepsilon$.

Пример 1. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда ограничено. Необходимость этого утверждения следует из свойства 1. Докажем достаточность. Рассмотрим куб $[a,b]^n$, содержащий множество M. Разобьем куб на кубики с ребром $\delta \doteqdot (b-a)/k$. Тогда вершины кубиков $\{x_j\}_{j=1}^m$ образуют ε-сеть множества M, где $m = (k+1)^n$ и $\varepsilon = \sqrt{n}\delta/2$ — половина диагонали кубика.

Определение. Рассмотрим несколько определений для свойства компактности множества $K \subset X$ в метрическом пространстве (X,ρ):

a) множество $K \subset X$ называется *компактным*, если всякое открытое покрытие $K \subset \bigcup_{i\in I} B_i$, где $\mathring{B}_i = B_i$, имеет конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{k=1}^n B_{i_k}$, где $i_k \in I$;

b) множество $K \subset X$ называется *счетно компактным*, если всякое бесконечное подмножество $A \subset K$ имеет предельную точку $x \in \acute{A}$, т.ч. $x \in K$;

c) множество $K \subset X$ называется *секвенциально компактным*, если для всякой последовательности $\{x_n\} \subset K$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k} \to x$ и $x \in K$.

Теорема (Ха́усдорфа). *Множество $K \subset X$ компактно в том и только в том случае, когда оно d) вполне ограничено и полно.*

Докажем, что в произвольном метрическом пространстве условия компактности (a), (b), (c), (d) равносильны друг другу и справедлива теорема Ха́усдорфа.

$(a) \Rightarrow (b)$. Пусть $A \subset K$ бесконечно. Если $A' \cap K = \emptyset$ пусто, то для всякой точки $x \in K$ существует $r > 0$, т.ч. $U_r(x) \cap A$ конечно. Так как шары $U_r(x)$ покрывают K, то выбирая конечное подпокрытие, получим, что A конечно. Противоречие.

$(b) \Rightarrow (c)$. Пусть $A = \{x_n\}$ последовательность различных точек множества K. По условию существует точка $x \in A' \cap K$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$. Отсюда следует сходимость $x_{n_k} \to x \in K$.

$(c) \Leftrightarrow (d)$. Полнота K очевидно вытекает из (c). Докажем вполне ограниченность. Пусть $\varepsilon > 0$ и точка $x_0 \in K$. Тогда существует точка $x_1 \in K$, т.ч. $\rho(x_1,x_0) > \varepsilon$, иначе точка $\{x_0\}$ образует ε-сеть в K. Аналогично, существует точка $x_2 \in K$, т.ч. $\rho(x_2,x_0) > \varepsilon$ и $\rho(x_2,x_1) > \varepsilon$, иначе $\{x_0,x_1\}$ образуют ε-сеть в K, и т.д. По индукции существует $x_n \in K$, т.ч. $\rho(x_n,x_k) > \varepsilon$ при $k = 1,\ldots,n-1$. Если процесс выбора точек x_n оборвется на некотором шаге n, то $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ образует конечную ε-сеть K. Иначе последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

Обратно, пусть $\{x_n\} \subset K$. В силу условия вполне ограниченности существует конечное покрытие K шарами радиуса $r_1 = 1$. Следовательно, найдется шар $S_{r_1}(y_1)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$. Аналогично существует конечное покрытие K шарами радиуса $r_2 = 1/2$ и найдется шар $S_{r_2}(y_2)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$, и т.д.

По индукции при $r_k = 1/k$ существует подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$, содержащаяся в некотором шаре $S_{r_k}(y_k)$. Обозначим через $z_n \doteqdot x_n^{(n)}$ диагональную подпоследовательность. Так как $\rho(z_n,z_m) \leqslant \rho(z_n,y_n) + \rho(y_n,z_m) \leqslant 2/n$ при $m > n$, то $\{z_n\}$ есть последовательность Коши. В силу полноты она имеет предел в K.

$(d) \Rightarrow (a)$. Пусть задано открытое покрытие $K \subset \bigcup_{i\in I} B_i$. Докажем вначале, что существует $\varepsilon > 0$, т.ч. для любого $x \in K$ найдется такой индекс $i \in I$, что $S_\varepsilon(x) \subset B_i$. Предположим обратное. Тогда существуют $x_n \in K$, т.ч. $S_{1/n}(x_n) \not\subset B_i$ при всех $i \in I$. По условию (c) найдется сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K$. Так как открытые множества B_i покрывают K, то существуют $i \in I$ и $r > 0$, т.ч. $S_r(x) \subset B_i$.

Выберем индекс $n_k > 2/r$, т.ч. $\rho(x_{n_k},x) < r/2$. Тогда имеют место включения $S_{1/n_k}(x_{n_k}) \subset S_{r/2}(x_{n_k}) \subset S_r(x) \subset B_i$, что противоречит предположению. Пусть теперь $A = \{y_k\}_{k=1}^{m}$ является ε-сетью в множестве K. По доказанному свойству найдется индекс $i_k \in I$, т.ч. $S_\varepsilon(y_k) \subset B_{i_k}$. Поэтому $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} S_\varepsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{i_k}$.

Следствие. *Замыкание $\overline{M}$ вполне ограниченного множества $M \subset X$ в полном метрическом пространстве (X,ρ) является компактным.*

Поскольку в полном метрическом пространстве замыкание множества является полным, то утверждение следует из теоремы Ха́усдорфа и свойства 2.

Свойства непрерывных отображений метрических пространств (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y).

1. *Всякое непрерывное отображение $f:X\to Y$, определенное на компакте X, является равномерно непрерывным.*

Предположим обратное. Тогда существуют $\varepsilon>0$ и последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т.ч. $\rho_X(x_n,y_n)<1/n$ и $\rho_Y(f(x_n),f(y_n))\geqslant\varepsilon$ при всех n. В силу компактности X найдутся сходящиеся подпоследовательности $x_{n_k}\to x$ и $y_{n_k}\to y$. Так как по условию $\rho_X(x_{n_k},y_{n_k})\to 0$, то $x=y$. В силу непрерывности отображения f существует n_k, т.ч. $\rho_Y(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))\leqslant\rho_Y(f(x_{n_k}),f(x)))+\rho_Y(f(y),f(y_{n_k}))<\varepsilon$. Противоречие.

2. *Образ $f(K)\subset Y$ любого компактного множества $K\subset X$ при непрерывном отображении $f:X\to Y$ является компактным множеством.*

Пусть $\{y_n\}\subset f(K)$. Тогда $y_n=f(x_n)$, где $x_n\in K$. В силу компактности K найдется сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k}\to x\in K$. Тогда из непрерывности f получим $y_{n_k}=f(x_{n_k})\to f(x)\in f(K)$. Поэтому образ $f(K)$ является компактным.

3. Теорема Алекса́ндрова. *Предположим, что X компактно, а отображение $f:X\to Y$ является биективным и непрерывным. Тогда обратное отображение $f^{-1}:Y\to X$ будет непрерывным.*

Для доказательства заметим, что всякое замкнутое множество $A\subset X$ является компактным. Отсюда в силу свойства 2 его образ $f(A)\subset Y$ является компактным. Поэтому образ любого замкнутого множества является замкнутым.

Теорема (принцип продолжения по непрерывности)**.** *Пусть $f:A\to Y$ является равномерно непрерывным отображением, определенным на всюду плотном подмножестве $A\subset X$ метрического пространства (X,ρ_X), со значениями в полном метрическом пространстве (Y,ρ_Y). Тогда существует только одно равномерно непрерывное отображение $g:X\to Y$, т.ч. $g(x)=f(x)$ при всех $x\in A$.*

Доказательство. В силу равномерной непрерывности отображения f для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\rho_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$ для всех $x,y\in A$: $\rho_X(x,y)<\delta$. Так как A всюду плотно в X, то для каждого $x\in X$ существуют $x_n\in A$, т.ч. $x_n\to x$.

Выберем число N, т.ч. $\rho_X(x_n,x_m)<\delta$ при всех $n,m\geqslant N$. Тогда $\rho_Y(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$. Поэтому $\{f(x_n)\}$ есть последовательность Коши и существует предел $g(x)\doteqdot\lim f(x_n)$. Если взять другую сходящуюся последовательность $y_n\to x$, то, полагая $z_n\doteqdot x_k$ при $n=2k-1$ и $z_n\doteqdot y_k$ при $n=2k$, мы получим, что $z_n\to x$. Тогда $g(x)=\lim f(z_n)=\lim f(x_n)=\lim f(y_n)$. Значит $g(x)$ не зависит от выбора сходящейся последовательности и определение отображения g единственно.

Пусть $x,y\in X$ и $\rho_X(x,y)<\delta$. Выберем последовательности точек $x_n,y_n\in A$, т.ч. $x_n\to x$ и $y_n\to y$. Тогда существует N, т.ч. $\rho_X(x_n,y_n)<\delta$ при всех $n\geqslant N$. В силу равномерной непрерывности отображения f имеем неравенство $\rho_Y(f(x_n),f(y_n))<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $\rho_Y(g(x),g(y))\leqslant\varepsilon$. Таким образом, отображение $g:X\to Y$ равномерно непрерывно. □

Пример 2. Рассмотрим пространство ℓ_p последовательностей $x=\{x_n\}$ действительных или комплексных чисел $x_n \in \mathbb{F}$, имеющих конечную величину

$$\|x\| \doteqdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, & \text{если } 0<p<1 \text{ (квазинормы)};\\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty \text{ (нормы)}. \end{cases}$$

Пространство ℓ_p при $0<p<1$ является метрическим линейным пространством, а при $1 \leqslant p<\infty$ нормированным пространством. Для каждого $x \in \ell_p$ обозначим через $s_m(x)=y$ финитную последовательность $y=\{y_n\}$, т.ч. $y_n=x_n$ при $n \leqslant m$ и $y_n=0$ при $n>m$. Ясно, что $s_m(x) \to x$ сходится в метрике ℓ_p при $m \to \infty$, т.к.

$$\|x-s_m(x)\| = \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p,\ 0<p<1; \quad \|x-s_m(x)\| = \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p},\ 1 \leqslant p<\infty.$$

Критерий предкомпактности в ℓ_p. *Множество $M \subset \ell_p$ предкомпактно в ℓ_p тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

a) множество M ограничено в пространстве ℓ_p;

b) для любого $\varepsilon>0$ существует $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x-s_m(x)\|<\varepsilon$ при всех $x \in M$.

Необходимость. Ограниченность $M \subset \ell_p$ вытекает из вполне ограниченности. Докажем второе условие. Пусть $A=\{x^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ является $\varepsilon/3$-сетью множества M. Для каждого k выберем число $m_k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x^{(k)}-s_{m_k}(x^{(k)})\|<\varepsilon/3$, а затем возьмем среди них наибольшее $m=\max_{1\leqslant k\leqslant l} m_k$. Поскольку A является $\varepsilon/3$-сетью M, то для любого $x \in M$ найдется k, т.ч. $\|x-x^{(k)}\| \leqslant \varepsilon/3$. По неравенству треугольника

$$\|x-s_m(x)\| \leqslant \|x-x^{(k)}\| + \|x^{(k)}-s_m(x^{(k)})\| + \|s_m(x^{(k)})-s_m(x)\| < \varepsilon$$

при всех $x \in M$, т.е. выполнено второе условие (b).

Достаточность. Пусть $\varepsilon>0$ и $M_m \doteqdot \{y=s_m(x) \mid x \in M\}$, где число m определяется из второго условия для $\varepsilon/3$. Так как множество M_m содержится в конечномерном подпространстве и является ограниченным в ℓ_p, то оно вполне ограничено в ℓ_p. Это доказывается также как в примере 1, используя элементарное неравенство

$$\Big(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} |x_n|^p\Big)^{1/p} \leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant m} |x_n| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^p\Big)^{1/p} \text{ при всех } 0<p<\infty.$$

Для заданного $\varepsilon>0$ обозначим через $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ $\varepsilon/3$-сеть множества M_m, а через $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ элементы прообраза $y^{(k)}=s_m(x^{(k)})$. Тогда для любого $x \in M$ найдется k, т.ч. $\|s_m(x)-s_m(x^{(k)})\| \leqslant \varepsilon/3$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\|x-x^{(k)}\| \leqslant \|x-s_m(x)\| + \|s_m(x)-s_m(x^{(k)})\| + \|s_m(x^{(k)})-x^{(k)}\| < \varepsilon\,.$$

Таким образом, $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{l}$ образует ε-сеть M, т.е. M вполне ограничено в ℓ_p.

4 КРИТЕРИИ ПРЕДКОМПАКТНОСТИ

Рассмотрим пространство $\boldsymbol{B}(X)$ ограниченных функций $f : X \to \mathbb{F}$ на множестве X с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in X}|f(x)|$. Пусть задано множество $A \subset X$.

Определение. Величина верхней грани $O(f,A) \doteqdot \sup_{x,y\in A}|f(x)-f(y)|$ называется *колебанием функции* f на множестве A. Колебание функции $O(f,A)$ совпадает с диаметром множества $f(A)$ в пространстве $\mathbb{F}$, т.е. $O(f,A) = \operatorname{diam} f(A)$.

Теорема (Ве́реш). *Множество $M \subset \boldsymbol{B}(X)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда M ограничено и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $X = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, т.ч. $O(f,A_k) < \varepsilon$ для всех $f \in M$ и $k = 1,\dots,n$.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность $M \subset \boldsymbol{B}(X)$ вытекает из вполне ограниченности. Докажем существование указанного разбиения в X. По условию вполне ограниченности для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\varepsilon/3$-сеть $\{f_j\}_{j=1}^{m}$ множества M, т.е. для каждого $f \in M$ существует j, т.ч. $|f(x)-f_j(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in X$.

Определим отображение $F : X \to \mathbb{F}^m$ по формуле $F(x) \doteqdot \{f_j(x)\}_{j=1}^{m}$. Поскольку множество $F(X) \subset \mathbb{F}^m$ является ограниченным, то оно вполне ограничено. Поэтому существует разбиение $F(X) = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$, т.ч. диаметр $\operatorname{diam} B_k < \varepsilon/3$ при $k = 1,\dots,n$. Пусть $A_k \doteqdot F^{-1}(B_k)$, тогда при всех $f \in M$ и $x,y \in A_k$ получим

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f_j(x)| + |f_j(x)-f_j(y)| + |f_j(y)-f(y)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $O(f,A_k) < \varepsilon$ при всех $f \in M$ и $k = 1,\dots,n$.

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ и разбиение в теореме $X = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ соответствует числу $\varepsilon/2$. Выберем точки $x_k \in A_k$ при $k = 1,\dots,n$ и для каждой $f \in M$ определим функции $h_f(x) \doteqdot y_k$ при $x \in A_k$, где $y_k \doteqdot f(x_k)$. Тогда по условию $\|f-h_f\| < \varepsilon/2$.

Заметим, что каждой функции $h_f(x)$ взаимно однозначно соответствует набор чисел $y = \{y_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{F}^n$. Соответствующее множество $Y \subset \mathbb{F}^n$ будет ограниченным и, следовательно, является вполне ограниченным. Обозначим через $\{h_j\}_{j=1}^{m}$ элементы прообраза $\varepsilon/2$-сети множества Y. Тогда для каждой функции $f \in M$ существует индекс j, т.ч. $\|f-h_j\| \leqslant \|f-h_f\| + \|h_f-h_j\| < \varepsilon$. Таким образом, система функций $\{h_j\}_{j=1}^{m}$ образует ε-сеть множества M. $\square$

Рассмотрим пространство $\boldsymbol{C}(K)$ непрерывных функций $f : K \to \mathbb{F}$ на компактном множестве $K \subset X$ метрического пространства (X,ρ) с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in K}|f(x)|$.

1. *Всякая функция $f \in \boldsymbol{C}(K)$ равномерно непрерывна.*

2. *Пространство $\boldsymbol{C}(K)$ является подпространством $\boldsymbol{B}(K)$.*

3. *Пространство $\boldsymbol{C}(K)$ является банаховым пространством.*

Если функция $f \in \boldsymbol{C}(K)$, то модуль $|f| \in \boldsymbol{C}(K)$. Следовательно, образ $|f(K)| \subset \mathbb{R}_+$ является компактом. Поэтому найдется точка $x_0 \in K$, т.ч. $|f(x_0)| = \sup_{x\in K}|f(x)|$. Таким образом, функция является ограниченной, т.е. $f \in \boldsymbol{B}(K)$.

Если последовательность функций $\{f_n\} \subset C(K)$ сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$, то функция $f \in C(K)$ непрерывна. В самом деле, выберем n, т.ч. $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ при всех $x \in K$. Из непрерывности f_n имеем $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ при всех $x \in K$, $\rho(x,x_0) < \delta$. Тогда $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ при всех $x \in K$, $\rho(x,x_0) < \delta$. Таким образом, подпространство $C(K) \subset B(K)$ будет замкнутым. Так как пространство $B(K)$ полно, то $C(K)$ также полно.

Теорема (Арцéла–Аскóли). *Множество $M \subset C(K)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность M в $C(K)$ вытекает из вполне ограниченности. Докажем равностепенную непрерывность. По условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/3$-сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$ множества M. Следовательно, для любого $f \in M$ существует k, т.ч. $|f(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in K$. Поскольку функции f_k равномерно непрерывны, то существует $\delta_k > 0$, т.ч. $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$ при всех $x,y \in K$, $\rho(x,y) < \delta_k$. Обозначим через $\delta \doteqdot \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta_k$, тогда

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

при всех $x,y \in K$, $\rho(x,y) < \delta$. Таким образом, M равностепенно непрерывно.

Достаточность. Из условия равностепенной непрерывности M для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ для всех $f \in M$ и $x,y \in K$, $\rho(x,y) \leqslant \delta$. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ является δ-сетью компакта K, а $F : M \to \mathbb{F}^n$ обозначает отображение, заданное по формуле $F(f) \doteqdot \{f(x_j)\}_{j=1}^m$. Поскольку $F(M) \subset \mathbb{F}^m$ ограничено, то оно вполне ограничено. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset M$ обозначает элементы прообраза $\varepsilon/3$-сети $\{F(f_k)\}_{k=1}^n$ множества $F(M)$. Тогда для любого $x \in K$ выберем j, т.ч. $\rho(x,x_j) \leqslant \delta$ и для любого $f \in M$ выберем k, т.ч. $\|F(f) - F(f_k)\|_{\mathbb{F}^m} \leqslant \varepsilon/3$. Отсюда получим

$$|f(x) - f_k(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_k(x_j)| + |f_k(x_j) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{f_k\}_{k=1}^n$ является ε-сетью множества M. □

Определение. Два нормированных пространства $(\boldsymbol{E}, p_{\boldsymbol{E}})$ и $(\boldsymbol{F}, p_{\boldsymbol{F}})$ называются *изоморфными* или *эквивалентными* $(\boldsymbol{E}, p_{\boldsymbol{E}}) \sim (\boldsymbol{F}, p_{\boldsymbol{F}})$, если найдется биективное линейное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, для которого f и f^{-1} непрерывны.

Два нормированные пространства $(\boldsymbol{E}, p_{\boldsymbol{E}})$ и $(\boldsymbol{F}, p_{\boldsymbol{F}})$ называются *изометрически изоморфными* и обозначаются через $(\boldsymbol{E}, p_{\boldsymbol{E}}) \simeq (\boldsymbol{F}, p_{\boldsymbol{F}})$, если найдется биективное, линейное и изометричное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, т.е. для которого выполняется равенство $\|f(x)\|_{\boldsymbol{F}} = \|x\|_{\boldsymbol{E}}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Если нормированные пространства изоморфны и одно из них является полным или сепарабельным, то другое также будет соответственно полным или сепарабельным. Изометрически изоморфные пространства являются изоморфными.

Из следующей теоремы вытекает, что нормированные пространства одной и той же конечной размерности являются изоморфными.

Теорема. *Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности $\dim\boldsymbol{E}=n$ над полем $\mathbb{F}$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{F}^n$.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ обозначает базис в $\boldsymbol{E}$, где $n=\dim\boldsymbol{E}$. Тогда для каждого $x\in\boldsymbol{E}$ найдется единственный элемент $\lambda \doteqdot \{\lambda_k\}_{k=1}^n\in\mathbb{F}^n$, т.ч. $x=\sum_{k=1}^n\lambda_k e_k$. Определим отображение $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}^n$ по формуле $f(x)\doteqdot\lambda$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Тогда f является линейным и биективным. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda)\doteqdot\|x\|$. Применяя неравенство треугольника и неравенство Коши, получим

$$|\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda')|\leqslant\|x-x'\|\leqslant\sum_{k=1}^n|\lambda-\lambda'|\,\|e_k\|\leqslant\|\lambda-\lambda'\|_{\mathbb{F}^n}\Big(\sum_{k=1}^n\|e_k\|^2\Big)^{1/2}.$$

Поэтому функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{F}^n$ величина нижней грани $\inf_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1}\varphi(\lambda)=a$ положительна, а величина верхней грани $\sup_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1}\varphi(\lambda)=b$ конечна. В силу свойства однородности функции $\varphi(\lambda)$ получим, что $a\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}\leqslant\|x\|\leqslant b\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda\in\mathbb{F}^n$. Таким образом, отображения f и f^{-1} являются ограниченными и значит будут непрерывны. □

Следствие 1. *Линейное подпространство L конечной размерности $n=\dim L$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ является полным. Всякое его ограниченное и замкнутое подмножество $M\subset L$ является компактным.*

Утверждение вытекает из теоремы и полноты евклидова пространства $\mathbb{F}^n$.

Следствие 2. *В линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ конечной размерности $n=\dim\boldsymbol{E}$ любые две нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ эквивалентны $\|x\|\sim\|x\|'$, т.е. существует такое число $c>0$, что $c^{-1}\|x\|\leqslant\|x\|'\leqslant c\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.*

Пусть $f(x)=\lambda$ обозначает изоморфизм $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}^n$, указанный выше в теореме. Тогда, используя обозначения теоремы, можно взять $c\doteqdot\max\{b'a^{-1},ba'^{-1}\}$, т.к.

$$\|x\|'\leqslant b'\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}\leqslant b'a^{-1}\|x\|,\quad \|x\|\leqslant b\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}\leqslant ba'^{-1}\|x\|'.$$

Определение. Пусть $L\subset\boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства. Величина $\rho(x,L)\doteqdot\inf_{y\in L}\|x-y\|$ называется *наилучшим приближением* элемента $x\in\boldsymbol{E}$ подпространством L. Всякий элемент $y_0\in L$, для которого $\rho(x,L)=\|x-y_0\|$, называется *элементом наилучшего приближения.*

Теорема (существования)**.** *Пусть подпространство $L\subset\boldsymbol{E}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность $n=\dim L$. Тогда для каждого $x\in\boldsymbol{E}$ существует элемент $y_0\in L$ наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $x\in\boldsymbol{E}$, тогда имеем $\rho(x,L)\leqslant\|x\|$. Рассмотрим множество $K_x\doteqdot\{y\in L\mid \|x-y\|\leqslant\|x\|\}$. Поскольку K_x является замкнутым, ограниченным и содержится в конечномерном пространстве, то в силу следствия 1 оно компактно. Поэтому непрерывная функция $\varphi_x(y)\doteqdot\|x-y\|$ будет достигать своей нижней грани на компакте K_x. Следовательно, существует $y_0\in K_x$, т.ч. $\varphi_x(y_0)=\inf_{y\in K_x}\varphi_x(y)$. □

Определение. Нормированное пространство называется *строго нормированным*, если равенство $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ выполняется в том и только в том случае, когда $x = \lambda y$ при некотором $\lambda \geqslant 0$.

Пример 1. Евклидово пространство $\mathbb{F}^n$ строго нормировано. Пространство $C[0,1]$ непрерывных функций не является строго нормированным, поскольку если взять $f(x) = 1$ и $g(x) = x$, то $\|f+g\| = \|f\| + \|g\| = 2$.

