1 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $X \times Y \doteqdot \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ — прямое произведение множеств X и Y.

Определение. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* в X, если

a) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ при всех $x, y \in X$ (симметричность);

b) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ при всех $x, y, z \in X$ (неравенство треугольника);

c) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (невырожденность).

Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*. Если выполнены только первые два условия метрики, то функция $\rho(x, y)$ называется *полуметрикой*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся* $x_n \to x$ к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant m$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши́*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\rho(x_k, x_l) < \varepsilon$ при всех $k, l \geqslant m$.

Если всякая последовательность Коши́ является сходящейся к некоторой точке $x \in X$, то метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*.

Всюду далее через $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ будем обозначать линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел.

Определение. Функция $p : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$ называется *нормой* в $\boldsymbol{E}$, если

a) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \boldsymbol{E}$ (однородность);

b) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ (неравенство треугольника);

c) $p(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (невырожденность).

Пара $(\boldsymbol{E}, p)$ называется *нормированным пространством*. Если выполнены только первые два условия нормы, то функция $p(x)$ называется *полунормой* в $\boldsymbol{E}$. Норма обычно обозначается через $\|x\| \doteqdot p(x)$. Метрика в нормированном пространстве определяется равенством $\rho(x, y) \doteqdot \|x - y\|$. Полное нормированное пространство называется *ба́наховым пространством*.

Пример 1. Нормированное пространство $\mathbb{F}^n$ всех элементов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой $\|x\| \doteqdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$, где $x_k \in \mathbb{F}$, называется *евклидовым пространством*.

Пример 2. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *ограниченной* на множестве X, если существует такое число $c > 0$, что $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in X$. Нормированное пространство $\boldsymbol{B}(X)$, состоящее из всех ограниченных функций $f : X \to \mathbb{F}$ с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством ограниченных функций*.

Пример 3. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *непрерывной* на метрическом пространстве X, если для любого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при всех $y \in X$, $\rho(x, y) < \delta$. Нормированное пространство $\boldsymbol{C}(X)$, состоящее из всех ограниченных и непрерывных функций $f : X \to \mathbb{F}$ с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством непрерывных функций*.

Открытый и замкнутый шар в метрическом пространстве (X, ρ) обозначается через $U_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) < r\}$ и $S_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) \leqslant r\}$ соответственно. Для каждого множества $A \subset X$ введем следующие обозначения:

$\mathring{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0\,,\ U_r(x) \subset A\}$ — множество *внутренних* точек;

$\overline{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0\,,\ U_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$ — множество точек *прикосновения*;

$\tilde{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0\,,\ U_r(x) \cap A = \{x\}\}$ — множество *изолированных* точек;

$\acute{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0\,,\ U_r(x) \cap A$ бесконечно$\}$ — множество *предельных* точек;

Определения. Множество $\mathring{A}$ называется *внутренностью* (или открытым ядром) множества A. Множество $\overline{A}$ называется *замыканием* множества A.

Если $\mathring{A} = A$, то множество A называется *открытым* в пространстве X.

Если $\overline{A} = A$, то множество A называется *замкнутым* в пространстве X.

Если $\overline{A} = X$, то множество A называется *всюду плотным* в пространстве X.

Если $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, то множество A называется *нигде не плотным* в пространстве X.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *сепара́бельным*, если существует счетное и всюду плотное подмножество $A \subset X$.

Рассмотрим свойства операции замыкания в метрическом пространстве (X, ρ).

1. $\overline{A} = \{x \in X \mid \exists\, x_n \in A\,,\ x_n \to x\}$.

Точка $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда существуют $x_n \in A$, т.ч. $\rho(x, x_n) < 1/n$.

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Если $x \in \overline{A \cup B}$, то существуют $x_n \in A \cup B$, т.ч. $x_n \to x$. Тогда найдется подпоследовательность x_{n_k}, принадлежащая одному из множеств A или B, т.ч. $x_{n_k} \to x$. Поэтому $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Обратное включение очевидно.

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Ясно, что $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Пусть $x \in \overline{\overline{A}}$, тогда существует последовательность $x_n \in \overline{A}$, т.ч. $x_n \to x$. Кроме того, для каждого n найдется последовательность $x_{nm} \in A$, т.ч. $x_{nm} \to x_n$. Выберем подпоследовательность m_k, т.ч. $\rho(x_{nm_k}, x_n) < 1/k$. Тогда в силу неравенства треугольника $\rho(x_{nm_n}, x) \leqslant \rho(x_{nm_n}, x_n) + \rho(x_n, x)$ получим $x_{nm_n} \to x$.

Лемма. *Пространство $\boldsymbol{B}(X)$ является ба́наховым.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ — последовательность Коши в пространстве $\boldsymbol{B}(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и при всех $k, l \geqslant m$. Таким образом, $\{f_n\}$ является равномерной последовательностью Коши. По критерию Коши она сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и при всех $n \geqslant m$. Отсюда $\|f_n - f\| < \varepsilon$ при $n \geqslant m$. Поскольку $\|f\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_n\|$, то $f \in \boldsymbol{B}(X)$. Следовательно, последовательность $\{f_n\}$ сходится в пространстве $\boldsymbol{B}(X)$. $\square$

Определение. Отображение $F : X \to Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называется *изометричным*, если $\rho_Y(F(x), F(y)) = \rho_X(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Если, кроме того, образ $F(X) = Y$, то отображение F называется *изометрией*, а пространства X и Y называются *изометричными*.

Каждое изометричное отображение, очевидно, является непрерывным, так как если $x_n \to x$, то $\rho(F(x_n), F(x)) = \rho(x_n, x) \to 0$ и поэтому $F(x_n) \to F(x)$. Если отображение $F : X \to Y$ является изометрией, то оно будет биективным и обратное отображение $F^{-1} : Y \to X$ также является изометрией.

Теорема (о пополнении)**.** *Для каждого метрического пространства (X, ρ_X) существует изометричное отображение $F : X \to Y$ в полное метрическое пространство (Y, ρ_Y), т.ч. образ $F(X) \subset Y$ является всюду плотным в Y. При этом любые два таких пространства (Y, ρ_Y) являются изометричными.*

Доказательство. Пусть $f_x(y) \doteqdot \rho_X(x, y) - \rho_X(y, x_0)$, где $x_0 \in X$ фиксировано. Тогда $|f_x(y)| \leqslant \rho_X(x, x_0)$ при всех $y \in X$. Следовательно, $f_x \in \boldsymbol{B}(X)$ при всех $x \in X$. Определим $F : X \to \boldsymbol{B}(X)$ по формуле $F(x) \doteqdot f_x$ и положим $Y \doteqdot \overline{F(X)}$. Так как

$$\rho_Y(f_{x_1}, f_{x_2}) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = \sup_{y \in X} |\rho_X(x_1, y) - \rho_X(x_2, y)| = \rho_X(x_1, x_2),$$

то отображение F является изометричным. Пусть существуют два отображения $F : X \to Y$ и $G : X \to Z$, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда для каждого $y \in Y$ найдутся $x_n \in X$, т.ч. $F(x_n) \to y$ и, следовательно, $G(x_n) \to z$. Определим отображение $H : Y \to Z$ по формуле $H(y) \doteqdot z$. Тогда при всех $y, y' \in Y$

$$\rho_Y(y, y') = \lim_{n \to \infty} \rho_Y(F(x_n), F(x'_n)) = \lim_{n \to \infty} \rho_X(x_n, x'_n) = \lim_{n \to \infty} \rho_Z(G(x_n), G(x'_n)) = \rho_Z(z, z') .$$

Таким образом, отображение H является изометрией пространств Y и Z. □

Определение. Отображение $F : X \to X$ метрического пространства (X, ρ) в себя называется *сжимающим*, если найдется такое число $0 < \lambda < 1$, что выполняется неравенство $\rho(F(x), F(y)) \leqslant \lambda \rho(x, y)$ при всех $x, y \in X$.

