1 ПРОСТРАНСТВА СХОДИМОСТИ

Пусть $\boldsymbol{E}$ является *линейным пространством* над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Через $\zeta = \zeta_{\boldsymbol{E}}$ обозначается *сходимость* в пространстве $\boldsymbol{E}$, т.е. множество последовательностей $\{x_n\}$, которые называются *сходящимися*. Как обычно, в поле $\mathbb{F}$ сходимость $\zeta_{\mathbb{F}}$ определяется метрикой $\rho(a, b) \doteqdot |a - b|$.

Определение. Пара $(\boldsymbol{E}, \zeta)$ называется *пространством сходимости*, если задана сходимость ζ в пространстве $\boldsymbol{E}$, для которой выполняются следующие свойства:

a) если $\{x_n\} \in \zeta$, то существует единственный предел $x = \lim x_n$;

b) если $x_n = x$ для всех $n \geqslant n_0$, то $\{x_n\} \in \zeta$ и $x = \lim x_n$;

c) если $\{x_n\} \in \zeta$ и $x = \lim x_n$, то всякая $\{x_{n_k}\} \in \zeta$ и $x = \lim x_{n_k}$;

d) если $\{x_n\}, \{y_n\} \in \zeta$, то $\{x_n + y_n\} \in \zeta$ и $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$;

e) если $\{x_n\} \in \zeta$ и $\{\lambda_n\} \in \zeta_{\mathbb{F}}$, то $\{\lambda_n x_n\} \in \zeta$ и $\lim \lambda_n x_n = \lim \lambda_n \cdot \lim x_n$.

Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ пространств сходимости называется (секвенциально) *непрерывным*, если из $\{x_n\} \in \zeta_{\boldsymbol{E}}$ следует, что $\{f(x_n)\} \in \zeta_{\boldsymbol{F}}$ и $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Пространство сходимости называется *регулярным*, если для каждой двойной последовательности $\{x_{nk}\}$ из существования предела по строкам $x_n = \lim\limits_k x_{nk}$ и предела $x = \lim\limits_n x_n$ следует, что существуют такие $k_n \to \infty$, что $\lim\limits_n x_{nk_n} = x$.

Лемма 1. *Метрическое линейное пространство $(\boldsymbol{E}, \rho)$ является регулярным пространством сходимости.*

Доказательство. Аксиомы a), b) и c) очевидны. Аксиомы d) и e) вытекают из непрерывности линейных операций в пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$. Докажем регулярность. Пусть $\lim\limits_k \rho(x_{nk}, x_n) = 0$ и $\lim\limits_n \rho(x_n, x) = 0$. Выберем $k_n \to \infty$, т.ч. $\rho(x_{nk_n}, x_n) < 1/n$. Тогда получим $\rho(x_{nk_n}, x) \leqslant \rho(x_{nk_n}, x_n) + \rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. □

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *безусловно суммируемой*, если для каждой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$.

Говорят, что пространство сходимости $(\boldsymbol{E}, \zeta)$ удовлетворяет *аксиоме полноты*, если для всякой последовательности $\{x_n\} \in \zeta$ с пределом $\lim x_n = 0$ существует безусловно суммируемая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Лемма 2. *Полное метрическое линейное пространство $(\boldsymbol{E}, \rho)$ удовлетворяет аксиоме полноты.*

Доказательство. Пусть $\|x\| \doteqdot \rho(x, 0)$ обозначает квазинорму в $\boldsymbol{E}$ и $\lim \|x_n\| = 0$. Выберем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $\|x_{n_k}\| < 1/2^k$. Полагая $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} x_{n_k}$, получим $\|s_m - s_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|x_{n_k}\| < 1/2^n$ при всех $m > n$. Следовательно, $\{s_n\}$ есть последовательность Коши и в силу полноты пространства $\boldsymbol{E}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ сходится. Аналогично доказывается, что всякий подряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_{k_i}}$ сходится. □

Пример. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с компактным носителем, в котором сходимость $\varphi_n \to \varphi$ определяется следующими двумя условиями: 1) $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$; 2) существует компакт $K \Subset \mathbb{R}$, т.ч. $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ при всех n. Носителем $\operatorname{supp}(\varphi)$ функции φ называется замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}$, в которых $\varphi(x) \neq 0$ не равна нулю.

В силу леммы 2 в пространстве $\boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$ выполняется аксиома полноты. Однако сходимость в $\boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$ не регулярна и поэтому пространство $\boldsymbol{C}_0(\mathbb{R})$ не метризуемо. В самом деле, пусть $\eta(x) \doteqdot 1 - |x|$ при $|x| \leqslant 1$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| > 1$. Тогда для $\varphi_{mk}(x) \doteqdot \eta(x/n)/k$ имеем $\lim\limits_k \varphi_{nk} = 0$, однако $\varphi_{nk_n} \nrightarrow 0$ для любых $k_n \to \infty$.

Определение. Пусть $(\boldsymbol{E}', \zeta')$ — *сопряженное пространство* к пространству сходимости $(\boldsymbol{E}, \zeta)$, где $\boldsymbol{E}'$ — множество непрерывных линейных функционалов $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ и сходимость ζ' в пространстве $\boldsymbol{E}'$ определяется условием: $f_n \to f$, если $f(x) = \lim f_n(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Сопряженное пространство $(\boldsymbol{E}', \zeta')$ называется *полным*, если из сходимости $f_n \to f$ и $f_n \in \boldsymbol{E}'$ следует, что $f \in \boldsymbol{E}'$.

Лемма 3. *Предположим, что двойная последовательность чисел $\{a_{mn}\}$ из поля $\mathbb{F}$ удовлетворяет следующим условиям:*

a) при всех m существует предел $\lim\limits_n a_{mn} = b_m$;

b) существует такое $\varepsilon > 0$, что $|b_m| > \varepsilon$ при всех m;

c) при всех n ряд $\sum_{m=1}^\infty |a_{mn}| < \infty$ сходится абсолютно.

Тогда существуют $m_l \to \infty$ и $n_k \to \infty$, т.ч. $\lim\limits_k |\sum_{l=1}^\infty a_{m_l n_k}| = \infty$.

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть случай $a_{mn} \in \mathbb{R}$. Выберем возрастающую последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$, т.ч. $|a_{kn}| > \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_k$. Тогда $\sum_{m=1}^\infty |a_{mn_k}| \geqslant \sum_{m=1}^k |a_{mn_k}| > k\varepsilon$. Отсюда предел $\lim\limits_k \sum_{m=1}^\infty |a_{mn_k}| = \infty$. Следовательно, $\lim\limits_k \sum_{m=1}^\infty a_{mn_k}^+ = \infty$ или $\lim\limits_k \sum_{m=1}^\infty a_{mn_k}^- = \infty$, где $a^\pm \doteqdot \max\{\pm a, 0\}$. Поэтому существует последовательность $\{m_l\}$, т.ч. $\lim\limits_k |\sum_{l=1}^\infty a_{m_l n_k}| = \infty$. □

Теорема. *Пусть в пространстве сходимости $(\boldsymbol{E}, \zeta)$ выполняется аксиома полноты. Тогда сопряженное пространство $(\boldsymbol{E}', \zeta')$ является полным.*

Доказательство. Предположим, что $f_n \in \boldsymbol{E}'$ и $f_n \to f$ сходится, но $f \notin \boldsymbol{E}'$. Тогда функционал f не является непрерывным в нуле, т.е. существуют $\varepsilon > 0$ и $\{x_m\} \in \zeta$, т.ч. $\lim x_m = 0$ и $|f(x_m)| > \varepsilon$. В силу аксиомы полноты мы можем считать, что последовательность $\{x_m\}$ безусловно суммируема. Обозначим через $a_{mn} \doteqdot f_n(x_m)$ двойную последовательность чисел. Поскольку каждый подряд ряда $\sum_{m=1}^\infty a_{mn}$ является сходящимся, то этот ряд сходится абсолютно. Поэтому выполнены все условия леммы 3 и, значит, существуют $\{m_l\}$ и $\{n_k\}$, т.ч. $\lim\limits_k |\sum_{l=1}^\infty a_{m_l n_k}| = \infty$. Пусть $x = \sum_{l=1}^\infty x_{m_l}$, тогда в силу непрерывности функционалов f_{n_k} мы имеем равенство $|f(x)| = \lim\limits_k |f_{n_k}(x)| = \lim\limits_k |\sum_{l=1}^\infty f_{n_k}(x_{m_l})| = \infty$, что невозможно. □

Определение. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\boldsymbol{E}}$ обозначает систему полунорм в пространстве $\boldsymbol{E}$. Пара $(\boldsymbol{E}, \mathcal{P})$ называется *полинормированным пространством*, если из $p(x) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$ вытекает, что $x = 0$. Полинормированное пространство $(\boldsymbol{E}, \mathcal{P})$ называется *счетно-нормированным*, если система $\mathcal{P}$ не более, чем счетная.

Последовательность $\{x_n\}$ *сходится* $x_n \to x$ в полинормированном пространстве $(\boldsymbol{E}, \mathcal{P})$ к элементу $x \in \boldsymbol{E}$, если для всех $p \in \mathcal{P}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется N, т.ч. $p(x_n - x) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$, т.е. $\lim\limits_n p(x_n - x) = 0$ при всех $p \in \mathcal{P}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши́*, если для всех $p \in \mathcal{P}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется N, т.ч. $p(x_n - x_m) < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$, т.е. $\lim\limits_{n,m} p(x_n - x_m) = 0$ при всех $p \in \mathcal{P}$. Полинормированное пространство $(\boldsymbol{E}, \mathcal{P})$ называется *полным*, если всякая последовательность Коши́ сходится.

Всякое полинормированное пространство является пространством сходимости. В силу доказанной теоремы сопряженное пространство $(\boldsymbol{E}', \zeta')$ к пространству сходимости $(\boldsymbol{E}, \zeta)$, в котором выполняется аксиома полноты, является полным полинормированным пространством с системой полунорм $p_x(f) \doteqdot |f(x)|$, $x \in \boldsymbol{E}$.

Теорема. *Сходимость в счетно-нормированном пространстве $(\boldsymbol{E}, \mathcal{P})$ относительно системы полунорм $\mathcal{P} \doteqdot \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равносильна сходимости в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$ относительно метрики*

$$\rho(x, y) \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}, \quad x, y \in \boldsymbol{E}.$$

Доказательство. Проверим аксиомы метрики. Симметричность $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ очевидна. Так как функция $\varphi(t) = t/(t + 1)$ возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+$ и является полуаддитивной $\varphi(a + b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b)$ при всех $a, b \in \mathbb{R}_+$, то выполняется неравенство треугольника $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$. Если $\rho(x, y) = 0$, то $p_n(x - y) = 0$ при всех n и, следовательно, $x = y$. Докажем равносильность сходимостей.

Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем m так, чтобы $1/2^m < \varepsilon/2$. Поскольку последовательность сходится $x_n \to x$, то для каждого k найдется такое n_k, т.ч. $p_k(x_n - x) < \varepsilon/2m$ при всех $n \geqslant n_k$. Тогда, полагая $N \doteqdot \max_{1 \leqslant k \leqslant m} n_k$, получим

$$\rho(x_n, x) \leqslant \textstyle\sum_{k=1}^m p_k(x_n - x) + \sum_{k=m+1}^{\infty} 1/2^k < \varepsilon.$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N, т.ч. $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Тогда для любого k выполняется неравенство $p_k(x_n - x) < \varepsilon\, 2^k \big(p_k(x_n - x) + 1\big)$ при всех $n \geqslant N$. Отсюда при всех $n \geqslant N$ и $\varepsilon < 1/2^k$ имеем $p_k(x_n - x) \leqslant \varepsilon\, 2^k/(1 - \varepsilon\, 2^k)$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_n p_k(x_n - x) = 0$ при всех k.

Аналогично доказывается, что $\{x_n\}$ образует последовательность Коши́ в $(\boldsymbol{E}, \mathcal{P})$ тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ образует последовательность Коши́ в $(\boldsymbol{E}, \rho)$. $\square$

Следствие. *Счетно-нормированное пространство $(\boldsymbol{E}, \mathcal{P})$ полно тогда и только тогда, когда полно соответствующее метрическое пространство $(\boldsymbol{E}, \rho)$.*

Определение. Линейное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ полинормированных пространств называется *ограниченным*, если для каждого $p \in \mathcal{P}_{\boldsymbol{F}}$ существуют $c > 0$ и $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}_{\boldsymbol{E}}$, т.ч. $p(f(x)) \leqslant c(p_1(x) + \ldots + p_n(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Теорема. *Пусть $(\boldsymbol{E}, \mathcal{P}_{\boldsymbol{E}})$ является счетно-нормированным пространством, а $(\boldsymbol{F}, \mathcal{P}_{\boldsymbol{F}})$ есть полинормированное пространство. Тогда линейное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ ограничено в том и только в том случае, когда оно непрерывно.*

Доказательство. Ясно, что ограниченное линейное отображение непрерывно.

Докажем обратное утверждение. По определению система $\mathcal{P}_{\boldsymbol{E}} = \{p_n\}$ счетная. Пусть функции $q_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} p_k(x)$ определяют возрастающую последовательность полунорм в $\boldsymbol{E}$. Если отображение f не является ограниченным, то найдутся такие $p \in \mathcal{P}_{\boldsymbol{F}}$ и $\{x_n\}$, что $p(f(x_n)) > n q_n(x_n)$ при всех n. Пусть $y_n \doteqdot x_n/\sqrt{n} q_n(x_n)$, тогда имеет место неравенство $p_k(y_n) \leqslant 1/\sqrt{n}$ при всех $k \leqslant n$. Отсюда $y_n \to 0$, однако $p(f(y_n)) > \sqrt{n}$, т.е. $f(y_n) \nrightarrow 0$ не сходится к нулю. Получили противоречие. □

Определение. Функция $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ называется *бесконечно дифференцируемой*, если при всех $x \in \mathbb{R}^m$ существуют частные производные $\partial^\alpha \varphi(x)$ любого порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ обозначают целые неотрицательные числа. Через $|\alpha| \doteqdot \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ обозначается *порядок мультииндекса* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$.

Носителем $\operatorname{supp}(\varphi)$ непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ называется замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}^m$, в которых функция $\varphi(x) \neq 0$ не равна нулю.

Пусть $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ обозначает множество бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ с компактным носителем $\operatorname{supp}(\varphi) \Subset X \subset \mathbb{R}^m$. Система норм

$$p_k(\varphi) \doteqdot \textstyle\sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

определяет структуру счетно-нормированного пространства в $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$. Сходимость в $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ равносильна равномерной сходимости функций и всех производных на множестве X. При этом все операторы дифференцирования $\partial^\alpha : \boldsymbol{C}_0^\infty(X) \to \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ непрерывны. В силу доказанной теоремы $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ образует метрическое линейное пространство, в котором сходимость определяется метрикой

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(\varphi - \psi)}{1 + p_k(\varphi - \psi)}, \quad \varphi, \psi \in \boldsymbol{C}_0^\infty(X).$$

Для краткости полное счетно-нормированное пространство обычно называется *пространством Фреше́*. По известной теореме из математического анализа, если последовательность функций пространства $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ сходится равномерно $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на множестве X вместе с производными $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leqslant k$, то функция φ имеет непрерывные производные $\partial^\alpha \varphi = \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leqslant k$ на множестве X. Отсюда, если $X \Subset \mathbb{R}^m$ компактно, то счетно-нормированное пространство $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ будет полным и, следовательно, является пространством Фреше́.

2 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $\mathbb{R}^m$ обозначает далее евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle \doteqdot \sum_{k=1}^m x_k y_k$ и нормой $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Через $C_0^\infty(X)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ с компактным носителем $\operatorname{supp}(\varphi) \Subset X$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^m$ вместе со сходимостью по системе норм

$$p_k(\varphi) \doteqdot \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пример 1. При помощи правила Лопита́ля нетрудно проверить, что функция $e(t) \doteqdot e^{-1/t}$ при $t > 0$ и $e(t) \doteqdot 0$ при $t \leqslant 0$ будет бесконечно дифференцируемой. Функция $\xi(x) \doteqdot e(1 - \|x\|^2)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ также бесконечно дифференцируема и имеет носитель $\operatorname{supp}(\xi) = S \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant 1\}$ в единичном шаре.

Система функций $\theta_r(x) \doteqdot c_r\,\xi(x/r)$ при $r > 0$ называется *аппроксимативной единицей*, где константы $c_r > 0$ подобраны так, что интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x)\,dx = 1$. Все функции $\theta_r(x)$ являются неотрицательными, бесконечно дифференцируемыми и имеют носитель $\operatorname{supp}(\theta_r) = S_r \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant r\}$ в шаре радиуса r.

Пусть $\eta(x) \doteqdot \int_{S_2} \theta_1(x - y)\,dy$, тогда $\eta(x) = 1$ при $x \in S_1$ и $\eta(x) = 0$ при $x \notin S_3$. Функция $\eta(x)$ является неотрицательной, бесконечно дифференцируемой и имеет носитель $\operatorname{supp}(\eta) = S_3$ в шаре радиуса $r = 3$.

Пусть $\mathcal{D}(X) = C_0^\infty(X)$ обозначает *пространство основных функций* $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, в котором задана сходимость $\varphi_n \to \varphi$, определяемая двумя следующими условиями: 1) $\partial^\alpha\varphi_n \rightrightarrows \partial^\alpha\varphi$ сходятся равномерно при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ и 2) найдется компакт $K \Subset X$, т.ч. $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Сопряженное пространство $\mathcal{D}'(X)$ к пространству сходимости $\mathcal{D}(X)$ называется *пространством обобщенных функций* на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$. Значение линейного функционала $f \in \mathcal{D}'(X)$ на основной функции далее обозначается через $\langle f, \varphi\rangle$. Из определения вытекают следующие свойства:

1) обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ является линейным функционалом, т.е. $\langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle$ при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(X)$;

2) обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ является непрерывным функционалом, т.е. если $\varphi_n \to \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{D}(X)$, то $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ сходится;

3) последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции, т.е. если $f_n \in \mathcal{D}'(X)$ и $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, то $f \in \mathcal{D}'(X)$.

Последнее свойство вытекает из теоремы о полноте сопряженного пространства $\mathcal{D}'(X)$ к пространству сходимости $\mathcal{D}(X)$. В самом деле, все носители сходящейся последовательности функций $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}(X)$ находятся на одном компакте $K \Subset X$. Поэтому $\varphi_n \to 0$ сходится в $\mathcal{D}(K) = C_0^\infty(K)$. Поскольку $C_0^\infty(K)$ является полным метрическим линейным пространством, то в нем выполняется аксиома полноты.

Пример 2. 1) Обобщенная функция $\delta(x-a)$ называется δ-функцией Ди́рака и определяется равенством $\langle\delta(x-a),\varphi\rangle \doteqdot \varphi(a)$ при всех $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Ее производные $\partial^\alpha\delta(x-a)$ порядка α определяются равенством $\langle\partial^\alpha\delta(x-a),\varphi\rangle \doteqdot (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(a)$.

2) Обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ называется *главным значением* $\frac{1}{x}$ и определяется равенством $\langle\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\rangle \doteqdot \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$. Для доказательства существования этого предела при всех $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и непрерывности функционала применим формулу Лагра́нжа $\varphi(x)-\varphi(-x)=2x\varphi'(t)$, где $|t|<|x|$. Тогда, используя равенство

$$\langle\mathcal{P}\tfrac{1}{x},\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_\varepsilon^\infty+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\int_0^\infty\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx,$$

получим $|\langle\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\rangle|\leqslant 2c\max_{t\in(-c,c)}|\varphi'(t)|$, где $\varphi\in\mathcal{D}(-c,c)$. Отсюда $\mathcal{P}\frac{1}{x}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Рассмотрим действия с обобщенными функциями $f\in\mathcal{D}(X)$, где $X\subset\mathbb{R}^m$.

1. *Обозначим через $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ пространство локально интегрируемых функций $f:X\to\mathbb{F}$, т.е. интегрируемых по Лебе́гу на всяком компакте $K\Subset X$. Каждая функция $f\in\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ определяет регулярную обобщенную функцию, заданную по формуле $\langle f,\varphi\rangle\doteqdot\int_X f(x)\varphi(x)\,dx$ при всех $\varphi\in\mathcal{D}(X)$.*

Непрерывность этого функционала $f\in\mathcal{D}'(X)$ следует из теоремы Лебе́га.

2. *Произведение обобщенной функции $f\in\mathcal{D}'(X)$ на бесконечно дифференцируемую $\psi\in\boldsymbol{C}^\infty(X)$ задается формулой $\langle\psi f,\varphi\rangle\doteqdot\langle f,\psi\varphi\rangle$ при всех $\varphi\in\mathcal{D}(X)$.*

Непрерывность функционала $\psi f\in\mathcal{D}'(X)$ вытекает из непрерывности оператора умножения на функцию $M_\psi(\varphi)\doteqdot\psi\varphi$ в пространстве $\mathcal{D}(X)$.