Теорема (единственности). *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ является подпространством строго нормированного пространства. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ может существовать не более одного элемента наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $\rho(x,L) = \|x - y_0\| = \|x - y_1\|$, где $y_0, y_1 \in L$. Тогда имеем

$$\rho(x,L) \leqslant \left\|x - \frac{y_0+y_1}{2}\right\| = \left\|\frac{x-y_0}{2} + \frac{x-y_1}{2}\right\| \leqslant \left\|\frac{x-y_0}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y_1}{2}\right\| = \rho(x,L).$$

Следовательно, вместо неравенств имеют место равенства. В силу условия строгой нормированности $x - y_1 = \lambda(x - y_0)$ при некотором $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 1$, то $y_0 = y_1$. Если $\lambda \neq 1$, то $x = (y_1 - \lambda y_0)/(1-\lambda) \in L$ и значит $x = y_0 = y_1$. □

Лемма (Рисса о почти перпендикуляре). *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым подпространством нормированного пространства. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x \in \boldsymbol{E} \setminus L$, т.ч. $\|x\| = 1$ и $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ при всех $y \in L$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \boldsymbol{E} \setminus L$, тогда $d \doteqdot \rho(x_0, L) > 0$. Выберем элемент $y_0 \in L$, т.ч. $\|x_0 - y_0\| < d/(1-\varepsilon)$. Тогда если $x \doteqdot (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$, то при всех $y \in L$ имеем

$$\|x - y\| = \left\|\frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y\right\| = \frac{\|x_0 - y_1\|}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon,$$

где элемент $y_1 \doteqdot y_0 + \|x_0 - y_0\| y \in L$. □

Теорема. *Замкнутый единичный шар $\boldsymbol{S} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ является компактным в том и только в том случае, когда пространство имеет конечную размерность $\dim \boldsymbol{E} < \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\dim \boldsymbol{E} = \infty$. Если точка $x_1 \in \boldsymbol{S}$ и $L_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1\}$ есть линейная оболочка x_1, то по лемме существует $x_2 \in \boldsymbol{S} \setminus L_1$, т.ч. $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Аналогично, если $L_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, x_2\}$ есть линейная оболочка x_1 и x_2, то существует $x_3 \in \boldsymbol{S} \setminus L_2$, т.ч. $\|x_3 - x_1\| > 1/2$, $\|x_3 - x_2\| > 1/2$ и т.д. По индукции имеем $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$ и существует $x_{n+1} \in \boldsymbol{S} \setminus L_n$, т.ч. $\|x_n - x_k\| > 1/2$ при $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. т.е. шар некомпактный.

Достаточность. Пусть $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$ — изоморфизм, где $n = \dim \boldsymbol{E}$. Тогда образ шара $f(\boldsymbol{S}) \subset \mathbb{F}^n$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{F}^n$. Поэтому $f(\boldsymbol{S})$ компактно в $\mathbb{F}^n$ и, следовательно, $\boldsymbol{S}$ компактно в силу непрерывности f^{-1}. □

5 МЕРА МНОЖЕСТВ

Пусть $\mathbf{2}^X$ — совокупность всех подмножеств $A \subset X$, включая пустое множество $\emptyset$. Непустое подмножество $S \subset \mathbf{2}^X$ называется *системой множеств* в X.

Определения. Система множеств S называется *кольцом*, если для всех множеств $A, B \in S$ она содержит объединение $A \cup B \in S$ и разность $A \setminus B \in S$.

Система множеств S называется *полукольцом*, если для всех множеств $A, B \in S$ она содержит пересечение $A \cap B \in S$, а разность $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$, где $B_k \in S$.

Множество $E \doteqdot \bigcup_{A \in S} A$ называется *единицей* системы S. Кольцо (полукольцо) S, содержащее единицу $E \in S$, называется *алгеброй* (*полуалгеброй*).

Кольцо (алгебра) S называется *σ-кольцом* (*σ-алгеброй*), если для всех $A_n \in S$ их счетное объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$. Кольцо (алгебра) S называется *δ-кольцом* (*δ-алгеброй*), если для всех $A_n \in S$ их счетное пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.

Нетрудно заметить, что всякое кольцо (алгебра) является является полукольцом (полуалгеброй), а всякое σ-кольцо (σ-алгебра) является кольцом (алгеброй). При этом каждая из этих систем содержит пустое множество $\emptyset$.

Обозначим через $\mathscr{R}(S)$ ($\mathscr{R}_\sigma(S)$) *минимальное кольцо* (*σ-кольцо*), содержащее систему S, а через $\mathscr{A}(S)$ ($\mathscr{A}_\sigma(S)$) *минимальную алгебру* (*σ-алгебру*), содержащую систему S. Поскольку пересечение колец (алгебр, σ-колец, σ-алгебр) является кольцом (соответственно алгеброй, σ-кольцом, σ-алгеброй), то указанная система множеств $\mathscr{R}(S)$ ($\mathscr{A}(S)$, $\mathscr{R}_\sigma(S)$, $\mathscr{A}_\sigma(S)$) получается в результате пересечения всех колец (соответственно алгебр, σ-колец, σ-алгебр), содержащих систему S.

Пусть $\tau \subset \mathbf{2}^X$ задает топологию метрического пространства (X, ρ). Минимальная σ-алгебра $\mathscr{B}(X) \doteqdot \mathscr{A}_\sigma(\tau)$, содержащая τ, называется *борелевской σ-алгеброй*, а ее элементы $A \in \mathscr{B}(X)$ называются *борелевскими множествами* в X. Обозначим через $\mathscr{B} \doteqdot \mathscr{B}(\mathbb{R})$ борелевскую σ-алгебру поля действительных чисел $\mathbb{R}$.

1. *Система множеств S является σ-алгеброй в том и только в том случае, когда она является δ-алгеброй.*

Для доказательства применяем следующие *формулы двойственности*:

$$E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(E \setminus A_n\right), \quad E \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E \setminus A_n\right).$$

2. *Система S является кольцом тогда и только тогда, когда для всех $A, B \in S$ она содержит пересечение $A \cap B \in S$ и симметрическую разность $A \triangle B \in S$.*

Утверждение вытекает из равенств $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \triangle B \doteqdot (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$, $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

3. *Пусть система S является полукольцом. Тогда для всех $A, B_k \in S$, $k = 1, \ldots, n$ следует, что разность $A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \bigsqcup_{j=1}^{m} C_l$, где $C_j \in S$, $j = 1, \ldots, m$.*

Предположим по индукции, что утверждение верно для n. Тогда получим

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k = \Big(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) \setminus B_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{m} C_i \setminus B_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} C_{ij}\,, \quad C_{ij} \in S\,.$$

Таким образом, утверждение верно для $n+1$.

Лемма. *Минимальное кольцо $\mathscr{R}(S)$ полукольца S состоит из всех конечных дизъюнктных объединений $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ элементов $A_k \in S$, $k = 1,\dots,n$.*

Доказательство. Пусть R обозначает систему множеств $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in S$. Очевидно, что $S \subset R \subset \mathscr{R}(S)$. Докажем, что R является кольцом. Пусть множества $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ и $B = \bigsqcup_{l=1}^{m} B_l$, где $A_k, B_l \in S$. Тогда из свойства 3 получим

$$A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} \big(A_k \setminus B\big) = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{l=1}^{m_l} C_{kl}\,, \quad C_{kl} \in S\,.$$

Кроме того, $A \cup B = \big(A \setminus B\big) \sqcup B$. Поэтому R будет кольцом и значит $R = \mathscr{R}(S)$. □

Определения. Функция $\varphi : S \to \mathbb{F}$, заданная на системе множеств S, называется *конечно-аддитивной* (*аддитивной*), если для всех n ($n = 2$) выполняется

$$\varphi\big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k) \ \text{ при всех } A_k \in S \text{ и } \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \in S\,.$$

Функция φ называется *σ-аддитивной* или *счетно-аддитивной*, если

$$\varphi\big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \ \text{ при всех } A_n \in S \text{ и } \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S\,.$$

Функция $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ называется *конечно-аддитивной мерой в X*, если S задает полукольцо множеств в X и функция $\mathfrak{m}$ является конечно-аддитивной.

Конечно-аддитивная мера $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ называется *σ-аддитивной мерой в X* или просто *мерой в X*, если функция $\mathfrak{m}$ является σ-аддитивной.

Мера $\mathfrak{m}' : S' \to \mathbb{R}_+$ называется *продолжением* меры $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$, если имеет место включение $S \subset S'$ и равенство $\mathfrak{m}'|_S = \mathfrak{m}$, т.е. $\mathfrak{m}'(A) = \mathfrak{m}(A)$ для всех $A \in S$.

Теорема. *Всякая мера $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$, заданная на полукольце S, имеет единственное продолжение $\mathfrak{m}' : \mathscr{R}(S) \to \mathbb{R}_+$ на минимальное кольцо $\mathscr{R}(S)$.*

Доказательство. Определим меру $\mathfrak{m}'(A) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k)$, если $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in S$. Если имеются два представления $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$, где $A_k, B_j \in S$, то

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} A_k \cap B_j\,, \quad \mathfrak{m}'(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}(A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}(B_j)\,,$$

т.е. определение меры $\mathfrak{m}'$ не зависит от представления множества $A \in \mathscr{R}(S)$.

Докажем σ-аддитивность функции $\mathfrak{m}'$. Пусть $A=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n$, где $A,A_n\in\mathscr{R}(S)$. Из леммы следует, что $A=\bigsqcup_{k=1}^{m}B_k$ и $A_n=\bigsqcup_{j=1}^{m_n}B_{nj}$, где $B_k,B_{nj}\in S$. Тогда имеем

$$B_k=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n\cap B_k=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{j=1}^{m_n}B_{nj}\cap B_k\,,\quad A_n=\bigsqcup_{k=1}^{m}B_k\cap A_n=\bigsqcup_{k=1}^{m}\bigsqcup_{j=1}^{m_n}B_k\cap B_{nj}\,.$$

В силу σ-аддитивности меры $\mathfrak{m}$ получим

$$\mathfrak{m}'(A)=\bigsqcup_{k=1}^{m}\mathfrak{m}(B_k)=\bigsqcup_{k=1}^{m}\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{j=1}^{m_n}\mathfrak{m}(B_{nj}\cap B_k)=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{k=1}^{m}\bigsqcup_{j=1}^{m_n}\mathfrak{m}(B_k\cap B_{nj})=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}'(A_n)\,.$$

Единственность продолжения меры $\mathfrak{m}$ на минимальное кольцо $\mathscr{R}(S)$ очевидна. $\square$

Рассмотрим свойства меры $\mathfrak{m}:S\to\mathbb{R}_+$, заданной на полукольце S. Продолжение меры $\mathfrak{m}$ на минимальное кольцо $\mathscr{R}(S)$ будем обозначать также через $\mathfrak{m}$.

1. *Мера пустого множества* $\mathfrak{m}(\emptyset)=0$, так как $\mathfrak{m}(\emptyset)=\mathfrak{m}(\emptyset\sqcup\emptyset)=2\mathfrak{m}(\emptyset)$.

2. *Монотонность: если* $A\supset\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n$, *где* $A,A_n\in S$, *то* $\mathfrak{m}(A)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}(A_n)$.

Пусть $A\setminus\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}A_n\right)=\bigsqcup_{j=1}^{m}B_j$, где $B_j\in S$. Тогда $A=\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}A_k\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{j=1}^{m}B_l\right)$ и

$$\mathfrak{m}(A)=\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{m}(A_k)+\sum_{j=1}^{m}\mathfrak{m}(B_j)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{m}(A_k)\to\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{m}(A_k)\ \text{при}\ n\to\infty\,.$$

3. *Полуаддитивность: если* $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, *где* $A,A_n\in S$, *то* $\mathfrak{m}(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}(A_n)$. *Конечно-аддитивная мера является конечно-полуаддитивной.*

Представим множество A в виде дизъюнктного объединения элементов $\mathscr{R}(S)$

$$A=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}B_n\,,\ \text{где}\ B_1\doteqdot A_1\cap A\ \text{и}\ B_n\doteqdot(A_n\cap A)\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k\cap A\right)\ \text{при}\ n>1\,.$$

Тогда имеем $\mathfrak{m}(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}(B_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}(A_n)$, т.к. мера σ-аддитивна и $B_n\subset A_n$.

4. *Непрерывность снизу: если* $A_n\nearrow A$ *и* $A_n,A\in S$, *то* $\lim_{n\to\infty}\mathfrak{m}(A_n)=\mathfrak{m}(A)$.

По условию $A_1\subset A_2\subset\ldots$ и $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Пусть $A_0\doteqdot\emptyset$ и $B_n\doteqdot A_n\setminus A_{n-1}$ при $n\geqslant1$. Тогда справедливо равенство $A=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}B_n$ и, следовательно, получаем

$$\mathfrak{m}(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\big(\mathfrak{m}(A_n)-\mathfrak{m}(A_{n-1})\big)=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{m}(A_n)\,.$$

5. *Если конечно-аддитивная мера* $\mathfrak{m}$ *непрерывна снизу, то она* σ*-аддитивна.*

Пусть $A=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n$, где $A,A_n\in S$. Положим $B_n\doteqdot\bigsqcup_{k=1}^{n}A_k$. Тогда имеем $B_n\nearrow A$ и, следовательно, в силу непрерывности снизу

$$\mathfrak{m}(A)=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{m}(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{m}(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{m}(A_k)\,.$$

6. *Непрерывность сверху: если* $A_n \searrow A$ *и* $A_n, A \in S$*, то* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n) = \mathfrak{m}(A)$.

По условию $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $B \doteqdot A_1 \setminus A$ и $B_n \doteqdot A_1 \setminus A_n$. Тогда

$$B_n \nearrow B, \quad \mathfrak{m}(A_1) - \mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \mathfrak{m}(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n).$$

7. *Если конечно-аддитивная мера* $\mathfrak{m}$ *непрерывна сверху, то она* σ*-аддитивна.*

Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in S$, и $B_n \doteqdot A \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right)$. Тогда получим $B_n \searrow \emptyset$ и значит предел мер равен $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = 0$, т.е. $\mathfrak{m}(A) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) = 0$.

Определение. Пусть $S \subset \mathbf{2}^X$ полукольцо подмножеств метрического пространства (X, ρ). Конечно-аддитивная мера $\mathfrak{m}: S \to \mathbb{R}_+$ называется *регулярной* в (X, ρ), если для каждого множества $A \in S$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $B, C \in S$, что замыкание $\overline{B}$ компактно, $\overline{B} \subset A \subset \mathring{C}$ и мера $\mathfrak{m}(C \setminus B) < \varepsilon$.

Теорема. *Регулярная мера* $\mathfrak{m}: S \to \mathbb{R}_+$ *является* σ*-аддитивной.*

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in S$. В силу свойства монотонности имеем неравенство $\mathfrak{m}(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$. Докажем обратное неравенство.

По условию регулярности для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $B, C, B_n, C_n \in S$, что $\overline{B}$ и $\overline{B_n}$ компактны, $\overline{B} \subset A \subset \mathring{C}$, $\overline{B}_n \subset A_n \subset \mathring{C}_n$, $\mathfrak{m}(C \setminus B) < \varepsilon/2$, $\mathfrak{m}(C_n \setminus B_n) < \varepsilon/2^n$. Так как $\overline{B} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{C}_k$, то в силу компактности получим $\overline{B} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathring{C}_k$ при некотором n. Из свойства конечной полуаддитивности следует, что $\mathfrak{m}(B) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(C_k)$. Тогда

$$\mathfrak{m}(A) \leqslant \mathfrak{m}(C) < \mathfrak{m}(B) + \varepsilon/2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(C_k) + \varepsilon/2 < \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(B_k) + \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) + \varepsilon,$$

т.е. выполняется обратное неравенство. Поэтому $\mathfrak{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$. □

Определение. Пусть $S \doteqdot \{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b\}$ полукольцо полуинтервалов в $\mathbb{R}$ и задана $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неубывающая функция. Функция $\mathfrak{m}_\alpha : S \to \mathbb{R}_+$, определенная по формуле $\mathfrak{m}_\alpha([a,b)) \doteqdot \alpha(b) - \alpha(a)$, называется *мерой Сти́лтьеса* в $\mathbb{R}$.

Функция $\mathfrak{m}_\alpha$ будет конечно-аддитивной мерой, т.к. если $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то $\mathfrak{m}_\alpha([a,b)) = \alpha(b) - \alpha(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}([x_{k-1}, x_k))$.

Теорема. *Мера Сти́лтьеса тогда и только тогда является* σ*-аддитивной, когда функция* $\alpha(x)$ *непрерывна слева, т.е.* $\alpha(x-0) = \alpha(x)$ *при всех* $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Необходимость. В силу σ-аддитивности мера $\mathfrak{m}_\alpha$ непрерывна сверху. Пусть $x_n \nearrow x$, т.е. $[x_n, x) \searrow \emptyset$. По условию непрерывности сверху получим, что $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}_\alpha([x_n, x)) = 0$ и $\lim \alpha(x_n) = \alpha(x) - \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}_\alpha([x_n, x)) = \alpha(x)$.

Достаточность. Докажем, что мера Сти́лтьеса $\mathfrak{m}_\alpha$ будет регулярной мерой. Для любого $\delta > 0$ имеем $[a, b-\delta] \subset [a,b) \subset (a-\delta, b)$. Тогда в силу непрерывности слева функции $\alpha(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. выполняется неравенство

$$\mathfrak{m}_\alpha([a-\delta, b) \setminus [a, b-\delta)) = \mathfrak{m}_\alpha([a-\delta, a)) + \mathfrak{m}_\alpha([b-\delta, b)) < \varepsilon.$$

В силу регулярности мера Сти́лтьеса $\mathfrak{m}_\alpha$ является σ-аддитивной мерой. □

6 ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть $\overline{\mathbb{R}}_+ \doteqdot \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$ обозначает расширенное множество неотрицательных чисел, в котором выполняются следующие свойства: если $a \in \mathbb{R}_+$, то $a < \infty$, $a + \infty \doteqdot \infty$, $a \cdot \infty \doteqdot \infty$ $(a \neq 0)$, $0 \cdot \infty \doteqdot 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty + \infty = \infty$.

Определение. Функция $\mu : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *внешней мерой на множестве* X, если выполняются следующие свойства:

a) $\mu(\emptyset) = 0$;

b) монотонность: $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ при всех $A \subset B$;

c) полуаддитивность: $\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ при всех $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Множество $E \subset X$ называется *измеримым* относительно внешней меры μ, если $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$ для всех $A \subset X$. Совокупность всех измеримых множеств в X относительно внешней меры μ обозначается через $\Sigma \doteqdot \Sigma_\mu$.

В силу свойства полуаддитивности (c) внешней меры $\mu(A) \leqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$ при всех $A \subset X$. Поэтому измеримость множества $E \subset X$ вытекает из выполнения неравенств $\mu(A) \geqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$ при всех $A \subset X$.

Обозначим для краткости через $AB \doteqdot A \cap B$, $A' \doteqdot X \setminus A$ и $\mu_A(B) \doteqdot \mu(AB)$. Тогда включение $E \in \Sigma$ равносильно равенству $\mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$ при всех $A \subset X$. Очевидно, что $X, \emptyset \in \Sigma$, и имеют место следующие свойства:

1. *Если* $\mu(E) = 0$, *то* $E \in \Sigma$.

В силу монотонности $\mu_A(E) = 0$ и $\mu_A(X) \geqslant \mu_A(E') = \mu_A(E) + \mu_A(E')$.

2. *Если* $E \in \Sigma$, *то* $E' \in \Sigma$.

Из равенства $E'' = E$ следует, что $\mu_A(X) = \mu_A(E') + \mu_A(E'')$.

3. *Если* $E_1, E_2 \in \Sigma$, *то* $E = E_1 E_2 \in \Sigma$.

Поскольку имеют место равенства $E_1 E_2' = E_1 E'$ и $E_1' = E_1' E'$, то

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1') = \mu_A(E_1 E_2) + \mu_A(E_1 E_2') + \mu_A(E_1') = \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

4. *Если* $E_1, E_2 \in \Sigma$, *то* $E_1 \setminus E_2, E_1 \cup E_2 \in \Sigma$, *т.е.* Σ *является алгеброй.*

Так как $E_1 \setminus E_2 = E_1 E_2'$ и $E_1 \cup E_2 = (E_1' E_2')'$, то получаем $E_1 \setminus E_2 \in \Sigma$ и $E_1 \cup E_2 \in \Sigma$.

5. *Функция* $\mu_A : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *является конечно-аддитивной мерой при всех* $A \subset X$.

Действительно, если $E = E_1 \sqcup E_2$, где $E_1, E_2 \in \Sigma$, то имеют место равенства

$$\mu_A(E) = \mu_A(E E_1) + \mu_A(E E_1') = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_2).$$

Теорема (Каратеодóри)**.** *Если* $\mu : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — *внешняя мера на множестве* X, *то система* $\Sigma \subset \mathbf{2}^X$ *всех измеримых множеств образует* σ*-алгебру и функция* $\mu|_\Sigma : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *заданная на этой* σ*-алгебре, является* σ*-аддитивной мерой.*

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и $E_k \in \Sigma$. Положим $F_n \doteqdot \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k$, тогда $F_n \in \Sigma$. Применяя конечную аддитивность меры μ_A и устремляя $n \to \infty$, имеем

$$\mu_A(X) = \mu_A(F_n) + \mu_A(F_n') \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \to \sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \geqslant \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

Отсюда следует, что $E \in \Sigma$ и выполняется равенство $\mu_A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E')$. Заменяя в этом равенстве A на E, получим $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$. □

Определение. Пусть мера $\mathfrak{m} : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ определена на полукольце S и множество X является единицей S. *Внешней мерой Лебéга* $\mathfrak{m}^* : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется функция

$$\mathfrak{m}^*(A) \doteqdot \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n) \,\Big|\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,,\ A_n \in S \Big\} \text{ при всех } A \subset X\,.$$

Если множество A не допускает счетного покрытия элементами полукольца S, то мы полагаем $\mathfrak{m}^*(A) = \infty$. Функция $\mathfrak{m}^*$ обладает свойствами внешней меры:

1. $\mathfrak{m}^*(\emptyset) = 0$.

2. *Если* $A \subset B$, *то* $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(B)$.

3. *Если* $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *то* $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_n)$.

Докажем свойство 3. Если $\mathfrak{m}^*(A_n) = \infty$ при некотором n, то утверждение верно. Пусть $\mathfrak{m}^*(A_n) < \infty$ при всех n. По определению внешней меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $B_{nk} \in S$, т.ч. $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{nk}) < \mathfrak{m}^*(A_n) + \varepsilon/2^n$. Тогда

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}\,, \quad \mathfrak{m}^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{nk}) < \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_n) + \varepsilon\,.$$

Теорема (о продолжении меры)**.** *Если мера* $\mathfrak{m} : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *задана на полукольце* S, *то функция* $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_{\Sigma}$, *определенная на* σ*-алгебре* $\Sigma \doteqdot \Sigma_{\mathfrak{m}^*}$ *измеримых множеств внешней меры* $\mathfrak{m}^*$, *является мерой и имеет место равенство* $\mu|_S = \mathfrak{m}$.

Доказательство. Из полуаддитивности меры $\mathfrak{m}$ имеем $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$ для всех $A, A_n \in S$, т.ч. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Отсюда следует $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(A)$ для всех $A \in S$. Поэтому в силу теоремы Каратеодóри осталось доказать, что $S \subset \Sigma$.

Пусть $E \in S$. Если $\mathfrak{m}^*(A) < \infty$, то по определению внешней меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ существуют $B_n \in S$, т.ч. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$. Тогда, применяя полуаддитивность внешней меры $\mathfrak{m}^*$, получим

$$\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(A \cap E) + \mathfrak{m}^*(A \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mathfrak{m}(B_n \cap E) + \mathfrak{m}(B_n \setminus E)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon.$$

Отсюда вытекает равенство $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(A \cap E) + \mathfrak{m}^*(A \setminus E)$ при всех $A \subset X$. □

Следствие. *Имеют место включения* $S \subset \mathscr{R}(S) \subset \mathscr{A}_\sigma(S) \subset \Sigma$.

Определение. Говорят, что мера $\mathfrak{m} : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$, определенная на полукольце S с единицей X и принимающая бесконечные значения, является *σ-конечной*, если единица X допускает представление $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in S$ и $\mathfrak{m}(A_n) < \infty$.