Каждое сжимающее отображение является непрерывным, так как если $x_n \to x$, то $\rho(F(x_n), F(x)) \leqslant \lambda \rho(x_n, x) \to 0$ и поэтому $F(x_n) \to F(x)$.

Теорема (принцип сжимающих отображений)**.** *Пусть $F : X \to X$ — сжимающее отображение полного метрического пространства (X, ρ). Тогда существует и единственная неподвижная точка $x \in X$, т.е. $F(x) = x$.*

Доказательство. Существование. Пусть $x_0 \in X$ и $x_1 \doteqdot F(x_0)$, $x_2 \doteqdot F(x_1)$, …, т.е. $x_n = F^n(x_0)$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим при $n < m$

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{m-1} \rho(F^k(x_0), F^k(x_1)) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k \rho(x_0, x_1) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \rho(x_0, x_1) .$$

Поэтому $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Так как $F(x_{n-1}) = x_n$, то, переходя к пределу и используя непрерывность F, получим $F(x) = x$. Если существует еще одна точка $y \in X$, т.ч. $F(y) = y$, то из неравенства $\rho(x, y) = \rho(F(x), F(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ следует, что $\rho(x, y) = 0$, т.е. имеет место равенство $x = y$. $\square$

Лемма (о вложенных шарах)**.** *Пусть в полном метрическом пространстве* (X, ρ) *задана последовательность вложенных шаров* $S_{r_1}(x_1) \supset S_{r_2}(x_2) \supset \ldots$ *и предел* $\lim r_n = 0$. *Тогда пересечение* $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$ *не пусто.*

Доказательство. Поскольку по условию $\rho(x_n, x_m) \leqslant r_n$ при $n < m$ и $\lim r_n = 0$, то $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $\rho(x_n, x_m) \leqslant r_n$ при $m \to \infty$, получим $\rho(x_n, x) \leqslant r_n$. Таким образом, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{r_n}(x_n)$. $\square$

Пример 4. Построим пример последовательности вложенных шаров в полном метрическом пространстве с пустым пересечением. В множестве $\mathbb{N}$ определим метрику $\rho(n, m) \doteqdot 1 + 1/(n + m)$. Тогда шары $S_{1+1/2n}(n) = \{n, n + 1, \ldots\}$ являются вложенными и их пересечение пусто. Заметим, что это метрическое пространство $(\mathbb{N}, \rho)$ полно, так как всякая последовательность Коши́ стационарна, т.е. начиная с некоторого члена все элементы последовательности равны.

Определение. Множество $A \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется множеством *первой категории*, если $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества $A_n \subset X$ нигде не плотны. Множество $A \subset X$ называется множеством *второй категории*, если оно не является множеством первой категории.

Теорема (Бэ́ра)**.** *Каждое полное метрическое пространство* (X, ρ) *является множеством второй категории.*

Доказательство. Предположим, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества $A_n \subset X$ нигде не плотны. Тогда существуют $x_1 \in X \setminus \overline{A}_1$ и $S_{r_1}(x_1) \subset X \setminus \overline{A}_1$. Аналогично, существуют $x_2 \in S_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и $S_{r_2}(x_2) \subset S_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и т.д. Поэтому имеем последовательность вложенных шаров $S_{r_1}(x_1) \supset S_{r_2}(x_2) \supset \ldots$, при этом можно считать, что предел $\lim r_n = 0$. По лемме существует точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{r_n}(x_n)$. Отсюда $x \notin A_n$ при всех n, что невозможно. Таким образом, X не является множеством первой категории. $\square$

Пример 5. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ является множеством первой категории, т.к. $\mathbb{Q}$ есть счетное объединение точек. По теореме Бэ́ра множество действительных чисел $\mathbb{R}$ будет множеством второй категории. Отсюда множество иррациональных чисел $\mathbb{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ также будет множеством второй категории.

2 ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathbf{2}^X$ обозначает множество всех подмножеств множества X, включая пустое множество $\emptyset$. Подмножество $S \subset \mathbf{2}^X$ называется *системой множеств* в X.

Определение. Система множеств $\tau \subset \mathbf{2}^X$ называется *топологией* X, если

a) пустое множество $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$;

b) объединение $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ для всякой системы множеств $A_i \in \tau$, где $i \in I$;

c) пересечение $\bigcap_{k=1}^{n} B_k \in \tau$ для всякой конечной системы множеств $B_k \in \tau$, где $k = 1, \ldots, n$.

Пара (X, τ) называется *топологическим пространством*. Множества $A \in \tau$ называются *открытыми*, а их дополнения $A' \doteqdot X \setminus A$ — *замкнутыми*.

Замыканием $\overline{A} \subset X$ множества $A \subset X$ называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Множество $B \subset X$ называется *окрестностью* точки $x \in X$, если существует такое открытое множество $A \in \tau$, что $x \in A \subset B$.

Система открытых множеств $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии* τ, если всякое открытое множество $A \in \tau$ является объединением множеств из β.

Определение. Пусть (X, ρ) —метрическое пространство. Тогда система множеств $\tau \doteqdot \{A \subset X \mid \mathring{A} = A\}$ называется *топологией метрического пространства*.

Докажем, что τ является топологией X. Если $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, то $x \in A_i$ при некотором $i \in I$. Тогда существует шар $U_r(x) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Если $x \in \bigcap_{k=1}^{n} B_k$, то $x \in B_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Тогда существуют шары $U_{r_k}(x) \subset B_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Пусть $r \doteqdot \min_{1\leqslant k\leqslant n} r_k$, тогда $U_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^{n} B_k$. Кроме того, по определению система всех открытых шаров $U_r(x) \subset X$ образует базу топологии метрического пространства.

Определение. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) — топологические пространства. Система множеств $\tau \doteqdot \{A \subset X \times Y \mid \forall\,(x, y) \in A,\ \exists B \in \tau_X,\ \exists C \in \tau_Y\ :\ (x, y) \in B \times C \subset A\}$ называется *топологией произведения топологических пространств* $X \times Y$.

Докажем, что τ является топологией произведения $X \times Y$. Если $(x, y) \in \bigcup_{i\in I} A_i$, то $(x, y) \in A_i$ при некотором $i \in I$. Следовательно, существуют $B \in \tau_X$ и $C \in \tau_Y$, т.ч. $(x, y) \in B \times C \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Если $(x, y) \in \bigcap_{k=1}^{n} B_k$, то $(x, y) \in B_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Поэтому существуют $C_k \in \tau_X$ и $D_k \in \tau_Y$, т.ч. $(x, y) \in C_k \times D_k \subset B_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Пусть $C \doteqdot \bigcap_{k=1}^{n} C_k$ и $D \doteqdot \bigcap_{k=1}^{n} D_k$, тогда $(x, y) \in C \times D \subset \bigcap_{k=1}^{n} B_k$. Кроме того, по определению система множеств $\tau_X \times \tau_Y \doteqdot \{B \times C \mid B \in \tau_X,\ C \in \tau_Y\}$ составляет базу топологии произведения топологических пространств.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если для любого $A \in \tau_Y$ прообраз $f^{-1}(A) \in \tau_X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *открытым*, если для любого $A \in \tau_X$ его образ $f(A) \in \tau_Y$. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно является биективным, непрерывным и открытым, т.е. f и f^{-1} являются непрерывными отображениями.