3. *Операторы сдвига и растяжения обобщенной функции $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ определяются по формулам $\langle\tau_a f,\varphi\rangle\doteqdot\langle f,\tau_{-a}\varphi\rangle$ и $\langle\rho_\lambda f,\varphi\rangle\doteqdot|\lambda|^{-m}\langle f,\rho_{\lambda^{-1}}\varphi\rangle$ при всех $\varphi\in\mathcal{D}(X)$ и $\lambda\in\mathbb{R}\setminus0$, где $\tau_a\varphi(x)\doteqdot\varphi(x-a)$ и $\rho_\lambda\varphi(x)\doteqdot\varphi(\lambda x)$.*

Непрерывность функционалов $\tau_a f,\rho_\lambda f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ получается из непрерывности соответствующих операторов сдвига $\tau_a\varphi$ и растяжения $\rho_\lambda\varphi$ в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

4. *Пусть $A:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ линейное преобразование с определителем $\det A\neq0$. Замена переменных в обобщенной функции $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ задается по формуле $\langle T_A f,\varphi\rangle\doteqdot|\det A|^{-1}\langle f,T_{A^{-1}}\varphi\rangle$ при всех $\varphi\in\mathcal{D}(X)$, где $T_A\varphi(x)=\varphi(Ax)$.*

Непрерывность функционала $T_A f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ сразу вытекает из непрерывности оператора замены переменных $T_A\varphi$ в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

5. *Производная $\partial^\alpha f$ обобщенной функции $f\in\mathcal{D}'(X)$ определяется по формуле $\langle\partial^\alpha f,\varphi\rangle\doteqdot(-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha\varphi\rangle$ для всех функций $\varphi\in\mathcal{D}(X)$.*

Непрерывность функционала $\partial^\alpha f\in\mathcal{D}'(X)$ вытекает из непрерывности оператора дифференцирования $\partial^\alpha\varphi$ в пространстве $\mathcal{D}(X)$. Из указанных определений легко вывести *формулу Ле́йбница*: $\partial_i(\psi f)=(\partial_i\psi)f+\psi(\partial_i f)$, где $\partial_i\doteqdot\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,\ldots,m$.

$$\langle\partial_i(\psi f),\varphi\rangle=-\langle f,\psi(\partial_i\varphi)\rangle=\langle f,(\partial_i\psi)\varphi-\partial_i(\psi\varphi)\rangle=\langle(\partial_i\psi)f,\varphi\rangle+\langle\psi(\partial_i f)\varphi\rangle.$$

Формула Сохо́цкого: $\frac{1}{x+\boldsymbol{i}0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - \pi\boldsymbol{i}\delta(x)$, где обобщенная функция $\frac{1}{x+\boldsymbol{i}0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определяется по формуле $\langle\frac{1}{x+\boldsymbol{i}0}, \varphi\rangle \doteqdot \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x+\boldsymbol{i}\varepsilon}\,dx$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Действительно, если функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет носитель $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (-c, c)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-c}^{c} \frac{\varphi(x)}{x+\boldsymbol{i}\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-c}^{c} \frac{x-\boldsymbol{i}\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\,dx + \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-c}^{c} \frac{x-\boldsymbol{i}\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx =$$
$$= \int_{-c}^{c} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx - 2\boldsymbol{i}\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\operatorname{arctg}\frac{c}{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx - \pi\boldsymbol{i}\varphi(0).$$

Теорема (о локальной структуре)**.** *Пусть $K \Subset X$ компактное множество. Тогда для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(X)$ существуют непрерывная функция $g \in \boldsymbol{C}(K)$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, т.ч. $\langle f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int_K g(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.*

Доказательство. Производя замену переменных, считаем, что $K \subset \Delta \doteqdot [0,1]^m$. Поскольку f непрерывен в $\mathcal{D}(K) = \boldsymbol{C}_0^\infty(K)$, то он ограничен по системе норм

$$p_k(\varphi) \doteqdot \sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant k}\sup\nolimits_{x\in X}|\partial^\alpha\varphi(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому существуют $c > 0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\,p_k(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Так как $p_0(\varphi) = \sup_{x\in X}|\varphi(x)|$, то, применяя формулу Лагра́нжа по переменной x_i, мы имеем $p_0(\varphi) \leqslant p_0(\partial_i\varphi)$ при $i = 1, \ldots, m$. Определим дифференциальный оператор по формуле $D \doteqdot \partial_1 \ldots \partial_m$. Тогда для всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ и $|\alpha| \leqslant k$ получим

$$p_0(\partial^\alpha\varphi) \leqslant p_0(D^k\varphi) \leqslant \int_\Delta |D^{k+1}\varphi(x)|\,dx \leqslant \|D^{k+1}\varphi\|_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Здесь использовалась формула Ле́йбница $D^k\varphi(x) = \int_{\Delta_x} D^{k+1}\varphi(y)\,dy$ для функций многих переменных, где $\Delta_x \doteqdot [0, x_1] \times \ldots \times [0, x_m]$ при всех $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Delta$, а также неравенство Коши́–Буняко́вского в $\boldsymbol{L}_2(\Delta)$. Таким образом, выполняется неравенство $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c_k\|D^{k+1}\varphi\|_{\boldsymbol{L}_2}$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ при некотором $c_k > 0$.

Линейный оператор $A \doteqdot D^{k+1} : \mathcal{D}(K) \to \mathcal{D}(K)$ является непрерывным и взаимно однозначным на пространстве $\mathcal{D}(K)$. Поэтому корректно определен следующий линейный функционал: $F(\psi) \doteqdot \langle f, A^{-1}\psi\rangle$ при всех $\psi = A\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. В силу доказанного выше этот функционал ограничен по норме $\boldsymbol{L}_2(K)$ и, следовательно, по теореме Ха́на–Ба́наха существует его ограниченное продолжение на все $\boldsymbol{L}_2(K)$. По теореме Ри́сса о представлении ограниченных функционалов найдется такая функция $h \in \boldsymbol{L}_2(K)$, что $F(\psi) = \int_K h(x)\psi(x)\,dx$ при всех $\psi = A\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Пусть $h(x) = 0$ при всех $x \notin K$, тогда интегрируя по частям, получим

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_\Delta h(x)\,D^{k+1}\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Delta g(x)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$

где $g(x) \doteqdot (-1)^{|\alpha|+m}\int_{\Delta_x} h(y)\,dy$ и $\alpha \doteqdot (k+2, \ldots, k+2)$. □

Если для любого компакта $K \Subset A \subset X$ существует $c > 0$, т.ч. $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\,p_k(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, то говорят, что обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ имеет порядок не выше, чем k, на множестве A. Наименьшее такое число k называется *порядком обобщенной функции* f на множестве A. Если же такого числа k не существует, то $f \in \mathcal{D}'(X)$ имеет *бесконечный порядок* на множестве A.

Определение. Говорят, что обобщенные функции $f, g \in \mathcal{D}'(X)$ совпадают $f = g$ на множестве $A \subset X$, если $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{D}(O_A)$ с носителем в некоторой окрестности $O_A \subset X$ множества A.

В частности, обобщенные функции $f, g \in \mathcal{D}'(X)$ совпадают $f(x) = g(x)$ в точке $x \in X$, если они совпадают в некоторой ее окрестности $O_x \subset X$. Множество

$$\operatorname{supp}(f) \doteqdot \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

называется *носителем обобщенной функции* $f \in \mathcal{D}'(X)$. Очевидно, он является замкнутым множеством в X. В силу теоремы о локальной структуре для каждой функции $f \in \mathcal{D}'(X)$ и $K \Subset X$ существуют $g \in \boldsymbol{C}(K)$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, т.ч. $f = \partial^\alpha g$ на K.

Теорема. *Пусть* $f \in \mathcal{D}'(X)$ *имеет носитель* $\operatorname{supp}(f) = \{a\}$ *в точке* $a \in X \subset \mathbb{R}^m$. *Тогда существуют числа* $c_\alpha \in \mathbb{F}$ *при* $|\alpha| \leqslant k$, *т.ч.* $f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x - a)$.

Эта теорема формулируется без доказательства. Она устанавливает структуру обобщенных функций $f \in \mathcal{D}'(X)$, у которых носитель состоит из одной точки.

Лемма. *Если* $f \in \mathcal{D}'(a, b)$ *и* $\partial f = 0$, *то* $f = c \in \mathbb{F}$ *на интервале* (a, b).

Доказательство. Имеем $\langle f, \varphi' \rangle = 0$ при $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$. Следующие подпространства

$$L \doteqdot \{\varphi \in \mathcal{D}(a, b) \mid \textstyle\int_a^b \varphi\, dt = 0\}, \quad M \doteqdot \{\varphi \in \mathcal{D}(a, b) \mid \exists \psi \in \mathcal{D}(a, b) : \psi' = \varphi\}$$

совпадают. В самом деле, если $\varphi \in M$, то мы имеем $\int_a^b \varphi\, dt = \psi(b) - \psi(a) = 0$. Обратно, если $\varphi \in L$, то, полагая $\psi(x) = \int_a^x \varphi\, dt$, получим $\psi'(x) = \varphi(x)$.

Для доказательства леммы рассмотрим функцию $\eta \in \mathcal{D}(a, b)$, т.ч. $\int_a^b \eta\, dt = 1$. Всякая функция $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ имеет представление $\varphi = \psi + \eta \int_a^b \varphi\, dt$, где $\psi \in L$. Поскольку $L = M$ и по условию леммы $\langle f, \psi \rangle = 0$, то мы имеем равенство

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \eta \rangle \textstyle\int_a^b \varphi\, dt = \langle c, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(a, b),$$

где $c \doteqdot \langle f, \eta \rangle \in \mathbb{F}$. Следовательно, $f = c$ на интервале (a, b). □

Теорема (о существовании первообразной)**.** *Для всякой обобщенной функции* $f \in \mathcal{D}'(a, b)$ *существует обобщенная функция* $g \in \mathcal{D}'(a, b)$, *т.ч.* $\partial g = f$.

Доказательство. Определим функционал g на подпространстве $M \subset \mathcal{D}(a, b)$ по формуле $\langle g, \varphi' \rangle \doteqdot -\langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$. Также как в лемме всякая функция $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ представляется в виде $\varphi = \psi + \eta \int_a^b \varphi\, dt$, где $\psi \in L$. Поскольку $L = M$, то функционал g можно продолжить на все пространство $\mathcal{D}(a, b)$ по формуле

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle g, \psi \rangle + \langle g, \eta \rangle \textstyle\int_a^b \varphi\, dt = -\langle f, A\varphi \rangle + \langle c, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(a, b),$$

где $c \doteqdot \langle g, \eta \rangle$ и $A\varphi(x) \doteqdot \int_a^x \left(\varphi - \eta \int_a^b \varphi\, dt\right) dy$ определяет непрерывный оператор в пространстве $\mathcal{D}(a, b)$. Поэтому функционал $g \in \mathcal{D}'(a, b)$ является непрерывным и в силу леммы любая обобщенная функция, удовлетворяющая условию теоремы, отличается от g на аддитивную константу. □

3 ПРОСТРАНСТВА СО́БОЛЕВА

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество. Через $\mathcal{E}(X)$ обозначается пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : X \to \mathbb{F}$, для которых определена сходимость $\varphi_n \to \varphi$, удовлетворяющая условию: $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \partial^\alpha \varphi$ сходится равномерно на каждом компакте $K \Subset X$ при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$.

Определение. Сопряженное пространство $\mathcal{E}'(X)$ к пространству сходимости $\mathcal{E}(X)$ называется пространством *обобщенных функций с компактным носителем.*

Из определения вытекают следующие свойства:

1) обобщенная функция $f \in \mathcal{E}'(X)$ является линейным функционалом, т.е. $\langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle$ при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(X)$;

2) обобщенная функция $f \in \mathcal{E}'(X)$ является непрерывным функционалом, т.е. если $\varphi_n \to \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{E}(X)$, то $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$;

3) последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции, т.е. если $f_n \in \mathcal{E}'(X)$ и $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{E}(X)$, то $f \in \mathcal{E}'(X)$.

Докажем последнее утверждение. Пусть $K_l \doteqdot \{x \in X \mid \|x\| \leqslant l,\, \rho(x, \partial X) \geqslant 1/l\}$ при $l > 0$. Тогда получим последовательность вложенных компактов $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, объединение которых $\bigcup_{l=1}^{\infty} K_l = X$. Система полунорм

$$\mathrm{e}_l(\varphi) \doteqdot \textstyle\sum_{|\alpha| \leqslant l} \sup_{x \in K_l} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

определяет в $\mathcal{E}(X)$ структуру счетно нормированного пространства. Сходимость по этой системе полунорм равносильна равномерной сходимости функций и всех производных на каждом компакте $K \Subset X$. Поэтому по доказанной ранее теореме $\mathcal{E}(X)$ является метрическим линейным пространством с указанной сходимостью. В силу известной теоремы из математического анализа, если последовательность функций из пространства $\mathcal{E}(X)$ сходится равномерно $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ в области $D \subset X$ вместе с производными $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leqslant l$, то функция φ имеет непрерывные производные $\partial^\alpha \varphi = \varphi_\alpha$ порядка $|\alpha| \leqslant k$ в этой области D. Поэтому $\mathcal{E}(X)$ полное счетно-нормированное пространство, т.е. является пространством Фреше́. Таким образом, по доказанному ранее, в пространстве $\mathcal{E}(X)$ выполняется аксиома полноты и, следовательно, сопряженное пространство $\mathcal{E}'(X)$ полно.

Теорема. *Обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда существует функция $g \in \mathcal{E}'(X)$, т.ч. $g|_{\mathcal{D}(X)} = f$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задана обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(X)$ с компактным носителем $\mathrm{supp}(f) \Subset X$. Рассмотрим следующие основные функции:

$$\eta_l(x) \doteqdot \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} \theta_{1/4l}(x-y)\chi_{K_{4l/3}}(y)\,dy = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K_l; \\ 0, & \text{если } x \notin K_{2l}. \end{cases}$$

Определим функционал $g \in \mathcal{E}'(X)$ по формуле $\langle g, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, \eta_l \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{E}(X)$, где число $l \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $\operatorname{supp}(f) \subset K_l$. Поскольку операция $A_l \varphi \doteqdot \eta_l \varphi$ умножения на функцию η_l линейна и непрерывна в $\mathcal{E}(X)$, то $g \in \mathcal{E}'(X)$ и имеет носитель $\operatorname{supp}(g) \Subset K_{2l}$. Так как $\operatorname{supp}(\varphi - \eta_l \varphi) \subset X \setminus K_l$, то имеет место равенство $\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \eta_l \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi - \eta_l \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$.

Пусть $g \in \mathcal{E}'(X)$, тогда $f \doteqdot g|_{\mathcal{D}(X)}$ является линейным функционалом в $\mathcal{D}(X)$. При этом, если $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathcal{D}(X)$, то $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathcal{E}(X)$ и, значит, $\lim \langle f, \varphi_n \rangle = \lim \langle g, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$. Отсюда функционал $f \in \mathcal{D}'(X)$ является непрерывным. Так как функционал g непрерывен в $\mathcal{E}(X)$, то он ограничен в $\mathcal{E}(X)$ и, следовательно, существуют $l \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, т.ч. $|\langle g, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{q}_l(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{E}(X)$. Поэтому имеем $\langle g, \varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, т.ч. $\operatorname{supp}(\varphi) \subset X \setminus K_l$. Таким образом, носитель $\operatorname{supp}(f) \subset K_l$ является компактным. □

Пример 1. Функция $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$, такая, что $f(x) \neq 0$ на открытом множестве X, определяет регулярную обобщенную функцию по формуле $\langle f, \varphi \rangle \doteqdot \int_X f(x) \varphi(x)\, dx$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, которая не имеет компактного носителя в X, т.е. $f \notin \mathcal{E}(X)$.

Определение. Пусть задана аппроксимативная единица $\{\theta_r\}_{r>0}$. *Усреднением функции* $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ *в смысле Со́болева* называется система функций $\{f_r\}_{r>0}$,

$$\text{где} \quad f_r(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x-y) f(y)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) f(x-y)\, dy \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^m,$$

и предполагается, что функция $f(x) = 0$ равна нулю при всех $x \notin X$.

1. *Функции* f_r *являются бесконечно дифференцируемыми, т.е.* $f_r \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Так как функции $\theta_r \in \boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ бесконечно дифференцируемые, то по теореме Лебе́га усреднение можно дифференцировать под знаком интеграла.

2. *Носитель* $\operatorname{supp}(f_r) \subset B_r(X)$, *где* $B_r(X) \doteqdot \{x \in \mathbb{R}^m \mid \rho(x, X) \leqslant r\}$.

Так как $\operatorname{supp}(\theta_r) \subset S_r$, то $f_r(x) = 0$, если выполняется неравенство $\rho(x, X) > r$.

3. *Если* $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$, *то* $\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$ *и* $\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ *при* $r \to 0$ *и* $1 \leqslant p < \infty$.

Применяя обобщенное неравенство Минко́вского, мы получим $\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$. В силу плотности множества $\boldsymbol{C}_0(X) \subset \boldsymbol{L}_p(X)$ непрерывных функций с компактным носителем для любого $\varepsilon > 0$ найдется $g \in \boldsymbol{C}_0(X)$, т.ч. $\|f - g\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/3$. Так как функция g равномерно непрерывна, то существует $\delta > 0$, т.ч. $\|\tau_y g - g\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/3$ при всех $\|y\| < \delta$, где $\tau_y g(x) \doteqdot g(x-y)$ оператор сдвига. Отсюда имеем

$$\|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|\tau_y f - \tau_y g\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|\tau_y g - g\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g - f\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon \text{ при всех } \|y\| < \delta.$$

Поскольку $\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y)\, dy = 1$, то $f_r(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) \big(\tau_y f(x) - f(x)\big)\, dy$. Поэтому, применяя обобщенное неравенство Минко́вского, при всех $0 < r < \delta$ получим

$$\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) \|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy \leqslant \sup_{\|y\|<r} \|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon.$$

Лемма (о плотности)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда, если $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$, то существует последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X)$, т.ч.*

a) $|\varphi_n(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ при всех $x \in X$;

b) $\|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такое компактное множество $K \Subset X$, что выполняется неравенство $\int_{X \setminus K} |f(x)|^p dx < (\varepsilon/2)^p$. Положим $g(x) = f(x)\chi_K(x)$. Тогда $d = \rho(K, \partial X) \doteqdot \inf_{x \in K, y \in \partial X} \|x - y\| > 0$ и $\operatorname{supp}(g_r) \Subset X$ при всех $0 < r < d$. В силу свойства 3 найдется $0 < \delta < d$, т.ч. $\|g - g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/2$ при всех $0 < r < \delta$. Отсюда имеет место неравенство $\|f - g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g - g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon$ при всех $0 < r < \delta$. Таким образом, функции $\varphi_n(x) \doteqdot g_{d/2n}(x)$ удовлетворяют условиям леммы. □

Следствие. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченное открытое множество. Тогда, если функция $f \in \boldsymbol{L}_\infty(X)$ ограничена, то существует $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X)$, т.ч.*

a) $|\varphi_n(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ при всех $x \in X$;

b) $\varphi_n(x) \to f(x)$ при п.в. $x \in X$ и $n \to \infty$.

Для доказательства применяем лемму в случае $p = 1$, а затем выделяем такую подпоследовательность, которая сходится п.в. на множестве X.

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$. Функционал $f \in \mathcal{D}'(X)$, определенный по формуле $\langle f, \varphi \rangle \doteqdot \int_X f(x)\, \varphi(x)\, dx$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, называется *регулярной обобщенной функцией*.

Доказательство непрерывности регулярного функционала на пространстве $\mathcal{D}(X)$ вытекает из теоремы Лебе́га о предельном переходе под знаком интеграла.

Сходимость последовательности $f_n \to f$ в пространстве $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ определяется сходимостью в пространстве $\boldsymbol{L}_1(K)$ на каждом компакте $K \Subset X$. Так как найдется последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, т.ч. $\bigcup_{l=1}^\infty K_l = X$, то сходимость в $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ равносильна сходимости по системе полунорм $\mathrm{k}_l(f) \doteqdot \int_{K_l} |f(x)|\, dx$, $l \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ является пространством Фреше́.

Теорема. *Отображение $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(X)$ является непрерывным вложением.*

Доказательство. В силу неравенства $\langle f_n - f, \varphi \rangle \leqslant \max |\varphi(x)| \int_K |f_n(x) - f(x)|\, dx$, где $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$, отображение является непрерывным. Докажем вложение.

Пусть $\int_X f(x)\varphi(x)\, dx = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Введем ограниченную функцию $e(x) \doteqdot |f(x)|/f(x)$ при $f(x) \neq 0$ и $e(x) = 0$ при $f(x) = 0$. Применяя следствие к множеству $X_l \doteqdot \{x \in X \mid \|x\| < l\}$, построим последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(X_l)$, т.ч. $|\varphi_n(x)| \leqslant 1$ и $\varphi_n(x) \to e(x)$ при п.в. $x \in X_l$. Тогда по теореме Лебе́га

$$\int_{X_l} |f(x)|\, dx = \int_{X_l} f(x)e(x)\, dx = \lim_n \int_{X_l} f(x)\big(e(x) - \varphi_n(x)\big)\, dx = 0.$$

Следовательно, $f(x) = 0$ при п.в. $x \in X_l$. Поскольку это равенство выполняется при всех $l \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{l=1}^\infty X_l = X$, то $f(x) = 0$ при п.в. $x \in X$. □

Определение. Функция $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ имеет *производную $\partial^\alpha f$ в смысле Cóболева* на множестве X, если существует $g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$, т.ч. при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$

$$\int_X g(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_X f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx.$$

По доказанной теореме производная $\partial^\alpha f \doteqdot g$ в смысле Cóболева определяется однозначно с точностью до эквивалентности функций п.в. на множестве X.

Пространство Cóболева $\mathrm{W}_p^k(X)$ состоит из классов эквивалентности функций $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$, у которых при всех $|\alpha| \leqslant k$ существуют производные в смысле Cóболева и принадлежат $\partial^\alpha f \in \boldsymbol{L}_p(X)$, где $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое множество, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Норма функции $f \in \mathrm{W}_p^k(X)$ определяется по формуле

$$\|f\|_{\mathrm{W}_p^k} \doteqdot \sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_{\boldsymbol{L}_p}, \text{ где } \|f\|_{\boldsymbol{L}_p} = \begin{cases}\left(\int_X |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, & \text{при } 1 \leqslant p < \infty;\\ \inf_{\mu(A)=0}\sup_{x\in X\setminus A}|f(x)|, & \text{при } p = \infty.\end{cases}$$

Теорема. $\mathrm{W}_p^k(X)$ — *бáнахово пространство при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{L}_p(X)$ является нормированным пространством, то $\mathrm{W}_p^k(X)$ также будет нормированным пространством. При этом $\|f\|_{\mathrm{W}_p^k} = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ при почти всех $x \in X$. Докажем полноту.

Пусть $\{f_n\}$ задает последовательность Кошú в пространстве $\mathrm{W}_p^k(X)$. Тогда в силу определения нормы в $\mathrm{W}_p^k(X)$ последовательность производных в смысле Cóболева $\{\partial^\alpha f_n\}$ является последовательностью Кошú в $\boldsymbol{L}_p(X)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$. Поскольку пространство $\boldsymbol{L}_p(X)$ полно, то $f_n \to f$ сходится в $\boldsymbol{L}_p(X)$ и все производные порядка $|\alpha| \leqslant k$ сходятся $\partial^\alpha f_n \to g_\alpha$ в $\boldsymbol{L}_p(X)$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|\langle f_n - f, \varphi\rangle| \leqslant \int_X |f_n(x) - f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leqslant \|f_n - f\|_{\boldsymbol{L}_p}\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_q} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $1/p + 1/q = 1$ и $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Следовательно, $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ и аналогично имеем $\langle \partial^\alpha f_n, \varphi\rangle \to \langle g_\alpha, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Отсюда по определению производной

$$\langle g_\alpha, \varphi\rangle = \lim_n\langle\partial^\alpha f_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lim_n\langle f_n, \partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(X).$$

Поэтому $\partial^\alpha f = g_\alpha$. Таким образом, $f_n \to f$ сходится в пространстве $\mathrm{W}_p^k(X)$. □

Пример 2. Докажем, что δ-функция $\delta(x-a)$ не является регулярной обобщенной функцией. Рассмотрим основную функцию $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| > 3$. Затем положим $\varphi_n(x) \doteqdot \eta(n(x-a))$. Если предположить, что δ-функция является регулярной, то получим $\langle\delta(x-a), \varphi_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$. Однако это невозможно, поскольку $\varphi_n(x) \to 0$ при всех $x \neq a$ и, значит, по теореме Лебéга интеграл также стремится к нулю.