Теорема (единственности)**.** *Каждая σ-конечная мера $\mathfrak{m} : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$, заданная на полукольце S с единицей X, имеет единственное продолжение на σ-алгебру Σ.*

Доказательство. Пусть $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_{\Sigma}$ и $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ является продолжением меры $\mathfrak{m}$. Покажем, что $\nu(E) = \mu(E)$ для всех $E \in \Sigma$. По условию σ-конечности $\mathfrak{m}$ достаточно рассмотреть случай, когда $E \subset X \in S$ и $\mathfrak{m}(X) < \infty$. В силу полуаддитивности ν

$$\nu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n) \text{ для всех } \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S, \text{ т.ч. } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

По определению внешней меры $\nu(E) \leqslant \mathfrak{m}^*(E) = \mu(E)$, а также $\nu(X \setminus E) \leqslant \mu(X \setminus E)$. А поскольку $\nu(E) + \nu(X \setminus E) = \mathfrak{m}(X) = \mu(E) + \mu(X \setminus E)$, то $\nu(E) = \mu(E)$. □

Лемма (об измеримой оболочке)**.** *Для каждого множества $A \subset X$ существует измеримое множество $E \in \Sigma$, т.ч. $A \subset E$ и $\mathfrak{m}^*(A) = \mu(E)$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{m}^*(A) = \infty$, то можно положить $E \doteqdot X$. Если $\mathfrak{m}^*(A) < \infty$, то по определению внешней меры Лебега для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $B_{nk} \in S$, т.ч.

$$A \subset B_n \doteqdot \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \quad \mu(B_n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{nk}) < \mathfrak{m}^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Если $E \doteqdot \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, то $A \subset E$ и выполняется неравенства $\mu(E) \leqslant \mu(B_n) < \mathfrak{m}^*(A) + 1/n$ при всех n. Таким образом, $E \in \Sigma$ и имеет место равенство $\mathfrak{m}^*(A) = \mu(E)$. □

Теорема (критерий измеримости Лебе́га)**.** *Пусть $\mu(X) < \infty$. Множество $E \subset X$ является измеримым тогда и только тогда, когда $\mu(X) = \mathfrak{m}^*(E) + \mathfrak{m}^*(E')$.*

Доказательство. Если $E \in \Sigma$, то по определению имеем $\mu(X) = \mathfrak{m}^*(E) + \mathfrak{m}^*(E')$. Докажем обратное. По лемме найдутся $A, B \in \Sigma$, т.ч. $E \subset A$, $E' \subset B$, $\mu(E) = \mu(A)$ и $\mu(E') = \mu(B)$. Тогда $A \cup B = X$ и, следовательно, имеет место равенство

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B) = \mu(E) + \mu(E') - \mu(X) = 0.$$

Поскольку $A \setminus E \subset A \cap B$, то $\mu(A \setminus E) = 0$. Поэтому множество $A \setminus E \in \Sigma$ измеримо, а значит множество $E = A \setminus (A \setminus E) \in \Sigma$ также измеримо. □

Теорема (критерий измеримости Валле́-Пуссе́на)**.** *Пусть $\mu(X) < \infty$. Множество $E \subset X$ является измеримым тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathscr{R}(S)$, т.ч. $\mathfrak{m}^*(E \triangle B) < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. Так как $E \in \Sigma$ и $\mu = \mathfrak{m}^*|_{\Sigma}$, то по определению внешней меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ существуют $A_k \in S$, т.ч. $E \subset A \doteqdot \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.е. } \mu(A \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем число $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) < \varepsilon/2$, и положим $B_n \doteqdot \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Применяя полуаддитивность и монотонность меры μ, получим

$$\mu(E \bigtriangleup B_n) \leqslant \mu(E \setminus B_n) + \mu(B_n \setminus E) \leqslant \mu(A \setminus B_n) + \mu(A \setminus E) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \,.$$

Достаточность. Так как $E \subset B \cup (E \bigtriangleup B)$ и $E' \subset B' \cup (E \bigtriangleup B)$, то по условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathscr{R}(S)$, т.ч. выполняются неравенства

$$|\mathfrak{m}^*(E) - \mu(B)| \leqslant \mathfrak{m}^*(E \bigtriangleup B) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\mathfrak{m}^*(E') - \mu(B')| \leqslant \mathfrak{m}^*(E \bigtriangleup B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Складывая эти неравенства и используя равенство $\mu(X) = \mu(B) + \mu(B')$, получим $|\mu(X) - \mathfrak{m}^*(E) - \mathfrak{m}^*(E')| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mu(X) = \mathfrak{m}^*(E) + \mathfrak{m}^*(E')$. □

Определение. Пусть $\mathfrak{m}_\alpha([a,b)) = \alpha(b) - \alpha(a)$ — мера Сти́лтьеса, определенная на полукольце полуинтервалов, где функция $\alpha(x)$ не убывает и непрерывна слева.

Мера $\mu_\alpha \doteqdot \mathfrak{m}^*_\alpha|_{\Sigma_\alpha}$, которая задает продолжение меры Сти́лтьеса $\mathfrak{m}_\alpha$ на σ-алгебру Σ_α измеримых множеств, называется *мерой Лебе́га–Сти́лтьеса*.

Если $\alpha(x) = x$, то $\mathfrak{m}([a,b)) = b - a$ и соответствующая мера $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_\Sigma$, заданная на σ-алгебре Σ измеримых множеств, называется *мерой Лебе́га*.

Мера Лебе́га–Сти́лтьеса любого промежутка вычисляется по формулам:

$$\mu_\alpha([a,b)) = \alpha(b) - \alpha(a), \quad \mu_\alpha((a,b)) = \alpha(b) - \alpha(a+0),$$
$$\mu_\alpha([a,b]) = \alpha(b+0) - \alpha(a), \quad \mu_\alpha((a,b]) = \alpha(b+0) - \alpha(a+0).$$

Поэтому мера Лебе́га–Сти́лтьеса любого открытого множества $A \subset \mathbb{R}$ равна

$$\mu_\alpha(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha(b_n) - \alpha(a_n+0)\big), \text{ если } A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Пример (Вита́ли)**.** *Неизмеримое множество меры Лебега на отрезке* $[0,1]$. Введем отношение эквивалентности точек $x,y \in [0,1]$. Полагаем $x \sim y$, если число $x - y \in \mathbb{Q}$ рационально. Тогда $[0,1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$, где C_i — не пересекающиеся классы эквивалентных точек. В каждом таком классе выберем по одной точке $x_i \in C_i$ и образуем множество $E \doteqdot \{x_i\}_{i \in I}$, состоящее из неэквивалентных точек.

Пусть $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \doteqdot [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ — перенумерованные рациональные числа отрезка $[-1,1]$. Множества $E_n \doteqdot E + r_n$ не пересекаются, поскольку если $x \in E_n \cap E_m$, то $x = x_i + r_n = x_j + r_m$, что невозможно, т.к. элементы x_i и x_j не эквивалентны.

Если множество $E \in \Sigma$ измеримо, то $E_n \in \Sigma$ также измеримо и $\mu(E_n) = \mu(E)$. Поскольку $[0,1] \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1,2]$, то выполняются неравенства $1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant 3$, что невозможно, поскольку все множества E_n имеют одну и ту же меру $\mu(E)$. Таким образом, множество $E \notin \Sigma$ неизмеримо.

7 ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Тройка (X, Σ, μ) называется *измеримым пространством*, если мера $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ задана на σ-алгебре Σ с единицей X. Множества $E \in \Sigma$ называются *измеримыми*. Далее всюду будем предполагать, что мера μ обладает *свойством полноты*, т.е. каждое подмножество множества меры нуль является измеримым.

Определение. Действительная функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если при всех $c \in \mathbb{R}$ множества $E(f < c) \doteqdot \{x \in E | f(x) < c\} \in \Sigma$ являются измеримыми.

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима, то в силу того, что совокупность измеримых множеств Σ образует σ-алгебру, будут измеримы следующие множества:

$E(f \leqslant c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < c + \frac{1}{n}) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$;

$E(f \geqslant c) = E \setminus E(f < c) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$;

$E(f > c) = E \setminus E(f \leqslant c) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$;

$E(a \leqslant f < b) = E(f < b) \setminus E(f < a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leqslant a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

$E(a < f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f \leqslant a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

$E(a \leqslant f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f < a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$.

Обратно, если одно из этих свойств выполнено, то функция будет измеримой.

Лемма. *Предположим, что функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ измеримы, функция $h(u, v)$ непрерывна на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^2$ и $(f(x), g(x)) \in D$ при всех $x \in E$. Тогда функция $F(x) \doteqdot h(f(x), g(x))$ является измеримой на множестве E.*

Доказательство. В силу непрерывности $h(u, v)$ множество $D(h < c) \subset \mathbb{R}^2$ является открытым. Тогда $D(h < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$, где $\Pi_n \doteqdot (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)$. Так как множество $E((f, g) \in \Pi_n) = E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n) \in \Sigma$ измеримо, то множество

$$E(F < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\big((f, g) \in \Pi_n\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n) \in \Sigma$$

будет также измеримым, поскольку Σ является σ-алгеброй. □

В качестве следствия получается следующее свойство (1) измеримых функций.

1. *Если функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ измеримы, то их сумма $f + g$ и произведение fg также измеримы. Частное f/g измеримо, если функция $g(x) \neq 0$ при всех $x \in E$. Степень f^p измерима, если $p > 0$ и функция $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in E$.*

2. *Если функции $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримы и функции $\inf f_n(x)$, $\sup f_n(x)$, $\overline{\lim} f_n(x)$, $\underline{\lim} f_n(x)$ принимают конечные значения на E, то они измеримы.*

3. *Если функции $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримы и предел $f(x) = \lim f_n(x)$ существует при всех $x \in E$, то f является измеримой функцией.*

Измеримость нижней $\inf f_n$ и верхней $\sup f_n$ граней для последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций можно доказать при помощи следующих соотношений:

$$E(\inf f_n < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < c), \quad E(\sup f_n > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c).$$

Поскольку при всех $x \in E$ справедливы равенства

$$\overline{\lim} f_n(x) = \inf_{m \geqslant 1} \{\sup_{n \geqslant m} f_n(x)\}, \quad \underline{\lim} f_n(x) = \sup_{m \geqslant 1} \{\inf_{n \geqslant m} f_n(x)\},$$

то верхний и нижний пределы будут измеримыми. Отсюда предел $f(x) = \lim f_n(x)$ является измеримым, так как имеет место равенство $f(x) = \overline{\lim} f_n(x) = \underline{\lim} f_n(x)$.

Введем следующие обозначения: $f \leqslant g$ на E, если $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in E$; $f_n \to f$ на E, если $f(x) = \lim f_n(x)$ при всех $x \in E$; $f_n \nearrow f$ на E, если $f_n \to f$ и $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ на E; $f_n \searrow f$ на E, если $f_n \to f$ и $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$ на E.

Определение. Функция $h : E \to \mathbb{R}$ называется *простой* на множестве E, если она имеет конечное множество значений $h(E) \doteqdot \{h_1, \ldots h_m\}$, т.е.

$$h(x) = \sum_{k=1}^{m} h_k \chi_{H_k}(x), \text{ где } H_k \doteqdot \{x \in E \mid h(x) = h_k\} \text{ и } \chi_A(x) \doteqdot \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Теорема. *Для каждой неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ найдутся простые измеримые функции $h_n : E \to \mathbb{R}_+$, т.ч. $h_n \nearrow f$ на E. При этом, если функция f ограничена на E, то сходимость будет равномерной на E.*

Доказательство. Определим последовательность простых функций по формуле

$$h_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{H_k^n}(x) + 2^n \chi_{H^n}(x), \quad x \in E,$$

где $H_k^n \doteqdot E(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n})$ и $H^n \doteqdot E(f \geqslant 2^n)$. Поскольку $H_k^n = H_{2k-1}^{n+1} \sqcup H_{2k}^{n+1}$, то

$$h_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant h_{n+1}(x) \text{ при всех } x \in H_k^n, \ k = 1, \ldots, 2^{2n}.$$

Так как $f(x) - h_n(x) < 1/2^n$ при всех $x \in E(f < 2^n)$, то $f_n \to f$ на E. □

Определение. Функции называются *эквивалентными* $f \sim g$ на множестве E, если найдется множество $A \in \Sigma$ меры нуль $\mu(A) = 0$, т.ч. $f = g$ на $E \setminus A$.

Последовательность $f_n \to f$ *сходится почти всюду* (п.в.) на E, если существует множество $A \in \Sigma$ меры нуль $\mu(A) = 0$, т.ч. $f_n \to f$ на $E \setminus A$.

Последовательность $f_n \to f$ *сходится почти равномерно* (п.р.) на E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $A \in \Sigma$ с мерой $\mu(A) < \varepsilon$, т.ч. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus A$.

Заметим, что пределы п.в. и п.р. сходимости последовательности функций определяются с точностью до эквивалентности. Если функции $f \sim g$ эквивалентны и функция f измерима, то функция g также будет измеримой.

Теорема (Егóрова). *Если функции $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримы и $\mu(E) < \infty$, то $f_n \to f$ сходится п.в. на E тогда и только тогда, когда $f_n \to f$ сходится п.р. на E.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что последовательность $f_n \to f$ сходится на $E \setminus N$, где $\mu(N) = 0$. Тогда при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ множества

$$B_m \doteqdot \bigcap_{n=m}^{\infty} E\Big(|f_n - f| < \frac{1}{k}\Big), \quad B_1 \subset B_2 \subset \dots ,$$

монотонно возрастают. Отсюда $B_m \setminus N \nearrow E \setminus N$ и в силу непрерывности меры снизу $\lim \mu(B_m) = \mu(E)$. Полагая $A_m \doteqdot E \setminus B_m$, имеем $\lim \mu(A_m) = 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется m_k, т.ч. $\mu(A_{m_k}) < \varepsilon/2^k$. Пусть $A \doteqdot \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{m_k}$, тогда $A \in \Sigma$ и $\mu(A) < \varepsilon$. Так как $E \setminus A \subset B_{m_k}$ при всех k, то $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ при всех $x \in E \setminus A$ и $n \geqslant m_k$. Таким образом, последовательность $f_n \rightrightarrows f$ сходится равномерно на $E \setminus A$.

Достаточность. По определению п.р. сходимости существуют $A_k \in \Sigma$ с мерой $\mu(A_k) < 1/k$, т.ч. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus A_k$. Полагая $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, получим $\mu(A) = 0$ и при этом последовательность $f_n \to f$ сходится на $E \setminus A$. □

Определение. Пусть функции $f_n : E \to \mathbb{R}$ и $f : E \to \mathbb{R}$ измеримы. Говорят, что последовательность $f_n \to f$ (μ) *сходится по мере на* E, если для любого $\varepsilon > 0$ предел $\lim_{n\to\infty} \mu\big(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)\big) = 0$ равен нулю.

Теорема. *Пусть функции $f_n : E \to \mathbb{R}$ и $f : E \to \mathbb{R}$ измеримы. Тогда если мера $\mu(E) < \infty$, то из сходимости $f_n \to f$ п.в. на E следует сходимость $f_n \to f$ (μ) по мере на E. Обратно, если $f_n \to f$ (μ) сходится по мере на E, то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, т.ч. $f_{n_k} \to f$ сходится п.в. на E*

Доказательство. Пусть $\mu(E) < \infty$ и $f_n \to f$ сходится п.в. на E. Тогда по теореме Егóрова для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $A \in \Sigma$ с мерой $\mu(A) < \varepsilon$ и $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant m$ и $x \in E \setminus A$. Отсюда получим

$$\mu\big(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)\big) \leqslant \mu(A) < \varepsilon \text{ при всех } n \geqslant m.$$

Таким образом, последовательность $f_n \to f$ (μ) сходится по мере на E.

Если $f_n \to f$ (μ) сходится по мере на E, то существует последовательность $\{n_k\}$, т.ч. $\mu\big(E(|f_{n_k} - f| \geqslant 1/2^k)\big) < 1/2^k$. Рассмотрим следующие множества:

$$A_m \doteqdot \bigcup_{k=m}^{\infty} E\Big(|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}\Big), \quad A \doteqdot \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m .$$

Тогда $\mu(A_m) < 1/2^{m-1}$ и $\mu(A) = 0$. Если $x \in E \setminus A$, то $x \in E \setminus A_m$ при некотором m и, следовательно, $|f_{n_k}(x) - f(x)| < 1/2^k$ при всех $k \geqslant m$, т.е. $f_{n_k} \to f$ на $E \setminus A$. □

Пример (Ри́сса). Пусть $E \doteqdot [0,1]$ и μ есть мера Лебега. Определим функции $f_n(x) \doteqdot \chi_{A_n}(x)$, где $A_n \doteqdot [k/2^m, (k+1)/2^m]$ при $n = 2^m + k$ и $k = 0, \dots, 2^m - 1$. Тогда имеем $\mu(E(f_n \geqslant \varepsilon)) \leqslant 1/2^m$ при $\varepsilon > 0$. Отсюда $f_n \to 0$ (μ) сходится по мере на $[0,1]$. Однако $\overline{\lim} f_n(x) = 1$ и $\underline{\lim} f_n(x) = 0$ при всех $x \in [0,1]$, т.е. $\{f_n\}$ не сходится на $[0,1]$.

Лемма (общий критерий измеримости)**.** *Функция* $f : E \to \mathbb{R}$ *измерима тогда и только тогда, когда для всех* $A \in \mathscr{B}$ *прообраз* $f^{-1}(A) \in \Sigma$ *измерим.*

Доказательство. Необходимость. Пусть S — система всех множеств $A \subset \mathbb{R}$, т.ч. $f^{-1}(A) \in \Sigma$. По условию измеримости $f^{-1}(a,b) = E(a < f < b) \in \Sigma$, т.е. $(a,b) \in S$. Поскольку открытое множество $A \subset \mathbb{R}$ есть объединение $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ счетного числа интервалов, то $f^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \in \Sigma$, т.е. $A \in S$. Так как

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \quad f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n),$$

и система Σ является σ-алгеброй, то S будет σ-алгеброй, содержащей открытые множества. Поэтому в силу минимальности $\mathscr{B}$ получаем включение $\mathscr{B} \subset S$.

Достаточность. Так как $E(f < c) = f^{-1}(-\infty,c)$ и интервал $(-\infty,c) \in \mathscr{B}$ является борéлевским множеством, то функция f измерима. □

Предположим далее, что мера $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ является конечной, полной, регулярной и задана на σ-алгебре Σ с единицей X, содержащей все открытые множества.

Определение. Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ *обладает* C*-свойством на* $E \in S$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное измеримое множество $A \subset E$ и $A \in \Sigma$, т.ч. мера $\mu(E \setminus A) < \varepsilon$ и сужение $g = f|_A$ является непрерывной функцией.

Теорема (критерий измеримости Лу́зина)**.** *Функция* $f : E \to \mathbb{R}$ *измерима в том и только в том случае, когда она обладает* C*-свойством на* $E \in \Sigma$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ счетная система всех интервалов в $\mathbb{R}$ с рациональными концами и $I_0 = \mathbb{R}$. В силу регулярности меры μ существуют $A_n, B_n \in \Sigma$, т.ч. A_n компактно, B_n открыто, $A_n \subset f^{-1}(I_n) \subset B_n$ и $\mu(B_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Пусть $A \doteqdot E \setminus B$, где $B \doteqdot \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \setminus A_k$ открытое множество. Так как $A_0 \subset E \subset B_0$, то множество $A = A_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \setminus A_k$ компактно и $\mu(E \setminus A) = \mu(B) < \varepsilon$. Поскольку

$$A \cap B_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} \big(E \setminus (B_k \setminus A_k)\big) \cap B_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} \big((E \setminus B_k) \sqcup A_k\big) \cap B_n \subset A_n,$$

то $A \cap A_n = A \cap f^{-1}(I_n) = A \cap B_n$, т.е. прообраз $g^{-1}(I_n) = A \cap f^{-1}(I_n)$ является открытым множеством в A при всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, сужение $g \doteqdot f|_A$ непрерывно.

Достаточность. По условию C-свойства для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется компактное множество $A_n \in \Sigma$, т.ч. $\mu(E \setminus A_n) < 1/n$ и сужение $g_n \doteqdot f|_{A_n}$ непрерывно. Поскольку прообраз $g_n^{-1}(I)$ интервала $I \subset \mathbb{R}$ открыт в A_n, то существуют открытые множества $B_n \in \Sigma$, т.ч. $g_n^{-1}(I) = f^{-1}(I) \cap A_n = A_n \cap B_n$. Пусть $N \doteqdot \bigcap_{n=1}^{\infty} E \setminus A_n$, тогда множество

$$f^{-1}(I) \setminus N = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \setminus (E \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \cap A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B_n$$

измеримо, т.к. $A_n \cap B_n \in \Sigma$. Поскольку мера $\mu(N) = 0$, то прообраз $f^{-1}(I)$ является измеримым и, следовательно, функция f будет измеримой. □

8 ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕ́ГА

Пусть (X,Σ,μ) — измеримое пространство, в котором мера μ является полной и множество $E\in\Sigma$. Обозначим через $\pi=\{P_k\}_{k=1}^n$ произвольное конечное измеримое разбиение множества E, т.е. $E=\bigsqcup_{k=1}^n P_k$ и $P_k\in\Sigma$.

Суммой Дарбу́ неотрицательной функции $f:E\to\mathbb{R}_+$ по заданному разбиению π множества E называется следующее выражение:

$$S_\pi(f)\doteq\sum_{k=1}^n p_k(f)\mu(P_k)\,,\ \text{где}\ p_k(f)\doteq\inf_{x\in P_k}f(x)\,.$$

Определение. *Интегралом Лебе́га* по множеству E неотрицательной функции $f:E\to\mathbb{R}_+$ называется верхняя грань сумм Дарбу́ по всем разбиениям

$$\int_E f\,d\mu\doteq\sup_\pi S_\pi(f)=\sup_\pi\sum_{k=1}^n p_k(f)\mu(P_k).$$

Интегралом Лебе́га по множеству E функции произвольного знака $f:E\to\mathbb{R}$ называется разность интегралов от соответствующих неотрицательных функций

$$\int_E f\,d\mu\doteq\int_E f_+\,d\mu-\int_E f_-\,d\mu,\ \text{где}\ \ f_\pm(x)\doteq\max\{\pm f(x),0\}.$$

При этом предполагается, что один из интегралов от $f_\pm$ является конечным, иначе интеграл не имеет смысла. Функция $f:E\to\mathbb{R}$ называется *интегрируемой на E* и обозначается $f\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, если она измерима и интегралы от неотрицательных функций $f_\pm$ принимают конечные значения.

Замечание. Данное определение интеграла Лебе́га распространяется на функции $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$, принимающие бесконечные значения. Так как для каждой интегрируемой функции мера множеств $E(f=\pm\infty)$ равна нулю, то она эквивалентна функции, принимающей только конечные значения. При этом из определения легко вывести, что эквивалентные функции имеют равные интегралы Лебе́га.

1. *Невырожденность. Для неотрицательной измеримой функции $f:E\to\mathbb{R}_+$ интеграл равен $\int_E f\,d\mu=0$ тогда и только тогда, когда $f(x)=0$ п.в. на E*

Так как $\int_E f\,d\mu=0$, то по определению интеграла все суммы Дарбу́ $S_\pi(f)=0$. Поскольку $E_n\doteq E(f\geqslant 1/n)\nearrow E(f>0)$ и $\mu(E_n)=0$, то по свойству непрерывности снизу получим $\mu(E(f>0))=\lim\mu(E_n)=0$. Обратно, из равенства $\mu(E(f>0))=0$ следует, что $S_\pi(f)=0$. Поэтому интеграл $\int_E f\,d\mu=0$.

2. *Монотонность. Если неотрицательные измеримые функции $f,g:E\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяют неравенству $f\leqslant g$ на E, то их интегралы $\int_E f\,d\mu\leqslant\int_E g\,d\mu$.*

В свойстве 2 интегрируемость не предполагается, т.е. интегралы могут быть бесконечными. Для доказательства заметим, что если $f\leqslant g$ на E, то их суммы Дарбу́ удовлетворяют неравенству $S_\pi(f)\leqslant S_\pi(g)$ для любого разбиения π.

В общем случае, *если интегрируемые функции* $f,g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ *удовлетворяют неравенству* $f \leqslant g$ *на* E, *то их интегралы* $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.