Теорема. *Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) являются метрическими пространствами. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) отображение $f : X \to Y$ непрерывно;

b) для каждого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. для всех $y \in X$: $\rho_X(x, y) < \delta$ выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$;

c) для любой сходящейся последовательности $x_n \to x$ в X ее образ является сходящейся последовательностью $f(x_n) \to f(x)$ в Y.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ непрерывно и $\varepsilon > 0$, тогда для каждого $x \in X$ существует шар $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(x))$, что равносильно b). Пусть выполнено b) и последовательность сходится $x_n \to x$ в X, т.е. для заданного $\delta > 0$ существует m, т.ч. $\rho_X(x, x_n) < \delta$ для всех $n \geqslant m$. В силу b) выполняется $\rho_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant m$. Отсюда $f(x_n) \to f(x)$, т.е. выполнено c). Пусть $A \subset Y$ замкнутое множество. Если $x_n \in f^{-1}(A)$ и $x_n \to x$, то по условию c) получим $f(x_n) \to f(x) \in A$, т.е. $x \in f^{-1}(A)$. Таким образом, прообраз замкнутого множества замкнут. Это равносильно тому, что прообраз открытого множества является открытым. □

Определение. $(\boldsymbol{E}, \tau)$ называется *топологическим линейным пространством*, если в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ задана топология τ, относительно которой линейные операции в $\boldsymbol{E}$ непрерывны по совокупности переменных, т.е.

a) операция сложения $f : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, где $f(x, y) = x + y$, непрерывна;

b) операция умножения $g : \mathbb{F} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, где $g(\lambda, x) = \lambda x$, непрерывна.

Из непрерывности линейных операций по совокупности переменных вытекает, что они непрерывны по каждой переменной в отдельности. Поэтому операция сдвига $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, где $f(x) = x + x_0$ и $x_0 \in \boldsymbol{E}$, и операция растяжения $g : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, где $g(x) = \lambda_0 x$, $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ и $\lambda_0 \neq 0$, являются гомеоморфизмами.

Определение. $(\boldsymbol{E}, \rho)$ называется *метрическим линейным пространством*, если в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$ задана метрика $\rho(x, y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

a) метрика инвариантна, т.е. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ при всех $x, y, z \in \boldsymbol{E}$;

b) операция умножения $g : \mathbb{F} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, где $g(\lambda, x) = \lambda x$, непрерывна.

Функция $\|x\| \doteqdot \rho(x, 0)$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$ называется *квазинормой*. Она удовлетворяет неравенству треугольника $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ и не вырождена, т.е. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Однако свойство однородности нормы $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ может быть не выполненным.

Лемма. *Каждое метрическое линейное пространство $(\boldsymbol{E}, \rho)$ является топологическим линейным пространством. Каждое нормированное пространство $(\boldsymbol{E}, p)$ является метрическим линейным пространством.*

Доказательство. Для доказательства непрерывности операции сложения $x+y$ в метрическом линейном пространстве нужно использовать неравенство треугольника для квазинормы: $\|(x+y)-(x_0+y_0)\| \leqslant \|x-x_0\|+\|y-y_0\| < \varepsilon$, если $\|x-x_0\| < \varepsilon/2$ и $\|y-y_0\| < \varepsilon/2$. Для доказательства непрерывности операции умножения λx в нормированном пространстве нужно использовать следующее неравенство:

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leqslant |\lambda - \lambda_0|\,\|x_0\| + |\lambda_0|\,\|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0|\,\|x - x_0\| < \varepsilon,$$

если $|\lambda_0| < a$, $\|x_0\| < b$, $\|x - x_0\| < \varepsilon/3a$ и $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon/3b < a$. □

Определение. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) являются метрическими пространствами. Отображение $f : X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x, y \in X$: $\rho_X(x, y) < \delta$ выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Система $\{f_i\}_{i \in I}$ отображений $f_i : X \to Y$ называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x, y \in X$: $\rho_X(x, y) < \delta$ и $i \in I$ выполняется неравенство $\rho_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$.

Пример 1. 1) Отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет *условию Ли́пшица*, если существует $c > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) \leqslant c\,\rho_X(x, y)$ при всех $x, y \in X$. Тогда f является равномерно непрерывным. 2) Метрика $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ является равномерно непрерывной функцией в (X, ρ). Для доказательства нам нужно ввести метрику в $X \times X$, например, по формуле $\rho_{X\times X}((x, y), (x_0, y_0)) \doteqdot \rho(x, x_0) + \rho(y, y_0)$, а затем применить неравенство $|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(y, y_0)$.

Определение. Множество $A \subset \boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$ называется *ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. при всех $x \in A$ и $|\lambda| < \delta$ выполняется неравенство $\|\lambda x\| < \varepsilon$, где $\|x\| \doteqdot \rho(x, 0)$ квазинорма.

1. *Всякое ограниченное множество $A \subset X$ содержится в некотором шаре $A \subset U_r(0)$. В нормированном пространстве верно обратное утверждение.*

В самом деле, по определению найдется такое n, что $\|x/n\| < \varepsilon$ при всех $x \in A$. Поэтому $\|x\| \leqslant n\|x/n\| < n\varepsilon \doteqdot r$ при всех $x \in A$. Обратно, если $\|x\| < r$ при всех $x \in A$, то по свойству однородности нормы $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| < \varepsilon$, если $|\lambda| < \delta \doteqdot \varepsilon/r$.

2. *Если последовательность сходится $x_n \to y$ в $(\boldsymbol{E}, \rho)$, то она ограничена.*

В силу непрерывности операции умножения λx в нуле существует $\sigma > 0$, т.ч. $\|\lambda(x_n - y)\| < \varepsilon/2$ при всех $|\lambda| < \sigma$ и $n > m$. А в силу непрерывности этой операции в нуле по переменной λ имеем $\|\lambda y\| < \varepsilon/2$ и $\|\lambda(x_n - y)\| < \varepsilon/2$ при всех $|\lambda| < \delta < \sigma$ и $n = 1, \ldots, m$. Поэтому $\|\lambda x_n\| \leqslant \|\lambda y\| + \|\lambda(x_n - y)\| < \varepsilon$ при всех n и $|\lambda| < \delta$.

Определение. Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ линейных пространств над полем $\mathbb{F}$ называется *линейным*, если $f(x+y) = f(x)+f(y)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x, y \in \boldsymbol{E}$. Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ метрических линейных пространств называется *ограниченным*, если образ $f(A) \subset \boldsymbol{F}$ любого ограниченного множества $A \subset \boldsymbol{E}$ в пространстве $\boldsymbol{E}$ является ограниченным множеством в пространстве $\boldsymbol{F}$.

Теорема. *Для линейного отображения $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ метрических линейных пространств следующие условия эквивалентны: a) отображение непрерывно; b) отображение равномерно непрерывно; c) отображение ограничено.*

Доказательство. Если f непрерывно в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| < \varepsilon$ при $\|x - y\| < \delta$, т.е. f равномерно непрерывно. Пусть $A \subset \boldsymbol{E}$ ограниченное множество. Тогда для заданного $\delta > 0$ существует $\eta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \delta$ при всех $x \in A$ и $|\lambda| < \eta$. Отсюда в силу непрерывности f в нуле $\|\lambda f(x)\| = \|f(\lambda x)\| < \varepsilon$ при всех $x \in A$ и $|\lambda| < \eta$, т.е. $f(A)$ ограничено.