Функция Хевисáйда $\theta(x-a) = \chi_{(a,\infty)}(x)$ имеет на $\mathbb{R}$ обобщенную производную $\partial\theta(x-a) = \delta(x-a)$, которая является δ-функцией. Так как $\delta(x-a)$ не является регулярной, то функция Хевисáйда $\theta(x-a)$ не имеет на $\mathbb{R}$ производной $\partial\theta(x-a)$ в смысле Cóболева. Однако она имеет производную в смысле Cóболева, равную нулю, на каждом интервале $(c,d) \subset \mathbb{R}$, где она постоянная.

4 ПРОСТРАНСТВА ШВА́РЦА

Пусть далее $x^\beta \doteqdot x_1^{\beta_1}\ldots x_m^{\beta_m}$, где $x \doteqdot (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\beta \doteqdot (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_+^m$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ обозначается линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$, для которых $\sup_{x\in\mathbb{R}^m} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$. Его обычно называют пространством быстро убывающих функций.

Определение. *Пространством Шва́рца* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется пространство быстро убывающих функций, в котором задана сходимость $\varphi_n \to \varphi$, удовлетворяющая условию: $x^\beta\partial^\alpha\varphi_n(x) \rightrightarrows x^\beta\partial^\alpha\varphi(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}^m$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$.

Сопряженное пространство Шва́рца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ к пространству сходимости $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется пространством *обобщенных функций медленного роста*.

Из определения вытекают следующие свойства:

1) обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'(X)$ является линейным функционалом, т.е. $\langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle$ при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(X)$;

2) обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'(X)$ является непрерывным функционалом, т.е. если $\varphi_n \to \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{S}(X)$, то $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$;

3) последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции, т.е. если $f_n \in \mathcal{S}'(X)$ и $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(X)$, то $f \in \mathcal{S}'(X)$.

Докажем последнее утверждение. Вначале заметим, что система норм

$$\mathrm{s}_l(\varphi) \doteqdot \textstyle\sum_{|\alpha|\leqslant l} \sup_{x\in\mathbb{R}^m} (1 + \|x\|^2)^l |\partial^\alpha\varphi(x)|, \quad l \in \mathbb{Z}_+$$

определяет в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ структуру счетно-нормированного пространства. Поскольку $|x^\beta\partial^\alpha\varphi(x)| \leqslant (1 + \|x\|^2)^l|\partial^\alpha\varphi(x)|$ при всех $|\beta| \leqslant l$, то сходимость $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ по этой системе норм равносильна равномерной сходимости в $\mathbb{R}^m$ всех функций вида $x^\beta\partial^\alpha\varphi_n(x) \rightrightarrows x^\beta\partial^\alpha\varphi(x)$. Следовательно, по доказанной ранее теореме $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является метрическим линейным пространством с указанной сходимостью.

В силу известной теоремы из математического анализа, если последовательность бесконечно дифференцируемых функций сходится равномерно в $\mathbb{R}^m$ вместе со всеми производными, то предельная функция имеет непрерывные производные любого порядка в $\mathbb{R}^m$. Отсюда предельная функция любой последовательности, сходящейся в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, будет также принадлежать $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является полным счетно-нормированным пространством, т.е. задает пространство Фреше́. Таким образом, по доказанному ранее в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ выполняется аксиома полноты и, следовательно, сопряженное пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ полно.

Пример 1. Функция $f(x) \doteqdot e^{x^2} \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ определяет регулярную обобщенную функцию по формуле $\langle f, \varphi\rangle \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Однако $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, т.к. этот функционал f не имеет непрерывного продолжения на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. В самом деле, существуют функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, т.ч. $f\varphi \notin \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$, например, $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$. Но тогда в силу следующей леммы f не имеет непрерывного продолжения в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Лемма. *Пространство основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. Пусть основная функция $\eta(x) = 1$ при $\|x\| \leqslant 1$ и $\eta(x) = 0$ при $\|x\| \geqslant 3$. Для каждой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ положим $\varphi_n(x) \doteqdot \eta(x/n)\varphi(x)$. Тогда $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Применяя формулу Ле́йбница, получим равенство

$$\partial^\alpha\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big) = \partial^\alpha\big((\eta(x/n) - 1)\,\varphi(x)\big) = \textstyle\sum_{\gamma\leqslant\alpha} c_{\alpha\gamma}\partial^\gamma\big(\eta(x/n) - 1\big)\partial^{\alpha-\gamma}\varphi(x).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N так, чтобы $|x^\beta\partial^{\alpha-\gamma}\varphi(x)| < \varepsilon$ при всех $\|x\| > N$ и $\gamma \leqslant \alpha$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^m_+$. Поскольку $\partial^\gamma\big(\eta(x/n) - 1\big) = 0$ при $\|x\| \leqslant n$, то имеем $|x^\beta\partial^\alpha\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)| < c\varepsilon$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ и $n \geqslant N$, где $c \doteqdot \sum_{\gamma\leqslant\alpha} c_{\alpha\gamma} \max|\partial^\gamma\eta(x)|$. Таким образом, последовательность $\varphi_n \to \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. □

Теорема. *Отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным вложением.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то каждому $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ соответствует линейный функционал $g \doteqdot f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}$ на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, то $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, и поэтому $\langle f, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$, т.е. $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\langle f, \varphi\rangle = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Применяя лемму, для каждой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ построим такие $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, что $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Отсюда $\langle f, \varphi\rangle = \lim\langle f, \varphi_n\rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому функционал $f = 0$ и, следовательно, отображение является вложением. Если $f_n \to f$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то очевидно $g_n \to g$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, вложение является непрерывным. □

Рассмотрим действия с обобщенными функциями медленного роста.

1. *Операторы сдвига и растяжения обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ определяются по формулам $\langle \tau_a f, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle$ и $\langle \rho_\lambda f, \varphi\rangle \doteqdot |\lambda|^{-m}\langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, где $\tau_a\varphi(x) \doteqdot \varphi(x - a)$ и $\rho_\lambda\varphi(x) \doteqdot \varphi(\lambda x)$.*

2. *Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линейное преобразование с определителем $\det A \neq 0$. Замена переменных в обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ задается по формуле $\langle T_A f, \varphi\rangle \doteqdot |\det A|^{-1}\,\langle f, T_{A^{-1}}\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(X)$, где $T_A\varphi(x) = \varphi(Ax)$.*

3. *Производная $\partial^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(X)$ определяется по формуле $\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle \doteqdot (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(X)$.*

Доказательство непрерывности в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ соответствующих функционалов в этих свойствах аналогично доказательству, проведенному ранее для $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Определение. Для каждой функции $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ по определению полагаем

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} f(y)e^{-i\langle x,y\rangle}dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)e^{i\langle x,y\rangle}dy,$$

где $\varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и $\langle x, y\rangle \doteqdot \sum_{k=1}^m x_k y_k$.

Линейные операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* для функций $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, интегрируемых по Лебе́гу.

Пример 2. Докажем, что прямое и обратное преобразование Фурье́ функции $f(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ совпадает с ней самой. Поскольку по теореме Фуби́ни кратный интеграл сводится к повторному, то достаточно рассмотреть одномерный случай

$$\widehat{f}(x) = \varkappa \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2-ixy}dy = e^{-x^2/2}\varkappa \int_{\mathbb{R}} e^{-(y+ix)^2/2}dy = e^{-x^2/2},$$

т.к. по теореме Коши́ последний интеграл $\int_{\Im z=x} e^{-z^2/2}dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}dy = \sqrt{2\pi}$.

Лемма. *Преобразование Фурье́ $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно и биективно.*

Доказательство. Если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то, дифференцируя и интегрируя по частям, получим следующие равенства:

$$\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x) = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)(-iy)^\alpha e^{-i\langle x,y\rangle}dy, \quad \widehat{\partial^\alpha\varphi}(x) = \varkappa^m(ix)^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)e^{-i\langle x,y\rangle}dy.$$

Отсюда имеем $x^\beta\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x) = (-i)^{|\alpha+\beta|}\mathcal{F}\big(\partial^\beta y^\alpha\varphi(y)\big)$ и выполняется неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m} |x^\beta\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x)| \leqslant \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |\partial^\beta(y^\alpha\varphi(y))|\, dy \leqslant (\pi\varkappa)^m \max(1+\|y\|^2)^m|\partial^\beta(y^\alpha\varphi(y))|.$$

Поэтому $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и если $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то $\widehat{\varphi}_n \to \widehat{\varphi}$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, т.е. $\mathcal{F}$ непрерывено в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Докажем равенство $\widetilde{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(x)$.

$$\widetilde{\widehat{\varphi}}(x) = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(y)\, e^{i\langle x,y\rangle}dy = \lim_{\varepsilon\to+0} \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(y)\, e^{i\langle x,y\rangle-\varepsilon^2\|y\|^2/2}dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \varkappa^{2m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z)\left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle z-x,y\rangle-\|\varepsilon y\|^2/2}dz\right) dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\varkappa^{2m}}{\varepsilon^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z)\left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle \frac{z-x}{\varepsilon},y\rangle-\|y\|^2/2}dy\right) dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\varkappa^m}{\varepsilon^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z)\, e^{-\|\frac{z-x}{\varepsilon}\|^2/2}dz = \lim_{\varepsilon\to+0} \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x+\varepsilon z)e^{-\|z\|^2/2}dz = \varphi(x).$$

Аналогично $\widehat{\widetilde{\varphi}}(x) = \varphi(x)$. Значит $\mathcal{F}$ является биективным в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. □

Определение. Для каждой функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ по определению полагаем

$$\langle \widehat{f}, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \widehat{\varphi}\rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle \quad \text{при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Линейные операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* обобщенных функций $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста.

Теорема. *Преобразование Фурье́ $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ является линейным, непрерывным и биективным оператором.*

Доказательство. В силу леммы, если $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то $\widehat{\varphi}_n \to \widehat{\varphi}$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ при всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Кроме того, если $f_n \to f$ сходится в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то преобразования Фурье́ $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ сходятся в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, т.е. оператор $\mathcal{F}$ непрерывен в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Так как по лемме выполняются равенства

$$\langle \widetilde{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \langle f, \widehat{\widetilde{\varphi}}\rangle = \langle f, \varphi\rangle \text{ и } \langle \widehat{\widetilde{f}}, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\widehat{\varphi}}\rangle = \langle f, \varphi\rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m),$$

то произведение операторов $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\cdot\mathcal{F} = I$ совпадает с тождественным оператором. Таким образом, оператор $\mathcal{F}$ будет биективным в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. □

Рассмотрим формулы для преобразования Фурье́ обобщенных функций.

1. *Формулы сдвига. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$, где $a \in \mathbb{R}^m$, то*

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-\boldsymbol{i}\langle a,x\rangle}\mathcal{F}f(x)\,, \quad \tau_a\mathcal{F}f = \mathcal{F}(e^{\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle}f(y)).$$

Для функции $f = \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ эти формулы легко доказываются из определения преобразования Фурье́. Поэтому, применяя вторую формулу, получим

$$\langle \mathcal{F}(\tau_a f), \varphi\rangle = \langle f, \tau_{-a}(\mathcal{F}\varphi)\rangle = \langle f, \mathcal{F}(e^{-\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle}\varphi(y))\rangle = \langle e^{-\boldsymbol{i}\langle a,x\rangle}\mathcal{F}f, \varphi\rangle.$$

Аналогично доказывается вторая формула.

2. *Формулы замены переменных. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линейный оператор с определителем $\det A \neq 0$ и $T_A\varphi(x) \doteqdot \varphi(Ax)$, то*

$$\mathcal{F}(T_A f) = |\det A'|^{-1}T_{A'^{-1}}\mathcal{F}f, \quad T_A\mathcal{F}f = |\det A'|^{-1}\mathcal{F}(T_{A'^{-1}}f).$$

В самом деле, вначале доказываем эти формулы для функций $f = \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Тогда по определению замены переменных обобщенной функции получим

$$\langle \mathcal{F}(T_A f), \varphi\rangle = |\det A|^{-1}\langle f, T_{A^{-1}}\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}(T_{A'}\varphi)\rangle = |\det A'|^{-1}\langle T_{A'^{-1}}\mathcal{F}f, \varphi\rangle,$$

где A' — сопряженный оператор. Аналогично доказывается вторая формула.

3. *Формулы дифференцирования. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^m_+$*

$$\partial^\alpha(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha f(y))\,, \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha\mathcal{F}f(x),$$

где производные берутся в смысле обобщенных функций.

Дифференцируя и интегрируя по частям преобразование Фурье́, мы докажем эти формулы $\partial^\alpha\mathcal{F}\varphi(x) = \mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha\varphi)$ и $\mathcal{F}\partial^\alpha\varphi(x) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha\mathcal{F}\varphi(x)$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому из определения преобразования Фурье́ следуют равенства

$$\langle \partial^\alpha(\mathcal{F}f), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \mathcal{F}\partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, (\boldsymbol{i}x)^\alpha\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha f(y)), \varphi\rangle.$$

Отсюда вытекает первая формула и аналогично вторая.

4. *Формулы для многочлена. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $P(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha x^\alpha$ многочлен и $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha\partial^\alpha$ дифференциальный оператор, то*

$$\mathcal{F}(P\,f) = P(\boldsymbol{i}\partial)\mathcal{F}f\,, \quad \mathcal{F}(P(\partial)\,f) = P(\boldsymbol{i}x)\mathcal{F}f(x).$$

В силу свойства линейности преобразования Фурье́ $\mathcal{F}$ эти формулы являются простым следствием из формул дифференцирования.

Пример 3. Преобразование Фурье́ производной δ-функции $f(x) \doteqdot \partial^\alpha\delta(x-a)$. По определению преобразования Фурье́ и производной, для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \delta(x-a), \partial^\alpha\mathcal{F}\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\mathcal{F}\varphi(a) = \varkappa^m\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)\,(\boldsymbol{i}y)^\alpha e^{-\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle}dy.$$

Таким образом, получаем следующую формулу: $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta(x-a)) = \varkappa^m(\boldsymbol{i}y)^\alpha e^{-\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle}$. Отсюда $\mathcal{F}^{-1}(y^\alpha e^{-\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle}) = \varkappa^{-m}(-\boldsymbol{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta(x-a)$.

5 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЁ В $L_1(\mathbb{R}^m)$ и $L_2(\mathbb{R}^m)$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\langle x, y\rangle \doteqdot \sum_{k=1}^m x_k y_k$ обозначает скалярное произведение. Линейные операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$, где

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{-i\langle x,y\rangle} dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{i\langle x,y\rangle} dy, \quad \varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi},$$

называются прямым и обратным преобразованием Фурье́ для функций $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ интегрируемых по Лебе́гу в $\mathbb{R}^m$. Очевидно, что $\widetilde{f}(x) = \widehat{f}(-x)$.

Лемма (Ри́мана-Лебе́га). *Если $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, то преобразование Фурье́ имеет следующие свойства: $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^m)$, $\|\widehat{f}\|_C \leqslant \varkappa^m \|f\|_{L_1}$ и $\lim_{\|x\|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.*

Доказательство. Неравенство $\|\widehat{f}\|_C \leqslant \varkappa^m \|f\|_{L_1}$ очевидно. Пусть $\tau_a f(x) \doteqdot f(x-a)$, тогда $|\tau_a \widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)| \leqslant \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|\, |e^{-i\langle a,y\rangle} - 1|\, dy = 2\varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|\, |\sin \frac{\langle a,y\rangle}{2}|\, dy$.
Так как последний интеграл по теореме Лебе́га стремится к нулю при $a \to 0$, то функция $\widehat{f}$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m$. Пусть $a = \pi x/\|x\|^2$, тогда $\widehat{\tau_a f} = -\widehat{f}$ и

$$|\widehat{f}(x)| = \tfrac{1}{2}|\widehat{f}(x) - \widehat{\tau_a f}(x)| = \tfrac{\varkappa^m}{2}\Big| \int_{\mathbb{R}^m} \big(f(y) - \tau_a f(y)\big)\, e^{-i\langle x,y\rangle} dy\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{\varkappa^m}{2}\|f - \tau_a f\|_{L_1} \leqslant \tfrac{\varkappa^m}{2}\big(\|f-g\|_{L_1} + \|g - \tau_a g\|_{L_1} + \|\tau_a g - \tau_a f\|_{L_1}\big).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ и $\delta > 0$, т.ч. выполняются неравенства

$$\|f - g\|_{L_1} = \|\tau_a f - \tau_a g\|_{L_1} < \tfrac{2\varepsilon}{3\varkappa^m} \quad \text{и} \quad \|g - \tau_a g\|_{L_1} < \tfrac{2\varepsilon}{3\varkappa^m} \text{ при всех } \|a\| = \pi/\|x\| < \delta.$$

Следовательно, $|\widehat{f}(x)| < \varepsilon$ при всех $\|x\| > \pi/\delta$. □

Теорема (условие Ди́ни). *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и в точке $x \in \mathbb{R}$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\int_{-\delta}^{\delta} \Big|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\Big|\, dt < \infty$. Тогда предел $\lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = f(x)$.*

Доказательство. Меняя порядок интегрирования по теореме Фуби́ни, получим

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = \varkappa^2 \int_{\mathbb{R}} f(z) \Big(\int_{-n}^{n} e^{i(x-z)y} dy\Big)\, dz = \tfrac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \tfrac{\sin n(x-z)}{x-z}\, dz.$$

Делая замену переменных $t = x - z$ и используя равенство $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin nt}{t}\, dt = \pi$, имеем

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy - f(x) = \tfrac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \tfrac{\sin nt}{t}\, dt - f(x) = \tfrac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \tfrac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt =$$
$$= \tfrac{1}{\pi} \int_{|t|\leqslant\delta} \tfrac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt + \tfrac{1}{\pi} \int_{|t|>\delta} \tfrac{f(x-t)}{t} \sin nt\, dt - \tfrac{f(x)}{\pi} \int_{|t|>n\delta} \tfrac{\sin t}{t}\, dt.$$

Первые два интеграла стремятся к нулю при $n \to \infty$ по лемме Ри́мана–Лебе́га, а последний стремится к нулю в силу его сходимости в бесконечности. □

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $L_1(\mathbb{R}^m)$.

1. *Формула умножения. Если $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, то выполняется равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx.$$

В самом деле, применяя теорему Фуби́ни, имеем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^m}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy\Big)\,g(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,\Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dx\Big)\,dy.$$

В частности, из формулы умножения вытекает, что преобразование Фурье́ любой интегрируемой функции совпадает п.в. с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если функция и преобразование Фурье́ $f,\widehat{f}\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, то равенства $\widetilde{\widehat{f}}(x)=\widehat{\widetilde{f}}(x)=f(x)$ выполняются при п.в. $x\in\mathbb{R}^m$.*

Применяя формулы умножения и обращения для функций $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^m}\widetilde{\widehat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

По доказанному ранее отсюда следует, что $\widetilde{\widehat{f}}(x)=f(x)$ при п.в. $x\in\mathbb{R}^m$.

3. *Формулы дифференцирования. Если $f(x)\in\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $x^\alpha f(x)\in\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, то выполняется равенство $\partial^\alpha\widehat{f}(x)=\widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha f}(y)$ при всех $x\in\mathbb{R}^m$. Если $f(x)\in \mathrm{W}_1^k(\mathbb{R}^m)$ и $|\alpha|\leqslant k$, то выполняется равенство $\widehat{\partial^\alpha f}(x)=(\boldsymbol{i}x)^\alpha\widehat{f}(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}^m$.*

Первая формула вытекает из возможности дифференцирования преобразования Фурье́ под знаком интеграла Лебе́га. Для доказательства второй формулы в силу определения производной в смысле Со́болева при всех $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$\langle\widehat{\partial^\alpha f},\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^\alpha\widehat{\varphi}\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha\varphi}(y)\rangle=\langle(\boldsymbol{i}x)^\alpha\widehat{f}(x),\varphi\rangle.$$

Отсюда вытекает, что равенство $\widehat{\partial^\alpha f}(x)=(\boldsymbol{i}x)^\alpha\widehat{f}(x)$ имеет место при п.в. $x\in\mathbb{R}^m$, а так как функции непрерывны, то равенство выполняется всюду.

4. *Формула свертки. Пусть $f,g\in\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $f*g(x)\doteqdot\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,g(x-y)\,dy$ есть свертка функций. Тогда $f*g\in\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{f*g}(x)=\varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}^m$.*

Линейное преобразование $(x,y)\to(y,x-y)$ отображает биективно измеримые множества в $\mathbb{R}^{2m}$ в измеримые в $\mathbb{R}^{2m}$. Поэтому из измеримости функции $f(x)g(y)$ следует измеримость функции $f(y)g(x-y)$. Применяя обобщенное неравенство Минко́вского, получим $\|f*g\|_{\boldsymbol{L}_1}\leqslant\|f\|_{\boldsymbol{L}_1}\|g\|_{\boldsymbol{L}_1}$. Поэтому $f*g\in\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^m}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(z)g(y-z)\,dz\Big)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy=\int_{\mathbb{R}^m} f(z)\Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(y-z)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y-z\rangle}dy\Big)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,z\rangle}dz.$$

Производя замену переменных $y\to y-z$, приходим к указанному равенству.

Определение. Пусть $\Delta_n\doteqdot\{x\in\mathbb{R}^m\mid\max_{1\leqslant k\leqslant m}|x_k|<n\}$ обозначает открытый куб в $\mathbb{R}^m$ с ребром $2n$. Преобразованием Фурье́ функции $f\in\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ называется предел $\widehat{f}(x)\doteqdot\lim_{n\to\infty}\varkappa^m\int_{\Delta_n} f(y)\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy$ по норме пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

В следующей теореме будет доказано, что этот предел существует в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и преобразование Фурье́ является изометрией пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Обозначим через $\widetilde{f}(x)\doteqdot\widehat{f}(-x)$ и $f_n(x)\doteqdot f(x)\chi_{\Delta_n}(x)$. Тогда $f_n\in\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{f}(x)\doteqdot\lim_{n\to\infty}\widehat{f}_n(x)$.