Действительно, так как $f_+ \leqslant g_+$ и $f_- \geqslant g_-$, то в силу свойства 2 выполняются неравенства $\int_E f_+\,d\mu \leqslant \int_E g_+\,d\mu$ и $\int_E f_-\,d\mu \geqslant \int_E g_-\,d\mu$. Поэтому $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.

Лемма. *Интеграл от простой неотрицательной измеримой функции* h *равен*

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{j=1}^m h_j\,\mu(E\cap H_j), \text{ где } h(x) = \sum_{j=1}^m h_l \chi_{H_j}(x) \text{ и } \bigsqcup_{j=1}^m H_j = X\,.$$

Доказательство. Пусть задано разбиение $\pi = \{P_k\}_{k=1}^n$ и $A_{kj} \doteqdot P_k \cap H_j$. Тогда имеем $P_k = \bigsqcup_{j=1}^m A_{kj}$ и $E\cap H_j = \bigsqcup_{k=1}^n A_{kj}$. Так как $p_k(h) \leqslant h_j$, если $A_{kj} \neq \emptyset$ не пусто, то

$$S_\pi(h) = \sum_{k=1}^n p_k(h)\mu(P_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m p_k(h)\mu(A_{kj}) \leqslant \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m h_j\mu(A_{kj}) = \sum_{j=1}^m h_j\mu(E\cap H_j)\,.$$

В случае, когда $\pi = \{E\cap H_j\}_{j=1}^m$, это неравенство будет равенством. □

Следствие 1. *Интеграл от простой неотрицательной измеримой функции* h *является* σ*-аддитивной мерой, т.е. если* $E = \bigsqcup_{n=1}^\infty E_n$, *где* $E_n \in \Sigma$, *то*

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} h\,d\mu\,.$$

Следствие 2. *Интеграл неотрицательной измеримой функции* f *равен верхней грани интегралов простых измеримых функций* h, *т.ч.* $0 \leqslant h \leqslant f$ *на* E, *т.е.*

$$\int_E f\,d\mu = \sup_{0\leqslant h\leqslant f} \int_E h\,d\mu.$$

В самом деле, $\int_E h\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu$ при всех $0 \leqslant h \leqslant f$. Кроме того, по лемме каждая сумма Дарбу́ $S_\pi(f)$ является интегралом от некоторой простой функции $0 \leqslant h \leqslant f$.

Теорема (о монотонной сходимости). *Пусть последовательность неотрицательных измеримых функций* $f_n : E \to \mathbb{R}_+$ *монотонно сходится* $f_n \nearrow f$ *на* E. *Тогда предел их интегралов равен* $\lim \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$.

Доказательство. В силу монотонной сходимости $f_n \nearrow f$ существует конечный или бесконечный предел $I \doteqdot \lim \int_E f_n\,d\mu$ и $I \leqslant \int_E f\,d\mu$. Докажем обратное неравенство.

Пусть $0 \leqslant h \leqslant f$ на E, где h — простая измеримая функция. Возьмем $0 < \varepsilon < 1$ и определим множества $E_n \doteqdot E(\varepsilon h \leqslant f_n)$. Тогда $E_n \nearrow E$ и выполняются неравенства

$$\varepsilon \int_{E_n} h\,d\mu = \int_{E_n} \varepsilon h\,d\mu \leqslant \int_{E_n} f_n\,d\mu \leqslant \int_E f_n\,d\mu \leqslant I.$$

В силу непрерывности снизу интеграла от простой функции $\lim \int_{E_n} h\,d\mu = \int_E h\,d\mu$. Тогда $\varepsilon \int_E h\,d\mu \leqslant I$ при всех $0 < \varepsilon < 1$. Поэтому $\int_E h\,d\mu \leqslant I$ при всех $0 \leqslant h \leqslant f$ и в силу следствия 2 имеем $\int_E f\,d\mu \leqslant I$. Таким образом, $\int_E f\,d\mu = I$. □

3. *Линейность интеграла. Если $f,g\in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\lambda\in\mathbb{R}$, то $\lambda f, f+g\in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и выполняются равенства $\int_E \lambda f\,d\mu=\lambda\int_E f\,d\mu$, $\int_E (f+g)\,d\mu=\int_E f\,d\mu+\int_E g\,d\mu$.*

Первое равенство легко выводится из определений. Докажем второе. Для любых простых неотрицательных измеримых функций доказательство вытекает из леммы. Для любых неотрицательных измеримых функции $f,g\geqslant 0$ существуют монотонные последовательности простых неотрицательных измеримых функций, т.ч. $f_n\nearrow f$ и $g_n\nearrow g$. Так как $f_n+g_n\nearrow f+g$, то по теореме о монотонной сходимости

$$\int_E (f+g)\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E (f_n+g_n)\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu+\lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,d\mu=\int_E f\,d\mu+\int_E g\,d\mu.$$

В общем случае, пусть $f=f_+-f_-$ и $g=g_+-g_-$. Тогда из $f+g=(f+g)_+-(f+g)_-$ следует, что $(f+g)_++f_-+g_-=f_++g_++(f+g)_-$. Интегрируя это равенство, а затем группируя его слагаемые, получим требуемый результат.

4. *Интеграл модуля. Если $f\in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, то $|f|\in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $|\int_E f\,d\mu|\leqslant\int_E |f|\,d\mu$.*

Интегрируемость модуля $|f|=f_++f_-$ получается из определения интеграла и свойства 3, а неравенство следует из свойства 2, поскольку $-|f|\leqslant f\leqslant |f|$.

Лемма (Фату́)**.** *Пусть $f=\underline{\lim} f_n$ п.в. на E является нижним пределом неотрицательных измеримых функций $f_n:E\to\mathbb{R}_+$. Тогда $\int_E f\,d\mu\leqslant\underline{\lim}\int_E f_n\,d\mu$.*

Доказательство. Исключая множество меры нуль, можем считать, что $f=\underline{\lim} f_n$ всюду на E. Пусть $g_m\doteqdot\inf_{n\geqslant m} f_n$, тогда $g_m\nearrow f$ и $\int_E g_m\,d\mu\leqslant\int_E f_n\,d\mu$ при всех $n\geqslant m$. Отсюда $\int_E g_m\,d\mu\leqslant\inf_{n\geqslant m}\int_E f_n\,d\mu$ и по теореме о монотонной сходимости имеем

$$\int_E f\,d\mu=\lim_{m\to\infty}\int_E g_m\,d\mu\leqslant\lim_{m\to\infty}\inf_{n\geqslant m}\int_E f_n\,d\mu=\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu.$$

Таким образом, неравенство доказано. □

Теорема (Лебе́га о предельном переходе)**.** *Пусть $f=\lim f_n$ п.в. на E является пределом измеримых функций $f_n:E\to\mathbb{R}$ и существует мажоранта $g\in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, т.ч. $|f_n|\leqslant g$ п.в. на E. Тогда $f\in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\int_E f\,d\mu=\lim\int_E f_n\,d\mu$.*

Доказательство. Так как $f_{n\pm}, f_\pm\leqslant g$ п.в. на E, то по свойству 2 (см. замечание) получим $f_n, f\in \boldsymbol{L}(E,\mu)$. Поскольку $g\pm f_n\geqslant 0$ п.в. на E, то по лемме Фату́

$$\int_E (g+f)\,d\mu\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E (g+f_n)\,d\mu,\quad \int_E (g-f)\,d\mu\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E (g-f_n)\,d\mu.$$

Применяя свойство 3 и сокращая интеграл $\int_E g\,d\mu$ в этих неравенствах, имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n\,d\mu\leqslant\int_E f\,d\mu\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_i\,d\mu.$$

Так как нижний предел не превосходит верхний, то из этих неравенств следуют равенства, т.е. существует предел $\lim\int_E f_n\,d\mu$ и равен интегралу $\int_E f\,d\mu$. □

Теорема (о счетной аддитивности). *Пусть* $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ *и* $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, *где* $E_n \in \Sigma$. *Тогда* $f \in \boldsymbol{L}(E_n,\mu)$ *и имеет место равенство* $\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu$.

Доказательство. Пусть вначале функция $f \geqslant 0$ и $E = E_1 \sqcup E_2$. Если π разбиение E, то $\pi_1 \doteqdot \pi \cap E_1$ и $\pi_2 \doteqdot \pi \cap E_2$ разбиения E_1 и E_2, для которых $S_\pi(f) \leqslant S_{\pi_1}(f) + S_{\pi_2}(f)$. Переходя к верхней грани по разбиениям, имеем $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu$.

С другой стороны, если π_1 и π_2 разбиения E_1 и E_2, то $\pi = \pi_1 \sqcup \pi_2$ разбиение E и $S_\pi(f) = S_{\pi_1}(f) + S_{\pi_2}(f)$. Следовательно, переходя к верхней грани по разбиениям, получим обратное неравенство $\int_E f\,d\mu \geqslant \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu$.

Пусть теперь $f \geqslant 0$ и $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Положим $F_n \doteqdot \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k$ и $f_n \doteqdot \chi_{F_n} f$. Тогда имеем $f_n \nearrow f$ монотонно сходится на E и по теореме о монотонной сходимости

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu.$$

В общем случае, достаточно представить функцию в виде разности $f = f_+ - f_-$ неотрицательных функций $f_\pm \geqslant 0$, для которых теорема уже доказана. $\square$

Неравенство Чебышёва. *Для всякой неотрицательной измеримой функции* $f : E \to \mathbb{R}_+$ *выполняется неравенство*:

$$\mu(E(f \geqslant t)) \leqslant \frac{1}{t} \int_E f\,d\mu \ \text{ при всех } t > 0.$$

В самом деле, применяя свойство 2, получим $\int_E f\,d\mu \geqslant \int_{E(f\geqslant t)} f\,d\mu \geqslant t\mu(E(f \geqslant t))$.

Определение. *Функцией распределения* неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ называется функция $F(t) \doteqdot \mu(E_t)$, равная мере множества $E_t \doteqdot E(f \geqslant t)$. Если функции распределения двух неотрицательных измеримых функций f_1 и f_2 совпадают $F_1(t) = F_2(t)$ при всех $t \geqslant 0$, то f_1 и f_2 называются *равноизмеримыми*.

Функция распределения $F(t)$ может принимать бесконечные значения $F(t) = \infty$ на некотором отрезке $[0,a]$ и обладает следующими свойствами при всех $t > a$: 1) $F(t) \geqslant 0$ неотрицательна; 2) $F(t)\downarrow$ не возрастает; 3) $F(t-0) = F(t)$ непрерывна слева; 5) если мера $\mu(E(f = t)) > 0$, то t является точкой разрыва функции $F(t)$.

Если интеграл $\int_E f\,d\mu < \infty$, то из неравенства Чебышева $F(t) < \infty$ при всех $t > 0$. Так как $\bigcap_{t>0} E_t = \emptyset$, то $E_t \searrow \emptyset$ при $t \to \infty$. Тогда по свойству непрерывности сверху получаем $t\mu(E_t) \leqslant \int_{E_t} f\,d\mu \to 0$, т.е. выполняется 6) $F(t) = o(1/t)$ при $t \to \infty$.

Заметим, что интеграл Лебега неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ равен мере подграфика $\Gamma_f \doteqdot \{(x,t) \mid x \in E,\, 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ относительно произведения $E \times \mathbb{R}_+$ меры $d\mu$ и меры Лебéга dt в $\mathbb{R}_+$. Поэтому по теореме Фубúни о повторных интегралах, которая будет доказана далее, имеют место равенства

$$\int_E f\,d\mu = \int_E \Big(\int_0^{f(x)} dt \Big)\, d\mu = \int_0^{\infty} \Big(\int_{E_t} d\mu \Big)\, dt = \int_0^{\infty} \mu(E_t)\, dt = \int_0^{\infty} F(t)\, dt\,.$$

Таким образом, равноизмеримые функции имеют равные интегралы Лебéга.

9 ТЕОРЕМА ФУБИ́НИ

Пусть меры $\mathfrak{m}_k : S_k \to \overline{\mathbb{R}}_+$ заданы на полукольцах S_k и $S \doteqdot S_1 \times \ldots \times S_n$ обозначает прямое произведение полуколец S_k, $k = 1, \ldots, n$, состоящее из всех множеств вида $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_k \in S_k$. Функция $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$, определенная по формуле

$$\mathfrak{m}(A) \doteqdot \mathfrak{m}_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}(A_n), \text{ где } A = A_1 \times \ldots \times A_n \in S,$$

называется *прямым произведением мер* и обозначается через $\mathfrak{m} \doteqdot \mathfrak{m}_1 \times \ldots \times \mathfrak{m}_n$.

Лемма. *Прямое произведение мер $\mathfrak{m}_k : S_k \to \overline{\mathbb{R}}_+$, где $k = 1, \ldots, n$, являются мерой $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ на полукольце множеств $S = S_1 \times \ldots \times S_n$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 2$ и применить индукцию. Докажем, что $S = S_1 \times S_2$ является полукольцом. Пусть $A = A_1 \times A_2, B = B_1 \times B_2 \in S$. Тогда пересечение $A \cap B$ разность $A \setminus B$ представляется в виде

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2), \quad A \setminus B = \big((A_1 \setminus B_1) \times A_2\big) \sqcup \big((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big).$$

Отсюда $A \cap B \in S$. Так как $A_1 \setminus B_1$ и $A_2 \setminus B_2$ являются дизъюнктным объединением элементов S_1 и S_2 соответственно, то разность $A \setminus B$ представляется дизъюнктным объединением элементов S. Следовательно, S образует полукольцо.

Докажем, что функция $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$ является σ-аддитивной. Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$, где $A = A_1 \times A_2 \in S$ и $B_n = B_{n1} \times B_{n2} \in S$. Положим $f_n(x_1) \doteqdot \mathfrak{m}_2(B_{n2}) \chi_{B_{n1}}(x_1)$ при всех $x_1 \in A_1$. Тогда $A_2 = \bigsqcup_{x_1 \in B_{n1}} B_{n2}$, т.е. для любого $x_1 \in A_1$ множество A_2 является дизъюнктным объединением тех множеств B_{n2}, у которых индекс n удовлетворяет условию $x_1 \in B_{n1}$. Следовательно, $\mathfrak{m}_2(A_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_1)$ при всех $x_1 \in A_1$.

Обозначим через $\mu_1 = \mathfrak{m}_1^*|_{\Sigma_1}$ продолжение меры $\mathfrak{m}_1$ на σ-алгебру Σ_1 измеримых множеств. Так как $f_n \geqslant 0$, то частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{n} f_n(x_1) \nearrow m_2(A_2)$ монотонно сходятся на A_1. Применяя теорему о монотонной сходимости, получим

$$\mathfrak{m}_1(A_1)\mathfrak{m}_2(A_2) = \int_{A_1} \mathfrak{m}_2(A_2)\, d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_1} f_n\, d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_1(B_{n1})\mathfrak{m}_2(B_{n2}).$$

Таким образом, функция $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$ является σ-аддитивной мерой. $\square$

Определение. Пусть заданы измеримые пространства (X_k, Σ_k, μ_k) при $k = 1, \ldots, n$ и $\mathfrak{m} \doteqdot \mu_1 \times \ldots \times \mu_n$ прямое произведение мер на полукольце $S = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$.

Произведением измеримых пространств называется (X, Σ, μ), где $\mu = \mathfrak{m}^*|_{\Sigma}$ есть мера в $X \doteqdot X_1 \times \ldots \times X_n$, определенная на σ-алгебре $\Sigma \doteqdot \Sigma_{\mathfrak{m}^*}$ измеримых множеств внешней меры $\mathfrak{m}^*$. Мера $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *произведением мер*. Обозначать эту меру будем через $d\mu \doteqdot d\mu_1 \otimes \ldots \otimes d\mu_n$ и $\Sigma \doteqdot \Sigma_1 \otimes \ldots \otimes \Sigma_n$.

Произведение измеримых пространств обладает свойством ассоциативности, т.е. выполняется равенство $(d\mu_1 \otimes d\mu_2) \otimes d\mu_3 = d\mu_1 \otimes (d\mu_2 \otimes d\mu_3)$, т.к. этим свойством, очевидно, обладает прямое произведение мер. Для сокращения записи далее будем рассматривать произведение только двух измеримых пространств.

Пусть (X,Σ,μ) обозначает произведение измеримых пространств (X_1,Σ_1,μ_1) и (X_2,Σ_2,μ_2), где $X \doteqdot X_1\times X_2$, $\Sigma \doteqdot \Sigma_1\otimes\Sigma_2$ и $d\mu \doteqdot d\mu_1\otimes d\mu_2$. Предположим далее, что меры μ_1 и μ_2 являются полными и σ-конечными. Тогда мера μ будет полной и σ-конечной по определению произведения мер. Если $E\subset X$, то множества

$$E_{x_1}\doteqdot\{x_2\in X_2 \mid (x_1,x_2)\in E\}\subset X_2,\quad E_{x_2}\doteqdot\{x_1\in X_1 \mid (x_1,x_2)\in E\}\subset X_1$$

называются *сечениями множества* E по переменным x_1 и x_2. Если $f:E\to\mathbb{R}$, то функции $f_{x_1}:E_{x_1}\to\mathbb{R}$, где $f_{x_1}(x_2)\doteqdot f(x_1,x_2)$, и $f_{x_2}:E_{x_2}\to\mathbb{R}$, где $f_{x_2}(x_1)\doteqdot f(x_1,x_2)$, называются *сечениями функции* $f(x)$ по переменным x_1 и x_2, где $x=(x_1,x_2)$.

Теорема (вычисление меры при помощи сечений)**.** *Для всех множеств* $E\in\Sigma$

$$\mu(E)=\int_{X_1}\mu_2(E_{x_1})\,d\mu_1=\int_{X_2}\mu_1(E_{x_2})\,d\mu_2.$$

Доказательство. Мы докажем первое равенство, второе доказывается аналогично. В силу σ-конечности меры μ, достаточно рассмотреть случай множеств конечной меры $\mu(E)<\infty$. Пусть $S\doteqdot\Sigma_1\times\Sigma_2$ полукольцо и $E=E_1\times E_2\in S$, тогда имеем

$$\mu(E)=\mu_1(E_1)\mu_2(E_2)=\int_{E_1}\mu_2(E_2)\,d\mu_1=\int_{X_1}\mu_2(E_{x_1})\,d\mu_1\,.$$

Если множество $E\in\mathscr{R}(S)$, т.е. является дизъюнктным объединением элементов S, то утверждение теоремы вытекает из аддитивности мер и линейности интеграла.

Пусть $E\in\Sigma$ произвольное измеримое множество конечной меры. Обозначим через A измеримую оболочку множества E, определенную по формуле

$$A\doteqdot\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\,,\ \text{где}\ E\subset B_k\doteqdot\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{kj}\,,\ \text{т.ч.}\ B_{kj}\in S\ \text{и}\ \mu(B_k)<\mu(E)+\frac{1}{k}\,.$$

Ясно, что $E\subset A$ и $\mu(A\setminus E)=0$. Пусть $A_n\doteqdot\bigcap_{k=1}^{n}B_k$ и $A_{nm}\doteqdot\bigcap_{k=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}B_{kj}\in\mathscr{R}(S)$. Так как $A_n\searrow A$ и $A_{nm}\nearrow A_n$, то соответствующие сечения $A_{nx_1}\searrow A_{x_1}$ и $A_{nmx_1}\nearrow A_{nx_1}$. Применяя свойства непрерывности сверху и снизу для мер μ и μ_2, а также теорему о монотонной сходимости интеграла по мере μ_1, получим

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mu(A_{nm})=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{X_1}\mu_2(A_{nmx_1})\,d\mu_1=\int_{X_1}\mu_2(A_{x_1})\,d\mu_1\,.$$

Осталось проверить это равенство для множества $B=A\setminus E$ меры нуль $\mu(B)=0$. Как и в предыдущем случае, возьмем измеримую оболочку C множества B, тогда $B\subset C$ и $\mu(C)=\int_{X_1}\mu_y(C_{x_1})\,d\mu_1=0$. Так как $B_{x_1}\subset C_{x_1}$, то $\int_{X_1}\mu_2(B_{x_1})\,d\mu_1=0$. □

Пример 1. Пусть $f:E\to\mathbb{R}_+$ неотрицательная измеримая функция и $d\nu\doteqdot d\mu\otimes dt$ обозначает произведение мер в $X\times\mathbb{R}_+$, где dt мера Лебéга в $\mathbb{R}_+$. Тогда, вычисляя меру подграфика $\Gamma_f\doteqdot\{(x,t)\mid x\in E,\,0\leqslant t\leqslant f(x)\}$ при помощи сечений, получим

$$\nu(\Gamma_f)=\int_E f(x)\,d\mu=\int_0^\infty\mu(E(f\geqslant t))\,dt=\int_0^\infty F(t)\,dt\,,$$

где $f(x)$ мера сечения по x и $F(t)=\mu(E(f\geqslant t))$ мера сечения по t.

Лемма. *Подграфик Γ_f любой неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ является измеримым множеством в $X \times \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие «ступенчатые» функции:

$$h_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{H_k^n}(x), \text{ где } H_k^n \doteqdot E\Big(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n}\Big).$$

Поскольку множества H_k^n измеримы, то подграфик Γ_n функции h_n измерим, а так как $h_n \searrow f$ на E, то $\Gamma_n \searrow \Gamma_f$ и подграфик $\Gamma_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ является измеримым. □

Теорема (Фуби́ни)**.** *Если $f \in \boldsymbol{L}(E, \mu)$, то выполняются равенства*

$$\int_E f\, d\mu = \int_{X_1} \Big(\int_{E_{x_1}} f_{x_1}\, d\mu_2 \Big) d\mu_1 = \int_{X_2} \Big(\int_{E_{x_2}} f_{x_2}\, d\mu_1 \Big) d\mu_2.$$

Доказательство. Мы докажем первое равенство, второе доказывается аналогично. Представляя функцию $f = f_+ - f_-$ разностью неотрицательных функций $f_\pm \geqslant 0$, мы сведем доказательство к случаю, когда $f \geqslant 0$. Рассмотрим произведение мер $d\nu \doteqdot d\mu \otimes dt = d\mu_1 \otimes d\mu_2 \otimes dt = d\mu_1 \otimes d\nu_1$, где dt мера Лебега в $\mathbb{R}_+$ и $d\nu_1 \doteqdot d\mu_2 \otimes dt$ задает меру в $X_2 \times \mathbb{R}_+$. Вычисляя меру подграфика $\Gamma_f \doteqdot \{(x,t) \mid x \in E, 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ при помощи сечений по x и по x_1, получим следующие равенства:

$$\nu(\Gamma_f) = \int_E f(x)\, d\mu = \int_{X_1} \nu_1(\Gamma_{f x_1})\, d\mu_1 = \int_{X_1} \Big(\int_{E_{x_1}} f_{x_1}\, d\mu_2 \Big) d\mu_1\,,$$

где $f(x)$ мера сечения по x и $\nu_1(\Gamma_{f x_1}) = \int_{E_{x_1}} f_{x_1}\, d\mu_2$ мера сечения по x_1. □

Определение. *Мера Лебе́га в пространстве* $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим n экземпляров измеримых пространств $(\mathbb{R}, \Sigma_k, dx_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, меры Лебега на прямой $\mathbb{R}$. Их произведение $(\mathbb{R}^n, \Sigma, dx)$ называется *измеримым пространством меры Лебе́га* в пространстве $\mathbb{R}^n$ и обозначается через $dx \doteqdot dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n$.

Рассмотрим связь между интегралами Ри́мана и Лебе́га на конечном отрезке $\Delta \doteqdot [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Пусть $\boldsymbol{R}(\Delta)$ обозначает пространство функций $f : \Delta \to \mathbb{R}$, интегрируемых по Ри́ману, а $\boldsymbol{L}(\Delta)$ пространство функций $f : \Delta \to \mathbb{R}$, интегрируемых по Лебе́гу. Известно, что всякая функция $f \in \boldsymbol{R}(\Delta)$ ограничена. Пусть далее

$$\underline{f}(x) \doteqdot \lim_{r \to 0} \inf_{y \in \Delta \cap \boldsymbol{S}_r(x)} f(y), \quad \overline{f}(x) \doteqdot \lim_{r \to 0} \sup_{y \in \Delta \cap \boldsymbol{S}_r(x)} f(y), \quad \text{где } x \in \Delta,$$

обозначают *нижнюю* и *верхнюю функции Бэ́ра* ограниченной функции $f : \Delta \to \mathbb{R}$. Ясно, что $\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x)$ при всех $x \in \Delta$. Функция $f(x)$ является непрерывной в точке $x \in \Delta$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$.