Пусть $x_n \to 0$ в $\boldsymbol{E}$. Тогда существуют n_k, т.ч. $\|x_n\| < 1/k^2$ при всех $n \geqslant n_k$. Положим $\lambda_n \doteqdot k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Тогда получим $\lambda_n \to \infty$ и $\lambda_n x_n \to 0$, так как $\|\lambda_n x_n\| \leqslant \lambda_n \|x_n\| < 1/k$ при всех $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Поэтому последовательность $\{\lambda_n x_n\}$ ограничена и, следовательно, по условию c) последовательность $\{f(\lambda_n x_n)\}$ также ограничена. Тогда получим, что $f(x_n) = f(\lambda_n x_n)/\lambda_n \to 0$ по определению ограниченного множества. Таким образом, f непрерывно в нуле. $\square$

Теорема (принцип равностепенной непрерывности)**.** *Пусть задана система $\{f_i\}_{i \in I}$ непрерывных линейных отображений $f_i : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ полного метрического линейного пространства $\boldsymbol{E}$ в метрическое линейное пространство $\boldsymbol{F}$, при этом множества $A_x \doteqdot \{\, y = f_i(x) \mid i \in I \}$ ограничены в $\boldsymbol{F}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда система отображений $\{f_i\}_{i \in I}$ равностепенно непрерывна.*

Доказательство. При заданном $\varepsilon > 0$ рассмотрим замкнутые множества

$$B_n \doteqdot \bigcap_{i \in I} \Big\{ x \in \boldsymbol{E} \Big| \, \Big\| \pm \frac{1}{n} f_i(x) \Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Big\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Из ограниченности A_x следует, что $x \in B_n$ при достаточно большом n, т.е. имеет место равенство $\boldsymbol{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. По теореме Бэ́ра существует n и шар $U_\delta(y) \subset B_n$. Поэтому $\| \pm f(z + y)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $z \in U_\delta(0)$ и $i \in I$. Отсюда получим

$$\Big\| \frac{1}{n} f_i(z) \Big\| \leqslant \Big\| \frac{1}{n} f_i(z + y) \Big\| + \Big\| \frac{1}{n} f_i(-y) \Big\| \leqslant \varepsilon \ \text{ при всех } z \in U_\delta(0) \text{ и } i \in I.$$

Если $z \in U_{\delta/n}(0)$, то $\|nz\| \leqslant n\|z\| < \delta$. Следовательно, справедливо неравенство $\|f_i(x + z) - f(x)\| = \|f_i(z)\| = \|f_i(nz)/n\| \leqslant \varepsilon$ при всех $z \in U_{\delta/n}(0)$, $x \in \boldsymbol{E}$, $i \in I$. $\square$

Следствие. *Если в метрическом линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ операция умножения непрерывна по каждой переменной $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \boldsymbol{E}$ в отдельности, то она будет непрерывной по совокупности переменных $(\lambda, x) \in \mathbb{F} \times \boldsymbol{E}$.*

Проверим непрерывность операции умножения $(\lambda, x) \to \lambda x$ в точке (λ_0, x_0). В силу неравенства $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leqslant \|(\lambda - \lambda_0) x_0\| + \|\lambda_0 (x - x_0)\| + \|(\lambda - \lambda_0)(x - x_0)\|$ достаточно доказать непрерывность в точке $(0, 0)$. Для этого следует рассмотреть систему отображений $f_x : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, где $f_x(\lambda) \doteqdot \|\lambda x\|$, $\|x\| \leqslant \delta$, а затем заметить, что теорема остается верной, если использовать следующие свойства этих функций: $f_x(\lambda + \mu) \leqslant f_x(\lambda) + f_x(\mu)$ и $f_x(n\lambda) \leqslant n f_x(\lambda)$, вместо условия линейности.

3 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Множество $A \subset M$ называется *ε-сетью в множестве* $M \subset X$, если для каждого $y \in M$ существует $x \in A$, т.ч. $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$, т.е. имеет место включение $M \subset \bigcup_{x \in A} S_\varepsilon(x)$.

Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным* (или предкомпактным), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная ε-сеть $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ в множестве M.

1. *Если множество $M \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) является вполне ограниченным, то существуют $x \in M$ и $r > 0$, т.ч. $M \subset S_r(x)$.*

Пусть $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ образует 1-сеть в M. Положим $r \doteqdot \max_{2 \leqslant k \leqslant n} \rho(x_1, x_k) + 1$. Тогда для каждого $y \in M$ найдется такое k, что $\rho(x_1, y) \leqslant \rho(x_1, x_k) + \rho(x_k, y) \leqslant r$. Поэтому, полагая $x = x_1$, мы получим включение $M \subset S_r(x)$.

2. *Если множество $M \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) является вполне ограниченным, то замыкание $\overline{M}$ также будет вполне ограниченным.*

Пусть $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ является ε-сетью в M. Так как $M \subset \bigcup_{k=1}^n S_\varepsilon(x)$, то в силу замкнутости объединения шаров $\overline{M} \subset \bigcup_{k=1}^n S_\varepsilon(x)$, т.е. A есть ε-сеть в $\overline{M}$.

3. *В метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$ всякое вполне ограниченное множество $M \subset X$ является ограниченным.*

Пусть $\|x\| \doteqdot \rho(x, 0)$. В силу непрерывности операции умножения для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ и $\sigma > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $\|x\| < \sigma$. Пусть $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ является $\sigma/2$-сетью в M. Уменьшая величину $\delta > 0$, можно считать, что $\|\lambda x_k\| < \varepsilon/2$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $k = 1, \ldots, n$. Тогда для каждого $y \in M$ существует k, т.ч. $\|\lambda x\| \leqslant \|\lambda x_k\| + \|\lambda(x - x_k)\| < \varepsilon$ при всех $|\lambda| < \delta$.

Пример 1. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда оно ограничено. Необходимость следует из свойства 3. Для доказательства достаточности разобьем куб $[a, b]^n$, в котором содержится множество M, на кубики с ребром $\delta \doteqdot (b - a)/k$. Тогда вершины этих кубиков $\{x_1, \ldots, x_m\}$ при $m = (k+1)^n$ образуют ε-сеть, где $\varepsilon = \sqrt{n}\delta/2$ половина диагонали кубика.

Определение. Рассмотрим следующие определения компактности множества в метрическом пространстве (X, ρ):

a) множество $K \subset X$ называется *компактным*, если всякое открытое покрытие $K \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, $\mathring{A}_i = A_i$, имеет конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{k=1}^n A_{i_k}$, $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$;

b) множество $K \subset X$ называется *счетно компактным*, если всякое бесконечное подмножество $A \subset K$ имеет предельную точку в K, т.е. $\acute{A} \cap K \neq \emptyset$;

c) множество $K \subset X$ называется *секвенциально компактным*, если для всякой последовательности $\{x_n\} \subset K$ существует сходящаяся в K подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.е. $x_{n_k} \to x \in K$.

Теорема (Ха́усдорфа). *Множество $K \subset X$ компактно в метрическом пространстве тогда и только тогда, когда d) K — вполне ограничено и полно.*

Доказательство. Докажем равносильность условий a), b), c) компактности множества $K \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) и теорему Ха́усдорфа d).

$a) \Rightarrow b)$. Если $\acute{A} \cap K = \emptyset$ пусто, то для всякой точки $x \in K$ существует $r > 0$, т.ч. множество $U_r(x) \cap K$ конечно. Эти шары $U_r(x)$ покрывают K. Тогда, взяв конечное подпокрытие, получим, что множество A конечное. Получили противоречие.