Теорема (Планшере́ля)**.** *Если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то существует предел $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и имеет место равенство Парсеваля $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$.*

Доказательство. Если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то по формулам умножения и обращения

$$\|\varphi\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{\varphi}}(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(x)\overline{\widehat{\varphi}(x)}dx = \|\widehat{\varphi}\|^2_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Пусть вначале $f(x) = 0$ при $x \notin \Delta_r$. По доказанному ранее найдутся $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Delta_r)$, т.ч. $\|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$. Так как $\{\varphi_n\}$ является последовательностью Коши в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и $\|\varphi_k - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{\varphi}_k - \widehat{\varphi}_n\|_{\boldsymbol{L}_2}$, то $\{\widehat{\varphi}_n\}$ будет последовательностью Коши в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Поскольку $\|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_1} \to 0$, то $\widehat{\varphi}_n \to \widehat{f}$ сходится равномерно. Следовательно, предел в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ равен $\lim \widehat{\varphi}_n = \widehat{f}$ и $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim \|\widehat{\varphi}_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim \|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$.

Для произвольной функции $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ существует предел $\lim f_n = f$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, где $f_n(x) \doteqdot f(x)\chi_{\Delta_n}(x)$. Так как $\{f_n\}$ есть последовательность Коши в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и по доказанному выше $\|f_k - f_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{f}_k - \widehat{f}_n\|_{\boldsymbol{L}_2}$, то $\{\widehat{f}_n\}$ будет последовательностью Коши в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Поэтому существует предел $\lim \widehat{f}_n \doteqdot \widehat{f}$ по норме $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и при этом выполняется равенство $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim \|\widehat{f}_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim \|f_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. □

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

1. *Формула умножения. Если $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то выполняется равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx.$$

Это равенство вытекает из теоремы Планшере́ля и непрерывности скалярного произведения. Заметим, что из формулы умножения следует, что преобразование Фурье́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ совпадает п.в. с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.*

Применяя формулы умножения и обращения для функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{f}}(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Отсюда следует, что равенство $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ выполняется при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

3. *Формула свертки. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Тогда свертка этих функций $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.*

Используя обобщенное неравенство Минко́вского, мы получаем неравенство $\|f * g\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}\|g\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Поэтому $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и свертка непрерывна по второму аргументу $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Тогда, применяя теорему Планшере́ля, формулу свертки для функций из $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и непрерывность скалярного произведения, получим

$$\langle \widehat{f * g}, \varphi\rangle = \lim \langle \widehat{f * g_n}, \varphi\rangle = \varkappa^{-m} \lim \langle \widehat{f}\, \widehat{g}_n, \varphi\rangle = \varkappa^{-m}\langle \widehat{f}\, \widehat{g}, \varphi\rangle.$$

Отсюда равенство $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ выполняется при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

Определение. *Функциями Эрми́та* называются следующие функции:

$$h_n(x) \doteqdot c_n e^{x^2/2}\left(\tfrac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = H_n(x)e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $H_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ называются *многочленами Эрми́та*.

Функции Эрми́та обладают свойством ортогональности в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. В самом деле, интегрируя по частям n раз, получим при $m > n$

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\, h_m(x)\, dx = c_m \int_{\mathbb{R}} H_n(x)\left(\tfrac{d}{dx}\right)^m e^{-x^2} dx = c_m(-1)^m \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\left(\tfrac{d}{dx}\right)^m H_n(x)\, dx = 0.$$

При $m = n$ получим $\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x)\, dx = c_n^2\, 2^n n! \sqrt{\pi}$. Поэтому, если $c_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$, то система функций Эрми́та $\{h_n\}$ будет ортонормированной системой.

Лемма. *Пусть $\varphi_n(t) \doteqdot t^n \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ измерима; $0 < |\varphi(t)| \leqslant b e^{-a|t|}$ при $t \in \mathbb{R}$; $a > 0$, $b > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда система функций $\{\varphi_n\}$ полна в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть функция $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ ортогональна $f \perp \varphi_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, т.е. имеет место равенство $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Функция

$$F(z) \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi(t)\, e^{-itz} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi(t)\, e^{ty} e^{-itx} dt, \quad z = x + \boldsymbol{i}y \in \mathbb{C},$$

голоморфна в полосе $|y| < a$ комплексной плоскости и ее производные в нуле

$$F^{(n)}(z)|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi(t)\, (-\boldsymbol{i}t)^n e^{-itz} dt|_{z=0} = (-\boldsymbol{i})^n \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 0.$$

Поэтому $F(z) = 0$ при всех $|\Im z| < a$. В частности, имеем $F(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда по формуле обращения преобразования Фурье́ получим, что произведение $f(t)\varphi(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, функция $f(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, система $\{\varphi_n\}$ полна в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. □

Теорема. *Система функций Эрми́та $\{h_n\}$ образует в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье́ с собственными значениями $\lambda_n = (-\boldsymbol{i})^n$, т.е. $\widehat{h_n}(x) = \lambda_n h_n(x)$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Доказательство. Поскольку функции Эрми́та $h_n(x)$ получаются ортогонализацией системы функций $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$, где $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$, то их полнота вытекает из леммы. Докажем, что $h_n(x)$ является собственной функцией оператора Фурье́.

$$\begin{aligned} \widehat{h_n}(x) = \varkappa \int_{\mathbb{R}} h_n(y)\, e^{-ixy} dy = \varkappa c_n \int_{\mathbb{R}} e^{y^2/2 - ixy}\left(\tfrac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2} dy = \\ = \varkappa c_n e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{(y-ix)^2/2}\left(\tfrac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2} dy = \\ = \varkappa c_n (-1)^n e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\left(\tfrac{d}{dy}\right)^n e^{(y-ix)^2/2} dy = \\ = \varkappa c_n (-\boldsymbol{i})^n e^{x^2/2}\left(\tfrac{d}{dx}\right)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2 - ixy - x^2/2} dy = \\ = c_n (-\boldsymbol{i})^n e^{-x^2/2}\left(\tfrac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = (-\boldsymbol{i})^n h_n(x). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали в предпоследнем равенстве, что преобразование Фурье́ функции $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ равно $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$, которое было получено ранее. □

6 СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\boldsymbol{E}$ — нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел и $\boldsymbol{E}^*$ — сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in S} |f(x)|$, где $S \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$. Значения линейного функционала f будем обозначать через $f(x) \doteqdot \langle f, x\rangle$.

Определение. Система элементов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$ следует, что $\lambda_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Система функционалов $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ следует, что $\lambda_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Систему элементов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ и систему функционалов $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$ будем называть *биортогональными*, если $f_k(e_k) = 1$ и $f_l(e_k) = 0$ при $l \neq k$.

Бесконечная система элементов называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима. Максимальная линейно независимая система элементов $\boldsymbol{E}$ называется *базисом Га́меля*. Ее существование вытекает из леммы Цо́рна. Говорят, что пространство $\boldsymbol{E}$ имеет размерность $\dim \boldsymbol{E} = n$, если максимальная линейно независимая система состоит из n элементов.

Последовательность элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$ называется *базисом* нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, если любой элемент $x \in \boldsymbol{E}$ представляется в виде сходящегося по норме ряда $x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ единственным образом. Если, кроме того, линейные функционалы $f_n(x) \doteqdot c_n$, заданные с помощью этого представления, являются непрерывными, то система $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ называется *базисом Ша́удера*. В банаховом пространстве любой базис является базисом Ша́удера и система функционалов $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}^*$ биортогональна системе элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$.

Теорема. *Система $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$ в том и только в том случае имеет биортогональную систему $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}$, когда она линейно независима.*

Доказательство. Необходимость. Если имеет место равенство $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то полагая в нем $x = e_k$, получим $\lambda_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Достаточность. По индукции. При $n = 1$ имеем $f_1 \neq 0$, тогда существует $e_1 \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $f_1(e_1) = 1$. Пусть при $n - 1$ утверждение верно. По предположению индукции существуют такие $v_k \in \boldsymbol{E}$, что $f_k(v_k) = 1$ и $f_l(v_k)$ при $l \neq k$ и $k, l = 1, \ldots, n-1$. Тогда элемент $y \doteqdot x - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) v_k$ удовлетворяет условию $f_k(y) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и при всех $k = 1, \ldots, n-1$. Если выполняется $f_n(y) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, то $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) f_n(v_k)$, что невозможно в силу линейной независимости. Значит $f_n(y) \neq 0$ при некотором $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда, полагая $e_n \doteqdot y/f(y)$ и $e_k \doteqdot v_k - f_n(v_k) e_n$ при $k = 1, \ldots, n-1$, получим биортогональную систему элементов. $\square$

Следствие. *Система $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}$ в том и только в том случае имеет биортогональную систему $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \boldsymbol{E}^*$, когда она линейно независима.*

Для доказательства рассмотрим изометрическое вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$, определенное по формуле $J(x) \doteqdot \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ являются функционалами Дирака при $f \in \boldsymbol{E}^*$. Поскольку система $\{\delta_{e_k}\}_{k=1}^n$ линейно независима тогда и только тогда, когда система $\{e_k\}_{k=1}^n$ линейно независима, то по доказанной теореме существует биортогональная система $\{f_k\}_{k=1}^n$ в пространстве $\boldsymbol{E}^*$.

Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ — нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ обозначает пространство ограниченных линейных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ с нормой $\|A\| \doteqdot \sup_{x \in S} \|A(x)\|$. Следующие множества

$$\ker A \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid A(x) = 0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A \doteqdot \{y \in \boldsymbol{F} \mid y = A(x),\ x \in \boldsymbol{E}\}$$

называются соответственно *ядром* и *образом* линейного оператора A. Рассмотрим свойства ядра и образа ограниченного линейного оператора.

1. *Если линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, то ядро $\ker A$ замкнутое линейное подпространство в $\boldsymbol{E}$, а образ $\operatorname{Im} A$ линейное подпространство в $\boldsymbol{F}$.*

Пусть $x, y \in \ker A$. Тогда $A(x + y) = A(x) + A(y) = 0$ и $A(\lambda x) = \lambda A(x) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $x + y \in \ker A$ и $\lambda x \in \ker A$. Пусть $x = \lim x_n$ и $x_n \in \ker A$, тогда в силу непрерывности оператора $A(x) = \lim A(x_n) = 0$, т.е. $x \in \ker A$.

Пусть $u, v \in \operatorname{Im} A$. Тогда имеем $u + v = A(x) + A(y) = A(x + y) \in \operatorname{Im}(A)$ и $\lambda u = \lambda A(x) = A(\lambda x) \in \operatorname{Im} A$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $u + v \in \operatorname{Im} A$ и $\lambda u \in \operatorname{Im} A$.

2. *Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ в том и только в том случае является биективным, когда его ядро $\ker A = 0$ и он сюръективный $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$.*

Если A является биективным, то $\ker A = A^{-1}(0) = 0$ и $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$. Обратно, если $\ker A = 0$, то из равенства $A(x) = A(y)$ следует, что $A(x - y) = 0$ и, значит, $x - y = 0$. Отсюда A будет взаимно однозначным отображением на свой образ.

Определение. *Произведением операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$* и *$B : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$* называется оператор $BA : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{G}$, определенный по формуле $BA(x) \doteqdot B(A(x))$ при $x \in \boldsymbol{E}$.

Оператор $B : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ называется *обратным к оператору* $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, если выполняются равенства $BA = I_{\boldsymbol{E}}$ и $AB = I_{\boldsymbol{F}}$, где $I_{\boldsymbol{E}}$ есть тождественный оператор в $\boldsymbol{E}$, т.е. $I_{\boldsymbol{E}}(x) = x$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. *Обратный оператор* обозначается через A^{-1}.

1. *Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ и $B \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$, то $\|BA\| \leqslant \|B\|\,\|A\|$.*

В самом деле, имеем $\|BA(x)\| \leqslant \|B\|\,\|A(x)\| \leqslant \|B\|\,\|A\|\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

2. *Если оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ является линейным и биективным, то обратный оператор $A^{-1} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ также является линейным и биективным.*

Докажем линейность оператора A^{-1}. Пусть $u, v \in \boldsymbol{F}$ и $A^{-1}(u) = x$ и $A^{-1}(v) = y$. Тогда получим $A^{-1}(u + v) = A^{-1}(Ax + Ay) = A^{-1}A(x + y) = x + y = A^{-1}u + A^{-1}v$ и $A^{-1}(\lambda u) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}(u)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$.

Определение. Оператор $A^* : \boldsymbol{F}^* \to \boldsymbol{E}^*$ называется *сопряженным к оператору* $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, если $A^*(f) = g$, где $f \in \boldsymbol{F}^*$ и $g(x) \doteqdot f(Ax)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. имеет место равенство $\langle A^*f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$.

1. *Если оператор* $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$*, то* $A^* \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{E}^*)$ *и* $\|A^*\| = \|A\|$.

Докажем, что A^* есть линейный оператор. Пусть $f, g \in \boldsymbol{F}^*$ и $A^*(f+g) = h$. Тогда имеем $h(x) = (f+g)(Ax) = f(Ax) + g(Ax)$, т.е. $A^*(f+g) = A^*f + A^*g$. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $A^*(\lambda f) = h$, тогда получим $h(x) = (\lambda f)(Ax) = \lambda f(Ax)$, т.е. $A^*(\lambda f) = \lambda A^* f$.

Докажем равенство норм. Поскольку $A^*f(x) = f(Ax)$, то по свойству произведения операторов $\|A^*f\| \leqslant \|f\|\,\|A\|$, т.е. $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ по теореме Ха́на–Ба́наха найдется $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $f(Ax) = \|Ax\|$ и $\|f\| = 1$. Поэтому $\|Ax\| = A^*f(x) \leqslant \|A^*f\|\,\|x\| \leqslant \|A^*\|\,\|x\|$. Следовательно, $\|A^*\| = \|A\|$.

2. *Если операторы* $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *и* $B \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$*, то* $(BA)^* = A^*B^*$*. В частности, если оператор* $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ *является биективным, то* $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Пусть $g \in \boldsymbol{G}^*$, тогда по определению $(BA)^*g(x) = g(BAx) = B^*g(Ax) = A^*B^*(g)$. Второе утверждение вытекает из определения обратного оператора и теоремы Ба́наха об обратном операторе, которую мы докажем позже.

Определение. Пусть $V \subset \boldsymbol{E}$ и $W \subset \boldsymbol{E}^*$, тогда следующие множества:

$$V^{\perp} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}^* \mid f(x) = 0,\ x \in V\} \quad \text{и} \quad W_{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = 0,\ f \in W\}$$

называются соответственно аннулятором* V и аннулятором W. Заметим, что эти множества $W_{\perp} = \bigcap_{f \in W} \ker f$ и $V^{\perp} = \bigcap_{x \in V} \ker \delta_x$ являются пересечением ядер ограниченных функционалов и, значит, будут замкнутыми подпространствами.

Теорема. *Если* $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$*, то имеют место следующие свойства:*

$$1)\ \ker A = (\operatorname{Im} A^*)_{\perp}; \qquad 2)\ \ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp};$$
$$3)\ \operatorname{Im} A \subset (\ker A^*)_{\perp}; \qquad 4)\ \operatorname{Im} A^* \subset (\ker A)^{\perp}.$$

Доказательство. Доказательство этих соотношений легко вывести из указанных определений сопряженного оператора, ядра, образа и их аннуляторов.

1) Элемент $x \in \ker A$ тогда и только тогда, когда $Ax = 0$. Последнее равенство в силу теоремы Ха́на–Ба́наха выполняется тогда и только тогда, когда $f(Ax) = 0$ при всех $f \in \boldsymbol{F}^*$. Это равносильно включению $x \in (\operatorname{Im} A^*)_{\perp}$.

2) Функционал $f \in \ker A^*$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство $f(Ax) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Последнее равносильно включению $f \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

3) Если $y \in \operatorname{Im} A$, то $y = Ax$ при некотором $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому $f(y) = f(Ax) = 0$ при всех $f \in \ker A^*$ и, следовательно, выполняется включение $y \in (\ker A^*)^{\perp}$.

4) Если $g \in \operatorname{Im} A^*$, то существует $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $g(x) = f(Ax)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Отсюда вытекает включение $g \in (\ker A)^{\perp}$. □

Замечание. В дальнешем будет доказано, что если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются бáнаховыми пространствами и образ $\operatorname{Im} A$ оператора $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ замкнут в пространстве $\boldsymbol{F}$, то включения (3) и (4), полученные в теореме, будут равенствами.

Пример 1. Каждый линейный оператор $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ определяется матрицей $A = \{a_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n}$, т.е. если $Ax = y$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^m$, то $y_k = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l$ при всех $k = 1, \ldots, m$. Следовательно, по определению имеем

$$\langle u, Ax \rangle = \sum_{k=1}^m u_k \big(\sum_{l=1}^n a_{kl} x_l \big) = \sum_{l=1}^n \big(\sum_{k=1}^m a_{kl} u_k \big)\, x_l = \langle A^* u, x \rangle,$$

т.е. если $A^* u = v$, где $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{F}^m$ и $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$, то получим $v_l = \sum_{k=1}^m a_{kl} u_k$ при всех $l = 1, \ldots, n$. Таким образом, оператор $A^* = \{a^*_{kl}\}_{k,l=1}^{n,m}$ имеет транспонированную матрицу $a^*_{kl} = a_{lk}$.

Пример 2. Рассмотрим интегральный оператор $A : \boldsymbol{L}_p([0,1]) \to \boldsymbol{L}_p([0,1])$ при $1 \leqslant p < \infty$, определенный по следующей формуле:

$$Af(x) \doteqdot \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy\,, \quad f \in \boldsymbol{L}_p([0,1]),$$

где функция $K(x,y)$ называется ядром интегрального оператора. Предположим, что $K(x,y)$ является измеримой функцией на квадрате $[0,1]^2$, для которой следующая смешанная норма в пространстве $\boldsymbol{L}_{pq}([0,1]^2)$ является конечной:

$$\|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}} \doteqdot \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^1 |K(x,y)|^p\, dx \Big)^{q/p} dy \Big)^{1/q} < \infty.$$

Здесь внутренняя норма берется в $\boldsymbol{L}_p([0,1])$, а внешняя норма берется в $\boldsymbol{L}_q([0,1])$, при этом полагаем, что $q = p/(p-1)$ в случае $1 < p < \infty$ и $q = \infty$ в случае $p = 1$. Применяя далее обобщенное неравенство Минкóвского и неравенство Гёльдера в случае $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$, имеем следующие неравенства:

$$\Big(\int_0^1 |Af(x)|^p\, dx \Big)^{1/p} \leqslant \int_0^1 \Big(\int_0^1 |K(x,y)|^p\, dx \Big)^{1/p} |f(y)|\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^1 |K(x,y)|^p dx \Big)^{q/p} dy \Big)^{1/q} \Big(\int_0^1 |f(y)|^p dy \Big)^{1/p}.$$

Отсюда оператор A, действующий из $\boldsymbol{L}_p([0,1])$ в $\boldsymbol{L}_p([0,1])$, является ограниченным и его норма не превосходит $\|A\| \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}}$. Следовательно, можно поменять порядок интегрирования, используя известную теорему Фуби́ни. Тогда для всех функций $f \in \boldsymbol{L}_p([0,1])$ и $g \in \boldsymbol{L}_q([0,1]) = \boldsymbol{L}^*_p([0,1])$ получим равенство

$$\langle g, Af \rangle = \int_0^1 g(x) \Big(\int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy \Big)\, dx = \int_0^1 \Big(\int_0^1 K(x,y)\, g(x)\, dx \Big)\, f(y)\, dy = \langle A^* g, f \rangle.$$

Таким образом, в силу доказанного выше свойства (1) сопряженный оператор A^* действует из $\boldsymbol{L}_q([0,1])$ в $\boldsymbol{L}_q([0,1])$ и имеет норму $\|A^*\| = \|A\| \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_{pq}}$. При этом он является интегральным оператором и справедлива следующая формула:

$$A^* g(y) = \int_0^1 K(x,y)\, g(x)\, dx\,, \quad g \in \boldsymbol{L}_q([0,1]).$$

Отсюда ядро интегрального оператора A^* равно $K^*(x,y) = K(y,x)$.

7 ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ — нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \doteqdot \{(x, y) \mid x \in \boldsymbol{E},\, y \in \boldsymbol{F}\}$ их прямое произведение. Введем в пространство $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ операции сложения и умножения, а также норму:

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteqdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ при всех (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$;

b) $\lambda(x, y) \doteqdot (\lambda x, \lambda y)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $(x, y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$;

c) $\|(x, y)\| \doteqdot \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ при всех $(x, y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$.

Тогда $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ превращается в нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$.

Лемма. *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются ба́наховыми пространствами, то их прямое произведение $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ также является банаховым пространством.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Пусть $\{(x_n, y_n)\}$ будет последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n, m \geqslant N$ выполняется неравенство $\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| < \varepsilon$. Отсюда имеем $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ и $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Поэтому $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются последовательностями Коши́ в пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ соответственно. Следовательно, существуют пределы $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$. Таким образом, существует предел $\lim (x_n, y_n) = (x, y)$ в пространстве $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. $\square$

Далее будем предполагать, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ являются банаховыми пространствами. Пусть линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{F}$, необязательно ограниченный, определен на некотором линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$. Тогда подпространство $\operatorname{dom} A \doteqdot L$ называется *областью определения* оператора A, а множество

$$\operatorname{gr} A \doteqdot \{(x, y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} \mid x \in L,\, y = Ax\}$$

называется *графиком* оператора A. График является линейным подпространством в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, но, вообще говоря, незамкнутым.

Определение. Оператор $A : L \to \boldsymbol{E}$ называется *замкнутым*, если его график $\operatorname{gr} A$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$.

Определение замкнутости графика $\operatorname{gr} A$ оператора A равносильно следующему условию: если $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$, где $x_n \in L$, то $x \in L$ и $Ax = y$. В самом деле, пусть $Ax_n = y_n$, тогда $(x_n, y_n) \in \operatorname{gr} A$. Поэтому график замкнут тогда и только тогда, когда из сходимости $(x_n, y_n) \to (x, y)$ следует, что $(x, y) \in \operatorname{gr} A$, т.е. $Ax = y$.