Обозначим далее через $N_f \doteqdot \{x \in \Delta \mid \underline{f}(x) \neq \overline{f}(x)\}$ множество всех точек разрыва функции f на отрезке Δ. Поскольку множества $\Delta(\underline{f} > c)$ и $\Delta(\overline{f} < c)$ открыты в Δ, то функции Бэра $\underline{f}$ и $\overline{f}$, а также множество N_f, являются измеримыми.

Теорема (Лебе́га). *Пусть функция* $f:\Delta\to\mathbb{R}$ *ограничена на отрезке* $\Delta\subset\mathbb{R}^n$. *Тогда* $f\in\boldsymbol{R}(\Delta)$ *в том и только в том случае, когда множество точек разрыва имеет меру Лебе́га* $\mu(N_f)=0$. *При этом* $f\in\boldsymbol{L}(\Delta)$ *и интегралы совпадают.*

Доказательство. Пусть $\tau=\{\Delta_j\}_{j=1}^m$ обозначает разбиение отрезка $\Delta=\bigcup_{j=1}^m\Delta_j$ на отрезки Δ_j, т.ч. $\mathring{\Delta}_i\cap\mathring{\Delta}_j=\emptyset$, $i\neq j$. Рассмотрим нижние и верхние суммы Дарбу́

$$\underline{D}_\tau(f)\doteqdot\sum_{j=1}^m\underline{a}_j\,\mu(\Delta_j),\quad \overline{D}_\tau(f)\doteqdot\sum_{j=1}^m\overline{a}_j\,\mu(\Delta_j)$$

по разбиению τ, где $\underline{a}_j\doteqdot\inf_{x\in\Delta_j}f(x)$, $\overline{a}_j\doteqdot\sup_{x\in\Delta_j}f(x)$ и $\mu(\Delta_j)$ задает меру Лебе́га отрезка Δ_j. Докажем, что нижний и верхний интегралы Дарбу́ функции f равны соответственно интегралам Лебе́га от нижней и верхней функций Бэ́ра, т.е.

$$\sup_\tau\underline{D}_\tau(f)\doteqdot\underline{\int_\Delta}f(x)\,dx=\int_\Delta\underline{f}(x)\,dx,\quad \inf_\tau\overline{D}_\tau(f)\doteqdot\overline{\int_\Delta}f(x)\,dx=\int_\Delta\underline{f}(x)\,dx.$$

Построим последовательность разбиений $\tau_k=\{\Delta_{kj}\}_{j=1}^{m_k}$ отрезка Δ, т.ч. 1) диаметры этих разбиений $d(\tau_k)\to0$; 2) разбиение τ_{k+1} является продолжением разбиения τ_k; 3) предел соответствующих нижних сумм Дарбу́ равен нижниму интегралу Дарбу́

$$\lim_{k\to\infty}\underline{D}_{\tau_k}(f)=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\underline{a}_{kj}\,\mu(\Delta_{kj})=\underline{\int_\Delta}f(x)\,dx.$$

Рассмотрим функции $h_k(x)\doteqdot\sum_{j=1}^{m_k}\underline{a}_{kj}\chi_{\Delta_{kj}}(x)$. Так как $h_k(x)\nearrow\underline{f}(x)$, если $x\notin\partial\Delta_{kj}$ при всех k и j, то $h_k\nearrow\underline{f}$ п.в. на Δ. По теореме Лебе́га о предельном переходе

$$\int_\Delta\underline{f}(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_\Delta h_k(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\underline{a}_{kj}\,\mu(\Delta_{kj})=\underline{\int_\Delta}f(x)\,dx.$$

Аналогично доказывается второе равенство. В силу интегрируемости функции по Ри́ману нижний и верхний интегралы Дарбу́ совпадают, т.е. $\int_\Delta\underline{f}(x)\,dx=\int_\Delta\overline{f}(x)\,dx$. Тогда из неравенства $\underline{f}(x)\leqslant\overline{f}(x)$ следует, что $\underline{f}(x)=\overline{f}(x)$ п.в. на Δ. Таким образом, первое утверждение доказано. Для доказательства второго утверждения заметим, что $\underline{f}(x)=f(x)=\overline{f}(x)$ п.в. на Δ. Тогда интегралы Лебе́га этих функций совпадают, т.е. интеграл Лебе́га функции f равен нижнему и верхнему интегралам Дарбу́. □

Пример 2. Построим функцию на отрезке $[0,1]$, которая интегрируема по Лебе́гу, однако всякая ей эквивалентная функция не интегрируема по Ри́ману.

Перенумеруем рациональные точки $\{r_n\}=\mathbb{Q}\cap[0,1]$ отрезка $[0,1]$ и рассмотрим множество $A_\varepsilon\doteqdot\bigcup_{n=1}^\infty(r_n-\varepsilon_n,r_n+\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n\doteqdot\varepsilon/2^{n+1}$ и $0<\varepsilon<1$. Поскольку мера $0<\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$, то $B_\varepsilon\doteqdot[0,1]\setminus A_\varepsilon$ имеет положительную меру $1-\varepsilon<\mu(B_\varepsilon)<1$.

Множество B_ε является замкнутым и состоит только из иррациональных чисел. Следовательно, оно является нигде не плотным. Поэтому множество точек разрыва функции $f(x)\doteqdot\chi_{B_\varepsilon}(x)$ есть множество B_ε. Отсюда легко доказать, что всякая ей эквивалентная функция имеет множество точек разрыва положительной меры.

10 ПРОСТРАНСТВО $L_p(E,\mu)$ ПРИ $0<p\leqslant\infty$

Пусть (X,Σ,μ) — измеримое пространство, в котором мера μ является полной, и $\mathbb{F}$ обозначает поле действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел.

Определение. *Комплекснозначная функция* $f:E\to\mathbb{C}$ называется *измеримой*, если ее действительная часть $u(x)\doteqdot\Re f(x)$ и мнимая часть $v(x)\doteqdot\Im f(x)$ являются измеримыми функциями. Функция называется *интегрируемой* $f\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, если $u,v\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, при этом ее интеграл Лебега равен $\int_E f\,d\mu\doteqdot\int_E u\,d\mu+\boldsymbol{i}\int_E v\,d\mu$.

1. *Если $f,g\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\lambda\in\mathbb{F}$, то $\lambda f, f+g\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$ и выполняются равенства $\int_E\lambda f\,d\mu=\lambda\int_E f\,d\mu$ и $\int_E(f+g)\,d\mu=\int_E f\,d\mu+\int_E g\,d\mu$.*

Эти свойства вытекают из доказанных ранее свойств в действительном случае. Докажем, например, первое равенство. Пусть $\lambda=\alpha+\boldsymbol{i}\beta$ и $f=u+\boldsymbol{i}v$, тогда имеем $\lambda f=(\alpha u-\beta v)+\boldsymbol{i}(\alpha v+\beta u)$. Отсюда $\int_E\lambda f\,d\mu=\int_E(\alpha u-\beta v)\,d\mu+\boldsymbol{i}\int_E(\alpha v+\beta u)\,d\mu=(\alpha\int_E u\,d\mu-\beta\int_E v\,d\mu)+\boldsymbol{i}(\alpha\int_E v\,d\mu+\beta\int_E u\,d\mu)=(\alpha+\boldsymbol{i}\beta)(\int_E u\,d\mu+\boldsymbol{i}\int_E v\,d\mu)$. Таким образом, $\boldsymbol{L}(E,\mu)$ является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$.

2. *Если $f\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, то модуль $|f|\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $|\int_E f\,d\mu|\leqslant\int_E|f|\,d\mu$.*

Так как $|f|\leqslant|u|+|v|$, то $|f|\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$. Если $\int_E f\,d\mu=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}|\int_E f\,d\mu|$, то из свойств интеграла получим $|\int_E f\,d\mu|=\Re\big(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}\int_E f\,d\mu\big)=\int_E\Re\big(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}f\big)\,d\mu\leqslant\int_E|f|\,d\mu$.

3. *Если $f_1\sim g_1$ и $f_2\sim g_2$, то $f_1+f_2\sim g_1+g_2$ и $\lambda f_1\sim\lambda g_1$. Пространство классов эквивалентности измеримых функций является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$. При этом если $f\sim g$ и $f\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, то $g\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$ и интегралы равны.*

Напомним, что функции $f,g:E\to\mathbb{F}$ называются эквивалентными $f\sim g$ на E, если $f=g$ п.в. на E. Указанные свойства отношения эквивалентности очевидны.

Определение. *Пространством $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ существенно ограниченных функций* называется множество всех классов эквивалентности ограниченных и измеримых функций $f:E\to\mathbb{F}$, в котором норма определяется по формулам:

$$\|f\|\doteqdot\inf_{\mu(A)=0}\sup_{x\in E\setminus A}|f(x)|=\inf\{c>0\mid |f(x)|\leqslant c\ \text{п.в. на}\ E\}.$$

Так как множество ограниченных функций из $\boldsymbol{B}(E)$, эквивалентных нулю на E, образует подпространство L, то $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ является факторпространством $\boldsymbol{B}(E)/L$, а классы эквивалентности образуют смежные классы $\boldsymbol{B}(E)/L$. Далее мы будем обращаться с классами эквивалентности как с обычными функциями.

Норма $\|f\|$ называется *существенной верхней гранью функции* $f\in\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$. Покажем, что существует множество $N_f\subset E$, т.ч. $\mu(N_f)=0$ и $\|f\|=\sup_{x\in E\setminus N_f}|f(x)|$. Выберем множества $A_n\subset E$, т.ч. $\mu(A_n)=0$ и $|f(x)|\leqslant\|f\|+1/n$ при всех $x\in E\setminus A_n$. Тогда объединение $N_f=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ имеет меру нуль $\mu(N_f)=0$ и будет выполняться равенство $\|f\|=\sup_{x\in E\setminus N_f}|f(x)|$. Таким образом, существенная верхняя грань $\|f\|$ функции f достигается на множестве N_f меры нуль.

Докажем свойства нормы. Если $\|f\|=0$, то по доказанному выше имеем $f\sim 0$. Однородность нормы $\|\lambda f\|=|\lambda|\|f\|$ очевидна. Выберем множества N_f и N_g меры нуль $\mu(N_f)=\mu(N_g)=0$, т.ч. $\|f\|=\sup_{x\in E\setminus N_f}|f(x)|$ и $\|g\|=\sup_{x\in E\setminus N_g}|g(x)|$. Полагая $N=N_f\cup N_g$, получим $\mu(N)=0$ и выполняется неравенство

$$\|f+g\|\leqslant \sup_{x\in E\setminus N}|f(x)+g(x)|\leqslant \sup_{x\in E\setminus N}|f(x)|+\sup_{x\in E\setminus N}|g(x)|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

Таким образом, $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ является нормированным пространством.

Теорема. *Пространство $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ является полным.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность Коши в пространстве $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ и множество $N=\bigcup_{n,m=1}^{\infty}N_{(f_n-f_m)}$ имеет меру нуль $\mu(N)=0$. Так как выполняются равенства $\|f_n-f_m\|=\sup_{x\in E\setminus N}|f_n(x)-f_m(x)|$, то $\{f_n\}$ является последовательностью Коши в $\boldsymbol{B}(E\setminus N)$ и в силу полноты $\boldsymbol{B}(E\setminus N)$ имеет предел $f\in\boldsymbol{B}(E\setminus N)$. Полагая $f(x)=0$ при всех $x\in N$, мы получим ограниченную измеримую функцию $f\in\boldsymbol{B}(E)$, при этом из равномерной сходимости на $E\setminus N$ следует, что $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$. $\square$

Определение. *Пространством $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ суммируемых функций степени $p>0$,* называется множество классов эквивалентности измеримых функций $f:E\to\mathbb{F}$, т.ч. $|f|^p\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, в котором квазинорма и норма определяются по формулам:

$$\|f\|\doteq\int_E|f|^p d\mu \text{ при } 0<p<1 \text{ и } \|f\|\doteq\left(\int_E|f|^p d\mu\right)^{1/p} \text{ при } 1\leqslant p<\infty.$$

С классами эквивалентности в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ мы будем обращаться как с обычными функциями. Пусть $f,g\in\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Поскольку $|f+g|^p\leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p)$, то $f+g\in\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Очевидно, что $\lambda f\in\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при всех $\lambda\in\mathbb{F}$. Таким образом, $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ становится линейным пространством. В силу неравенства Минко́вского, которое выводится далее из неравенства Гёльдера, определение $\|f\|$ будет обладать свойствами квазинормы при $0<p<1$ и нормы при $1\leqslant p<\infty$.

1. Неравенство Гёльдера. *Если $f,g:E\to\mathbb{R}_+$ — неотрицательные измеримые функции, $1<p,q<\infty$ и $1/p+1/q=1$, то $\int_E fg\,d\mu\leqslant(\int_E f^p d\mu)^{1/p}(\int_E g^q d\mu)^{1/q}$.*

Вначале докажем неравенство Ю́нга: $ab\leqslant a^p/p+b^q/q$ при $a,b\in\mathbb{R}_+$. Заметим, что функции $y=x^{p-1}$ и $x=y^{q-1}$ являются взаимно обратными на полуоси $\mathbb{R}_+$, т.к. $1/(p-1)=q-1$. Поэтому получаем $ab\leqslant\int_0^a x^{p-1}\,dx+\int_0^b y^{q-1}\,dy=a^p/p+b^q/q$. Знак равенства имеет место только тогда, когда $a^{p-1}=b$, т.е. $a^p=b^q$.

Пусть $A=\int_E f^p\,d\mu$ и $B=\int_E g^q\,d\mu$. Если один из этих интегралов равен нулю или бесконечности, то утверждение верно. Иначе, полагая в неравенстве Юнга $a\doteq f/A^{1/p}$ и $b\doteq g/B^{1/q}$, а затем интегрируя обе его части, получим

$$\int_E ab\,d\mu\leqslant\int_E f^p d\mu/pA+\int_E g^q d\mu/qB=1/p+1/q=1.$$

Отсюда вытекает неравенство Гёльдера. Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство $f^p/A=g^q/B$ п.в. на E.

2. Неравенство Минко́вского. *Если функции $f,g\in\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$, то имеет место неравенство $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$. При этом в случае $1<p<\infty$ равенство будет выполняться тогда и только тогда, когда $f=\lambda\,g$ п.в. на E, где $\lambda\geqslant 0$.*

В случае $0<p\leqslant 1$ доказательство вытекает из неравенства $|f+g|^p\leqslant|f|^p+|g|^p$, которое легко получить из неравенства $(t+1)^p<t^p+1$ при всех $t>1$ и $0<p<1$. В случае $p>1$ введем обозначения $A=\int_E|f|^p\,d\mu$, $B=\int_E|g|^p\,d\mu$, $C=\int_E|f+g|^p\,d\mu$. Применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что $(p-1)q=p$, получим

$$C=\int_E|f+g|^p\,d\mu\leqslant\int_E|f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu+\int_E|g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu\leqslant A^{1/p}C^{1/q}+B^{1/p}C^{1/q}.$$

Поделив на $C^{1/q}$, имеем неравенство Минко́вского. Равенство имеет место только в том случае, когда $|f+g|=|f|+|g|$ и $|f|^p/A=|g|^p/B$ п.в. на E. Тогда из первого равенства следует, что $f=hg$ п.в. на E, где $h\geqslant 0$ п.в. на E. Из второго равенства следует, что $h^p=A/B$ п.в. на $E(g\neq 0)$. Отсюда $f=\lambda\,g$ п.в. на E, где $\lambda=(A/B)^{1/p}$.

3. Обобщенное неравенство Минко́вского. *Если $f:E_1\times E_2\to\mathbb{R}_+$ измерима в произведении измеримых пространств с полными и σ-конечными мерами, то*

$$\Big(\int_{E_1}\big(\int_{E_2}f_{x_1}d\mu_2\big)^p\,d\mu_1\Big)^{1/p}\leqslant\int_{E_2}\Big(\int_{E_1}f_{x_2}^p d\mu_1\Big)^{1/p}d\mu_2\ \text{ при всех }\ 1<p<\infty.$$

В случае $p=1$ это неравенство превращается в равенство.

По теореме Фуби́ни функция $g(x_1)\doteqdot\int_{E_2}f_{x_1}d\mu_2$ определена п.в. на E_1 и измерима. Изменяя порядок интегрирования и применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\int_{E_1}g\,g^{p-1}d\mu_1=\int_{E_2}\big(\int_{E_1}f_{x_2}\,g^{p-1}d\mu_1\big)d\mu_2\leqslant\int_{E_2}\Big(\int_{E_1}f_{x_2}^p d\mu_1\Big)^{1/p}d\mu_2\,\Big(\int_{E_1}g^p d\mu_1\Big)^{1/q},$$

где $(p-1)q=p$. Осталось поделить обе части неравенства на последнюю скобку.

Теорема. *Пространство $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при $0<p<\infty$ является полным.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ последовательность Коши́ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Выберем индексы $m_1<m_2<\ldots$, т.ч. $\|f_i-f_j\|<2^{-n}$ при всех $i,j\geqslant m_n$. Положим

$$g(x)\doteqdot|f_{m_1}(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}|f_{m_{k+1}}(x)-f_{m_k}(x)|.$$

Так как частичные суммы $g_n(x)=|f_{m_1}(x)|+\sum_{k=1}^{n}|f_{m_{k+1}}(x)-f_{m_k}(x)|$ будут монотонно сходиться $g_n(x)\nearrow g(x)$ и из неравенства Минко́вского следует $\|g_n\|\leqslant\|f_{m_1}\|+1$, то в силу теоремы о монотонной сходимости $g\in\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Поэтому функция $g(x)$ является конечной п.в. на E и, следовательно, сходится ряд

$$f(x)\doteqdot f_{m_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{m_{k+1}}(x)-f_{m_k}(x))=\lim_{n\to\infty}f_{m_n}(x)\ \text{ п.в. на } E.$$

При этом из неравенства $|f(x)|\leqslant g(x)$ вытекает, что $f\in\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Поскольку

$$|f(x)-f_{m_n}(x)|\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}|f_{m_{k+1}}(x)-f_{m_k}(x)|\ \text{ п.в. на } E,$$

то, применяя лемму Фату́ и неравенство Минко́вского к частичным суммам этого ряда, получим $\|f-f_{m_n}\|\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\|f_{m_{k+1}}-f_{m_k}\|<2^{1-n}$, т.е. предел $\lim_{n\to\infty}\|f-f_{m_n}\|=0$. Таким образом, $\{f_n\}$ является последовательностью Коши и содержит сходящуюся к f подпоследовательность $\{f_{m_n}\}$. Отсюда $\{f_n\}$ сходится к f в $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. $\square$

Лемма. *Множество $\boldsymbol{H}(E,\mu)$ простых измеримых функций $h: E\to\mathbb{F}$ всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при всех $0<p\leqslant\infty$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай поля действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть $f\in\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ и $f=f_+-f_-$, где $f_\pm=\max\{\pm f.0\}$. Тогда существуют простые неотрицательные функции $h_n^\pm\in\boldsymbol{H}(E,\mu)$, т.ч. $h_n^\pm\nearrow f_\pm$. При этом если функция f ограничена, то сходимость будет равномерной. Пусть $h_n \doteqdot h_n^+-h_n^-$, тогда по теореме о монотонной сходимости $\|f-h_n\|\leqslant\|f_+-h_n^+\|+\|f_--h_n^-\|\to 0$ при $n\to\infty$. □

Далее мы будем предполагать, что в заданном измеримом пространстве (X,Σ,μ) мера μ регулярна и все открытые множества являются измеримыми.

Теорема. *Пространство $\boldsymbol{C}(E)$ ограниченных непрерывных функций $f: E\to\mathbb{F}$ на множестве $E\in\Sigma$ всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при всех $0<p<\infty$.*

Доказательство. Пусть $f\in\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$, тогда по лемме для любого $\varepsilon>0$ существует такая простая функция $h\in\boldsymbol{H}(X,\mu)$, что $\|f-h\|<\varepsilon/2$. Всякая простая измеримая функция представляется в виде $h(x)=\sum_{j=1}^m h_j\chi_{H_j}(x)$, где $H_j\in\Sigma$ и $E=\bigsqcup_{j=1}^m H_j$. В силу регулярности меры существуют компактное $A_j\subset H_j$ и открытое $B_j\supset H_j$ множества, т.ч. $\mu(B_j\setminus A_j)<(\varepsilon/2c)^r$, где $c=\sum_{j=1}^m|h_j|^s$, $r\doteqdot\max\{1,p\}$ и $s\doteqdot\min\{1,p\}$. Поскольку расстояние $\rho(x,A)\doteqdot\inf_{y\in A}\rho(x,y)$ от точки $x\in X$ до множества $A\subset X$ является непрерывной функцией точки, то следующие функции непрерывны:

$$g(x)\doteqdot\sum_{j=1}^m h_j g_j(x)\,,\ \text{где}\ g_j(x)\doteqdot\frac{\rho(x,X\setminus B_j)}{\rho(x,A_j)+\rho(x,X\setminus B_j)}\,.$$

Функция $g_j(x)=1$, если $x\in A_j$, и $g_j(x)=0$, если $x\notin B_j$. Так как $|\chi_{H_j}(x)-g_j(x)|\leqslant 1$ на множестве $B_j\setminus A_j$, то $\|\chi_{H_j}-g_j\|\leqslant\mu^{1/r}(B_j\setminus A_j)<\varepsilon/2c$. Применяя неравенство Минко́вского, получим $\|h-g\|<\varepsilon/2$ и $\|f-g\|\leqslant\|f-h\|+\|h-g\|<\varepsilon$. □

Следствие. *В пространстве $\boldsymbol{L}_p[0,1]$ при всех $0<p<\infty$ всюду плотно*

a) множество $\boldsymbol{H}[0,1]$ простых измеримых функций на $[0,1]$;

b) множество $\boldsymbol{C}[0,1]$ непрерывных функций на $[0,1]$;

c) множество $\tilde{\boldsymbol{C}}[0,1]$ непрерывных функций на $[0,1]$, т.ч. $f(0)=f(1)$;

d) множество $\boldsymbol{S}$ ступенчатых функций $f(x)=\sum_{k=1}^n c_k\chi_{[x_{k-1},x_k]}$;

e) множество $\boldsymbol{P}$ алгебраических многочленов $P(x)=\sum_{k=0}^n c_kx^k$;

f) множество $\boldsymbol{T}$ тригонометрических полиномов $T(x)=\sum_{k=-n}^n c_ke^{2\pi ikx}$;

Для доказательства следствия заметим, что утверждения c) и d) получаются из того, что непрерывную функцию можно аппроксимировать в пространстве $\boldsymbol{L}_p[0,1]$ функциями класса $\tilde{\boldsymbol{C}}[0,1]$ и $\boldsymbol{S}[0,1]$, а утверждения e) и f) вытекают из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции из $\boldsymbol{C}[0,1]$ и $\tilde{\boldsymbol{C}}[0,1]$ соответственно алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами.

11 АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство, в котором мера μ полна и σ-конечна, и $\Sigma_E \doteqdot \{A \subset E \mid A \in \Sigma\}$ — σ-алгебра измеримых подмножеств множества $E \in \Sigma$.

Определение. Функция $\varphi : \Sigma_E \to \mathbb{F}$ называется *зарядом на множестве* $E \in \Sigma$, если φ является конечной σ-аддитивной функцией, заданной на σ-алгебре Σ_E.

Заряд φ называют *абсолютно непрерывным* и обозначают $d\varphi \ll d\mu$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $|\varphi(A)| < \varepsilon$ для всех $A \in \Sigma_E$ с мерой $\mu(A) < \delta$.