$b) \Rightarrow c)$. Пусть $A = \{x_n\} \subset K$. Мы можем считать, что $x_n \neq x_m$ при всех $n \neq m$. По условию существует $x \in \acute{A} \cap K$. Поэтому существуют точки $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$ при всех k. Отсюда вытекает сходимость подпоследовательности $x_{n_k} \to x \in K$.

$c) \Rightarrow d)$. Полнота K легко получается из условия c). Докажем вполне ограниченность K. Пусть $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in K$. Тогда существует $x_1 \in K$, т.ч. $\rho(x_1, x_0) > \varepsilon$, иначе $\{x_0\}$ образует ε-сеть в K. Аналогично, существует $x_2 \in K$, т.ч. $\rho(x_2, x_0) > \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$, иначе $\{x_0, x_1\}$ образует ε-сеть в K, и т.д. По индукции существует $x_n \in K$, т.ч. $\rho(x_n, x_k) > \varepsilon$ при $k = 1, \ldots, n$. Если этот процесс выбора точек x_n обрывается на некотором шаге n, то $\{x_k\}_{k=1}^n$ есть конечная ε-сеть. Иначе получим последовательность $\{x_n\}$, которая не имеет сходящейся подпоследовательности.

$d) \Rightarrow c)$. Пусть $\{x_n\} \subset K$. По условию d) существует конечное покрытие K шарами $S_{r_1}(y)$ радиуса $r_1 = 1$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$, находящаяся в некотором шаре $S_{r_1}(y_1)$. Аналогично, существует конечное покрытие K шарами $S_{r_2}(y)$ радиуса $r_2 = 1/2$ и существует подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$, находящаяся в некотором шаре $S_{r_2}(y_2)$, и т.д. По индукции, когда $r_k = 1/k$, существует подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$, находящаяся в некотором шаре $S_{r_k}(y_k)$. Пусть $z_n \doteqdot x_n^{(n)}$ диагональная подпоследовательность. Тогда $\rho(z_n, z_m) \leqslant \rho(z_n, y_n) + \rho(y_n, z_m) \leqslant 2/n$ при $m > n$, т.е. $\{z_n\}$ есть последовательность Коши. В силу полноты K она имеет предел в K.

$d) \Rightarrow a)$. Пусть $K \subset \bigcup_{i \in I} B_i$, где $\mathring{B}_i = B_i$, покрытие K. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$, т.ч. для любой точки $x \in K$ найдется индекс $i \in I$, для которого $S_\varepsilon(x) \subset B_i$. Если это не так, то существуют точки $x_n \in K$, т.ч. $S_{1/n}(x_n) \not\subset B_i$ при всех $i \in I$. По условию c) некоторая подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K$ сходится в K. Так как открытые множества B_i покрывают K, то некоторый шар $S_r(x) \subset B_i$ при некотором $i \in I$. Выберем $n_k > 2/r$ так, чтобы $\rho(x_{n_k}, x) < r/2$. Отсюда получим включения $S_{1/n_k}(x_{n_k}) \subset S_{r/2}(x_{n_k}) \subset S_r(x) \subset B_i$, что невозможно по предположению. Пусть теперь $A = \{y_1, \ldots, y_m\}$ является ε-сетью в K. Тогда по доказанному свойству найдется индекс $i_k \in I$, т.ч. $S_\varepsilon(y_k) \subset B_{i_k}$. Поэтому $K \subset \bigcup_{k=1}^m S_\varepsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^m B_{i_k}$. $\square$

Следствие. *Если множество $M \subset X$ в полном метрическом пространстве является предкомпактным, то его замыкание $\overline{M}$ будет компактным.*

Поскольку в полном метрическом пространстве замыкание $\overline{M}$ является полным, то это утверждение вытекает из теоремы Хаусдорфа и свойства 2.

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства и $K \subset X$ — компактное множество в X. Рассмотрим свойства непрерывных отображений $f : K \to Y$.

1. *Если отображение $f : K \to Y$, заданное на компактном множестве $K \subset X$, является непрерывным, то оно будет равномерно непрерывным.*

Предположим, что это не так. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset K$, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < 1/n$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$ при всех n. По условию компактности K найдутся сходящиеся подпоследовательности $x_{n_k} \to x$ и $y_{n_k} \to y$. Так как $\rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) < 1/n_k$, то $x = y \in K$, и, следовательно, в силу непрерывности функции f существует n_k, т.ч. $\rho_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) < \varepsilon$. Получили противоречие.

2. *Если отображение $f : K \to Y$ непрерывно, то образ $f(K) \subset Y$ компактного множества $K \subset X$ является компактным множеством.*

Пусть $\{y_n\} \subset f(K)$, где $y_n = f(x_n)$ и $x_n \in K$. Тогда существует сходящаяся в K подпоследовательность $x_{n_k} \to x$. В силу непрерывности отображения f получим $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$. Следовательно, образ $f(K)$ является компактным.

3. Теорема Алекса́ндрова. *Если отображение $f : K \to f(K) \subset Y$ компактного множества $K \subset X$ является биективным и непрерывным, то его обратное отображение $f^{-1} : f(K) \to K$ также будет непрерывным.*

Для доказательства заметим, что образ $f(A) \subset f(K)$ любого замкнутого множества $A \subset K$ является замкнутым, так как в силу свойства 2 он компактный.

Теорема (принцип продолжения по непрерывности). *Пусть $A \subset X$ является всюду плотным подмножеством метрического пространства (X, ρ_X), а (Y, ρ_Y) задает полное метрическое пространство. Тогда если отображение $f : A \to Y$ равномерно непрерывно, то существует только одно равномерно непрерывное отображение $g : X \to Y$, т.ч. $g(x) = f(x)$ при всех $x \in A$.*

Доказательство. По условию равномерной непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. для всех $x, y \in A$: $\rho_X(x, y) < \delta$ выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Пусть $x \in X$, тогда найдутся $x_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$. Поэтому существует N, т.ч. $\rho_X(x_n, x_m) < \delta$ при всех $n, m \geqslant N$. Отсюда $\rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Следовательно, $\{f(x_n)\}$ есть последовательность Коши в Y и, значит, существует предел $g(x) \doteqdot \lim f(x_n)$. Если взять еще одну последовательность $y_n \to x$, то, полагая $z_n \doteqdot x_k$ при $n = 2k - 1$ и $z_n \doteqdot y_k$ при $n = 2k$, получим, что $z_n \to x$. Тогда $g(x) = \lim f(z_n) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n)$, т.е. определение $g(x)$ не зависит от выбора последовательности $x_n \to x$, а единственность $g(x)$ вытекает из определения.

Докажем, что g равномерно непрерывно. Пусть $x, y \in X$ и $\rho_X(x, y) < \delta$. Тогда существуют $x_n, y_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$ и $y_n \to y$, и существует N, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < \delta$ при всех $n \geqslant N$. Отсюда в силу равномерной непрерывности f имеем неравенство $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим неравенство $\rho_Y(g(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, $g : X \to Y$ равномерно непрерывно. $\square$

Пример 2. *Критерий предкомпактности в $\boldsymbol{\ell}_p$.* Рассмотрим пространство $\boldsymbol{\ell}_p$ всех последовательностей $x = \{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{F}$, имеющих конечную (квази)норму

$$\|x\| \doteqdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, & \text{если } 0 < p < 1; \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

Пространство $\boldsymbol{\ell}_p$ при $0 < p < 1$ является метрическим линейным пространством, а при $1 \leqslant p < \infty$ нормированным пространством. Для каждого $x \in \boldsymbol{\ell}_p$ обозначим через $s_m(x) = \{y_n\}$ финитную последовательность, т.ч. при $n \leqslant m$ ее координаты $y_n = x_n$ те же, а при $n > m$ координаты $y_n = 0$ равны нулю. Заметим, что $s_m(x) \to x$ сходится при $m \to \infty$ в метрике пространства $\boldsymbol{\ell}_p$ для всех $0 < p < \infty$.