Теорема (критерий замкнутости для ограниченного оператора)**.** *Ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(L, \boldsymbol{F})$ является замкнутым тогда и только тогда, когда его область определения $\operatorname{dom} A = L$ замкнута в $\boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ и $x_n \in L$. В силу непрерывности оператора имеем $y_n = Ax_n \to y$. Из замкнутости A следует, что $(x_n, y_n) \to (x, y) \in \operatorname{gr} A$, т.е. $x \in L$. Обратно, пусть $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$, где $x_n \in L$. Из замкнутости L получим $x \in L$ и по непрерывности оператора $Ax_n \to Ax = y$. Поэтому график $\operatorname{gr} A$ замкнут. $\square$

Пример 1. Пусть $D : L \to \boldsymbol{L}_1([0,1])$ является оператором дифференцирования, заданным по формуле $D\varphi(x) \doteqdot \varphi'(x)$ при п.в. $x \in [0,1]$, где производная берется в смысле Со́болева и область определения L оператора совпадает с пространством Со́болева $\mathrm{W}_1^1([0,1])$. При этом предполагается, что L является подпространством в пространстве $\boldsymbol{L}_1([0,1])$ с соответствующей нормой из $\boldsymbol{L}_1([0,1])$.

Докажем, что оператор неограниченный. В самом деле, полагая $\varphi_n(x) \doteqdot \boldsymbol{e}^{inx}$, получим $\|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_1} = 1$ и $\|D\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_1} = n \to \infty$. Поэтому норма $\|D\| = \infty$.

Докажем замкнутость оператора. Пусть последовательности функций $\varphi_n \to \varphi$ и $\varphi_n' \to \psi$ сходятся в $\boldsymbol{L}_1([0,1])$, где $\varphi_n \in \mathrm{W}_1^1([0,1])$. Поскольку каждая функция из $\mathrm{W}_1^1([0,1])$ совпадает п.в. на $[0,1]$ с абсолютно непрерывной функцией, то из указанных условий вытекает, что выполняется формула Нью́тона-Ле́йбница

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \int_0^x \varphi_n'(t)\,dt \text{ при п.в. } x \in [0,1].$$

Поэтому $|\varphi_n(0)| \leqslant \|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_1} + \|\varphi'\|_{\boldsymbol{L}_1}$ и, следовательно, последовательность $\{\varphi_n(0)\}$ ограничена. Тогда, переходя к пределу по некоторой подпоследовательности, мы получим, что $\varphi(x) = c + \int_0^x \psi(t)\,dt$ при п.в. $x \in [0,1]$. Таким образом, функция $\varphi(x)$ п.в. совпадает с абсолютно непрерывной функцией, т.е. $\varphi \in \mathrm{W}_1^1([0,1])$ и при этом $\varphi'(x) = \psi(x)$ при п.в. $x \in [0,1]$. Значит оператор D является замкнутым.

Обозначим через $S_r(x) \doteqdot \{y \in \boldsymbol{E} \mid \|x - y\| \leqslant r\}$ шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \boldsymbol{E}$, а через $S_r \doteqdot S_r(0)$ шар радиуса $r > 0$ с центром в нуле.

Лемма. *Пусть $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ линейный оператор в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и множество $M_c \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|Ax\| \leqslant c\}$. Тогда для каждого $c > 0$ существует такое $r > 0$, что $S_r \subset \overline{M_c}$, где $\overline{M_c}$ обозначает замыкание M_c.*

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{kc}$, то по теореме Бэра существуют такие $k \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $x \in \boldsymbol{E}$, что $S_r(x) \subset \overline{M_{kc}}$. Поскольку множество M_{kc} и его замыкание являются симметричными, т.е. $M_{kc} = -M_{kc}$ и $\overline{M_{kc}} = -\overline{M_{kc}}$ то имеем $S_r(-x) \subset \overline{M_{kc}}$. Докажем, что выполняется включение $S_r \subset \overline{M_{kc}}$.

В самом деле, пусть $y \in S_r$, тогда $y \pm x \in S_r(\pm x)$. Поэтому существуют такие последовательности $\{x_n^{\pm}\} \subset M_{kc}$, что $x_n^{\pm} \to y \pm x$. Отсюда $x_n \doteqdot (x_n^+ + x_n^-)/2 \to y$ и из $x_n \in M_{kc}$ следует, что $y \in \overline{M_{kc}}$. Следовательно, $S_r \subset \overline{M_{kc}}$. Наконец, используя однородность множества $M_{kc} = kM_c$, получим включение $S_{r/k} \subset \overline{M_c}$. $\square$

Теорема (Ба́наха о замкнутом графике)**.** *Пусть линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, заданный в ба́наховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, имеет замкнутый график $\operatorname{gr} A$. Тогда оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является ограниченным.*

Доказательство. В силу леммы для каждого $c > 0$ существует такое $r > 0$, что выполняется $S_r \subset \overline{M_c}$. Положим $c_n = c/2^n$ и $r_n = r/2^n$, тогда $S_{r_n} \subset \overline{M_{c_n}}$.

Пусть элемент $x \in S_r$. Так как $S_r \subset \overline{M_c}$, то существует $x_0 \in M_c$, т.ч. $\|x - x_0\| < r_1$. Поскольку $S_{r_1} \subset \overline{M_{c_1}}$, то существует $x_1 \in M_{c_1}$, т.ч. $\|x - x_0 - x_1\| < r_2$ и т.д. Поэтому существуют такие $x_k \in M_{c_k}$, что $\|x - \sum_{k=0}^n x_k\| < r_{n+1} \to 0$. Значит ряд $x = \sum_{k=0}^\infty x_k$ сходится к x в пространстве $\boldsymbol{E}$ и выполняются неравенства

$$\|y_m - y_n\| = \| \textstyle\sum_{k=n+1}^m Ax_k\| \leqslant \sum_{n+1}^m \|Ax_k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^m c_k < c/2^n,$$

где $y_n \doteqdot \sum_{k=0}^n Ax_k$. Следовательно, $\{y_n\}$ является последовательностью Коши́ в пространстве $\boldsymbol{F}$. В силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $y = \lim y_n$. Так как график замкнут, то $y = Ax$. Применяя свойство непрерывности нормы, получим

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant \textstyle\sum_{k=0}^\infty \|Ax_k\| \leqslant \sum_{k=0}^\infty c_k = 2c.$$

Отсюда $\|Ax\| \leqslant 2c$ при всех $x \in S_r$. Поэтому норма оператора $\|A\| \leqslant 2c/r$. □

Пусть $\boldsymbol{H}$ является ги́льбертовым пространством, в котором форма $\langle x, y\rangle$ задает скалярное произведение и $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x, x\rangle}$ определяет норму в $\boldsymbol{H}$.

Определение. Предположим, что линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{H}$ определен на некотором линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{H}$ ги́льбертова пространства.

Оператор $A' : M \to \boldsymbol{H}$ называется *эрмитово-сопряженным* к $A : L \to \boldsymbol{H}$, если его значения $A'y = z$ определяются из уравнения $\langle z, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ при всех $x \in L$, а область определения $M \doteqdot \operatorname{dom} A'$ определяется следующим образом:

$$M \doteqdot \{y \in \boldsymbol{H} \mid \exists\, z \in \boldsymbol{H} : \langle z, x\rangle = \langle y, Ax\rangle,\ \forall x \in L\}.$$

1. *Эрмитово-сопряженный оператор к оператору $A : L \to \boldsymbol{H}$ существует тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{L} = \boldsymbol{H}$.*

Покажем, что условие $\overline{L} = \boldsymbol{H}$ необходимо и достаточно для однозначности A'. Уравнение $\langle z_1, x\rangle = \langle z_2, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ при всех $x \in L$ равносильно $\langle z_1 - z_2, x\rangle = 0$ при всех $x \in L$. Поэтому $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $\overline{L} = \boldsymbol{H}$.

2. *Эрмитово-сопряженный оператор является линейным оператором.*

Если уравнения $\langle z_1, x\rangle = \langle y_1, Ax\rangle$ и $\langle z_2, x\rangle = \langle y_2, Ax\rangle$ выполняются при всех $x \in L$, то уравнение $\langle z_1 + z_2, x\rangle = \langle y_1 + y_2, Ax\rangle$ имеет место при всех $x \in L$. Отсюда $A'(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$. Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и уравнение $\langle z, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ будет выполняться при всех $x \in L$, то $\langle \lambda z, x\rangle = \langle \lambda y, Ax\rangle$ при всех $x \in L$. Поэтому $A'(\lambda y) = \lambda z$.

3. *Эрмитово-сопряженный оператор является замкнутым оператором.*

Пусть $y_n \to y$ и $z_n = A'y_n \to z$, где $y_n \in M$. По определению $z_n \in \boldsymbol{H}$ удовлетворяет уравнению $\langle z_n, x\rangle = \langle y_n, Ax\rangle$ при всех $x \in L$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда, переходя к пределу и используя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle z, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ при всех $x \in L$. Следовательно, $y \in M$ и $A'y = z$.

Теорема (достаточное условие ограниченности). *Если оператор $A : L \to \boldsymbol{H}$ ограничен и замыкание $\overline{L} = \boldsymbol{H}$, то $A' \in \mathcal{L}(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H})$ ограничен и $\|A'\| = \|A\|$.*

Доказательство. Определим функционал $f(x) \doteqdot \langle Ax, y\rangle$ при $x \in L$. По теореме Ха́на–Ба́наха можно продолжить функционал f на пространство $\boldsymbol{H}$. Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем $|f(x)| \leqslant \|Ax\|\,\|y\| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$. Отсюда получим $\|f\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Поэтому $f \in \boldsymbol{H}^*$ и, следовательно, по теореме Ри́сса существует элемент $z \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $f(x) = \langle x, z\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|f\| = \|z\|$.

Таким образом, выполняется уравнение $\langle x, z\rangle = \langle Ax, y\rangle$ при всех $x \in L$. Это означает, что $A'y = z$ и $\|A'y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$. Отсюда имеем неравенство $\|A'\| \leqslant \|A\|$. Нетрудно проверить, что эрмитово-сопряженный к оператору A' равен $A'' = A$ на подпространстве L. Поэтому $\|A\| \leqslant \|A'\|$ и, следовательно, $\|A\| = \|A'\|$. □

Определение. Линейный оператор $A : L \to \boldsymbol{H}$, определенный на некотором линейном подпространстве $\operatorname{dom} A \doteqdot L \subset \boldsymbol{H}$, называется *самосопряженным*, если $A' = A$, т.е. $\operatorname{dom} A' = \operatorname{dom} A$ и $\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ при всех $x, y \in \operatorname{dom} A$.

Линейный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ называется *эрмитовым*, если $\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ при всех $x, y \in \boldsymbol{H}$. В этом случае выполняется равенство $A = A'$.

Теорема (Хе́ллингера–Те́плица). *Всякий эрмитовый оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ является ограниченным, т.е. $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H})$.*

Доказательство. Так как имеет место равенство $A = A'$, то оператор A замкнут по свойству (3). Поэтому по теореме о замкнутом графике $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H})$. □

Пример 2. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$ диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$, где $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$. Тогда $A : L \to \boldsymbol{\ell}_2$, где $L \doteqdot \{x \in \boldsymbol{\ell}_2 \mid Ax \in \boldsymbol{\ell}_2\}$ область определения. Справедливы следующие свойства:

1) оператор A ограниченный тогда и только тогда, когда $\sup|\lambda_n| < \infty$;
2) оператор A самосопряженный тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
3) оператор A эрмитовый тогда и только тогда, когда $\sup|\lambda_n| < \infty$ и $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
4) оператор A замкнутый для любой последовательности чисел $\lambda_n \in \mathbb{F}$.

Из равенства $\|A\| = \sup|\lambda_n|$ получаем (1); так как множество всех финитных последовательностей содержится в L, то (2) очевидно; (3) вытекает из (1) и того факта, что ограниченный оператор A определен на всем $\boldsymbol{\ell}_2$. Докажем (4).

Введем множества индексов $I_1 \doteqdot \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| \leqslant 1\}$ и $I_2 \doteqdot \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| > 1\}$. Тогда A будет прямой суммой двух диагональных операторов $A = A_1 \oplus A_2$, при этом для оператора A_1 имеем $\sup|\lambda_n^{(1)}| \leqslant 1$, а для оператора A_2 имеем $\inf|\lambda_n^{(2)}| \geqslant 1$. Заметим, что оператор A_1 замкнут, так как является ограниченным. Оператор A_2 имеет ограниченный обратный оператор A_2^{-1}. Так как из замкнутости графика оператора A_2^{-1} следует замкнутость графика оператора A_2, то оператор A_2 также является замкнутым. Отсюда следует замкнутость оператора $A = A_1 \oplus A_2$.

8 ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ

Теорема (Ба́наха об обратном операторе)**.** *Если оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является ограниченным и обратимым отображением банаховых пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то его обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ является ограниченным.*

Доказательство. Так как $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ — ограниченный оператор, определенный в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$, то его график $\mathrm{gr}(A)$ замкнут. Поэтому, если $x_n \to x$ и $y_n = Ax_n \to y$, где $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $y_n \in \boldsymbol{F}$, то $Ax = y$. В силу биективности оператора получим, что если $y_n \to y$ и $x_n = A^{-1}y_n \to x$, где $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $y_n \in \boldsymbol{F}$, то $A^{-1}y = x$. Следовательно, график $\mathrm{gr}\, A^{-1}$ оператора A^{-1} замкнут. Таким образом, по теореме о замкнутом графике оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ ограничен. □

Пусть $M \subset \boldsymbol{E}$ — замкнутое подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ и $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/M$ его факторпространство по подпространству M. Всякий элемент $\widehat{\boldsymbol{E}}$ будем записывать в виде $\widehat{x} \doteqdot x + M$, где $x \in \boldsymbol{E}$. Факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}}$ является линейным нормированным пространством относительно следующих операций:

a) сложение элементов $\widehat{x} + \widehat{y} \doteqdot \widehat{x+y}$, где $x, y \in \boldsymbol{E}$;

b) умножение на число $\lambda\widehat{x} \doteqdot \widehat{\lambda x}$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$;

c) норма элемента $\|\widehat{x}\| \doteqdot \inf_{y\in M} \|x + y\|$, где $x \in \boldsymbol{E}$.

Проверим свойства нормы. По определению имеем следующие соотношения:

$$\|\lambda\widehat{x}\| = \|\widehat{\lambda x}\| = \inf_{y\in M} \|\lambda x + y\| = |\lambda| \inf_{y\in M} \|x + y\| = |\lambda|\|\widehat{x}\|;$$

$$\|\widehat{x+y}\| = \inf_{u,v\in M} \|x + y + u + v\| \leqslant \inf_{u\in M} \|x + u\| + \inf_{v\in M} \|y + v\| = \|\widehat{x}\| + \|\widehat{y}\|.$$

Кроме того, если $\|\widehat{x}\| = \inf_{y\in M} \|x + y\| = 0$, то существуют такие элементы $y_n \in M$, что $x + y_n \to 0$. Поэтому $x = -\lim y_n \in M$ и, следовательно, $\widehat{x} = \widehat{0}$.

Лемма. *Если $M \subset \boldsymbol{E}$ — замкнутое подпространство ба́нахова пространства $\boldsymbol{E}$, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/M$ является банаховым.*

Доказательство. Докажем полноту нормированного пространства $\widehat{\boldsymbol{E}}$. Пусть $\{\widehat{x_n}\}$ есть последовательность Коши́. Выберем последовательность индексов так, чтобы $n_1 < n_2 < \ldots$ и $\|\widehat{x_n} - \widehat{x_m}\| < 1/2^k$ при всех $n, m \geqslant n_k$. Тогда существуют элементы $z_{n_k} \in \widehat{x_{n_k}} = x_{n_k} + M$, т.ч. $\|z_{n_{k+1}} - z_{n_k}\| < 1/2^k$. Поэтому ряд $z = z_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(z_{n_{k+1}} - z_{n_k})$ сходится по норме в $\boldsymbol{E}$ и, следовательно, при всех $n \geqslant n_k$ получим

$$\|\widehat{z} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|\widehat{z} - \widehat{x_{n_k}}\| + \|\widehat{x_{n_k}} - \widehat{x_n}\| \leqslant \|z - z_{n_k}\| + 1/2^k \leqslant \textstyle\sum_{l=k}^{\infty} 1/2^l + 1/2^k < 3/2^k.$$

Таким образом, существует предел $\lim \widehat{x_n} = \widehat{z} \in \widehat{\boldsymbol{E}}$. □

Определение. Оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *открытым отображением* нормированных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, если образ $A(U) \subset \boldsymbol{F}$ каждого открытого множества $U \subset \boldsymbol{E}$ является открытым множеством в пространстве $\boldsymbol{F}$.

Пусть $\pi : \boldsymbol{E} \to \widehat{\boldsymbol{E}}$ — фактороотображение, определенное по формуле $\pi(x) \doteqdot \widehat{x}$. Непрерывность π вытекает из неравенства $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$. Из этого неравенства и определения нормы в факторпространстве $\widehat{\boldsymbol{E}}$ следует, что образ $\pi(U_r)$ открытого шара $U_r \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| < r\}$ будет открытым шаром $\widehat{U}_r \doteqdot \{\widehat{x} \in \widehat{\boldsymbol{E}} \mid \|\widehat{x}\| < r\}$ того же радиуса $r > 0$. Поэтому образ всякого открытого множества будет открытым и, следовательно, π является открытым отображением.

Определение. Оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *гомоморфизмом* нормированных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, если он является непрерывным и открытым отображением.

Теорема (о гомоморфизме)**.** *Если ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ задает сюръективное отображение банаховых пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, то он является гомоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку ядро $M \doteqdot \ker A$ является замкнутым линейным подпространством $\boldsymbol{E}$, то факторпространство $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/M$ является банаховым пространством. Определим оператор $\widehat{A} : \widehat{\boldsymbol{E}} \to \boldsymbol{F}$, полагая $\widehat{A}(\widehat{x}) = A(x)$. Этот оператор корректно определен, так как если $\widehat{x} = \widehat{y}$, то $x - y \in M$ и, значит, $A(x) = A(y)$.

Заметим, что оператор $\widehat{A} : \widehat{\boldsymbol{E}} \to \boldsymbol{F}$ является линейным, его ядро равно нулю $\ker \widehat{A} = \{\widehat{x} \in \widehat{\boldsymbol{E}} \mid A(x) = 0\} = \widehat{0}$ и образ $\operatorname{Im} \widehat{A} = \operatorname{Im} A = \boldsymbol{F}$. Поэтому оператор $\widehat{A}$ является биективным и его норма $\|\widehat{A}\| = \|A\|$. В самом деле, имеем

$$\|\widehat{A}(\widehat{x})\| = \|A(x)\| = \inf\nolimits_{y \in M} \|A(x+y)\| \leqslant \|A\| \inf\nolimits_{y \in M} \|x+y\| = \|A\|\,\|\widehat{x}\|.$$

Следовательно, выполняется неравенство $\|\widehat{A}\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, мы имеем $\|A(x)\| = \|\widehat{A}(\widehat{x})\| \leqslant \|\widehat{A}\|\,\|\widehat{x}\| \leqslant \|\widehat{A}\|\,\|x\|$. Таким образом, выполняется равенство $\|\widehat{A}\| = \|A\|$. По теореме Банаха об обратном операторе $\widehat{A}$ является гомоморфизмом. Поскольку оператор $A = \widehat{A} \cdot \pi$ является произведением двух гомоморфизмов, то он также является гомоморфизмом пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. □

Теорема (о тройке)**.** *Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ — банаховы пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является сюръективным, оператор $B \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{G})$ и $\ker A \subset \ker B$. Тогда существует оператор $C \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$, т.ч. $B = CA$.*

Доказательство. Определим оператор $C : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ по формуле $C(y) = B(x)$, если $y = Ax$ и $x \in \boldsymbol{E}$. Если $y = Ax_1 = Ax_2$, где $x_1, x_2 \in \boldsymbol{E}$, то $x_1 - x_2 \in \ker A \subset \ker B$. Отсюда $Bx_1 = Bx_2$, т.е. оператор C определен корректно. Докажем линейность.

Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y = Ax$, то $C(\lambda y) = C(A(\lambda x)) = B(\lambda x) = \lambda B(x) = \lambda C(y)$. Если $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$, то $C(y_1 + y_2) = C(A(x_1 + x_2)) = B(x_1 + x_2) = B(x_1) + B(x_2) = C(y_1) + C(y_2)$. Поэтому оператор C является линейным.

Пусть $M = \ker A$, тогда оператор $\widehat{A} \in \mathcal{L}(\widehat{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{F})$ биективен и при $y = Ax$ имеем

$$\|C(y)\| = \|B(x)\| = \inf\nolimits_{z \in M} \|B(x+z)\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{x}\| = \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}y\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}\|\,\|y\|.$$

Таким образом, $\|C\| \leqslant \|B\|\,\|\widehat{A}^{-1}\|$ и, следовательно, $C \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$. □

Напомним, что для $V \subset \boldsymbol{E}$ и $W \subset \boldsymbol{E}^*$ определяются следующие множества:

$$V^{\perp} \doteqdot \{f \in \boldsymbol{E}^* \mid f(x) = 0,\, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid f(x) = 0,\, f \in W\},$$

которые называются соответственно аннулятором* V и аннулятором W. Они будут замкнутыми подпространствами в пространствах $\boldsymbol{E}^*$ и $\boldsymbol{E}$ соответственно.

Лемма (о бианнуляторе). *Если подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$ замкнуто, то имеет место равенство $(M^{\perp})_{\perp} = M$.*

Доказательство. Включение $M \subset (M^{\perp})_{\perp}$ очевидно. Предположим, что элемент $x \in (M^{\perp})_{\perp}$. Если $x \notin M$, то $\|\widehat{x}\| \neq 0$. Зададим линейный функционал на линейной оболочке $L = \mathrm{sp}\{x, M\}$ по следующей формуле: $f(\lambda x + y) = \lambda$ для всех чисел $\lambda \in \mathbb{F}$ и элементов $y \in M$. Он имеет конечную норму $\|f\|_L < \infty$, так как

$$\|f\|_L = \sup_{z \in L} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{y \in M} \frac{|\lambda|}{\|\lambda x + y\|} = \sup_{y \in M} \frac{1}{\|x + y\|} = \frac{1}{\|\widehat{x}\|}.$$

По теореме Хана–Банаха существует $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|_L$. Тогда имеем $g \in M^{\perp}$ и $g(x) = 1$, т.е. элемент $x \notin (M^{\perp})_{\perp}$. Получили противоречие. $\square$

Теорема. *Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, заданный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{F}$. Тогда справедливы равенства:*

$$\operatorname{Im} A = (\ker A^*)_{\perp}\,, \quad \operatorname{Im} A^* = (\ker A)^{\perp}.$$

Доказательство. В силу доказанного ранее имеем равенство $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$. Следовательно, применяя лемму, получим $(\ker A^*)_{\perp} = ((\operatorname{Im} A)^{\perp})_{\perp} = \operatorname{Im} A$.