Теорема (об абсолютной непрерывности)**.** *Если* $f \in \boldsymbol{L}_1(E, \mu)$, *то* $\varphi(A) \doteqdot \int_A f\, d\mu$ *является абсолютно непрерывным зарядом* $d\varphi \ll d\mu$ *на множестве* E.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда функция действительная и неотрицательная $f \geqslant 0$ на E. Если $E_n \doteqdot E(f \leqslant n)$, то $E_n \nearrow E$ и в силу свойства непрерывности снизу $\lim \varphi(E_n) = \varphi(E)$. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\varphi(E \setminus E_n) < \varepsilon/2$. Тогда для всякого $A \in \Sigma_E$ с мерой $\mu(A) < \delta \doteqdot \varepsilon/2n$ имеем

$$\varphi(A) = \int_A f\, d\mu = \int_{A \cap E_n} f\, d\mu + \int_{A \setminus E_n} f\, d\mu < n\mu(A) + \varphi(E \setminus E_n) < \varepsilon .$$

Таким образом, заряд является абсолютно непрерывным $d\varphi \ll d\mu$. □

Теорема (Радóна–Никоди́ма)**.** *Если заряд на множестве* $E \in \Sigma$ *удовлетворяет условию:* $\varphi(A) = 0$ *для каждого* $A \in \Sigma_E$ *с мерой нуль* $\mu(A) = 0$, *то существует единственная функция* $f \in \boldsymbol{L}_1(E, \mu)$, *т.ч.* $\varphi(A) = \int_A f\, d\mu$ *при всех* $A \in \Sigma_E$.

Эта функция $f \in \boldsymbol{L}_1(E, \mu)$ называется производной Радóна–Никоди́ма $f \doteqdot d\varphi/d\mu$. Докажем ее единственность. Пусть $\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$ при всех $A \in \Sigma_E$ и функции действительны. Положим $A_n \doteqdot E(f - g > 1/n)$. Тогда мера $\mu(A_n) \leqslant n \int_{A_n} (f - g)\, d\mu = 0$ равна нулю, и, следовательно, множество $E(f - g > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ имеет меру нуль. Аналогично множество $E(g - f > 0)$ имеет меру нуль. Поэтому $f \sim g$ на E.

Следствие (критерий абсолютной непрерывности)**.** *Заряд является абсолютно непрерывным* $d\varphi \ll d\mu$ *на множестве* $E \in \Sigma$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие:* $\varphi(A) = 0$ *для всякого* $A \in \Sigma_E$ *с мерой нуль* $\mu(A) = 0$.

Необходимость этого следствия очевидна, а достаточность следует из теоремы Радóна–Никоди́ма и теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебéга.

Определение. Говорят, что функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, если величина ее вариации конечна на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b (F) \doteqdot \sup_{\tau} \sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $\tau \doteqdot \{a = x_0 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$.

Обозначим через $\boldsymbol{BV}[a, b]$ нормированное пространство всех функции ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ с нормой $\|F\| \doteqdot |F(a)| + \mathbf{V}_a^b(F)$.

Имеют место следующие свойства (см. учебник Колмогорова и Фомина):

1. *Если* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, *то* $\mathbf{V}_a^b(F) = \mathbf{V}_a^c(F) + \mathbf{V}_c^b(F)$ *при* $a < c < b$.

2. *Если функция* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ *непрерывна слева, то функция* $V(x) \doteqdot \mathbf{V}_a^x(F)$, *равная вариации* F *на отрезке* $[a,x]$, *тоже непрерывна слева.*

3. Теорема Жорда́на (о разложении). *Если* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, *то существуют неубывающие функции* $\alpha\uparrow$ *и* $\beta\uparrow$, *т.ч. выполняются следующие свойства:*

$$F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x), \quad V(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad \alpha(a) = \beta(a) = 0.$$

Эти неубывающие функции α и β вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha(x) \doteqdot \frac{1}{2}\Big\{V(x) + F(x) - F(a)\Big\}, \quad \beta(x) \doteqdot \frac{1}{2}\Big\{V(x) - F(x) + F(a)\Big\}.$$

При этом, если F непрерывна слева, то функции α и β также непрерывны слева.

4. Теорема Лебе́га (о существовании производной). *Для всякой монотонной функции* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *существует производная* $f'(x)$ *п.в. на* $[a,b]$.

Из разложения Жорда́на следует, что всякая функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ является ограниченной на $[a,b]$, множество ее точек разрыва на $[a,b]$ не более, чем счетно. При этом в силу теоремы Лебе́га существует производная $F'(x)$ п.в. на $[a,b]$.

Пусть функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ непрерывна слева и $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ есть разложение Жорда́на. Рассмотрим меры Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β, определенные по неубывающим функциям α и β. Разность этих мер $\varphi_F \doteqdot \mu_\alpha - \mu_\beta$ называется *зарядом Лебе́га–Сти́лтьеса*. Он задается на пересечении $\Sigma_F \doteqdot \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ σ-алгебр измеримых множеств Σ_α и Σ_β соответствующих мер μ_α и μ_β.

Определение. Интегралом Лебе́га–Сти́лтьеса называется разность интегралов

$$\int_a^b f\,d\varphi_F \doteqdot \int_a^b f\,d\mu_\alpha - \int_a^b f\,d\mu_\beta$$

по мерам Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β на $[a,b]$. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по заряду* φ_F, если она интегрируема по мерам μ_α и μ_β.

Определение. Интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса по функции F называется предел

$$\int_a^b f\,dF \doteqdot \lim_{d_\tau \to 0} R_\tau(f,\xi,F), \quad \text{где } R_\tau(f,\xi,F) \doteqdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})),$$

интегральных сумм Ри́мана–Сти́лтьеса $R_\tau(f,\xi,F)$. Здесь τ обозначает разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$, $\xi \doteqdot \{\xi_k\}_{k=1}^n$ и $d_\tau \doteqdot \max(x_k - x_{k-1})$ диаметр этого разбиения. Если $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ является разложением Жорда́на, то интеграл по функции F будет равен разности интегралов по функциям α и β.

Лемма. *Интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса по функции* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ *существует для всякой непрерывной функции* $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. *При этом интеграл не зависит от изменения функции* F *на счетном множестве точек интервала* (a,b).

Доказательство. Суммы Ри́мана–Сти́лтьеса $R_\tau(f,\xi,F)$ совпадают с интегралами Лебе́га–Сти́лтьеса от простых функций $h_\tau(x)=f(\xi_k)$ при $x\in[x_{k-1},x_k)$ и $k=1,\ldots,n$. Поскольку функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, то $h_\tau\rightrightarrows f$ при $d_\tau\to 0$. По теореме Лебе́га о предельном переходе существует предел интегралов от простых функций и значит функция $f(x)$ интегрируема в смысле Ри́мана–Сти́лтьеса. □

Теорема (сравнения интегралов). *Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена, то из существования интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса вытекает существование соответствующего интеграла Лебе́га–Сти́лтьеса и их равенство.*

Доказательство. Из разложения Жорда́на мы можем считать $F\uparrow$ неубывающей, а прибавляя константу можем считать $f\geqslant 0$ неотрицательной. Рассмотрим нижние и верхние суммы Дарбу́–Сти́лтьеса по разбиению $\tau=\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$

$$\underline{D}_\tau(f,F)\doteqdot\sum_{k=1}^n\underline{a}_k(F(x_k)-F(x_{k-1})),\quad \overline{D}_\tau(f,F)\doteqdot\sum_{k=1}^n\overline{a}_k(F(x_k)-F(x_{k-1}))\,,$$

где $\underline{a}_k\doteqdot\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)$ и $\overline{a}_k\doteqdot\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)$. Заметим, что суммы Дарбу́ $S_\pi(f)$ по произвольным измеримым разбиениям π отрезка $[a,b]$, которые продолжают разбиение τ, находятся между $\underline{D}_\tau(f,F)\leqslant S_\pi(f)\leqslant\overline{D}_\tau(f,F)$. Пусть I есть интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. выполняется неравенство $I-\varepsilon<R_\tau(f,\xi,F)<I+\varepsilon$ для всех ξ и τ диаметра $d_\tau<\delta$. Поэтому

$$I-\varepsilon\leqslant\underline{D}_\tau(f,F)\leqslant R_\tau(f,\xi,F)\leqslant\overline{D}_\tau(f,F)\leqslant I+\varepsilon\,.$$

Отсюда $I-\varepsilon\leqslant S_\pi(f)\leqslant I+\varepsilon$ для всех π, которые продолжают разбиение τ. □

Определение. Функция $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. для всякой системы интервалов $\bigsqcup_{k=1}^n(a_k,b_k)$ с суммой длин $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$.

Обозначим через $\boldsymbol{AC}[a,b]$ нормированное пространство всех абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|F\|\doteqdot|F(a)|+\int_a^b|F'(t)|\,dt$.

1. *Если $F\in\boldsymbol{Lip}[a,b]$, т.е. существует $c>0$, для которой выполняется условие Ли́пшица $|F(x)-F(y)|\leqslant c\,|x-y|$ при всех $x,y\in[a,b]$, то $F\in\boldsymbol{AC}[a,b]$.*

Пусть $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$, тогда $\sum_{k=1}^n|F(b_k)-F(a_k)|\leqslant c\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<c\delta<\varepsilon$.

2. *Если $F\in\boldsymbol{AC}[a,b]$, то $F\in\boldsymbol{BV}[a,b]$. Поэтому производная $F'(x)$ абсолютно непрерывной функции существует п.в. на $[a,b]$.*

Пусть $(x_k-x_{k-1})=\frac{(b-a)}{n}<\delta$ при $k=1,\ldots,n$, тогда $\mathbf{V}_a^b(F)=\sum_{k=1}^n\mathbf{V}_{x_{k-1}}^{x_k}(F)\leqslant n\varepsilon$.

3. *Если $F\in\boldsymbol{AC}[a,b]$ и $F(x)=F(a)+\alpha(x)-\beta(x)$ есть разложение Жорда́на, то функции $\alpha,\beta\in\boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывны.*

Достаточно доказать, что ее вариация $V\in\boldsymbol{AC}[a,b]$. По определению абсолютной непрерывности, если $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$, то $\sum_{k=1}^n|V(b_k)-V(a_k)|=\sum_{k=1}^n\mathbf{V}_{a_k}^{b_k}(F)\leqslant\varepsilon$.

4. *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, то существует единственная функция $f \in \boldsymbol{L}_1[a,b]$, т.ч. выполняется равенство $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$.*

Рассмотрим разложение Жорда́на $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$, где $\alpha, \beta \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Тогда меры Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β будут абсолютно непрерывны $d\mu_\alpha \ll dx$ и $d\mu_\beta \ll dx$ по мере Лебе́га. Поэтому заряд $\varphi_F = \mu_\alpha - \mu_\beta$ абсолютно непрерывен и по теореме Радо́на–Никоди́ма $F(x) - F(a) = \varphi_F([a,x)) = \int_a^x f(t)\,dt$, где $f \in \boldsymbol{L}_1[a,b]$.

Лемма. *Если функция $F(t)\uparrow$ неубывает на $[a,b]$, то $\int_a^b F'(t)dt \leqslant F(b) - F(a)$. Если, кроме того, $F \in \boldsymbol{Lip}[a,b]$, то это неравенство будет равенством.*

Доказательство. Пусть $F(t) \doteqdot F(b)$ при $t \in (b, b+1]$ и $F_n(t) \doteqdot n(F(t+1/n) - F(t))$. Так как предел $\lim F_n(t) = F'(t)$ существует п.в. на $[a,b]$, то по лемме Фату́

$$\int_a^b F'(t)dt \leqslant \underline{\lim} \int_a^b F_n(t)dt = \underline{\lim}\Big(n\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)dt - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)dt\Big) \leqslant F(b) - F(a).$$

Если $F \in \boldsymbol{Lip}[a,b]$, то $|F_n(t)| \leqslant c$ при всех $t \in [a,b]$. Применяя, как и выше, вместо леммы Фату́ теорему Лебе́га о предельном переходе, получим равенство. □

Теорема (характеристика абсолютной непрерывности). *Функция $F(x) \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ тогда и только тогда, когда ее производная $F'(x)$ существует п.в. на $[a,b]$, $F'(x) \in \boldsymbol{L}_1[a,b]$ и $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$ при $x \in [a,b]$.*

Доказательство. Достаточность следует из свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Докажем необходимость. По свойству 4 существует $f \in \boldsymbol{L}_1[a,b]$, т.ч. $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$. Заменяя $F(x)$ разностью $F(x) - F(a)$ и представляя $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ разностью неотрицательных функций, сведем доказательство к случаю, когда $f(x) \geqslant 0$ неотрицательна, а $F(x)\uparrow$ неубывающая и $F(a) = 0$. В этом случае осталось доказать, что $F'(x) = f(x)$ п.в. на $[a,b]$.

Пусть $F_n(x) \doteqdot \int_a^x f_n(t)\,dt$, где $f_n(t) \doteqdot \min\{f(t), n\}$. Тогда $F_n \in \boldsymbol{Lip}[a,b]$ и по лемме получим $F_n(x) = \int_a^x F_n'(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$. В силу свойства 4 единственности производной $F_n'(x) = f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$. Поскольку $f(x) - f_n(x) \geqslant 0$ неотрицательна, то $F(x) - F_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t))\,dt$ неубывающая и значит имеет неотрицательную производную, т.е. имеет место неравенство $F'(x) \geqslant F_n'(x) = f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$.

Переходя к пределу в этом неравенстве, мы получим $F'(x) \geqslant f(x)$ п.в. на $[a,b]$. Тогда интеграл $\int_a^b (F'(x) - f(x))\,dx \geqslant 0$. С другой стороны, по лемме выполняется неравенство $\int_a^b F'(x)\,dx \leqslant F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$. Значит интеграл $\int_a^b (F'(x) - f(x))\,dx \leqslant 0$. Таким образом, интеграл $\int_a^b (F'(x) - f(x))\,dx = 0$. Так как функция $F'(x) - f(x) \geqslant 0$ неотрицательна п.в. на $[a,b]$, то она равна $F'(x) - f(x) = 0$ п.в. на $[a,b]$. □

Пример 1. Как известно, функция Ка́нтора $k : [0,1] \to [0,1]$ является монотонной $k(x)\uparrow$, непрерывной и ее производная равна нулю $k'(x) = 0$ п.в. на отрезке $[0,1]$, т.к. на каждом дополнительном интервале к канторову множеству $C \subset [0,1]$ она равна константе, а канторово множество имеет меру нуль $\mu(C) = 0$. Отсюда имеем $\int_0^1 k'(x)\,dx = 0 \neq k(1) - k(0) = 1$, т.е. $k(x)$ не является абсолютно непрерывной.

12 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ обозначают нормированные линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел.

Определение. Отображение $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *линейным оператором*, если

$$A(x+y)=A(x)+A(y) \text{ и } A(\lambda x)=\lambda A(x) \text{ при всех } x,y\in\boldsymbol{E} \text{ и } \lambda\in\mathbb{F}.$$

Норма линейного оператора $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ вычисляется по следующим формулам:

$$\|A\| \doteqdot \sup_{x\in\boldsymbol{S}}\|A(x)\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|A(x)\|}{\|x\|}, \text{ где } \boldsymbol{S}\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E} \mid \|x\|\leqslant 1\}.$$

Линейный оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если он отображает ограниченные множества в ограниченные. Это равносильно тому, что его норма $\|A\|<\infty$ конечна. Далее через $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ обозначается нормированное пространство всех ограниченных операторов, действующих из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$.

Пример. Рассмотрим оператор $A:\boldsymbol{L}_p(E,\mu)\to\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ умножения на функцию $A(f)\doteqdot\varphi f$, где $\varphi\in\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ есть заданная ограниченная измеримая функция и $1\leqslant p<\infty$. Покажем, что его норма $\|A\|=\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Так как при всех $f\in\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$

$$\|A(f)\|^p=\textstyle\int_E|\varphi f|^p d\mu\leqslant\|\varphi\|^p_{\boldsymbol{L}_\infty}\int_E|f|^p d\mu=\|\varphi\|^p_{\boldsymbol{L}_\infty}\|f\|^p,$$

то норма $\|A\|\leqslant\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Докажем равенство. Для любого $\varepsilon>0$ существует $A\subset E$ с мерой $\mu(A)>0$, т.ч. $|\varphi(x)|>\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}-\varepsilon$ для всех $x\in A$. Полагая $f\doteqdot\chi_A$, имеем

$$\|A(f)\|^p=\textstyle\int_A|\varphi|^p d\mu>(\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}-\varepsilon)^p\mu(A)=(\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}-\varepsilon)^p\|f\|^p,$$

т.е. выполняется неравенство $\|A\|>\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}-\varepsilon$. Поэтому норма $\|A\|=\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$.

Теорема. *Если $\boldsymbol{F}$ — ба́нахово пространство, то пространство ограниченных операторов $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является ба́наховым пространством.*

Доказательство. Пусть $A,B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Сумма операторов $A+B$ и умножение на число λA определяются по формулам $(A+B)(x)\doteqdot A(x)+B(x)$ и $(\lambda A)(x)\doteqdot\lambda A(x)$. Очевидно, что $\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|$ и выполняется неравенство треугольника

$$\|A+B\|=\sup\nolimits_{x\in\boldsymbol{S}}\|A(x)+B(x)\|\leqslant\sup\nolimits_{x\in\boldsymbol{S}}\|A(x)\|+\sup\nolimits_{x\in\boldsymbol{S}}\|B(x)\|=\|A\|+\|B\|.$$

Поэтому $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ — нормированное пространство. Докажем его полноту.

Пусть $\{A_n\}$ есть последовательность Коши́ в $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует N, т.ч. $\|A_n-A_m\|<\varepsilon$ при всех $n,m\geqslant N$. Из определения операторной нормы вытекает неравенство $\|A_n(x)-A_m(x)\|<\varepsilon\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $n,m\geqslant N$. Следовательно, $\{A_n(x)\}$ есть последовательность Коши́ в $\boldsymbol{F}$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$. В силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $A(x)\doteqdot\lim_{n\to\infty}A_n(x)$. Ясно, что A является линейным оператором. Переходя к пределу в неравенстве, указанном выше, получим, что $\|A_n(x)-A(x)\|\leqslant\varepsilon\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $n\geqslant N$, т.е. $\|A_n-A\|\leqslant\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Поэтому $A_n\to A$ сходится по норме. Так как $\|A\|\leqslant\|A_n\|+\varepsilon$, то $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. □

Теорема (Ба́наха–Штейнга́уза). *Пусть система операторов* $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *по точечно оганичена на ба́наховом пространстве* $\boldsymbol{E}$*, т.е. для каждого* $x \in \boldsymbol{E}$ *множества* $M_x \doteqdot \{y = A_i(x) \mid i \in I\}$ *ограничены в* $\boldsymbol{F}$*. Тогда* $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$.

Эта теорема является следствием из *принципа равностепенной непрерывности* отображений и называется *принципом равномерной ограниченности* операторов. Докажем, что любая система равностепенно непрерывных операторов $\{A_i\}_{i\in I}$ будет равномерно ограниченной. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч.$\|A_i(x)\| < \varepsilon$ при всех $\|x\| < \delta$ и $i \in I$. Отсюда $\|A_i\| = \sup_{\|x/\delta\|\leqslant 1} \|A_i(x/\delta)\| \leqslant \varepsilon/\delta$ при всех $i \in I$.

Следствие. *Если последовательность операторов* $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *сходится по точечно в ба́наховом пространстве* $\boldsymbol{E}$*, т.е. существует предел* $\lim A_n(x) = A(x)$ *при всех* $x \in \boldsymbol{E}$*, то их нормы ограничены* $\sup \|A_n\| < \infty$.

Так как последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится в $\boldsymbol{F}$, то она ограничена в $\boldsymbol{F}$.

Определение. Множество X называется *упорядоченным*, если в этом множестве введено *отношение порядка* $x \leqslant y$, удовлетворяющее следующим трём условиям: 1) $x \leqslant x$; 2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$; 3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Множество $A \subset X$ называется *цепью*, если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ для всех пар $x, y \in A$. Цепь $A \subset X$ называется *ограниченной*, если существует $y \in X$, т.ч. $x \leqslant y$ при всех $x \in A$. Элемент $x \in X$ называется *максимальным* в X, если из $x \leqslant y$ следует $x = y$.

Примером отношения порядка является *отношение включения* множеств, т.е. $A \leqslant B$, если $A \subset B$. Следующая лемма считается аксиомой теории множеств.

Лемма (Цо́рна). *Если всякая цепь* $A \subset X$ *данного упорядоченного множества* X *является ограниченной, то в* X *существует максимальный элемент.*

Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ называется *линейным функционалом*, определенным на линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$, если обладает следующими свойствами:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ и } f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ при всех } x, y \in \boldsymbol{E} \text{ и } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Линейный функционал f называется *ограниченным*, если его норма конечна, т.е.

$$\|f\| \doteqdot \sup_{x\in \boldsymbol{S}} |f(x)| = \sup_{x\neq 0} |f(x)|/\|x\| < \infty, \text{ где } \boldsymbol{S} = \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

Нормированное пространство всех ограниченных функционалов, определенных на нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, называется *сопряженным пространством* и обозначается $\boldsymbol{E}^* \doteqdot \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\mathbb{F})$. По доказанной теореме $\boldsymbol{E}^*$ ба́нахово пространство.

Пусть $L, M \subset \boldsymbol{E}$ есть линейные подпространства в $\boldsymbol{E}$. Линейный функционал $g : M \to \mathbb{F}$ называется *продолжением* линейного функционала $f : L \to \mathbb{F}$, если $L \subset M$ и $g(x) = f(x)$ для всех $x \in L$. В любом множестве линейных функционалов $f : L \to \mathbb{F}$, заданных на подпространствах $L \subset \boldsymbol{E}$, *отношение продолжения функционалов* является отношением порядка и обозначается через $f \leqslant g$.

Напомним, что *полунормой* в пространстве $\boldsymbol{E}$ называется функция $p : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$, т.ч. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ и $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. При этом пара $(\boldsymbol{E}, p)$ называется *полунормированным пространством*.

Теорема (Xа́на–Ба́наха)**.** *Пусть $(\boldsymbol{E},p)$ — полунормированное пространство. Тогда для каждого линейного функционала $f : L \to \mathbb{F}$, заданного на линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $|f(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in L$, существует такое продолжение $g : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ на все пространство, что $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Вначале мы рассмотрим действительный случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Пусть $L_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{L, e_1\}$ определяет линейную оболочку L и e_1, где $e_1 \notin L$. Так как

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x-e_1) + p(y+e_1), \text{ где } x,y \in L,$$

то выполняется неравенство $f(x) - p(x-e_1) \leqslant p(y+e_1) - f(y)$ при всех $x,y \in L$. Поэтому существует $c_1 \in \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - p(x-e_1) \leqslant c_1 \leqslant p(y+e_1) - f(y)$ при всех $x,y \in L$. Заменяя здесь x и y на элемент x/λ, где $\lambda > 0$, а затем умножая на λ, получим неравенства $f(x) \pm \lambda c_1 \leqslant p(x \pm \lambda e_1)$ при всех $\lambda > 0$ и $x \in L$.

Определим на подпространстве L_1 функционал по формуле $f_1(z) \doteqdot f(x) + \lambda c_1$, где $z = x + \lambda e_1$, $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $f_1(x) = f(x)$ при всех $x \in L$ и по доказанному $f_1(z) \leqslant p(z)$ при всех $z \in L_1$. Так как $p(-z) = p(z)$, то $|f_1(z)| \leqslant p(z)$ при всех $z \in L_1$. Таким образом, мы построили продолжение f_1 функционала f на подпространство L_1. Аналогично можно доказать существование продолжения f_2 функционала f_1 на подпространство $L_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{L_1, e_2\}$, если существует элемент $e_2 \notin L_1$, и т.д.

Рассмотрим множество всех продолжений данного функционала f на некоторые подпространства $M \subset \boldsymbol{E}$, удовлетворяющих условию теоремы. Отношение порядка в этом множестве мы определяем как отношение продолжения. Тогда очевидно, что каждая цепь продолжений является ограниченной. Поэтому по лемме Цо́рна существует максимальное продолжение. Поскольку по доказанному выше каждый функционал можно продолжить на более широкое подпространство, то максимальное продолжение определено на всем $\boldsymbol{E}$ и удовлетворяет утверждению теоремы.