Для того чтобы множество $M \subset \boldsymbol{\ell}_p$ было предкомпактным в $\boldsymbol{\ell}_p$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:

a) множество M ограничено в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$;

b) для любого $\varepsilon > 0$ существует m, т.ч. $\|x - s_m(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \in M$.

Необходимость. Ограниченность $M \subset \boldsymbol{\ell}_p$ вытекает из вполне ограниченности в силу свойства 3. Докажем второе условие. Пусть $A = \{x^{(l)}\}_{l=1}^k$ есть $\varepsilon/2$-сеть в M. Для каждого l выберем число m, т.ч. $\|x^{(l)} - s_m(x^{(l)})\| < \varepsilon/2$, а затем возьмем среди них наибольшее. Поскольку A является $\varepsilon/2$-сетью в M, то для любого $x \in M$ найдется l, т.ч. $\|x - x^{(l)}\| < \varepsilon/2$. Применяя неравенство треугольника, получим $\|x - s_m(x)\| \leqslant \|x - x^{(l)}\| + \|x^{(l)} - s_m(x^{(l)})\| < \varepsilon$, т.е. выполнено второе условие.

Достаточность. Поставим в соответствие каждой последовательности $x \in M$ финитную последовательность $y = s_m(x)$, где число m задано во втором условии. Тогда получим множество $M_m \subset \mathbb{F}^m$ в конечномерном подпространстве $\mathbb{F}^m \subset \boldsymbol{\ell}_p$. Так как M_m ограниченное множество, то оно вполне ограничено. Это доказывается также как в примере 1, если воспользоваться элементарным неравенством

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^p\right)^{1/p} \leqslant m^{1/p} \max_{1 \leqslant n \leqslant m} |x_n| \leqslant m^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^2\right)^{1/2}.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через $\{x^{(l)}\}_{l=1}^k$ элементы прообраза $y^{(l)} = s_m(x^{(l)})$ для ε-сети $\{y^{(l)}\}_{l=1}^k$ в множестве M_m. Следовательно, для каждого $x \in M$ существует такой индекс l, что $\|s_m(x) - y^{(l)}\| \leqslant \varepsilon$. Применяя неравенство треугольника, имеем $\|x - x^{(l)}\| \leqslant \|x - s_m(x)\| + \|s_m(x) - y^{(l)}\| + \|s_m(x^{(l)}) - x^{(l)}\|) < 3\varepsilon$. Таким образом, $\{x^{(l)}\}_{l=1}^k$ образует 3ε-сеть в M и, значит, множество M предкомпактно в $\boldsymbol{\ell}_p$.

4 КРИТЕРИИ ПРЕДКОМПАКТНОСТИ

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и задано компактное множество $K \subset X$. Обозначим через $\boldsymbol{C}(K)$ нормированное пространство всех непрерывных функций $f : K \to \mathbb{F}$, в котором норма функции определяется по формуле $\|f\| \doteqdot \sup_{x \in K} |f(x)|$.

1. *Всякая функция $f \in \boldsymbol{C}(K)$ равномерно непрерывна.*

Это было доказано для непрерывных отображений, определенных на компакте.

2. *Пространство $\boldsymbol{C}(K)$ является подпространством $\boldsymbol{B}(K)$.*

Если $f \in \boldsymbol{C}(K)$, то образ $|f(K)| \subset \mathbb{R}_+$ является компактом и, следовательно, существует $x_0 \in K$, т.ч. $|f(x_0)| = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Поэтому функция f ограничена.

3. *Пространство $\boldsymbol{C}(K)$ является банаховым.*

Если последовательность функций $\{f_n\} \subset \boldsymbol{C}(K)$ сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$, то функция $f \in \boldsymbol{C}(K)$ непрерывна. В самом деле, выберем n, т.ч. $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ при всех $x \in K$. Из непрерывности f_n имеем $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ при всех $x \in K$: $\rho(x, x_0) < \delta$. Тогда $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ при всех $x \in K$: $\rho(x, x_0) < \delta$. Таким образом, $\boldsymbol{C}(K) \subset \boldsymbol{B}(K)$ является замкнутым подпространством. Так как пространство $\boldsymbol{B}(K)$ полно, то $\boldsymbol{C}(K)$ также полно.

Теорема (Аско́ли–Арцела́). *Множество $M \subset \boldsymbol{C}(K)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда M ограничено в $\boldsymbol{C}(K)$ и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность M в $\boldsymbol{C}(K)$ вытекает из вполне ограниченности. Докажем равностепенную непрерывность. По теореме Хаусдорфа для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/3$-сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$ в M. Следовательно, если $f \in M$, то существует k, т.ч. $|f(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in K$. Поскольку функциии f_k равномерно непрерывны, то $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$ при всех $x, y \in K$: $\rho(x, y) < \delta_k$ для некоторого $\delta_k > 0$. Пусть $\delta \doteqdot \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta_k$, тогда получим

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

при всех $x, y \in K$: $\rho(x, y) < \delta$. Таким образом, M равностепенно непрерывно.

Достаточность. В силу равностепенной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. для всех $x, y \in K$: $\rho(x, y) < \delta$ и $f \in M$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$. Обозначим через $\{x_l\}_{l=1}^m$ $\delta/2$-сеть K и определим отображение $F : M \to \mathbb{F}^n$ по формуле $F(f) \doteqdot (f(x_1), \ldots, f(x_m))$. Так как $F(M) \subset \mathbb{F}^m$ ограничено, то оно вполне ограничено. Обозначим через $\{f_k\}_{k=1}^n$ элементы прообраза $\varepsilon/3$-сети $\{F(f_k)\}_{k=1}^n \subset F(M)$. Тогда для любого $f \in M$ найдется k, т.ч. $\|F(f) - F(f_k)\| \leqslant \varepsilon/3$, и для любого $x \in K$ найдется l, т.ч. $\rho(x, x_l) \leqslant \delta/2$. Отсюда получим

$$|f(x) - f_k(x)| \leqslant |f(x) - f(x_l)| + |f(x_l) - f_k(x_l)| + |f_k(x_l) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{f_k\}_{k=1}^n$ является ε-сетью в множестве M. $\square$

Определение. Пусть функция $f \in \boldsymbol{B}(X)$ и $A \subset X$. Величина верхней грани $O(f, A) \doteqdot \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$ называется *колебанием функции* f на множестве A. Колебание функции f на множестве A совпадает с диаметром $O(f, A) = \operatorname{diam} f(A)$ множества $f(A)$ в пространстве $\mathbb{F}$.