Для доказательства второго равенства мы имеем включение $\operatorname{Im} A^* \subset (\ker A)^{\perp}$. Если функционал $g \in (\ker A)^{\perp}$, то $\ker A \subset \ker g$. Применяя теорему о тройке, а затем теорему Ха́на–Ба́наха, получим $f \in \boldsymbol{F}^*$, т.ч. $g(x) = f(A(x))$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому функционал $g = A^* f \in \operatorname{Im} A^*$ и, следовательно, $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^{\perp}$. $\square$

Определение. Линейный оператор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ называется *проектором* на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$, если выполняются равенства $P^2 = P$ и $\operatorname{Im} P = L$.

Рассмотрим свойства проекторов на подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$:

1. *Ограничение $P|_L = I|_L$ есть тождественный оператор в L.*

Действительно, если $y = Px$, то $Py = P^2 x = Px = y$ при всех $x \in L$.

2. *Справедливы равенства $\ker(I - P) = \operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Im}(I - P) = \ker P$.*

Если $x \in \ker(I - P)$, т.е. $x - Px = 0$, то $x \in \operatorname{Im} P$. Если $y = Px \in \operatorname{Im} P$, то $(I - P)y = (P - P^2)x = 0$, т.е. $y \in \ker P$. Аналогично, получаем второе равенство.

3. *Пространство $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ является прямой суммой $L = \operatorname{Im} P$ и $M = \ker P$.*

Поскольку $I = P + (I - P)$, то $\boldsymbol{E} = L + M$. Кроме того, если $y \in L \cap M$, то $y = Px = x - Px$, т.е. $x = 2Px$ и, применяя P, получим $y = Px = 0$.

Определение. Линейное подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ называется *дополняемым* в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, если оно является замкнутым и существует такое замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$, что $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Теорема. *В банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда будет дополняемым, когда существует ограниченный проектор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ на подпространство L.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\boldsymbol{E} = L \oplus M$, где L и M замкнутые подпространства. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют единственные элементы $y \in L$ и $z \in M$, т.ч. $x = y + z$. По определению полагаем $Px \doteqdot y$. Заметим, что оператор $P : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ имеет замкнутый график. В самом деле, если $x_n \to x$ и $y_n = Px_n \to y$, то $x_n = y_n + z_n \to x = y + z$ и из замкнутости L вытекает, что $y \in L$. В силу единственности разложения $x = y + z$ получим $z \in M$ и, следовательно, $Px = y$. По теореме о замкнутом графике оператор P является ограниченным.

Достаточность. Так как проектор P на подпространство L является непрерывным, то $L = \operatorname{Im} P = \ker(I - P)$ и $M = \ker P = \operatorname{Im}(I - P)$ являются замкнутыми и непересекающимися подпространствами. Поскольку $I = P + (I - P)$, то отсюда следует разложение $\boldsymbol{E} = L \oplus M$ в прямую сумму. □

Лемма. *Пусть замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность $\dim L = n$ или конечную коразмерность $\operatorname{codim} L \doteqdot \dim \widehat{\boldsymbol{E}} = m$, где $\widehat{\boldsymbol{E}} \doteqdot \boldsymbol{E}/L$. Тогда L является дополняемым.*

Доказательство. Введем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ подпространства L. Обозначим через $M \doteqdot \bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k$, где $\{f_1, \dots, f_n\}$ образует биортогональную систему к $\{e_1, \dots, e_n\}$. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ положим $y \doteqdot \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, e_k$ и $z \doteqdot x - y$. Тогда имеем $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$.

Рассмотрим базис $\{\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_m\}$ факторпространства $\widehat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/L$. Обозначим через $M \doteqdot \operatorname{sp}\{e_1, \dots, e_m\}$ линейную оболочку. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$, т.ч. $\widehat{x} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \widehat{e}_k$. Если $z \doteqdot \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k$ и $y \doteqdot x - z$, то $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $\boldsymbol{E} = L \oplus M$. □

Пример. *Недополняемое замкнутое подпространство* (без доказательства).

Обозначим через $\boldsymbol{C}(T)$ пространство всех непрерывных функций $f : T \to \mathbb{C}$ на окружности $T \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{z \in T} |f(z)|$, а через $\boldsymbol{A}(D)$ пространство всех функций $g : D \to \mathbb{C}$, которые являются непрерывными в круге $D \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ и голоморфными внутри круга $\mathring{D}$. По принципу максимума $\sup_{z \in D} |g(z)| = \sup_{z \in T} |g(z)|$. Кроме того, в силу теоремы Вейерштрасса равномерно сходящаяся последовательность голоморфных функций сходится к голоморфной функции в $\mathring{D}$. Таким образом, $\boldsymbol{A}(D) \subset \boldsymbol{C}(T)$ образует замкнутое подпространство. Можно доказать, что $\boldsymbol{A}(D)$ является недополняемым подпространством в $\boldsymbol{C}(T)$.

9 СПЕКТР ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Обозначим через $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}) \doteqdot \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$ ба́нахово пространство ограниченных линейных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ с нормой $\|A\| \doteqdot \sup_{x \in S} \|Ax\|$, действующих в ба́наховом пространство $\boldsymbol{E}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ будем называть *регулярным значением* оператора $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$, если оператор $A_\lambda : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, определенный по формуле $A_\lambda \doteqdot \lambda I - A$ является обратимым, где I — тождественный оператор в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Множество всех регулярных значений обозначается через $\rho(A)$. Его дополнение $\sigma(A) \doteqdot \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* оператора A. Обратный оператор $R_\lambda \doteqdot A_\lambda^{-1}$, определенный при всех $\lambda \in \rho(A)$, называется *резольвентой* оператора A.

Для того чтобы оператор A_λ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы он был биективным отображением, т.е. его ядро $\ker A = 0$ и образ $\operatorname{Im} A = \boldsymbol{E}$. Если оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ ограничен, то по теореме Ба́наха об обратном операторе резольвента $R_\lambda \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ будет ограниченным оператором при всех $\lambda \in \rho(A)$.

Пример 1. Рассмотрим *диагональный* оператор $A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$, заданный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$ при $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Его норма равна $\|A\| = \sup |\lambda_n|$. Все $\lambda_n \in \sigma(A)$, поскольку $\ker A_{\lambda_n} \neq 0$. При $\lambda \neq \lambda_n$ оператор $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$ тогда и только тогда имеет ограниченный обратный $(R_\lambda y)_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, когда $\|R_\lambda\| = \sup |\lambda - \lambda_n|^{-1} < \infty$. Следовательно, спектр диагонального оператора равен $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$ замыканию множества диагональных элементов $\{\lambda_n\}$.

Определение. Функция $f : \Omega \to \boldsymbol{E}$, определенная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *голоморфной* в Ω, если для каждого $z_0 \in \Omega$ существуют $r > 0$ и такие $c_n \in \boldsymbol{E}$, что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n$ при всех $z \in U_r(z_0)$, где $U_r(z_0) \doteqdot \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ обозначает открытый круг в Ω.

Заметим, что сходимость степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n$ определяется здесь по норме пространства $\boldsymbol{E}$ и его радиус сходимости вычисляется по формуле Коши́–Адама́ра $1/r = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|}$. Если функция голоморфна в Ω, то этот радиус сходимости равен $r = \rho(z_0, \partial\Omega)$ расстоянию от точки $z_0 \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Лемма. *Если $\|A\| < 1$, то оператор $B \doteqdot I - A$ обратим и $B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Доказательство. Пусть $C_n \doteqdot \sum_{k=0}^{n} A^k$ и $\|A\| = a < 1$. Так как $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$, то по неравенству треугольника получим $\|C_m - C_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|A\|^k < a^{n+1}/(1 - a)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|C_m - C_n\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Следовательно, $\{C_n\}$ является последовательностью Коши́ в пространстве $\mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ и, значит, существует предел $\lim C_n \doteqdot C \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$. Отсюда получим

$$BC = \lim BC_n = \lim \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \lim (I - A^{n+1}) = I,$$

т.к. $\lim A^{n+1} = 0$. Аналогично имеем $CB = I$. Таким образом, $C = B^{-1}$. □

Теорема (о резольвенте). *Если оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ является ограниченным, то резольвентное множество $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ открыто, функция резольвенты R_λ голоморфна в $\rho(A)$ и ее норма $\|R_\lambda\| \geqslant 1/d_\lambda$, где $d_\lambda \doteqdot \inf_{z\in\sigma(A)} |\lambda - z|$ обозначает расстояние от точки λ до спектра $\sigma(A)$.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству $|z - \lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$, где $\lambda \in \rho(A)$. Так как $A_z = A_\lambda - (\lambda - z)I = A_\lambda(I - (\lambda - z)R_\lambda)$, то по лемме получим

$$R_z = (I - (\lambda - z)R_\lambda)^{-1}R_\lambda = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - z)^n R_\lambda^{n+1}.$$

Так как $|\lambda - z|\,\|R_\lambda\| < 1$, то ряд сходится по норме и, следовательно, $R_z \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$. Поэтому множество регулярных значений $\rho(A)$ является открытым и функция резольвенты R_λ является голоморфной в $\rho(A)$. Кроме того, если $\lambda \in \rho(A)$, то в силу доказанного выполняется неравенство $|\lambda - z| \geqslant \|R_\lambda\|^{-1}$ при всех $z \in \sigma(A)$. □

Следствие. *Спектр $\sigma(A)$ любого ограниченного оператора $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ является непустым, замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{C}$.*

Пусть $|\lambda| > \|A\|$. По лемме получим $R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$. Поэтому $R_\lambda \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ и $\|R_\lambda\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Следовательно, спектр находится в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant \|A\|\}$ радиуса $\|A\|$. Кроме того, для каждого функционала $f \in \mathcal{L}^*(\boldsymbol{E})$ функция $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda)$ голоморфна в $\rho(A)$ и $|F(\lambda)| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если $\rho(A) = \mathbb{C}$, то по теореме Лиуви́лля $F(\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда, применяя теорему Ха́на–Ба́наха, получим $R_\lambda = 0$, что невозможно. Поэтому $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Свойства спектра сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

1. *Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$, то $\sigma(A^*) = \sigma(A)$.*

Так как $A_\lambda = \lambda I - A$, то $A_\lambda^* = \lambda I - A^*$. Поскольку для ограниченного обратимого оператора выполняется равенство $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, то $(R_\lambda)^* = (A_\lambda^{-1})^* = (A_\lambda^*)^{-1} = R_\lambda^*$. Следовательно, множества регулярных значений $\rho(A^*) = \rho(A)$ совпадают.

2. *Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{H})$, где $\boldsymbol{H}$ — гильбертово пространство, то $\sigma(A') = \overline{\sigma}(A)$.*

По определению эрмитово-сопряженного оператора имеют место равенства

$$\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle \lambda x - Ax, y\rangle = \langle x, \overline{\lambda} y - A'y\rangle = \langle x, (A')_{\overline{\lambda}}\, y\rangle,$$

т.е. $(A_\lambda)' = (A')_{\overline{\lambda}}$. Отсюда $(R_\lambda)' = (A_\lambda^{-1})' = (A'_{\overline{\lambda}})^{-1} = R'_{\overline{\lambda}}$ и поэтому $\rho(A') = \overline{\rho}(A)$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* оператора A, если существует $e \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $e \neq 0$ и $Ae = \lambda e$. Следующие множества

$\sigma_p(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$, состоящее из собственных значений;

$\sigma_c(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0,\ \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \boldsymbol{E},\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq \boldsymbol{E}\}$;

$\sigma_r(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0,\ \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}$;

называются соответственно *точечным*, *непрерывным* и *остаточным* спектром A.

Рассмотрим свойства точечного, непрерывного и остаточного спектров.

1. *Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$, то справедливо равенство $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$.*

Это равенство является очевидным следствием определения.

2. *Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$, то будут выполняться включения: $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A^*) \sqcup \sigma_r(A^*)$, $\sigma_c(A) \subset \sigma_c(A^*) \sqcup \sigma_r(A^*)$ и $\sigma_r(A) \subset \sigma_p(A^*)$.*

Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, тогда $\ker A_\lambda = (\operatorname{Im} A_\lambda^*)_\perp \neq 0$. Следовательно, либо $\ker A_\lambda^* \neq 0$, либо $\ker A_\lambda^* = 0$ и $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda^*} \neq \boldsymbol{E}^*$, т.е. выполняется первое включение.

Пусть $\lambda \in \sigma_c(A)$, тогда $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \boldsymbol{E}$ и значит $\ker A_\lambda^* = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp = 0$. Поэтому либо $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda^*} = \boldsymbol{E}^*$, либо $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda^*} \neq \boldsymbol{E}^*$, т.е. выполняется второе включение.

Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$, тогда $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}$. Отсюда, применяя теорему Ха́на–Ба́наха, получим $\ker A_\lambda^* = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \neq 0$, т.е. выполняется третье включение.

3. *Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{H})$, где $\boldsymbol{H}$ — гильбертово пространство, то выполняются соотношения: $\sigma_p(A) \subset \overline{\sigma}_p(A') \sqcup \overline{\sigma}_r(A')$, $\sigma_c(A) = \overline{\sigma}_c(A')$ и $\sigma_r(A) \subset \overline{\sigma}_p(A')$.*

Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, тогда существует $x \neq 0$, т.ч. $A_\lambda x = 0$. Поэтому из равенства $\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle x, A'_{\overline{\lambda}} y\rangle$ имеем $x \perp \operatorname{Im} A'_{\overline{\lambda}}$, т.е. выполняется первое включение.

Пусть $\lambda \in \sigma_c(A)$. Если существует $y \neq 0$, т.ч. $A'_{\overline{\lambda}} y = 0$, то из $\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle x, A'_{\overline{\lambda}} y\rangle$ следует, что $y \perp \operatorname{Im} A_\lambda$, и наоборот. Значит выполняется второе равенство.

Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$, тогда существует $y \neq 0$, т.ч. $y \perp \operatorname{Im} A_\lambda$. В силу равенства $\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle x, A'_{\overline{\lambda}} y\rangle$ получим $A'_{\overline{\lambda}} y = 0$, т.е. выполняется третье включение.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *обобщенным собственным значением* оператора $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$, если существует последовательность элементов $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $\lim \|A_\lambda x_n\| = 0$. Множество обобщенных собственных значений

$$\sigma_l(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}$$

назыается *предельным спектром* оператора A. Множество

$$\sigma_d(A) \doteqdot \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0,\ \operatorname{Im} A_\lambda = \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \boldsymbol{E}\}$$

называется *дефектным спектром* оператора A.

4. *Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$, то имеет место равенство $\sigma(A) = \sigma_l(A) \sqcup \sigma_d(A)$.*

Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$, тогда существует $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $\lim \|A_\lambda x_n\| = 0$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то $\|x_n\| = \|R_\lambda A_\lambda x_n\| \leqslant \|R_\lambda\|\,\|A_\lambda x_n\| \to 0$, что невозможно. Поэтому выполняется включение $\sigma_l(A) \subset \sigma(A)$. Пусть теперь $\lambda \notin \sigma_l(A)$. Тогда существует $c > 0$, т.ч. $\|A_\lambda x\| \geqslant c\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Отсюда следует, что $\ker A_\lambda = 0$. Если $y_n = A_\lambda x_n \to y$, то $\|x_n - x_m\| \leqslant \|A_\lambda x_n - A_\lambda x_m\|/c \leqslant \|A_\lambda x_n - y\|/c + \|A_\lambda x_m - y\|/c \to 0$. Таким образом, $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ и значит существует предел $\lim x_n = x$. В силу непрерывности оператора $A_\lambda x = y$. Следовательно, образ оператора замкнут $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \operatorname{Im} A_\lambda$ и выполняется включение $\sigma(A) \setminus \sigma_l(A) \subset \sigma_d(A)$. Обратное включение вытекает из теоремы Ба́наха об обратном операторе.

Теорема (о границе спектра). *Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$, то $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$.*

Доказательство. Для каждой точки $\lambda \in \partial\sigma(A)$ существует последовательность регулярных значений $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, т.ч. $\lambda_n \to \lambda$. Тогда имеем $d_{\lambda_n} \leqslant |\lambda - \lambda_n| \to 0$. Рассмотрим линейные операторы $B_n \doteqdot R_{\lambda_n}/\|R_{\lambda_n}\|$, где R_{λ_n} — резольвента оператора A_{λ_n}. Так как произведение $A_{\lambda_n}R_{\lambda_n} = I$ является тождественным оператором, то

$$A_\lambda B_n = (\lambda - \lambda_n)B_n + A_{\lambda_n}B_n = (\lambda - \lambda_n)B_n + I/\|R_{\lambda_n}\|.$$

Поскольку $\|B_n\| = 1$, то существует последовательность $\{y_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|B_n y_n\| > 1/2$. Положим $x_n \doteqdot B_n y_n/\|B_n y_n\|$. Применяя указанную выше формулу для оператора $A_\lambda B_n$, получим следующее равенство:

$$A_\lambda x_n = A_\lambda B_n y_n/\|B_n y_n\| = (\lambda - \lambda_n)x_n + y_n/\|R_{\lambda_n}\|\,\|B_n y_n\|.$$

Так как по построению $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и по теореме о резольвенте $\|R_{\lambda_n}\| \geqslant 1/d_{\lambda_n}$, то $\|A_\lambda x_n\| \leqslant |\lambda - \lambda_n| + 2d_\lambda \leqslant 3|\lambda - \lambda_n| \to 0$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_l(A)$. □

Пример 2. Рассмотрим *диагональный* оператор $A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$, определенный по формуле $(Ax)_n \doteqdot \lambda_n x_n$ при $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Заметим, что λ_n являются собственными значениями, поскольку существует собственный вектор $e \in \boldsymbol{\ell}_p \setminus 0$, имеющий единственный ненулевой член с индексом n. Поэтому $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$.

В случае $1 \leqslant p < \infty$, если λ является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$, то образ $\operatorname{Im} A_\lambda$ содержит множество всех финитных последовательностей и поэтому всюду плотен в $\boldsymbol{\ell}_p$, т.е. в этом случае $\lambda \in \sigma_c(A)$. При этом весь спектр оператора будет предельным, т.е. $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$.

В случае $p = \infty$, если λ является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$, то найдется последовательность $\{n_k\}$, т.ч. $\lim y_{n_k} = 0$ для всех $y = \{y_n\} \in \operatorname{Im} A_\lambda$. По теореме Хана–Банаха существует продолжение функционала $f(y) = \lim y_{n_k}$, заданного на подпространстве $\boldsymbol{c} \subset \boldsymbol{\ell}_\infty$ сходящихся последовательностей. Отсюда следует, что $\operatorname{Im} A_\lambda \subset \ker f$, т.е. в этом случае $\lambda \in \sigma_r(A)$. При этом весь спектр оператора будет предельным, т.е. $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_r(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$.

Пример 3. Рассмотрим оператор *левого сдвига* $T_l : \boldsymbol{\ell}_1 \to \boldsymbol{\ell}_1$, определенный по формуле $(T_l x)_n = x_{n+1}$ при $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_1$. Его сопряженным будет оператор *правого сдвига* $T_r = T_l^* : \boldsymbol{\ell}_\infty \to \boldsymbol{\ell}_\infty$, определенный по формуле $(T_r x)_n = x_{n-1}$ при $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_\infty$, где $x_0 = 0$. Элементы $e_\lambda = \{\lambda^{n-1}\}$ являются собственными векторами оператора T_l с собственным значением λ при всех $|\lambda| < 1$. Так как норма оператора T_l равна $\|T_l\| = 1$, то его спектр $\sigma(T_l) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. Отсюда оператор T_r имеет норму $\|T_r\| = 1$ и его спектр $\sigma(T_r) = \sigma(T_l)$.

Структура спектра операторов левого и правого сдвига						
	σ	σ_p	σ_c	σ_r	σ_l	σ_d
$T_l : \boldsymbol{\ell}_1 \to \boldsymbol{\ell}_1$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\lvert\lambda\rvert < 1$	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$\emptyset$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\emptyset$
$T_r : \boldsymbol{\ell}_\infty \to \boldsymbol{\ell}_\infty$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$\lvert\lambda\rvert < 1$

10 КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пример 1. Найдем спектр и резольвенту оператора Фурье́ $\mathcal{F} : \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}) \to \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, определенного по формуле $\mathcal{F}f(x) \doteqdot \widehat{f}(x)$. По теореме Планшере́ля выполняется равенство Парсева́ля $\|\mathcal{F}f\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ и образ оператора Фурье́ $\operatorname{Im}\mathcal{F} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, т.е. оператор $\mathcal{F}$ является изометрией пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

Функции Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ образуют полную ортонормированную систему и являются собственными функциями оператора Фурье́, т.е. $\widehat{h_n}(x) = \lambda_n h_n(x)$, где $\lambda_n = (-\boldsymbol{i})^n$ являются собственными значениями. Поэтому спектр оператора Фурье́ совпадает с точечным спектром $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma_p(\mathcal{F}) = \{\pm 1, \pm \boldsymbol{i}\}$ и имеет место разложение $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ в прямую сумму собственных подпространств

$$\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}) = H_1 \oplus H_{-1} \oplus H_{\boldsymbol{i}} \oplus H_{-\boldsymbol{i}}, \text{ где } H_\lambda \doteqdot \ker(\lambda I - \mathcal{F}) \text{ при } \lambda \in \sigma_p(\mathcal{F}).$$

Рассмотрим ортогональные проекторы $P_\lambda : \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}) \to H_\lambda$ на подпространства H_λ. Тогда имеют место равенства $I = P_1 + P_{-1} + P_{\boldsymbol{i}} + P_{-\boldsymbol{i}}$ и $\mathcal{F} = P_1 - P_{-1} + \boldsymbol{i}P_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{i}P_{-\boldsymbol{i}}$. Отсюда вытекает, что $\lambda I - \mathcal{F} = (\lambda - 1)P_1 + (\lambda + 1)P_{-1} + (\lambda - \boldsymbol{i})P_{\boldsymbol{i}} + (\lambda + \boldsymbol{i})P_{-\boldsymbol{i}}$. Поэтому получаем следующую формулу для резольвенты оператора Фурье́:

$$R_\lambda \doteqdot (\lambda I - \mathcal{F})^{-1} = (\lambda - 1)^{-1}P_1 + (\lambda + 1)^{-1}P_{-1} + (\lambda - \boldsymbol{i})^{-1}P_{\boldsymbol{i}} + (\lambda + \boldsymbol{i})^{-1}P_{-\boldsymbol{i}}.$$

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ —ба́наховы пространства. Операторы $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ и $B \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F})$ называются *эквивалентными* $A \sim B$, если существует биективный оператор $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, т.ч. $BT = TA$. Если оператор T является изометрией, то эти операторы называются *изометрически эквивалентными* $A \approx B$.