Переход от действительного к комплексному случаю производится следующим образом. Пусть $f(x) = u(x) + \boldsymbol{i}v(x)$, где $u(x) = \Re f(x)$ и $v(x) = \Im f(x)$. Так как в силу линейности $f(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}f(x)$, то $u(\boldsymbol{i}x) + \boldsymbol{i}v(\boldsymbol{i}x) = \boldsymbol{i}u(x) - v(x)$ и значит $v(x) = -u(\boldsymbol{i}x)$, т.е. $f(x) = u(x) - \boldsymbol{i}u(\boldsymbol{i}x)$. Пусть функционал h определяет продолжение функционала u, удовлетворяющее условию теоремы. Тогда для функционала $g(x) \doteqdot h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)$ выполняется свойство линейности $g(\boldsymbol{i}x) = h(\boldsymbol{i}x) - \boldsymbol{i}h(-x) = \boldsymbol{i}(h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)) = \boldsymbol{i}g(x)$.

Следовательно, функционал g является линейным над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и задает продолжение функционала f. Докажем неравенство $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если $g(x) = \boldsymbol{e}^{i\theta}|g(x)|$, то $|g(x)| = \boldsymbol{e}^{-i\theta}g(x) = g(\boldsymbol{e}^{-i\theta}x) = h(\boldsymbol{e}^{-i\theta}x) \leqslant p(\boldsymbol{e}^{-i\theta}x) = p(x)$. Таким образом, функционал g удовлетворяет всем условиям теоремы. □

Следствие. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, то для каждого $f \in L^*$ существует $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|_L$.*

Для доказательства задаем норму по формуле $p(x) \doteqdot \|f\|_L\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда по теореме существует функционал g, т.ч. $|g(x)| \leqslant \|f\|_L\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому имеем $\|g\| \leqslant \|f\|_L$, а в силу условия $g|_L = f$ получим равенство $\|g\| = \|f\|_L$.

Теорема (Ри́сса). *Для всякого ограниченного функционала $\alpha \in C^*[a,b]$ существует единственная функция $F \in BV[a,b]$, т.ч. $F(a)=0$, F непрерывна слева в точках $x \in (a,b)$, $\alpha(f)=\int_a^b f\,dF$ для всех $f \in C[a,b]$ и $\|\alpha\| = \mathbf{V}_a^b(F)$.*

Доказательство. По следствию из теоремы Ха́на–Ба́наха функционал $\alpha \in C^*[a,b]$ имеет продолжение на $B[a,b]$ с сохранением его нормы. Обозначим его также через α. Пусть $F(t) \doteqdot \alpha(u_t)$, где $u_t(x) \doteqdot \chi_{[a,t)}(x)$ при $a \leqslant t < b$ и $u_b(x)=1$. Тогда $F(a)=0$. Докажем, что $F \in BV[a,b]$. Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ разбиение отрезка $[a,b]$ и $\theta_k \doteqdot \arg\big(F(x_k)-F(x_{k-1})\big)$. Представим вариационную сумму в виде

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k)-F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}\big(\alpha(u_{x_k})-\alpha(u_{x_{k-1}})\big) = \alpha\Big(\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}(u_{x_k}-u_{x_{k-1}})\Big).$$

Так как $\|\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k}(u_{x_k}-u_{x_{k-1}})\|=1$, то $\mathbf{V}_a^b(F) \leqslant \|\alpha\|$. Таким образом, $F \in BV[a,b]$. Для каждой непрерывной функции $f \in C[a,b]$ введем ступенчатые функции вида $f_\tau(x) \doteqdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(u_{x_k}(x)-u_{x_{k-1}}(x))$, где $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$. Из равномерной непрерывности функции f следует, что $f_\tau \rightrightarrows f$ сходятся равномерно на $[a,b]$, когда диаметр $d_\tau \to 0$. Отсюда в силу непрерывности функционала $\alpha \in B^*[a,b]$ получим

$$\alpha(f) = \lim_{d(\tau)\to 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\big(F(x_k)-F(x_{k-1})\big) = \int_a^b f\,dF.$$

Интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса не зависит от изменения $F(t)$ на счетном множестве точек из (a,b). Поэтому функцию $F(t)$ можно считать непрерывной слева в (a,b). При таком изменении функции $F(t)$ ее вариация не увеличится. Так как

$$|\alpha(f)| = \Big|\int_a^b f\,dF\Big| \leqslant \sup_\tau \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\,|F(x_k)-F(x_{k-1})| \leqslant \|f\| \mathop{\mathbf{V}}_a^b(F) \text{ при } f \in C[a,b],$$

то $\|\alpha\| = \mathbf{V}_a^b(F)$. Докажем единственность значения функции $F(t)$ в каждой точке непрерывности слева $F(t)=F(t-0)$. Пусть $t_n \nearrow t$ и $g_n \in C[a,b]$, т.ч. $g_n(x)=1$ при $x \in [a,t_n]$, $g_n(x)=0$ при $x \in [t,b]$, а в интевале (t_n,t) линейная. Тогда получим

$$|\alpha(g_n)-F(t_n)| = \Big|\int_{t_n}^t g_n dF\Big| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_{t_n}^t(F) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, имеет место равенство $F(t)=F(t-0)=\lim \alpha(g_n)$. □

Теорема. *Пусть в измеримом пространстве (X,Σ,μ) с полной и σ-конечной мерой μ множество $E \in \Sigma$. Тогда для каждого ограниченного функционала $\alpha \in L_p^*(E,\mu)$ найдется единственная функция $g \in L_q(E,\mu)$, т.ч. $\alpha(f)=\int_E fg\,d\mu$ при всех $f \in L_p(E,\mu)$ и $\|\alpha\|=\|g\|_{L_q}$, где $1 \leqslant p < \infty$ и $1/p+1/q=1$.*

Эту теорему мы оставим без доказательства. Из предыдущей теоремы вытекает, что сопряженное пространство $C^*[a,b]$ изометрически изоморфно подпространству $BV_0[a,b]$ функций $F \in BV[a,b]$, непрерывных слева в интервале (a,b) и $F(a)=0$, а в силу последней теоремы сопряженное пространство $L_p^*(E,\mu)$ изометрически изоморфно пространству $L_q(E,\mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$ и $1/p+1/q=1$.

13 СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел и $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ — пространство ограниченных операторов.

Определение. Говорят, что *последовательность операторов* $\{A_n\}\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *сходится равномерно* $A_n\to A$, если она сходится по норме $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

Множество операторов $M\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *равномерно ограниченным*, если оно ограничено по норме $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

Говорят, что *последовательность операторов* $\{A_n\}\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ *сходится сильно* $A_n\to A$, если в $\boldsymbol{F}$ существует предел $\lim A_n(x)=A(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.

Множество операторов $M\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ называется *сильно ограниченным*, если для каждого $x\in\boldsymbol{E}$ множества $M_x \doteqdot \{\, y=A(x)\mid A\in M\}$ ограничены по норме $\boldsymbol{F}$.

1. *Если $A_n\to A$ сходится равномерно, то $A_n\to A$ сходится сильно.*

2. *Если $A_n\to A$ сходится сильно, то $\{A_n\}$ сильно ограничена и $\|A\|\leqslant\underline{\lim}\|A_n\|$.*

3. *Если $\boldsymbol{E}$ — банахово пространство, то множество $M\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ является сильно ограниченным тогда и только тогда, когда M равномерно ограничено.*

Для доказательства свойства 1 заметим, что если $A_n\to A$ сходится равномерно, то $\|A_n-A\|\to 0$. Поэтому $\|A_n(x)-A(x)\|\leqslant\|A_n-A\|\,\|x\|\to 0$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.

Поскольку по условию свойства 2 последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится в $\boldsymbol{F}$, то она является ограниченной и значит последовательность операторов $\{A_n\}$ сильно ограничена. Выберем индексы n_k, т.ч. $\underline{\lim}\|A_n\|=\lim\|A_{n_k}\|$. Тогда при всех $x\in\boldsymbol{E}$ имеем $\|A(x)\|=\lim\|A_{n_k}(x)\|\leqslant\lim\|A_{n_k}\|\,\|x\|=\underline{\lim}\|A_n\|\,\|x\|$. Поэтому $\|A\|\leqslant\underline{\lim}\|A_n\|$.

Необходимость свойства 3 является следствием теоремы Ба́наха–Штейнга́уза, а достаточность вытекает из неравенства $\|A(x)\|\leqslant\|A\|\,\|x\|$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.

Пример 1. Рассмотрим последовательность операторов $A_n:\boldsymbol{L}_p(E,\mu)\to\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ умножения на функцию $A_n(f)\doteqdot\varphi_n f$, где $\varphi_n=\chi_{E_n}$, т.ч. $\mu(E\setminus E_n)>0$, $\mu(E\setminus E_n)\to 0$ и $1\leqslant p<\infty$. Поскольку $\|A_n(f)-f\|^p=\int_{E\setminus E_n}|f|^p d\mu\to 0$ по свойству абсолютной непрерывности интеграла, то $A_n\to I$ сходится сильно к тождественному оператору. Однако $\{A_n\}$ не сходится равномерно к I, т.к. $\|A_n-I\|=\|\chi_{(E\setminus E_n)}\|_{\boldsymbol{L}_\infty}=1$.

Лемма. *Если $\boldsymbol{E}$ является банаховым пространством и последовательность операторов $\{A_n\}\subset\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ сходится сильно $A_n\to A$, то $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.*

Доказательство. В силу существования предела $\lim A_n(x)=A(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ оператор $A:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ линейный, а в силу следствия теоремы Ба́наха-Штейнга́уза $\sup\|A_n\|<\infty$. Так как $\|A\|\leqslant\underline{\lim}\|A_n\|\leqslant\sup\|A_n\|$, то $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. □

Для каждой системы элементов $K\subset\boldsymbol{E}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ существует наименьшее линейное подпространство $L\subset\boldsymbol{E}$, содержащее K, называемое *линейной оболочкой* $L\doteqdot\mathrm{sp}K$. Система элементов $K\subset\boldsymbol{E}$ называется *полной* в $\boldsymbol{E}$, если ее замыкание $\overline{L}\doteqdot\overline{\mathrm{sp}}K=\boldsymbol{E}$. В этом случае говорят, что K порождает $\boldsymbol{E}$.

Теорема (критерий сильной сходимости)**.** *Последовательность ограниченных операторов* $\{A_n\} \subset \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *в банаховых пространствах* $\boldsymbol{E}$ *и* $\boldsymbol{F}$ *в том и только в том случае сходится сильно к* $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$*, когда* $\sup\|A_n\| < \infty$ *и найдется полная система элементов* $K \subset \boldsymbol{E}$*, т.ч.* $\lim A_n(x) = A(x)$ *при всех* $x \in K$.

Доказательство. Необходимость есть следствие теоремы Ба́наха–Штейнга́уза.

Докажем достаточность. Каждый элемент $y \in L$ из линейной оболочки $L \doteqdot \mathrm{sp}K$ представляется в виде линейной комбинации $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k \in \mathbb{F}$ и $x_k \in K$. Поэтому по условию теоремы существует предел $\lim A_n(y) = A(y)$ при всех $y \in L$. Так как линейная оболочка $L \subset \boldsymbol{E}$ всюду плотна в пространстве $\boldsymbol{E}$, то для любого $x \in \boldsymbol{E}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in L$, т.ч. $\|x - y\| < \varepsilon/4c$, где $c \doteqdot \sup\|A_n\| > 0$. Для этого элемента $y \in L$ выберем N, т.ч. $\|A_n(y) - A_m(y)\| < \varepsilon/2$ при всех $n, m \geqslant N$. Поскольку $\|A_n(x) - A_n(y)\| \leqslant \|A_n\| \, \|x - y\| < \varepsilon/4$, то при всех $n, m \geqslant N$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leqslant \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\| < \varepsilon.$$

Отсюда $\{A_n(x)\}$ есть последовательность Коши и в силу полноты пространства $\boldsymbol{F}$ существует предел $\lim A_n(x) \doteqdot A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. При этом по лемме оператор A является линейным и ограниченным, т.е. $A \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$. □

Определение. Говорят, что *последовательность функционалов* $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}^*$ *сходится слабо** $f_n \to f$, если существует предел $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Множество функционалов $M \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *слабо* ограниченным*, если для любого $x \in \boldsymbol{E}$ множества $M_x \doteqdot \{y = f(x) \mid f \in M\}$ ограничены в $\mathbb{F}$.

Из свойств сильной сходимости операторов следуют свойства слабой* сходимости.

1. *Если* $f_n \to f$ *сходится по норме, то* $f_n \to f$ *сходится слабо*.*

2. *Если* $f_n \to f$ *сходится слабо*, то* $\{f_n\}$ *слабо* ограничена и* $\|f\| \leqslant \underline{\lim}\|f_n\|$.

3. *Если* $\boldsymbol{E}$ *— банахово пространство, то множество* $M \subset \boldsymbol{E}^*$ *является слабо* ограниченным тогда и только тогда, когда* M *ограничено по норме* $\boldsymbol{E}^*$.

Теорема (критерий слабой* сходимости)**.** *Если* $\boldsymbol{E}$ *– банахово пространство, то последовательность функционалов* $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}^*$ *сходится слабо* к функционалу* $f \in \boldsymbol{E}^*$ *тогда и только тогда, когда* $\sup\|f_n\| < \infty$ *и найдется полная система элементов* $K \subset \boldsymbol{E}$*, т.ч.* $\lim f_n(x) = f(x)$ *при всех* $x \in K$.

Пример 2. Пусть $\{\delta_{x_n}\} \subset \boldsymbol{C}^*[a,b]$ является последовательностью функционалов Дира́ка, т.е. $\delta_{x_n}(f) \doteqdot f(x_n)$ при всех $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. Если $x_n \to x$ сходится и $x_n \neq x$, то $\delta_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) = \delta_x(f)$ для всех функций $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. Поэтому $\delta_{x_n} \to \delta_x$ сходится слабо* в $\boldsymbol{C}^*[a,b]$. Однако она не сходится по норме, т.к. $\|\delta_{x_n} - \delta_x\| = 2$.

Теорема. *Каноническое вложение* $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ *нормированного пространства* $\boldsymbol{E}$ *во второе сопряженное пространство* $\boldsymbol{E}^{**}$*, заданное по формуле* $J(x) \doteqdot \delta_x$*, является изометричным, где* $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ *при* $f \in \boldsymbol{E}^*$ *есть функционал Дира́ка.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{S}^*$ обозначает единичный шар в $\boldsymbol{E}^*$. Тогда $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $f \in \boldsymbol{S}^*$. Поэтому $\|J(x)\| = \|\delta_x\| \leqslant \|x\|$. Докажем, что это неравенство является равенством. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим функционал $f(\lambda x) = \lambda\|x\|$, где $\lambda \in \mathbb{F}$, на линейной оболочке $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x\}$ элемента x. Так как норма $\|f\|_L = 1$, то в силу следствия из теоремы Хана–Банаха существует функционал $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g(x) = \|x\|$ и $\|g\| = 1$. Отсюда вытекает, что $\delta_x(g) = \|x\|$ и, следовательно, $\|\delta_x\| = \|x\|$. □

Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *рефлексивным*, если образ этого вложения $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ равен $J(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}^{**}$. По *теореме Джеймса* нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ рефлексивно в том и в том случае, когда всякий функционал $f \in \boldsymbol{E}^*$ достигает своей нормы на единичном шаре $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{E}$.

Например, нетрудно доказать, что конечномерные нормированные пространства являются рефлексивными. По теореме, сформулированной в конце предыдущей лекции, пространства $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при всех $1 < p < \infty$ являются рефлексивными.

Определение. Говорят, что *последовательность элементов* $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ *сходится слабо* $x_n \to x$, если существует предел $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in \boldsymbol{E}^*$.

Множество элементов $M \subset \boldsymbol{E}$ называется *слабо ограниченным*, если для любого $f \in \boldsymbol{E}^*$ множества $M_f \doteqdot \{y = f(x) \mid x \in M\}$ ограничены в $\mathbb{F}$.

Используя каноническое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$, каждый элемент $x \in \boldsymbol{E}$ можно рассматривать как функционал Дира́ка $\delta_x \in \boldsymbol{E}^{**}$ на сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$. Тогда из свойств слабой* сходимости следуют свойства слабой сходимости:

1. *Если $x_n \to x$ сходится по норме, то $x_n \to x$ сходится слабо.*

2. *Если $x_n \to x$ сходится слабо, то $\{x_n\}$ слабо ограничена и $\|x\| \leqslant \underline{\lim}\|x_n\|$.*

3. *Множество $M \subset \boldsymbol{E}$ является слабо ограниченным тогда и только тогда, когда M ограничено по норме $\boldsymbol{E}$.*

Теорема (критерий слабой сходимости)**.** *Последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда сходится слабо $x_n \to x$, когда $\sup\|x_n\| < \infty$ и найдется полная система функционалов $K \subset \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in K$.*

Для доказательства критерия достаточно заметить, что функционалы Дирака имеют норму $\|\delta_{x_n}\| = \|x_n\|$ и $\delta_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) = \delta_x(f)$ при всех функционалов $f \in K$. Поэтому можно применить критерий слабой* сходимости к $\delta_{x_n} \to \delta_x$.

Пример 3. Последовательность функций $\{f_n\} \subset \boldsymbol{C}[a,b]$ сходится слабо $f_n \to f$ в том и только в том случае когда является равномерно ограниченной и сходится $f_n(x) \to f(x)$ при всех $x \in [a,b]$. В самом деле, функционалы Дирака $\delta_x \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ и $f_n(x) = \delta_x(f_n) \to \delta_x(f) = f(x)$ при всех $x \in [a,b]$. Докажем достаточность указанных условий. Заметим, что функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ по теореме Ри́сса представляется интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса $\alpha(f) = \int_a^b f\,dF$, а интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса от непрерывной функции совпадает с интегралом Лебе́га–Сти́лтьеса. Поэтому можно применить теорему Лебе́га о предельном переходе.

Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *сепарабельным*, если существует счетная и полная система элементов $K = \{x_k\}$. Определим метрику в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$ к сепарабельному пространству $\boldsymbol{E}$ следующей формулой:

$$\rho(f,g) \doteqdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f(x_k)-g(x_k)|}{1+|f(x_k)-g(x_k)|} \text{ при всех } f,g \in \boldsymbol{E}^* .$$

Проверим аксиомы метрики. Симметричность $\rho(f,g) = \rho(f,g)$ очевидна. Так как функция $\varphi(t) = t/(t+1)$ возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+$ и является полуаддитивной $\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a)+\varphi(b)$ при всех $a,b \in \mathbb{R}_+$, то выполняется неравенство треугольника $\rho(f,g) \leqslant \rho(f,h)+\rho(h,g)$. Пусть $\rho(f,g) = 0$, тогда $f(x_k) = g(x_k)$ при всех k и значит $f(y) = g(y)$ при всех $y \in L \doteqdot \mathrm{sp} K$. Так как в силу полноты K подпространство L всюду плотно в $\boldsymbol{E}$, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют $y_n \in L$, т.ч. $y_n \to x$. Поэтому в силу непрерывности функционалов $f(x) = \lim f(y_n) = \lim g(y_n) = g(x)$.

Лемма. *Последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \boldsymbol{S}^*$ тогда и только тогда сходится слабо*, когда она сходится в метрическом пространстве $(\boldsymbol{S}^*,\rho)$.*

Доказательство. Необходимость. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем m, т.ч. $1/2^m < \varepsilon/2$. Поскольку последовательность сходится $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке $x \in \boldsymbol{E}$, то найдется N, т.ч. $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$ при всех $n \geqslant N$ и $k = 1, \dots, m$. Отсюда

$$\rho(f_n,f) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon .$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N, т.ч. $\rho(f_n,f) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Тогда для любого k получим $|f_n(x_k)-f(x_k)| < 2^k\varepsilon(1+|f_n(x_k)-f(x_k)|)$ при всех $n \geqslant N$. Отсюда при всех $0 < \varepsilon < 1/2^k$ вытекает неравенство $|f_n(x_k)-f(x_k)| \leqslant 2^k\varepsilon/(1-2^k\varepsilon)$ для всех $n \geqslant N$, т.е. существует предел $\lim f_n(x_k) = f(x_k)$ в каждой точке $x_k \in K$. Также как при доказательстве достаточности критерия сильной сходимости мы получим, что последовательность $f_n \to f$ сходится слабо*. $\square$

Теорема. *Если $\boldsymbol{E}$ — сепарабельное пространство, то единичный шар $\boldsymbol{S}^* \subset \boldsymbol{E}^*$ является слабо* компактным метрическим пространством.*

Доказательство. В силу леммы сходимость в метрическом пространстве $(\boldsymbol{S}^*,\rho)$ совпадает со слабой* сходимостью. Для доказательства слабой* компактности $\boldsymbol{S}^*$ требуется показать, что для любой последовательности $\{f_n\} \subset \boldsymbol{S}^*$ существует слабо* сходящаяся подпоследовательность. Поскольку последовательность чисел $\{f_n(x_1)\}$ является ограниченной, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. Поскольку последовательность чисел $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ является ограниченной, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$, и т.д. Таким образом, диагональная последовательность $\{f_{n_k}\}$, где $f_{n_k} = f_k^{(k)}$, будет сходиться в каждой точке K. Также как при доказательстве критерия сильной сходимости получим, что $f_{n_k} \to f$ сходится слабо*, а так как $\|f\| \leqslant \underline{\lim} \|f_{m_n}\| \leqslant 1$, то $f \in \boldsymbol{S}^*$. $\square$

14 ГИ́ЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\boldsymbol{E}$ обозначает линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел.

Определение. *Скалярным произведением* $\langle x,y\rangle$ в пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ называется функционал $\langle x,y\rangle \doteqdot f(x,y)$ от двух переменных $x,y\in\boldsymbol{E}$, принимающий значения в поле $f(x,y)\in\mathbb{F}$ и обладающий следующими свойствами:

a) $f(x,y)=\overline{f(y,x)}$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$;

b) $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\lambda_1f(x_1,y)+\lambda_2f(x_2,y)$ при всех $x_1,x_2,y\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$;

c) $f(x,x)\geqslant 0$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$ и $f(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

Пространство $\boldsymbol{E}$, в котором задано скалярное произведение $\langle x,y\rangle$, т.е. $(\boldsymbol{E},\langle x,y\rangle)$, называется *евклидовым пространством* над полем $\mathbb{F}$; $\|x\|\doteqdot\sqrt{\langle x,x\rangle}$ называется *евклидовой нормой*; $\rho(x,y)\doteqdot\|x-y\|$ называется *евклидовой метрикой*.

1. Неравенство Коши́–Буняко́вского: $|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$ *при* $x,y\in\boldsymbol{E}$.

Пусть $z=tx+\lambda y$, где $\lambda\doteqdot\langle x,y\rangle/|\langle x,y\rangle|$ и $\langle x,y\rangle\neq 0$. Тогда при всех $t\in\mathbb{R}$ имеем

$$\langle z,z\rangle=t^2\langle x,x\rangle+t\big(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle+\lambda\overline{\langle x,y\rangle}\big)+|\lambda|^2\langle y,y\rangle=t^2\|x\|^2+2t|\langle x,y\rangle|+\|y\|^2\geqslant 0.$$

Так как дискриминант этого трехчлена неположительный, то $|\langle x,y\rangle|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $z=tx+\lambda y=0$ при некотором $t\in\mathbb{R}$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимы над полем $\mathbb{F}$.

2. Неравенство треугольника: $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ *при* $x,y\in\boldsymbol{E}$.

Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, получим следующее неравенство:

$$\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+2\Re\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\Re\langle x,y\rangle=\|x\|\,\|y\|$, т.е. когда элементы x и y являются линейно зависимыми $x=\lambda y$, где $\Re\lambda=|\lambda|$ и значит $\lambda\geqslant 0$. Поэтому евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным.

3. Равенство параллелограмма: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ *при* $x,y\in\boldsymbol{E}$.

Складывая два равенства $\langle x\pm y,x\pm y\rangle=\langle x,x\rangle\pm 2\Re\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle$, получим равенство параллелограмма $\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle$.

Пример 1. Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ в том и только в том случае будет евклидовым, когда в нем выполняется равенство параллелограмма (доказательство достаточности см. учебник Колмогорова и Фомина). Например, пространство $\boldsymbol{B}(X)$ ограниченных функций не является евклидовым пространством. В самом деле, если $f(x)=\chi_A(x)$ и $g(x)=\chi_B(x)$, где $A\cap B=\emptyset$, то $\|f\|=\|g\|=\|f+g\|=\|f-g\|=1$. Поэтому равенство параллелограмма не выполняется.

4. Непрерывность скалярного произведения $f(x,y)=\langle x,y\rangle$ *при* $(x,y)\in \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}$.