Теорема (Фере́са). *Множество $M \subset \boldsymbol{B}(X)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда M ограничено в $\boldsymbol{B}(X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $X = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, что $O(f, A_k) \leqslant \varepsilon$ для всех $f \in M$ и $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность M в $\boldsymbol{B}(X)$ вытекает из вполне ограниченности M. Докажем существование указанного разбиения. По теореме Хаусдорфа для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/3$-сеть $\{f_l\}_{l=1}^{m}$ в M. Следовательно, если $f \in M$, то существует l, т.ч. $|f(x) - f_l(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in X$. Обозначим через $Y_l \doteqdot f_l(X)$ и $Y \doteqdot Y_1 \times \ldots \times Y_m$. Так как множество $Y \subset \mathbb{F}^m$ ограничено, то существует разбиение $Y = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$ с диаметром множеств $\operatorname{diam}(B_k) \leqslant \varepsilon/3$. Определим отображение $F : X \to \mathbb{F}^m$ по формуле $F(x) \doteqdot (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ и положим $A_k \doteqdot F^{-1}(B_k)$. Тогда при всех $f \in M$ и $x, y \in A_k$ получим

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_l(x)| + |f_l(x) - f_l(y)| + |f_l(y) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $O(f, A_k) \leqslant \varepsilon$ при всех $f \in M$ и $k = 1, \ldots, n$.

Достаточность. Для каждой функции $f \in M$ определяем простые функции $h_f(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{A_k}(x)$, где $y_k \doteqdot f(x_k)$, $x_k \in A_k$ фиксированные точки, а A_k указааны в условии теоремы. Тогда по условию $\|f - h_f\| \leqslant \varepsilon$. Функция h_f однозначно задается набором чисел $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$. Соответствующее множество $Y \subset \mathbb{F}^n$ в евклидовом пространстве является ограниченным. Поэтому $Y \subset \mathbb{F}^n$ вполне ограничено. Пусть $\{f_l\}_{l=1}^{m}$ элементы прообраза ε-сети в Y. Тогда для каждой $f \in M$ найдется l, т.ч. $\|h_f - h_{f_l}\| \leqslant \varepsilon$ и, следовательно, $\|f - f_l\| \leqslant \|f - h_f\| + \|h_f - h_{f_l}\| + \|h_{f_l} - f_l\| \leqslant 3\varepsilon$. Таким образом, система функций $\{f_l\}_{l=1}^{m}$ является 3ε-сетью в множестве M. $\square$

Определение. Нормированные пространства $(\boldsymbol{E}, p_{\boldsymbol{E}})$ и $(\boldsymbol{F}, p_{\boldsymbol{F}})$ будем называть *изоморфными* и обозначать через $(\boldsymbol{E}, p_{\boldsymbol{E}}) \sim (\boldsymbol{F}, p_{\boldsymbol{F}})$, если существует биективное линейное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, для которого f и f^{-1} непрерывны.

Нормированные пространства $(\boldsymbol{E}, p_{\boldsymbol{E}})$ и $(\boldsymbol{F}, p_{\boldsymbol{F}})$ называются *изометрически изоморфными* и обозначаются $(\boldsymbol{E}, p_{\boldsymbol{E}}) \simeq (\boldsymbol{F}, p_{\boldsymbol{F}})$, если существует биективное линейное отображение $f : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, которое является изометричным, т.е. имеет место равенство $\|f(x)\|_{\boldsymbol{F}} = \|x\|_{\boldsymbol{E}}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, где $\|x\|_{\boldsymbol{E}} \doteqdot p_{\boldsymbol{E}}(x)$ и $\|y\|_{\boldsymbol{F}} \doteqdot p_{\boldsymbol{F}}(y)$.

Ясно, что изометрически изоморфные пространства являются изоморфными. Если пространства изоморфны и одно из них полно, то другое также полно. Из следующей теоремы вытекает, что нормированные пространства одной и той же конечной размерности являются изоморфными.

Теорема. *Каждое нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ конечной размерности $\dim(\boldsymbol{E}) = n < \infty$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{F}^n$.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ образует базис $\boldsymbol{E}$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует единственный элемент $\lambda \doteqdot (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{F}^n$, т.ч. $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Определим отображение $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$, полагая $f(x) \doteqdot \lambda$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Ясно, что это отображение является биективным и линейным. Пусть $\varphi(\lambda) \doteqdot \|x\|$. Применяя неравенство треугольника и неравенство Коши, получим

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda')| \leqslant \|x - x'\| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda - \lambda'| \, \|e_k\| \leqslant c\|\lambda - \lambda'\|_{\mathbb{F}^n}, \quad c \doteqdot \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2\right)^{1/2}.$$

Поэтому функция $\varphi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}_+$ — непрерывна. Следовательно, величина нижней грани на компакте $\inf_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1} \varphi(\lambda) = a > 0$ положительна, а величина верхней грани на компакте $\sup_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1} \varphi(\lambda) = b < \infty$ конечна. Поэтому из свойства однородности нормы получаем неравенства $\|f(x)\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant a^{-1}\|x\|$ и $\|f^{-1}(\lambda)\| \leqslant b\,\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}^n$. Таким образом, отображения f и f^{-1} будут непрерывны. □

Следствие 1. *Всякое подпространство L конечной размерности* $\dim(L) < \infty$ *в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ является полным и, значит, замкнуто.*

Утверждение вытекает из теоремы и полноты евклидова пространства $\mathbb{F}^n$.

Следствие 2. *В линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ конечной размерности* $\dim(\boldsymbol{E}) < \infty$ *любые две нормы $p(x) \doteqdot \|x\|$ и $p'(x) \doteqdot \|x\|'$ эквивалентны $\|x\| \sim \|x\|'$, т.е. существует такое $c > 0$, что $c^{-1}\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant c\,\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

В самом деле, пусть $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$ обозначает изоморфизм, построенный в теореме. Тогда, используя обозначения в теореме, при всех $x \in \boldsymbol{E}$ получим неравенство

$$\|x\|' = \|f^{-1}(\lambda)\|' \leqslant b'\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} = b'\|f(x)\|_{\mathbb{F}^n} \leqslant b'a^{-1}\|x\|.$$

Определение. Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства. Величина $\rho(x, L) \doteqdot \inf_{y \in L} \|x - y\|$ называется *наилучшим приближением* элемента $x \in \boldsymbol{E}$ подпространством L. Элемент $y_0 \in L$, т.ч. $\rho(x, L) = \|x - y_0\|$, называется *элементом наилучшего приближения.*

Теорема (существования)**.** *Если подпространство $L \subset \boldsymbol{E}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ имеет конечную размерность* $\dim(L) < \infty$*, то для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует элемент наилучшего приближения.*

Доказательство. Обозначим через $c \doteqdot \|x\|$, тогда $\rho(x, L) \leqslant \|x\| = c$. Рассмотрим множество $M_c \doteqdot \{y \in L \mid \|x - y\| \leqslant c\}$. Так как M_c содержится в конечномерном пространстве L и является ограниченным и замкнутым, то оно будет вполне ограниченным и полным. Следовательно, M_c компактно. Поэтому непрерывная функция $\varphi(y) \doteqdot \|x - y\|$ достигает своей нижней грани на компакте M_c. □

Пример 1. Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ является незамкнутым подпространством нормированного пространства $\boldsymbol{E}$. Тогда существует $x \in \boldsymbol{E} \setminus L$, т.ч. $\rho(x, L) = 0$. Очевидно, что элемент x не имеет элементов наилучшего приближения подпространством L.

Определение. Нормированное пространство $(\boldsymbol{E}, p)$ с нормой $\|x\| \doteqdot p(x)$ называется *строго нормированным*, если равенство $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ выполняется в том и только в том случае, когда $x = \lambda y$ при некотором $\lambda \geqslant 0$.

Пример 2. Евклидово пространство $\mathbb{F}^n$ является строго нормированным, а пространство непрерывных функций $\boldsymbol{C}[0,1]$ не является строго нормированным, так как если $f(x) = 1$ и $g(x) = x$, то $\|f+g\| = \|f\| + \|g\| = 2$.