1. *Если $A \sim B$, то $\sigma(A) = \sigma(B)$ и $\sigma_*(A) = \sigma_*(B)$, где $* = p, c, r, l, d$.*

Поскольку $A_\lambda = \lambda I - A$, то $B_\lambda = \lambda I - B$, то $B_\lambda T = TA_\lambda$. Поэтому операторы $A_\lambda \sim B_\lambda$ эквивалентны. Следовательно, A_λ обратим тогда и только тогда, когда B_λ обратим. При этом $\ker B_\lambda = T(\ker A_\lambda)$, $\operatorname{Im} B_\lambda = T(\operatorname{Im} A_\lambda)$ и $R_\lambda(B) = TR_\lambda(A)T^{-1}$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Отсюда легко вытекают указанные равенства спектров.

2. *Если $A \approx B$, то $\|A\| = \|B\|$.*

Поскольку $B = TAT^{-1}$ и $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ в силу изометричности, то имеют место неравенства $\|B\| \leqslant \|A\|$ и $\|A\| \leqslant \|B\|$. Отсюда следует $\|A\| = \|B\|$.

Пример 2. Пусть функция $K \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$. Выясним структуру спектра оператора свертки в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, определенного по следующей формуле:

$$Af(x) = K * f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x - y)\, f(y)\, dy\,, \quad f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}).$$

Применяя обобщенное неравенство Минко́вского, получим $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_1} \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Поэтому образ оператора $\operatorname{Im}(A) \subset \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ и его норма $\|A\| \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_1}$. По формуле свертки мы имеем равенство $\widehat{Af}(x) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{K}(x)\, \widehat{f}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

По лемме Ри́мана–Лебе́га функция $\varphi(x) \doteqdot \sqrt{2\pi}\widehat{K}(x)$ непрерывна и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Поэтому можно считать функцию $\varphi(x)$ заданной на множестве $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Пусть $Bg(x) \doteqdot \varphi(x)\,g(x)$ оператор умножения на функцию в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Тогда имеем $B_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))\,g(x)$ и резольвента $R_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))^{-1}g(x)$. Так как операторы $A \approx B$ изометрически эквивалентны, то

a) норма оператора $\|A\| = \|B\| = \max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$;

b) спектр оператора $\sigma(A) = \sigma(B) = \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \doteqdot \{\lambda = \varphi(x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$;

c) точечный спектр $\sigma_p(A) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$;

d) непрерывный спектр $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0\}$;

e) структура спектра $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A)$.

Если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$, то $e(x) = \chi_E(x)$ собственная функция оператора B, т.е. $Be(x) = \lambda e(x)$, где $E \subset \varphi^{-1}(\lambda)$ измеримо и $\mu(E) > 0$. Поэтому $\lambda \in \sigma_p(B)$.

Докажем, что если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$, то замыкание образа $\overline{\operatorname{Im} B_\lambda} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Обозначим через $O_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda| < \delta\}$ окрестность точки λ. Для каждой функции $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ определим функцию $g_\delta(x) \doteqdot (\lambda - \varphi(x))^{-1}g(x)$, если $\varphi(x) \notin O_\delta$, $g_\delta(x) \doteqdot 0$, если $\varphi(x) \in O_\delta$. Так как $|g_\delta(x)| \leqslant |g(x)|/\delta$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $g_\delta \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебе́га получим

$$\|g - B_\lambda g_\delta\|^2_{\boldsymbol{L}_2} = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - B_\lambda g_\delta(x)|^2 dx = \int_{\varphi^{-1}(O_\delta)} |g(x)|^2 dx \to 0$$

при $\delta \to 0$. Отсюда следует включение $\lambda \in \sigma_c(B)$.

Теорема (о спектральном радиусе)**.** *Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$, то $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, где $r(A) \doteqdot \sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$ называется спектральным радиусом оператора A.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Так как $\lambda^n - z^n = (\lambda - z)P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ многочлен степени $n - 1$, то $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)P_{n-1}(A) = P_{n-1}(A)(\lambda I - A)$. Если оператор $\lambda^n I - A^n$ является обратимым, то, умножая указанное равенство справа и слева на его обратный, мы получим, что оператор $\lambda I - A$ обратим. Поскольку это противоречит нашему предположению, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$. Отсюда $|\lambda|^n \leqslant \|A^n\|$ и, следовательно, имеет место неравенство $r(A) \leqslant \underline{\lim}\, \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

С другой стороны, ранее было получено разложение $R_\lambda = \sum_{n=0}^\infty A^n/\lambda^{n+1}$ при всех $|\lambda| > \|A\|$. Если $f \in \mathcal{L}^*(\boldsymbol{E})$, то функция $F(\lambda) \doteqdot f(R_\lambda)$ будет голоморфной в $\rho(A)$ по теореме о резольвенте и, следовательно, ряд $F(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty f(A^n)/\lambda^{n+1}$ будет сходиться при всех $|\lambda| > r(A)$. Поэтому существует такая константа $c_f > 0$, что $|f(A^n)/\lambda^n| \leqslant c_f$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда в силу теоремы Ба́наха–Штейнга́уза найдется такая константа $c > 0$, что $\|A^n/\lambda^n\| \leqslant c$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, имеем $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant |\lambda|$ при всех $|\lambda| > r(A)$, т.е. $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A)$. Таким образом, верхний и нижний пределы совпадают со спектральным радиусом $r(A)$. $\square$

Определение. Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, определенный в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$, называется *компактным*, если образ $A(M) \subset \boldsymbol{F}$ каждого ограниченного множества $M \subset \boldsymbol{E}$ является предкомпактным. Пространство всех компактных операторов обозначается через $\mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$.

1. *Оператор $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный тогда и только тогда, когда образ $A(S) \subset \boldsymbol{F}$ единичного шара $S \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ является предкомпактным.*

В самом деле, по определению множество $M \subset \boldsymbol{E}$ ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре $S_r \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant r\}$, где $r > 0$.

2. *Компактный оператор $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ является ограниченным $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$.*

Поскольку всякое предкомпактное множество является ограниченным.

3. *Если оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ ограничен и $\dim(\boldsymbol{E}) < \infty$ или $\dim(\boldsymbol{F}) < \infty$, то оператор $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный.*

Так как всякое ограниченное множество в пространстве конечной размерности является предкомпактным.

4. *Если $A, B \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактны, то сумма $A + B \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактна.*

Действительно, пусть $\{x_n\} \subset S$. Тогда существует $\{n_k\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to y \in \boldsymbol{F}$, и существует $\{n_{k_i}\}$, т.ч. $Bx_{n_{k_i}} \to z \in \boldsymbol{F}$. Отсюда $(A+B)x_{n_{k_i}} = Ax_{n_{k_i}} + Bx_{n_{k_i}} \to y + z \in \boldsymbol{F}$. Таким образом, множество $A(S) \subset \boldsymbol{F}$ является предкомпактным.

5. *Если $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный, а $B \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ ограниченный, то произведение $BA \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактно. Если $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ ограниченный, а $B \in \mathcal{K}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ компактный, то произведение $BA \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактно.*

Первое следует из того, что ограниченный оператор переводит предкомпактные множества в предкомпактные. Второе вытекают из того, что ограниченный оператор переводит ограниченные множества в ограниченные.

6. *Если оператор $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ компактный и $\dim(\boldsymbol{E}) = \infty$, то он необратим.*

Если A обратим, то по теореме Ба́наха об обратном операторе $A^{-1} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E})$ является ограниченным. Поэтому тождественный оператор $A^{-1}A = I$ является компактным, что невозможно, т.к. шар $S \subset \boldsymbol{E}$ некомпактный.

Лемма. *Если $A_n \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ и $A_n \to A$ сходится по норме, то $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$.*

Доказательство. Так как $A_n \to A$ сходится по норме пространства $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon/2$ при всех $x \in S$. Поскольку $A_n(S)$ предкомпактно, то существует $\varepsilon/2$-сеть $\{y_k\}_{k=1}^m$ в множестве $A_n(S)$. Отсюда для каждого $x \in S$ найдется индекс k, т.ч. $\|y_k - Ax\| \leqslant \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$. Следовательно, $\{y_k\}_{k=1}^m$ является ε-сетью в множестве $A(S)$. $\square$

Теорема (Ша́удера). *Пусть ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ определен в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Оператор $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ компактный тогда и только тогда, когда его сопряженный $A^* \in \mathcal{K}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$ является компактным.*

Доказательство. Необходимость. По условию замкнутый образ единичного шара $K \doteqdot \overline{A(S)}$ является компактным. Для каждого функционала $f \in S^*$ из единичного шара $S^* \subset \boldsymbol{F}^*$ рассмотрим непрерывную функцию: $g(y) \doteqdot f(y)$ при всех $y \in K$. Множество таких функций $g \in \boldsymbol{C}(K)$ обозначим через M. Поскольку

$$\sup_{y\in K}|g(y)| = \sup_{x\in S}|f(Ax)\| \leqslant \|A\|, \quad |g(y_1)-g(y_2)| = |f(y_1-y_2)| \leqslant \|y_1-y_2\|,$$

то множество $M \subset \boldsymbol{C}(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Аско́ли–Арцела́ M является предкомпактным. Заметим, что множество M изометрично множеству $A^*(S^*)$, поскольку имеет место равенство

$$\|A^*f\| = \sup_{x\in S}|A^*f(x)| = \sup_{x\in S}|f(Ax)| = \sup_{y\in K}|g(y)| = \|g\|_{\boldsymbol{C}}.$$

Поэтому образ единичного шара $A^*(S^*) \subset \boldsymbol{E}^*$ является предкомпактным.

Достаточность. Так как $A^* \in \mathcal{K}(\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{E}^*)$, то по доказанному $A^{**} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E}^{**},\boldsymbol{F}^{**})$. Пусть $J_1 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ и $J_2 : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}^{**}$ канонические вложения во второе сопряженное пространство. Если $J_1(x) = \delta_x$ и $J_2(y) = \delta_y$, то при всех $y = Ax$ и $f \in \boldsymbol{F}^*$

$$\langle A^{**}J_1(x), f\rangle = \langle A^{**}\delta_x, f\rangle = \langle \delta_x, A^*f\rangle = \langle A^*f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle = \langle \delta_y, f\rangle = \langle J_2(y), f\rangle.$$

Отсюда $A^{**}J_1 = J_2A$. Поэтому имеем включение $J_2(A(S)) = A^{**}(J_1(S)) \subset A^{**}(S^{**})$. Поскольку $A^{**}(S^{**})$ предкомпактно, то $A(S)$ также будет предкомпактным. □

Пример 3. *Компактность интегрального оператора* $Af(x) \doteqdot \int_0^1 K(x,y)\,f(x)\,dy$. Функция $K(x,y)$, заданная на квадрате $[0,1]^2$, называется *ядром* интегрального оператора. Предположим, что $A : \boldsymbol{L}_p([0,1]) \to \boldsymbol{L}_p([0,1])$ и разберем два случая.

a) Пусть ядро $K \in \boldsymbol{C}([0,1]^2)$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В силу неравенства Гёльдера $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{C}}\,\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $|K(x_1,y) - K(x_2,y)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$. Отсюда имеем $|Af(x_1) - Af(x_2)| < \varepsilon\,\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$ при всех $|x_1 - x_2| < \delta$. Следовательно, образ единичного шара $A(S)$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Таким образом, в силу теоремы Аско́ли–Арцела́ множество $A(S)$ является предкомпактным в $\boldsymbol{C}([0,1])$ и, следовательно, будет предкомпактным в $\boldsymbol{L}_p([0,1])$. Поэтому $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{L}_p,\boldsymbol{L}_p)$ компактный.

b) Пусть ядро $K \in \boldsymbol{L}_r([0,1]^2)$ и $1 < p < \infty$, где $r = \max\{p,q\}$ и $1/p + 1/q = 1$. Применяя неравенство Гёльдера, получим неравенства $\|f\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_q}$ при $p < q$ и $\|Af\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|K\|_{\boldsymbol{L}_r}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$. Выберем функцию $K_n \in \boldsymbol{C}([0,1]^2)$, т.ч. $\|K - K_n\|_{\boldsymbol{L}_r} < 1/n$ и положим $A_nf(x) \doteqdot \int_0^1 K_n(x,y)\,f(x)\,dy$. Тогда имеем $\|Af - A_nf\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|K - K_n\|_{\boldsymbol{L}_r}\|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$, т.е. $\|A - A_n\| < 1/n$. Таким образом, последовательность компактных операторов $A_n \in \mathcal{K}(\boldsymbol{L}_p,\boldsymbol{L}_p)$ сходится по норме. Отсюда по лемме $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{L}_p,\boldsymbol{L}_p)$ компактный.

В частности, в случае $p = 2$ получаем, что интегральный оператор является компактным $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_2)$, если его ядро $K \in \boldsymbol{L}_2([0,1]^2)$.

11 ФРЕДГÓЛЬМОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ — пространство ограниченных операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, определенных в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$, а $\mathcal{K}(\boldsymbol{E})$ — подпространство компактных операторов. Рассмотрим свойства спектра компактного оператора.

1. *Если $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E})$, то выполняется включение $\sigma_l(A) \subset \sigma_p(A) \cup \{0\}$.*

Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$ и $\lambda \neq 0$. По определению существует последовательность $\{x_n\}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \to 0$. В силу компактности оператора A существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \to e \in \boldsymbol{E}$. Так как $x_{n_k} = (A_\lambda x_{n_k} + Ax_{n_k})/\lambda$, то $x_{n_k} \to e/\lambda$ и в силу непрерывности оператора A получим, что $Ax_{n_k} \to Ae/\lambda = e$, т.е. имеет место равенство $Ae = \lambda e$. Поэтому $\lambda \in \sigma_p(A)$.

2. *Если $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E})$, то для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Lambda_\varepsilon \doteqdot \{\lambda \in \sigma_p(A) \mid |\lambda| \geqslant \varepsilon\}$ является конечным или пустым.*

Предположим, что существует последовательность $\{\lambda_n\} \subset \Lambda_\varepsilon$ различных чисел. Тогда найдется последовательность элементов $\{e_n\} \subset \boldsymbol{E}$, т.ч. $e_n \neq 0$ и $Ae_n = \lambda_n e_n$. Пусть $L_n = \mathrm{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$ линейная оболочка. Поскольку $\{e_n\}$ состоит из линейно независимых элементов, то $L_n \neq L_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому по лемме Рисса (о почти перпендикуляре) существуют $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Пусть $y_n \doteqdot c_n e_n + x_n$, где $c_n \in \mathbb{F}$ и $x_n \in L_{n-1}$. Тогда получим $Ay_n = \lambda_n c_n e_n + Ax_n = \lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n)$, где $\lambda_n x_n - Ax_n \in L_{n-1}$. Отсюда

$$\|Ay_n - Ay_k\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_k)\| > |\lambda_n|/2 > \varepsilon/2 \text{ при всех } n > k.$$

Поэтому последовательность $\{Ay_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.

Теорема (Ри́сса–Шáудера). *Пусть $\boldsymbol{E}$ — банахово пространство бесконечной размерности $\dim \boldsymbol{E} = \infty$ и $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E})$ — компактный оператор. Тогда спектр $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ и каждое ненулевое собственное значение $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$ имеет конечную кратность $\dim E_\lambda < \infty$, где $E_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$.*

Доказательство. Поскольку компактный оператор A необратим, то $0 \in \sigma(A)$. В силу теоремы о границе спектра имеем включение $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A)$, а из свойства 1 следует, что $\sigma_l(A) \subset \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Поэтому получаем $\partial\sigma(A) \subset \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Отсюда в силу свойства 2 вне любого круга $|\lambda| < \varepsilon$ может быть только конечное число граничных точек спектра. Следовательно, все точки множества $\sigma(A) \setminus 0$ являются изолированными точками и совпадают с собственными значениями оператора A. Таким образом, имеют место равенства $\sigma(A) = \partial\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Пусть $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$ — собственное значение и $E_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$ — соответствующее собственное подпространство оператора A. Так как оператор $A : E_\lambda \to E_\lambda$ является обратимым $A|_{E_\lambda} = \lambda I|_{E_\lambda}$ и компактным, то размерность $\dim E_\lambda < \infty$. □

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ в банаховых пространствах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называется *фредго́льмовым*, если его ядро имеет конечную размерность $\dim(\ker A) = n$, а образ имеет конечную коразмерность $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = m$. Множество всех фредго́льмовых операторов обозначается через $\mathcal{F}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$.

По определению коразмерность подпространства $\operatorname{Im} A \subset \boldsymbol{F}$ равна размерности факторпространства $\widehat{\boldsymbol{F}} \doteqdot \boldsymbol{F}/\operatorname{Im} A$. В следующей лемме доказывается замкнутость образа фредго́льмова оператора. Поэтому $\widehat{\boldsymbol{F}}$ будет ба́наховым пространством.

Лемма. *Если оператор $A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ фредго́льмовый, то его образ замкнут.*

Доказательство. Пусть $\{\widehat{y}_k\}_{k=1}^m$ — базис факторпространства $\widehat{\boldsymbol{F}} = \operatorname{sp}\{\widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_m\}$. Так как для всякого элемента $x \in \boldsymbol{F}$ существует представление $\widehat{x} = \sum_{k=1}^m c_k \widehat{y}_k$, то $x = \sum_{k=1}^m c_k y_k + z$, где $z \in \operatorname{Im} A$. Отсюда $\boldsymbol{F} = \operatorname{Im} A \oplus M$, где $M \doteqdot \operatorname{sp}\{y_1, \ldots, y_m\}$. Рассмотрим оператор $B : \boldsymbol{E} \times M \to \boldsymbol{F}$, определенный по формуле $B(x, y) \doteqdot Ax + y$, где $x \in \boldsymbol{E}$ и $y \in M$. Так как оператор B является ограниченным и сюръективным, то по теореме о гомоморфизме образ $B(\boldsymbol{E} \times 0) = \operatorname{Im} A$ будет замкнутым в $\boldsymbol{F}$. □

Определение. Пусть $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E})$ является компактным оператором в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$. Тогда оператор $B = I - A$, где I — тождественный оператор в $\boldsymbol{E}$, называется *классическим оператором Фредго́льма* в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Теорема (о классическом операторе Фредго́льма). *Если $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E})$ компактный оператор в ба́наховом пространстве $\boldsymbol{E}$, то $B \doteqdot I - A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{E})$ фредго́льмовый.*

Доказательство. По теореме Ри́сса–Ша́удера ядро оператора B имеет конечную размерность $\dim(\ker B) = n$. Выберем дополнительное подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$, тогда $\boldsymbol{E} = \ker B \oplus M$. Докажем, что образ оператора $\operatorname{Im} B$ является замкнутым.

Рассмотрим оператор $C \doteqdot B|_M$ на подпространстве M. Его ядро $\ker C = 0$ и образ $\operatorname{Im} C = \operatorname{Im} B$. В силу свойства 1 найдется $c > 0$ т.ч. $\|Cx\| \geqslant c\|x\|$ при всех $x \in M$. Если $y \in \overline{\operatorname{Im} C}$, то существует последовательность $\{x_k\} \subset M$, т.ч. $Cx_k \to y$. Тогда $\|x_k - x_s\| \leqslant \|Cx_k - Cx_s\|/c \leqslant \|Cx_k - y\|/c + \|y - Cx_s\|/c \to 0$ при $k, s \to \infty$. Поэтому $\{x_k\}$ является последовательностью Коши и, значит, существует предел $\lim x_k = x \in M$. Отсюда в силу непрерывности оператора $Cx = y \in \operatorname{Im} C$.

По доказанной ранее формуле имеем $\operatorname{Im} B = (\ker B^*)_\perp$. Так как по теореме Ри́сса–Ша́удера ядро $\ker B^*$ имеет конечную размерность, то $\operatorname{Im} B = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$, где $\{f_k\}_{k=1}^m$ есть базис $\ker B^*$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^m$ — биортогональная система к системе $\{f_k\}_{k=1}^m$ и $L \doteqdot \operatorname{sp}\{e_1, \ldots, e_m\}$ образует ее линейную оболочку. Тогда для всякого элемента $x \in \boldsymbol{E}$ получим $x = y + z$, где $y = x - z \in \operatorname{Im} B$ и $z = \sum_{k=1}^m f_k(x)\, e_k \in L$. Таким образом, образ имеет конечную коразмерность $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} B) = m$. □

Замечание. Из леммы и последнего абзаца доказательства теоремы получается, что ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ является фредго́льмовым $A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{E})$ тогда и только тогда, когда ядро $\ker A$ и сопряженное ядро $\ker A^*$ имеют конечную размерность, а образ $\operatorname{Im} A$ является замкнутым.

Из курса линейной алгебры известна следующая *альтернатива Фредгольма*: либо система n линейных уравнений с n неизвестными имеет решение для любых свободных членов, либо соответствующая однородная система уравнений будет иметь ненулевое решение. Теоремы Фредгóльма устанавливают соответствующие связи между решениями однородного и неоднородного уравнений, определяемых классическим оператором Фредгóльма в банаховом пространстве.

Для доказательства теорем Фредгóльма предположим, что $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{E})$ является компактным оператором в банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и определены операторы $B = I - A$ и его сопряженный $B^* \doteqdot I - A^*$. По теореме Рúсса–Шáудера их ядра имеют конечную размерность $\dim(\ker B) = n$ и $\dim(\ker B^*) = m$.