Для любого $\varepsilon>0$ выберем $\delta>0$, т.ч. $\delta<\min\{c,\varepsilon/3c\}$, $\max(\|x_0\|,\|y_0\|)<c$. Тогда при всех $\|x-x_0\|<\delta$ и $\|y-y_0\|<\delta$ из неравенства Коши́–Буняко́вского получим

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|\langle x,y\rangle-\langle x_0,y_0\rangle|=|\langle x-x_0,y_0\rangle+\langle x_0,y-y_0\rangle+\langle x-x_0,y-y_0\rangle|\leqslant$$
$$\leqslant\|x-x_0\|\,\|y_0\|+\|x_0\|\,\|y-y_0\|+\|x-x_0\|\,\|y-y_0\|<\varepsilon.$$

5. Неравенство Беппо́ Ле́ви. *Если* $L\subset\boldsymbol{E}$ *есть линейное подпространство в евклидовом пространстве* $\boldsymbol{E}$, *то при всех* $y,z\in L$ *имеет место неравенство*

$$\|y-z\|\leqslant\sqrt{\|x-y\|^2-d^2}+\sqrt{\|x-z\|^2-d^2},\ \ \text{где } x\in\boldsymbol{E} \text{ и } d=\rho(x,L).$$

Пусть $u\doteqdot(ty+z)/(t+1)\in L$, тогда $\|x-u\|\geqslant d$ и выполняется неравенство

$$\|t(x-y)+(x-z)\|^2=\|(t+1)(x-u)\|^2\geqslant(t+1)^2d^2 \text{ при всех } t\in\mathbb{R}.$$

Раскрывая левую норму и перенося правую часть неравенства влево, имеем

$$t^2(\|x-y\|^2-d^2)+2t(\Re\langle x-y,x-z\rangle-d^2)+(\|x-z\|^2-d^2)\geqslant0 \text{ при всех } t\in\mathbb{R}.$$

Так как дискриминант этого трехчлена неположительный, то получаем неравенство $\Re\langle x-y,x-z\rangle-d^2\leqslant\sqrt{(\|x-y\|^2-d^2)(\|x-z\|^2-d^2)}$, из которого следует, что

$$\|y-z\|^2=\|(x-y)-(x-z)\|^2=\|x-y\|^2-2\Re\langle x-y,x-z\rangle+\|x-z\|^2=$$
$$=\big(\|x-y\|^2-d^2\big)-2\big(\Re\langle x-y,x-z\rangle-d^2\big)+\big(\|x-z\|^2-d^2\big)\leqslant$$
$$\leqslant\big(\|x-y\|^2-d^2\big)+2\sqrt{\big(\|x-y\|^2-d^2\big)\big(\|x-z\|^2-d^2\big)}+\big(\|x-z\|^2-d^2\big).$$

Замечая, что это полный квадрат, получим неравенство Беппо́ Ле́ви.

Определение. Говорят, что элементы $x,y\in\boldsymbol{E}$ *ортогональны* и обозначается через $x\perp y$, если их скалярное произведение $\langle x,y\rangle=0$. Элемент $x\in\boldsymbol{E}$ называется *ортогональным подпространству* $L\subset\boldsymbol{E}$ и обозначается $x\perp L$, если $\langle x,y\rangle=0$ при всех $y\in L$. Два подпространства $L,M\subset\boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначается через $L\perp M$, если $\langle x,y\rangle=0$ для всех $x\in L$ и $y\in M$.

Лемма. *Элемент* $y\in L$ *является наилучшим приближением элемента* $x\in\boldsymbol{E}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие ортогональности* $x-y\perp L$.

Доказательство. Необходимость. Если $x-y\not\perp L$, то $\langle x-y,v\rangle\neq0$ при некотором $v\in L$. Положим $u\doteqdot y+\lambda v\in L$, где $\lambda\doteqdot\langle x-y,v\rangle/\langle v,v\rangle$. Тогда получим

$$\|x-u\|^2=\|(x-y)-\lambda v\|^2=\|x-y\|^2-2\Re\overline{\lambda}\langle x-y,v\rangle+|\lambda|^2\langle v,v\rangle=\|x-y\|^2-|\lambda|^2\langle v,v\rangle.$$

Отсюда следует, что $\|x-u\|<\|x-y\|=\rho(x,L)$. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть $\langle x-y,z\rangle=0$ при всех $z\in L$. Тогда при всех $z\in L$ имеем

$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\langle x-y,x-z\rangle\leqslant\|x-y\|\,\|x-z\|.$$

Поэтому $\|x-y\|\leqslant\|x-z\|$ при всех $z\in L$, т.е. $\rho(x,L)=\|x-y\|$. $\square$

Теорема. *Пусть $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$ образует n-мерное подпространство в $\boldsymbol{E}$, порожденное линейно независимой системой элементов $x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{E}$. Тогда величина наилучшего приближения элемента $x \in \boldsymbol{E}$ вычисляется по формуле*

$$\rho(x,L) = \sqrt{\frac{D(x_1, \ldots, x_n, x)}{D(x_1, \ldots, x_n)}}, \quad \text{где } D(x_1, \ldots, x_n) \doteqdot \det \begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1,x_n\rangle & \ldots & \langle x_n,x_n\rangle \end{pmatrix}$$

обозначает определитель Гра́ма.

Доказательство. Поскольку евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ строго нормированное, то по доказанным ранее теоремам элемент $y \in L$ наилучшего приближения существует и единственный. Пусть $d^2 = \rho(x,L)^2 = \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle$. Поскольку $\langle x-y, y\rangle = 0$, то $\langle y,x\rangle = \langle x,x\rangle - d^2$. Кроме того, из равенств $\langle x-y, x_k\rangle = 0$ следует, что $\langle y,x_k\rangle = \langle x,x_k\rangle$ при $k = 1, \ldots, n$. Подставляя в эти равенства выражение $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, мы получим систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\begin{cases} \lambda_1\langle x_1,x_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x_1\rangle & = & \langle x,x_1\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots\cdots \\ \lambda_1\langle x_1,x_n\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x_n\rangle & = & \langle x,x_n\rangle \\ \lambda_1\langle x_1,x\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_n,x\rangle & = & \langle x,x\rangle - d^2. \end{cases}$$

По теореме Кро́некера–Капе́лли ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов. Тогда определитель расширенной матрицы равен нулю. Поэтому, записывая последний столбец расширенной матрицы в виде суммы двух столбцов, получим равенство $D(x_1, \ldots, x_n, x) - d^2 D(x_1, \ldots, x_n) = 0$, что и требовалось доказать. В частности, полагая здесь $x = x_{n+1}$, по индукции получаем, что $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ тогда и только тогда, когда система $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависима. □

Определение. *Ги́льбертовым пространством* $\boldsymbol{H}$ называется полное евклидово пространство относительно евклидовой метрики.

Пример 2. В пространстве $\boldsymbol{L}_2(E,\mu)$ скалярное произведение и евклидова норма определяются по формулам $\langle f,g\rangle \doteqdot \int_E f\,\overline{g}\,d\mu$ и $\|f\| = \left(\int_E |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$. По доказанному ранее $\boldsymbol{L}_2(E,\mu)$ является полным нормированным пространством. Поскольку норма является евклидовой, то $\boldsymbol{L}_2(E,\mu)$ будет ги́льбертовым пространством. Заметим, что пространства $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при $p \neq 2$ не являются ги́льбертовыми, т.к. при $f(x) = \chi_A(x)$ и $g(x) = \chi_B(x)$, где $A \cap B = \emptyset$, равенство параллелограмма не выполняется.

Пример 3. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ последовательностей $x = \{x_n\}$, где $x_n \in \mathbb{F}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$ сходится. Скалярное произведение и евклидова норма определяются по формулам $\langle x,y\rangle \doteqdot \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n}$ и $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2\right)^{1/2}$.

Пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ является частным случаем пространства $\boldsymbol{L}_2(E,\mu)$, когда $E = \mathbb{N}$ образует множество натуральных чисел и мера любой точки $n \in \mathbb{N}$ равна единице. Таким образом, $\boldsymbol{\ell}_2$ является ги́льбертовым пространством.

Теорема (о наилучшем приближении). *Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ является замкнутым подпространством в гúльбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y \in L$ наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $d = \rho(x, L) \doteqdot \inf_{y \in L} \|x - y\|$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $\|x - y_n\|^2 < d^2 + 1/n^2$. По неравенству Беппó Лéви $\|y_n - y_m\| < 1/n + 1/m$, т.е. $\{y_n\}$ является последовательностью Кошú в L. Поэтому из полноты пространства $\boldsymbol{H}$ и замкнутости подпространства L следует, что $\lim y_n = y \in L$. Переходя к пределу в неравенстве $d \leqslant \|x - y_n\| < \sqrt{d^2 + 1/n^2}$, получим $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = d$.

Таким образом, мы доказали существование элемента наилучшего приближения замкнутым подпространством. Его единственность вытекает из ранее доказанной теоремы, т.к. гúльбертово пространство $\boldsymbol{H}$ является строго нормированным. □

Теорема (об ортогональном разложении). *Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ является замкнутым подпространством в гúльбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда пространство $\boldsymbol{H}$ представляется в виде прямой суммы $\boldsymbol{H} = L \oplus L^{\perp}$ подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid x \perp L\}$.*

Доказательство. В силу теоремы о наилучшем приближении для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y \in L$, т.ч. $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Положим $P(x) \doteqdot y$. Нетрудно проверить, что оператор $P : \boldsymbol{H} \to L$ является линейным и норма $\|P\| = 1$. Он называется *ортогональной проекцией* на подпространство L.

Пусть $z \doteqdot x - y$. Тогда по лемме $z \in L^{\perp}$. Таким образом, имеем $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$. Докажем единственность этого разложения. Пусть $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, где $y_1, y_2 \in L$ и $z_1, z_2 \in L^{\perp}$. Из этого равенства получим, что $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^{\perp}$. Поэтому $\|y_1 - y_2\| = \|z_1 - z_2\| = 0$, т.е. $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$. □

Следствие. *Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{H}$ является всюду плотным в гúльбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ в том и только в том случае, когда его ортогональное дополнение равно $L^{\perp} = 0$.*

Необходимость. Пусть $\overline{L} = \boldsymbol{H}$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует последовательность $\{x_n\} \subset L$, т.ч. $x_n \to x$. Если $y \perp L$, то $\langle x, y \rangle = \lim \langle x_n, y \rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, т.е. $y \perp \boldsymbol{H}$. Поэтому ортогональное дополнение равно $L^{\perp} = \boldsymbol{H}^{\perp} = 0$.

Достаточность. Пусть $L^{\perp} = 0$. Тогда, как показано выше, $\overline{L}^{\perp} = L^{\perp} = 0$. Поэтому по теореме об ортогональном разложении имеет место равенство $\boldsymbol{H} = \overline{L} \oplus \overline{L}^{\perp} = \overline{L}$, т.е. подпространство L является всюду плотным в $\boldsymbol{H}$.

Пример 4. Покажем, что в неполном евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ утверждение этого следствия, вообще говоря, неверно. Рассмотрим пространство непрерывных функций $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C}[0,1]$ как подпространство в $\boldsymbol{L}_2[0,1]$ с соответствующим скалярным произведением. Пусть $M \subset \boldsymbol{L}_2[0,1]$ обозначает подпространство, состоящее из всех многочленов, ортогональных функции $\chi_{[0,1/2]}$. Тогда $M \subset \boldsymbol{C}[0,1]$ и его ортогональное дополнение в $\boldsymbol{C}[0,1]$ равно $M^{\perp} = 0$. Однако M не является всюду плотным в $\boldsymbol{C}[0,1]$, т.к. иначе M будет всюду плотным в $\boldsymbol{L}_2[0,1]$, что невозможно.

15 ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть $\boldsymbol{H}$ обозначает гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел, а $\boldsymbol{H}^*$ его сопряженное пространство.

Теорема (Ри́сса о представлении). *Для каждого $\alpha \in \boldsymbol{H}^*$ существует единственный элемент $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x) = \langle x, y \rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|\alpha\| = \|y\|$.*

Доказательство. Обозначим через $L = \ker(\alpha) \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid \alpha(x) = 0\}$ ядро функционала α. Поскольку $\alpha \in \boldsymbol{H}^*$ непрерывный функционал, то L является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{H}$. Если $L^\perp = 0$, то из следствия теоремы об ортогональном разложении имеем $L = \boldsymbol{H}$, т.е. в этом случае $\alpha = 0$ и элемент $y = 0$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 0$, т.е. $L \neq \boldsymbol{H}$. Тогда существует элемент $z \in L^\perp$, т.ч. $\|z\| = 1$. Для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ имеем $u = \alpha(x)z - \alpha(z)x \in L$, т.к. $\alpha(u) = 0$. Отсюда выполняется равенство $\langle u, z \rangle = \alpha(x)\langle z, z \rangle - \alpha(z)\langle x, z \rangle = \alpha(x) - \langle x, y \rangle = 0$, где $y \doteqdot \overline{\alpha(z)}z$. Таким образом, получаем представление $\alpha(x) = \langle x, y \rangle$ для всех $x \in \boldsymbol{H}$.

Для доказательства единственности представления допустим, что $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Тогда имеем $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и значит $y_1 - y_2 = 0$.

Из неравенства Коши–Буняко́вского вытекает, что $|\alpha(x)| = |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. При этом, если $x = y/\|y\|$, то $|\alpha(x)| = \|y\|$. Поэтому норма $\|\alpha\| = \|y\|$. $\square$

Следствие. *Пространства $\boldsymbol{H} \simeq \boldsymbol{H}^*$ изометрически изоморфны.*

Пример 1. В пространстве ℓ_2 всякий ограниченный функционал представляется в виде $\alpha(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ при всех $x = \{x_n\} \in \ell_2$, где $y = \{y_n\} \in \ell_2$ — некоторый фиксированный элемент. Норма этого функционала равна $\|\alpha\| = \left(\sum_{n=1}^\infty |y_n|^2\right)^{1/2}$.

Пример 2. В пространстве $\boldsymbol{L}_2(E, \mu)$ всякий ограниченный функционал представляется в виде $\alpha(f) = \int_E f\, g\, d\mu$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2(E, \mu)$, где $g \in \boldsymbol{L}_2(E, \mu)$ – некоторая фиксированная функция. Норма этого функционала равна $\|\alpha\| = \left(\int_E |g|^2 d\mu\right)^{1/2}$.

Определение. Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ называется *ортогональной*, если $e_n \perp e_m$ при всех $n \neq m$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$ называется *тота́льной*, если всякий элемент $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $x \perp e_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, равен нулю $x = 0$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$ называется *ортонормированной* в $\boldsymbol{E}$, если она является ортогональной и $\|e_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Полная ортонормированная система называется *ортонормированным базисом* евклидова пространства $\boldsymbol{E}$.

Если задана ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$, то для каждого элемента $x \in \boldsymbol{E}$ определяются *коэффициенты Фурье́* $c_n \doteqdot \langle x, e_n \rangle$, а соответствующий ряд $x \sim \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ называется *рядом Фурье́* элемента x. Говорят, что ряд Фурье сходится в пространстве $\boldsymbol{E}$, если последовательность его частичных сумм $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^n c_k e_k$ имеет предел по норме пространства $\boldsymbol{E}$.

1. Неравенство Бе́сселя: *$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Поскольку система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной, то для частичных сумм ряда Фурье $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ выполняется следующее равенство:

$$\|x-s_n\|^2 = \langle x-s_n, x-s_n\rangle = \langle x.x\rangle - 2\Re\langle x,s_n\rangle + \langle s_n,s_n\rangle = \|x\|^2 - \textstyle\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает неравенство Бе́сселя.

2. Равенство Парсева́ля: *равенство $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ выполняется тогда и только тогда, когда ряд Фурье элемента $x \in \boldsymbol{E}$ сходится по норме.*

В самом деле, по доказанному выше $\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$. Следовательно, $\|x-s_n\| \searrow 0$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$.

3. Обобщенное равенство Парсева́ля: *равенство $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ для всех $x \in \boldsymbol{E}$ выполняется тогда и только тогда, когда для всех $x,y \in \boldsymbol{E}$ справедливо обобщенное равенство $\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\overline{d_n}$, где $c_n = \langle x,e_n\rangle$ и $d_n = \langle y,e_n\rangle$.*

Так как $\langle x+\lambda y, e_n\rangle = c_n + \lambda d_n$, то применяя равенство Парсева́ля, получим

$$\|x+\lambda y\|^2 = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}|c_n+\lambda d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Re(c_n\overline{\lambda d_n}) + |\lambda|^2\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2.$$

Поскольку $\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2$, то $\Re(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle) = \sum_{n=1}^{\infty}\Re(c_n\overline{\lambda d_n})$. Полагая здесь $\lambda = 1$, а затем $\lambda = \boldsymbol{i}$, получим обобщенное равенство Парсева́ля.

Теорема (Стекло́ва). *Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in \boldsymbol{E}$ выполняется равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$, где $c_n \doteqdot \langle x,e_n\rangle$.*

Доказательство. Необходимость. Если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна, то для любых $x \in \boldsymbol{E}$ и $\varepsilon > 0$ существует $y = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$, т.ч. $\|x-y\| < \varepsilon$. Пусть $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{e_k\}_{k=1}^{n}$ обозначает линейную оболочку системы $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Так как $x - s_n \perp L_n$, то суммы s_n является наилучшим приближением элемента x подпространством L_n. Поэтому имеет место неравенство $\|x-s_m\| \leqslant \|x-s_n\| \leqslant \|x-y\| < \varepsilon$ при всех $m \geqslant n$. Отсюда ряд Фурье сходится по норме и, следовательно, выполняется равенство Парсева́ля.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Па́рсеваля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$. Так как $\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\|x-s_n\| < \varepsilon$. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$. □

Следствие. *Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ тогда и только тогда, когда она тотальна.*

В самом деле, если система полна, то выполняется равенство Парсева́ля. Тогда из условия $c_n \doteqdot \langle x,e_n\rangle = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ следует, что $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = 0$, т.е. $x = 0$. Обратно, если система является тотальной, то ортогональное дополнение ее линейной оболочки $L \doteqdot \mathrm{sp}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет равно нулю $L^{\perp} = 0$. Поэтому в силу следствия теоремы об ортогональном разложении замыкание $\overline{L} = \boldsymbol{H}$.

В бесконечномерном евклидовом пространстве тотальность ортонормированной системы не равносильна полноте этой системе, т.е. существуют такие неполные ортонормированные системы, которые являются тота́льными.

Пример 3. Пусть $M \subset \boldsymbol{C}[0,1]$ подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{C}[0,1]$, построенное в примере 4 на предыдущей лекции. Оно состоит из многочленов и его ортогональное дополнение в $\boldsymbol{C}[0,1]$ равно нулю. Поскольку многочлены из $\boldsymbol{M}$, имеющие рациональные коэффициенты, всюду плотны в $\boldsymbol{M}$ и их счетное число, то из них можно выбрать счетную и полную в $\boldsymbol{M}$ линейно независимую систему. Применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, получим ортонормированную систему, которая тота́льна в $\boldsymbol{C}[0,1]$, но не полна в $\boldsymbol{C}[0,1]$.

Теорема (метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта)**.** *Для всякой полной линейно независимой системы элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ существует полная ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.ч. элементы e_n являются линейной комбинацией элементов $\{x_n\}_{k=1}^{n}$.*

Доказательство. Полагая $y_1 = x_1$, определим элемент $e_1 \doteqdot y_1/\|y_1\|$. Затем полагая $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$, определим элемент $e_2 \doteqdot y_2/\|y_2\|$, и т.д. На n-том шаге, полагая $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, e_k\rangle e_k$, определим элемент $e_n \doteqdot y_n/\|y_n\|$. Так как система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независима, то нормы $\|y_n\| \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, матрица A преобразования системы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет треугольной

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & a_{11}x_1 \\ e_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

где $a_{nn} \neq 0$. Обратная матрица также будет треугольной. Поэтому система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна. Нетрудно проверить, что явное выражение элементов системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет следующий вид:

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_{n-1}\rangle & \cdots & \langle x_n, x_{n-1}\rangle \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

где $D_n \doteqdot D(x_1, \ldots, x_n) = \det\{\langle x_k, x_l\rangle\}_{k,l=1}^{n}$ обозначают определители Гра́ма. □

Теорема (Ри́сса–Фи́шера)**.** *Каждое сепарабельное ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ изометрически изоморфно либо пространству $\mathbb{F}^n$, либо пространству $\boldsymbol{\ell}_2$.*

Доказательство. Пусть задана счетная и полная в $\boldsymbol{H}$ система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, отбрасывая из этой системы все элементы, которые выражаются линейно через предыдущие, получим счетную и полную линейно независимую систему.

Рассмотрим случай, когда эта система является бесконечной, т.е. $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. В случае, когда эта система конечна, т.е. $\dim \boldsymbol{H} < \infty$, доказательство полностью аналогично. Применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, построим счетную и полную в $\boldsymbol{H}$ ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме Стеклова всякий элемент $x \in \boldsymbol{H}$ представляется в виде ряда Фурье $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, сходящегося к x по норме пространства $\boldsymbol{H}$, где $c_n = \langle x, e_n \rangle$ — коэффициенты Фурье́ элемента x.

Определим линейное отображение $F : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(x) = c$, где $c = \{c_n\}$ обозначает последовательность коэффициентов Фурье́ элемента $x \in \boldsymbol{H}$. Так как в силу равенства Парсева́ля $\|F(x)\| = \|x\|$, то отображение F является изометричным. Осталось доказать, что его образ $F(\boldsymbol{H})$ совпадает с пространством $\boldsymbol{\ell}_2$.

Для каждого элемента $c = \{c_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$ определим последовательность элементов $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ пространства $\boldsymbol{H}$. Так как в силу свойства ортонормируемости

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j} \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0 \text{ при } n, m \to \infty,$$

то $\{s_n\}$ является последовательностью Коши́. Тогда в силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ существует предел $\lim s_n = x$ по норме $\boldsymbol{H}$. Применяя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle x, e_n \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle s_m, e_n \rangle = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $F(x) = c$ и, следовательно, отображение F является изометрией $\boldsymbol{H}$ на $\boldsymbol{\ell}_2$. □

Пример 4. Докажем, что тригонометрическая система $e_n(x) \doteqdot e^{inx}/\sqrt{2\pi}$, где $n \in \mathbb{Z}$, является ортонормированной и полной в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$.

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{2\pi i(n-m)} = 0 \ (n \neq m), \quad \langle e_n, e_n \rangle = 1,$$

т.е. система $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является ортонормированной в пространстве $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$.

Докажем полноту. Так как множество непрерывных функций $\boldsymbol{C}[-\pi, \pi]$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$, то для любой $f \in \boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $g \in \boldsymbol{C}[-\pi, \pi]$, т.ч. $\|f - g\| < \varepsilon/3$. Построим функцию $\varphi \in \boldsymbol{C}[-\pi, \pi]$, т.ч. $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ и $\|g - \varphi\| < \varepsilon/3$. Для этого достаточно изменить функцию g на маленьком отрезке $[\pi - \delta, \pi]$, полагая ее там линейной. Тогда по теореме Вейерштрасса об аппроксимации существует тригонометрический полином $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, т.ч. $\|\varphi - T\|_C < \varepsilon/3\sqrt{2\pi}$. Так как $\|\varphi - T\| \leqslant \sqrt{2\pi} \|\varphi - T\|_C < \varepsilon/3$, то

$$\|f - T\| \leqslant \|f - g\| + \|g - \varphi\| + \|\varphi - T\| < \varepsilon.$$

Таким образом, тригонометрическая система $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ полна в $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$.

При помощи теоремы Рисса-Фишера определяется изометрический изоморфизм пространства $\boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$ на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(f) = c$, где $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ обозначает совокупность всех коэффициентов Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$, т.е. $c_n \doteqdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx/\sqrt{2\pi}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Из равенства Парсева́ля вытекает, что $\|F(f)\| = \|f\|$ для всех $f \in \boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi]$. Следовательно, отображение $F : \boldsymbol{L}_2[-\pi, \pi] \to \boldsymbol{\ell}_2$ изометрично и, как показано в теореме, его образ совпадает с $\boldsymbol{\ell}_2$.