Теорема (первая теорема Фредгóльма)**.** *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ задает базис решений однородного сопряженного уравнения $B^*f = 0$. Неоднородное уравнение $Bx = y$ имеет решение тогда и только тогда, когда $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Так как образ $\operatorname{Im} B$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} B = (\ker B^*)_\perp = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Поэтому получаем, что $y \in \operatorname{Im} B$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \ldots, m$. □

Теорема (вторая теорема Фредгóльма)**.** *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ задает базис решений однородного уравнения $Bx = 0$. Неоднородное сопряженное уравнение $B^*f = g$ имеет решение тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Так как образ $\operatorname{Im} B$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} B^* = (\ker B)^\perp = \bigcap_{k=1}^n \ker \delta_{x_k}$, где $\delta_{x_k} \in \boldsymbol{E}^{**}$ и $\delta_{x_k}(f) \doteqdot f(x_k)$ при $f \in \boldsymbol{E}^*$. Отсюда следует, что $g \in \operatorname{Im} B^*$ тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. □

Теорема (третья теорема, альтернатива Фредгóльма)**.** *Неоднородное уравнение $Bx = y$ имеет решение при всех $y \in \boldsymbol{E}$ в том и только в том случае, когда однородное уравнение $Bx = 0$ имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Необходимость. Пусть существует такой $x_0 \neq 0$, что $Bx_0 = 0$. Обозначим через $L_k \doteqdot \ker B^k$ ядро оператора B^k. Покажем, что все включения $L_k \subset L_{k+1}$ будут строгими. Действительно, по условию существуют $x_{k+1} \in L_{k+1}$, т.ч. $Bx_{k+1} = x_k$ при $k = 0, 1, \ldots$ Тогда $B^k x_{k+1} = x_0 \neq 0$ и поэтому $x_{k+1} \notin L_k$.

По лемме Рисса (о почти перпендикуляре) существуют $y_k \in L_k$, т.ч. $\|y_k| = 1$ и $\|y_k - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{k-1}$. Поскольку $Ay_k = y_k - By_k$, то имеют место равенства $Ay_k - Ay_s = y_k - (By_k + y_s - By_s)$. Поэтому получаем $\|Ay_k - Ay_s\| > 1/2$ при всех $k > s$, что противоречит компактности оператора A.

Достаточность. Если однородное уравнение $Bx = 0$ имеет только нулевое решение, то в силу второй теоремы неоднородное сопряженное уравнение $B^*f = g$ разрешимо при всех $g \in \boldsymbol{E}^*$. Тогда по доказанной необходимости однородное сопряженное уравнение $B^*f = 0$ имеет только нулевое решение. Значит по первой теореме неоднородное уравнение $Bx = y$ разрешимо при всех $y \in \boldsymbol{E}$. □

Теорема (четвертая теорема Фредго́льма). *Однородные уравнения $Bx = 0$ и $B^*f = 0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений, т.е. $n = m$.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ образует базис в подпространстве $\ker B$ и $\{f_i\}_{i=1}^n$ соответствующая биортогональная система функционалов из $\boldsymbol{E}^*$. Пусть $\{g_j\}_{j=1}^m$ задает базис в подпространстве $\ker B^*$ и $\{y_j\}_{i=1}^m$ соответствующая биортогональная система элементов из $\boldsymbol{E}$. Докажем невозможность следующих двух случаев.

a) $n < m$. Определим операторы $Cx \doteqdot Ax + \sum_{i=1}^n f_i(x)\, y_i$ при $x \in \boldsymbol{E}$ и $D = I - C$. Докажем, что $\ker D = 0$. Если элемент $x \in \ker D$, то $Bx = \sum_{i=1}^n f_i(x)\, y_i$. Так как $B^*g_j = 0$ при $j = 1, \ldots, m$, то $B^*g_j(x) = g_j(Bx) = f_j(x) = 0$ при $j = 1, \ldots, n$. Поэтому имеем $Bx = 0$ и, следовательно, элемент $x = \sum_{i=1}^n f_i(x)\, x_i = 0$.

Поскольку оператор C компактный, то по третьей теореме существует элемент $z \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $Dz = y_m$. Тогда $D^*g_m(z) = g_m(Dz) = g_m(y_m) = 1$. С другой стороны, имеем $g_m(Dz) = g_m(Bz) = B^*g_m(z) = 0$, что невозможно.

b) $n > m$. Определим операторы $C^*f \doteqdot A^*f + \sum_{j=1}^m f(y_j)\, f_j$ при $f \in \boldsymbol{E}^*$ и $D^* = I - C^*$. Тогда C^* сопряженный к $Cx \doteqdot Ax + \sum_{j=1}^m f_j(x)\, y_j$, а D^* сопряженный к $D = I - C$. Докажем, что $\ker D^* = 0$. Если элемент $f \in \ker D^*$, то $B^*f = \sum_{j=1}^m f(y_j)\, f_j$. Так как $Bx_i = 0$ при $i = 1, \ldots, n$, то $B^*f(x_i) = f(Bx_i) = f(y_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, m$. Поэтому имеем $B^*f = 0$ и, следовательно, элемент $f = \sum_{j=1}^m f(y_j)\, g_j = 0$.

Поскольку оператор C^* компактный, то по третьей теореме существует элемент $h \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $D^*h = f_n$. Тогда получим $D^*h(x_n) = f_n(x_n) = 1$. С другой стороны, имеем $D^*h(x_n) = h(Dx_n) = h(Bx_n) = 0$, что невозможно. □

Пример 1. Пусть $A : \boldsymbol{\ell}_p \to \boldsymbol{\ell}_p$ является диагональным оператором $(Ax)_n = \lambda_n x_n$, где $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Обозначим через $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n = 0\}$ и $M = \mathbb{N} \setminus N$. Тогда имеем $\boldsymbol{\ell}_p = \boldsymbol{\ell}_p(N) \oplus \boldsymbol{\ell}_p(M)$. Если оператор $A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{\ell}_p)$ фредго́льмовый, то его ядро $\ker A = \boldsymbol{\ell}_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\operatorname{Im} A = A(\boldsymbol{\ell}_p(M))$ замкнут. Следовательно, множество N является конечным и оператор $A : \boldsymbol{\ell}_p(M) \to \boldsymbol{\ell}_p(M)$ имеет ограниченный обратный, т.е. выполняется неравенство $\sup_{n \in M} |\lambda_n|^{-1} < \infty$. Таким образом, оператор $A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{\ell}_p)$ фредго́льмовый тогда и только тогда, когда нуль 0 не является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$.

Пример 2. Пусть $A : \boldsymbol{L}_p[a, b] \to \boldsymbol{L}_p[a, b]$ является оператором умножения на функцию $Af(x) = \varphi(x) f(x)$, где $f \in \boldsymbol{L}_p[a, b]$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Оператор является ограниченным $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{L}_p)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \boldsymbol{L}_\infty[a, b]$. Обозначим через $N = \{x \in [a, b] \mid \varphi(x) = 0\}$ и $M = [a, b] \setminus N$. Тогда получаем представление $\boldsymbol{L}_p[a, b] = \boldsymbol{L}_p(N) \oplus \boldsymbol{L}_p(M)$. Если оператор $A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{L}_p)$ фредго́льмовый, то его ядро $\ker A = \boldsymbol{L}_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\operatorname{Im} A = A(\boldsymbol{L}_p(M))$ замкнут. Поэтому множество N имеет меру нуль и оператор $A : \boldsymbol{L}_p(M) \to \boldsymbol{L}_p(M)$ имеет ограниченный обратный, т.е. выполняется неравенство $\operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |\varphi(x)|^{-1} < \infty$. Таким образом, оператор $A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{L}_p)$ фредго́льмовый тогда и только тогда, когда он обратим, т.е. имеет место неравенство $\operatorname{ess\,inf}_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| > 0$.

12 ЭРМИ́ТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Линейный оператор $A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ называется *эрмитовым* в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, если $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ при всех $x, y \in \boldsymbol{H}$. Множество $\mathcal{H}(\boldsymbol{H})$ всех эрмитовых операторов образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. По теореме Хе́ллингера–Те́плица $\mathcal{H}(\boldsymbol{H}) \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{H})$ является действительным подпространством в пространстве $\mathcal{L}(\boldsymbol{H})$. Рассмотрим свойства спектра эрмитова оператора.

1. *Если $A \in \mathcal{H}(\boldsymbol{H})$, то собственные значения $\lambda \in \sigma_p(A)$ действительны $\lambda \in \mathbb{R}$, а собственные подпространства $H_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ортогональны $H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2}$.*

Если $Ae = \lambda e$ и $\|e\| = 1$, то $\lambda = \langle Ae, e\rangle = \langle e, Ae\rangle = \overline{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$. Отсюда, если $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ и $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, то $\lambda_1\langle e_1, e_2\rangle = \langle Ae_1, e_2\rangle = \langle e_1, Ae_2\rangle = \lambda_2\langle e_1, e_2\rangle$, т.е. $e_1 \perp e_2$.

2. *Критерий Ве́йля: если $A \in \mathcal{H}(\boldsymbol{H})$, то спектр $\sigma(A) = \sigma_l(A)$ предельный.*

Имеем $\sigma_l(A) \subset \sigma(A)$. Пусть $\lambda \notin \sigma_l(A)$. Тогда $\|A_\lambda x\| \geqslant c\|x\|$ при некотором $c > 0$. Отсюда следует $\ker A_\lambda = 0$. Докажем, что образ $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнут. Если $A_\lambda x_n \to y$, то $\|x_n - x_m\| \leqslant \|A_\lambda x_n - A_\lambda x_m\|/c \leqslant \|A_\lambda x_n - y\|/c + \|y - A_\lambda x_m\|/c \to 0$. Поэтому $\{x_n\}$ есть последовательность Коши́ и, значит, существует предел $\lim x_n = x$. Тогда в силу непрерывности оператора получим $A_\lambda x = y \in \operatorname{Im} A_\lambda$, т.е. образ $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнут.

Если $y \perp \operatorname{Im} A_\lambda$ и $y \neq 0$, то $\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle x, A_{\overline{\lambda}} y\rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Отсюда получаем $A_{\overline{\lambda}} y = A_\lambda y = 0$, что невозможно. Поэтому по теореме об ортогональном разложении $\operatorname{Im} A_\lambda = \boldsymbol{H}$. Следовательно, оператор A_λ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(A)$.

3. *Если $A \in \mathcal{H}(\boldsymbol{H})$, то спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ действительный.*

Если $\lambda = \alpha + \boldsymbol{i}\beta$ и $\beta \neq 0$, то $A_\lambda = A_\alpha + \boldsymbol{i}\beta I$ и справедливо следующее равенство:

$$\|A_\lambda x\|^2 = \langle A_\alpha x, A_\alpha x\rangle - \boldsymbol{i}\beta\langle A_\alpha x, x\rangle + \boldsymbol{i}\beta\langle x, A_\alpha x\rangle + \beta^2\langle x, x\rangle = \|A_\alpha x\|^2 + \beta^2\|x\| \,.$$

Поэтому $\inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| \geqslant |\beta|$ и, следовательно, по критерию Ве́йля $\lambda \notin \sigma(A)$.

4. *Если $A \in \mathcal{H}(\boldsymbol{H})$, то спектральный радиус равен $r(A) = \|A\|$ норме.*

Так как $A^2 = AA$, то $\|A^2\| \leqslant \|A\|^2$. В силу неравенства Коши́–Буняко́вского

$$\|A^2\| = \sup_{x \in S} \|A^2 x\| = \sup_{x,y \in S} \langle A^2 x, y\rangle = \sup_{x,y \in S} \langle Ax, Ay\rangle \geqslant \sup_{x \in S} \langle Ax, Ax\rangle = \|A\|^2,$$

где $S \subset \boldsymbol{H}$ — единичный шар. Поэтому $\|A^2\| = \|A\|^2$ и, следовательно, получаем $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. По теореме о спектральном радиусе $r(A) = \lim \sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|} = \|A\|$.

5. *Если $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{H}) \cap \mathcal{H}(\boldsymbol{H})$ компактный эрмитовый оператор, то $\sigma_p(A) \neq \emptyset$.*

Пусть $\sigma_p(A) = \emptyset$ и $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. Тогда по теореме Ри́сса–Ша́удера $\sigma(A) = \{0\}$ и по свойству 4 спектральный радиус $r(A) = \|A\| = 0$, т.е. $A = 0$, что невозможно.

Теорема (Ги́льберта–Шми́дта). *Пусть задан $A \in \mathcal{K}(\boldsymbol{H}) \cap \mathcal{H}(\boldsymbol{H})$ компактный эрмитовый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда существует полная ортонормированная система $\{e_n\} \subset \boldsymbol{H}$, состоящая из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. В случае $\dim \boldsymbol{H} < \infty$ теорема доказывается в курсе линейной алгебры. Рассмотрим случай $\dim \boldsymbol{H} = \infty$. Поскольку оператор A компактный, то собственных значений не более, чем счетно $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$, и при этом собственные значения $\lambda_n \neq 0$ имеют конечную кратность $\dim H_{\lambda_n} < \infty$, где $H_\lambda \doteqdot \ker A_\lambda$.

Так как оператор A эрмитовый, то его собственные значения действительны, а собственные подпространства ортогональны $H_{\lambda_n} \perp H_{\lambda_m}$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$. В каждом подпространстве H_{λ_n} выберем ортонормированный базис из собственных векторов с собственным значением λ_n. Тогда объединение этих ортонормированных систем образует ортонормированную систему $\{e_n\}$ в пространстве $\boldsymbol{H}$.

Пусть $L \doteqdot \overline{\text{sp}}\{e_n\}$ замкнутая линейная оболочка системы $\{e_n\}$. Так как в силу непрерывности L является инвариантным подпространством оператора $A : L \to L$, то в силу эрмитовости ортогональное дополнение $L^\perp$ будет также инвариантным подпространством оператора $A : L^\perp \to L^\perp$. По свойству 5 заключаем, что $L^\perp$ имеет собственный вектор, что невозможно по построению. Поэтому $L^\perp = 0$ и по теореме об ортогональном разложении получим, что $\boldsymbol{H} = L \oplus L^\perp = L$. □

Пример 1. Примером компактного эрмитова оператора в пространстве $\boldsymbol{L}_2([a,b])$ является *интегральный оператор Ги́льберта–Шми́дта*

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy, \quad f \in \boldsymbol{L}_2([a,b]),$$

у которого ядро удовлетворяет условиям: $\overline{K(y,x)} = K(x,y)$ и $K(x,y) \in \boldsymbol{L}_2([a,b]^2)$. Первое условие обеспечивает эрмитовость, а второе компактность. Обозначим через $\{\lambda_n\}$ ненулевые собственные значения оператора A, причем каждое из них взято столько раз, какова его кратность, и они упорядочены $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$

По теореме Ги́льберта–Шми́дта существует ортонормированная система $\{e_n\}$ собственных функций оператора $Ae_n = \lambda_n e_n$, т.ч. всякий элемент $f \in \boldsymbol{L}_2([a,b])$ представляется в виде $f = h + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$, где $h \in \ker A$. Отсюда вытекает равенство $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$, где ряд сходится в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$.

Докажем, что ядро интегрального оператора $K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(x)\overline{e_n(y)}$ п.в., где ряд сходится в $\boldsymbol{L}_2([a,b]^2)$. Поскольку функции $\varphi_n(x,y) = e_n(x)\overline{e_n(y)}$ образуют ортонормированную систему в $\boldsymbol{L}_2([a,b]^2)$ и $\langle K, \varphi_n \rangle = \langle Ae_n, e_n \rangle = \lambda_n$, то ряд Фурье́ функции $K(x,y)$ сходится к функции $F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x,y)$. Так как система функций $h(x,y) = f(x)\overline{g(y)}$ полна в $\boldsymbol{L}_2([a,b]^2)$ и имеют место равенства

$$\langle K, h \rangle = \langle Ag, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, e_n \rangle \, \langle e_n, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \varphi_n, h \rangle = \langle F, h \rangle,$$

то $K(x,y) = F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(x)\overline{e_n(y)}$ п.в., где ряд сходится в $\boldsymbol{L}_2([a,b]^2)$.

Задачей Шту́рма–Лиуви́лля является нахождение и доказательство полноты системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка

$$Du(x) = -\big(p(x)\,u'(x)\big)' + q(x)\,u(x), \quad x \in [a,b].$$

Будем предполагать, что $p(x) \in \boldsymbol{C}^1[a,b]$ и $p(x) > 0$, а $q(x) \in \boldsymbol{C}[a,b]$ и $q(x) \in \mathbb{R}$. Оператор D определим на подпространстве $L \subset \mathrm{W}_2^2[a,b]$ функций u, у которых производная u' абсолютно непрерывна, а вторая производная в смысле Со́болева $u'' \in \boldsymbol{L}_2[a,b]$, и, кроме того, для всех функций $u \in L$ должны выполняться два граничных условия $a_0u(a) + a_1u'(a) = 0$ и $b_0u(b) + b_1u'(b) = 0$ с действительными коэффициентами и т.ч. $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$ и $b_0^2 + b_1^2 \neq 0$.

Оператор D является симметричным в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$, т.е. $\langle Du, v\rangle = \langle u, Dv\rangle$ при всех $u, v \in L$ и подпространство L всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$. В самом деле, имеем

$$\langle Du, v\rangle - \langle u, Dv\rangle = \textstyle\int_a^b (p\,u')'\overline{v} - u(p\,\overline{v}')'\,dx = p(u'\overline{v} - u\,\overline{v}')|_a^b = 0.$$

Последнее равенство вытекает из граничных условий, поскольку определители

$$\det\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \overline{v}(a) & \overline{v}'(a)\end{vmatrix} = 0, \quad \det\begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \overline{v}(b) & \overline{v}'(b)\end{vmatrix} = 0.$$

Лемма. *Если ядро* $\ker D = 0$*, то существует функция Гри́на* $G(x,y)$*, т.ч.*

a) функция $G(x,y)$ *действительная, симметричная и непрерывная в* $[a,b]^2$*;*

b) при $y \neq x$ *функция* $G(x,y)$ *дважды непрерывно дифференцируема по* y*;*

c) при $y \neq x$ *удовлетворяет уравнению* $D_yG(x,y) = 0$ *и граничным условиям;*

d) при $y = x \in (a,b)$ *производная* $G'_y(x,y)$ *по* y *имеет разрыв первого рода, равный* $G'_y|_{x-0}^{x+0} \doteqdot G'_y(x,x+0) - G'_y(x,x-0) = -1/p(x)$*.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 два действительных решения уравнения $Du = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничным условиям. Эти решения линейно независимы, т.к. ядро $\ker D = 0$, и любое решение принимает вид $u = c_1u_1 + c_2u_2$. Поэтому определитель Вро́нского $u_1u_2' - u_1'u_2$ не обращается в нуль на $[a,b]$, а функция $\Delta \doteqdot p(u_1u_2' - u_1'u_2)$ является константой не равной нулю, поскольку ее производная равна нулю $\Delta' = u_1(p\,u_2')' - u_2(p\,u_1')' = 0$.

При фиксированном x полагаем $G(x,y) \doteqdot c_1u_1(y)$ при $y \leqslant x$ и $G(x,y) \doteqdot c_2u_2(y)$ при $y \geqslant x$. Выберем c_1 и c_2 так, чтобы функция Грина $G(x,y)$ была непрерывной, а производная имела указанный скачок в точке x. Тогда имеем $c_1u_1(x) - c_2u_2(x) = 0$ и $c_1u_1'(x) - c_2u_2'(x) = 1/p(x)$. Поскольку Δ является константой не равной нулю, то достаточно взять $c_1 = -u_2(x)/\Delta$ и $c_2 = -u_1(x)/\Delta$, чтобы функция

$$G(x,y) = -\tfrac{1}{\Delta}\begin{cases} u_1(y)\,u_2(x), & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b; \\ u_1(x)\,u_2(y), & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b; \end{cases}$$

удовлетворяла всем условиям леммы. □

Теорема. *Пусть* $\ker D = 0$ *и* $f \in \boldsymbol{L}_2([a,b])$. *Для того чтобы функция* $u \in L$ *была решением уравнения* $Du = f$ *п.в. и удовлетворяла граничным условиям, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство* $u = Af$, *где*

$$Af(x) \doteqdot \int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy\,, \quad x \in [a,b],$$

а $G(x,y)$ *является функцией Гри́на оператора* D, *определенной в лемме.*

Доказательство. Докажем, что $ADu = u$ при всех $u \in L$. Пусть $Du = f$ п.в. на отрезке $[a,b]$. Интегрируя по частям и используя свойства функции Гри́на $G(x,y)$, а также граничные условия для функций u и G, мы получим равенство

$$\int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy = \int_a^x G(x,y)\, Du\, dy + \int_x^b G(x,y)\, Du\, dy = \int_a^b D_y(G)\, u\, dy +$$

$$+ p\,(G'_y\, u - G\, u')\,|_a^{x-0} + p\,(G'_y\, u - G\, u')\,|_{x+0}^b = p\,(G'_y\, u - G\, u')\,|_{x+0}^{x-0} = u(x).$$

Следовательно, имеет место равенство $ADu = u$ для всех $u \in L$.

Докажем, что $DAf = f$ п.в. на $[a,b]$, где $f \in \boldsymbol{L}_2([a,b])$. В самом деле, используя симметричность операторов A и D, получим $\langle DAf, v\rangle = \langle f, ADv\rangle = \langle f, v\rangle$ для всех $v \in L$. Так как множество L всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2([a,b])$, то $DAf = f$ п.в. на $[a,b]$. Таким образом, оператор A является обратным к оператору D. □

Следствие. *Существует полная в пространстве* $\boldsymbol{L}_2([a,b])$ *ортонормированная система* $\{e_n\} \subset L$, *состоящая из собственных функций оператора* D.

Пусть $\ker D = 0$. Тогда существование полной ортонормированной системы $\{e_n\}$ собственных функций оператора D вытекает из теоремы Ги́льберта–Шми́дта, так как собственные функции оператора D одновременно являются собственными функциями интегрального оператора, ядром которого является функция Гри́на.

Пусть $\ker D \neq 0$. Поскольку оператор D может иметь не более, чем счетное множество собственных значений, то найдется такое действительное число λ_0, которое не является собственным значением D. Тогда оператор $D_0 = \lambda_0 I - D$ будет удовлетворять условию $\ker D_0 = 0$. Собственные функции оператора D_0 являются собственными функциями оператора D и наоборот, а их собственные значения отличаются на число λ_0. Следовательно, оператор D_0 одновременно с оператором D обладает полной системой собственных функций.

Пример 2. Рассмотрим оператор $Du = -u''$ и граничные условия $u(0) = u(1) = 0$. Взяв два решения x и $1-x$ уравнения $Du = 0$, построим функцию Гри́на

$$G(x,y) = \begin{cases} y(1-x)\,, & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1; \\ x(1-y)\,, & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Затем, решая дифференциальное уравнение $u'' + \lambda u = 0$ с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$, находим собственные значения $\lambda_n = \pi^2 n^2$ и ортонормированную систему собственных функций $e_n(x) = \sqrt{2}\sin \pi n x$, которая полна в $\boldsymbol{L}_2([0,1])$.