Теорема (единственности)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ является подпространством строго нормированного пространства. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ может существовать не более одного элемента наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $\rho(x, L) = \|x - y_0\| = \|x - y_1\|$, где $y_0, y_1 \in L$. Тогда имеем

$$\rho(x,L) \leqslant \Big\|x - \frac{y_0+y_1}{2}\Big\| = \Big\|\frac{x-y_0}{2} + \frac{x-y_1}{2}\Big\| \leqslant \Big\|\frac{x-y_0}{2}\Big\| + \Big\|.\frac{x-y_1}{2}\Big\| = \rho(x,L),$$

Следовательно, вместо неравенств имеют место равенства. В силу условия строгой нормированности $x - y_1 = \lambda(x - y_0)$ при некотором $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 1$, то $y_0 = y_1$. Если $\lambda \neq 1$, то $x = (y_0 - \lambda y_1)/(1-\lambda) \in L$ и, следовательно, $x = y_0 = y_1$. $\square$

Лемма (Рисса о почти перпендикуляре)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ является замкнутым подпространством нормированного пространства. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\|x\| = 1$ и $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ при всех $y \in L$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \boldsymbol{E} \setminus L$, тогда $d \doteqdot \rho(x_0, L) > 0$. Выберем $y_0 \in L$, т.ч. $\|x_0 - y_0\| < d/(1-\varepsilon)$, и положим $x \doteqdot (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$. Тогда при всех $y \in L$

$$\|x - y\| = \Big\|\frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y\Big\| = \frac{\|x_0 - y_1\|}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon,$$

где элемент $y_1 = y_0 + \|x_0 - y_0\|\, y \in L$. $\square$

Теорема. *Замкнутый единичный шар $S \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ является компактным тогда и только тогда, когда пространство имеет конечную размерность* $\dim(\boldsymbol{E}) < \infty$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\dim(\boldsymbol{E}) = \infty$ и $x_1 \in S$. Если $L_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1\}$ линейная оболочка x_1, то по лемме существует $x_2 \in S \setminus L_1$, т.ч. $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Аналогично, если $L_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, x_2\}$ линейная оболочка x_1 и x_2, то существует такой $x_3 \in S \setminus L_2$, что $\|x_3 - x_1\| > 1/2$, $\|x_3 - x_2\| > 1/2$ и т.д. По индукции получим $L_n \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$ и некоторый элемент $x_{n+1} \in S \setminus L_n$, т.ч. $\|x_n - x_k\| > 1/2$ при $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

Достаточность. Пусть $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}^n$ изоморфизм, где $n = \dim(\boldsymbol{E})$. Тогда образ $f(S) \subset \mathbb{F}^n$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{F}^n$. Поэтому $f(S)$ компактно и, следовательно, S также компактно в силу непрерывности f^{-1}. $\square$

5 МЕРА МНОЖЕСТВ

Пусть X — множество и $\mathbf{2}^X$ — совокупность всех подмножеств множества X, включая пустое множество $\emptyset$. Любое подмножество $S \subset \mathbf{2}^X$ называется *системой множеств* в X. Множество $E \doteqdot \bigcup_{A \in S} A$ называется *единицей* системы S.

Определение. Система множеств S называется *кольцом*, если для любых его множеств $A, B \in S$ объединение $A \cup B \in S$ и разность $A \setminus B \in S$. Кольцо S, содержащее единицу $E \in S$, называется *алгеброй*.

Обозначим через $\mathcal{R}(S)$ *минимальное кольцо*, содержащее систему множеств S, а через $\mathcal{A}(S)$ *минимальную алгебру*, содержащую систему множеств S. Так как пересечение колец (алгебр) является кольцом (соответственно алгеброй), то эти системы множеств в X получаются в результате пересечения всех колец (соответственно всех алгебр), содержащих систему множеств S.

1. *Система множеств S является кольцом тогда и только тогда, когда имеют место включения $A \cap B \in S$ и $A \triangle B \in S$ для всех множеств $A, B \in S$.*

Утверждение вытекает из равенств $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \triangle B \doteqdot (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$, $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

Определения. Кольцо (алгебра) S называется σ-кольцом (σ-алгеброй), если для всех $A_n \in S$ их объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in S$. Кольцо (алгебра) S называется δ-кольцом (δ-алгеброй), если для всех $A_n \in S$ их пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \in S$.

2. *Система множеств S является σ-алгеброй в том и только в том случае, когда она является δ-алгеброй.*

Для доказательства применяем следующие *формулы двойственности*:

$$E \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(E \setminus A_n\Big), \quad E \setminus \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(E \setminus A_n\Big).$$

Обозначим далее через $\mathcal{R}_\sigma(S)$ *минимальное σ-кольцо*, содержащее систему множеств S, а через $\mathcal{A}_\sigma(S)$ *минимальную σ-алгебру*, содержащую систему множеств S. Эти системы множеств в X получаются в результате пересечения всех σ-колец (соответственно σ-алгебр), содержащих систему множеств S.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и система τ задает его топологию. Минимальная σ-алгебра $\mathcal{B}(X) \doteqdot \mathcal{A}_\sigma(\tau)$, содержащая топологию τ, называется *борелевской σ-алгеброй*, а элементы $A \in \mathcal{B}(X)$ этой σ-алгебры будут называться *борелевскими множествами* в X.

Определение. Система множеств S называется *полукольцом*, если для любых множеств $A, B \in S$ пересечение $A \cap B \in S$ и разность $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k$, где $C_k \in S$.

3. *Если система множеств S является полукольцом, то для всех $A \in S$ и $B_k \in S$, $k = 1, \ldots, n$, разность $A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \bigsqcup_{l=1}^{m} C_l$, где $C_l \in S$, $l = 1, \ldots, m$.*

Доказательство по индукции. При $n = 1$ это следует из определения. Предположим, что утверждение верно при некотором n. Тогда получим

$$A \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\Big) = \left(A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\right) \setminus B_{n+1} = \bigsqcup_{l=1}^{m} (C_l \setminus B_{n+1}) = \bigsqcup_{l=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{m_j} C_{lj}\,, \quad C_{lj} \in S\,.$$

Лемма. *Пусть S — полукольцо. Тогда $A \in \mathcal{R}(S)$ в том и только в том случае, когда представляется в виде $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in S$.*

Доказательство. Обозначим через R систему всех множеств $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in S$. Очевидно, что $S \subset R \subset \mathcal{R}(S)$. Докажем, что R кольцо. Пусть множества $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ и $B = \bigsqcup_{l=1}^{m} B_l$, где $A_k, B_l \in S$. Тогда из свойства 3 получим

$$A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus B) = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{l=1}^{m_l} C_{kl}\,, \quad C_{kl} \in S\,.$$

Кроме того, выполняется равенство $A \cup B = \big(A \setminus B\big) \sqcup B$. Следовательно, система множеств R будет кольцом. Поэтому $R = \mathcal{R}(S)$. □

Определения. Пусть S — система множеств в X. Функция множества $\varphi : S \to \mathbb{F}$ называется *аддитивной*, если $\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ при всех $A, B, A \sqcup B \in S$.

Функция множества $\varphi : S \to \mathbb{F}$ называется *конечно-аддитивной*, если для каждого n имеет место $\varphi(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k)$ при всех $A_k, \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \in S$.

Функция множества $\varphi : S \to \mathbb{F}$ называется *σ-аддитивной* (счетно-аддитивной), если $\varphi(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ при всех $A_n, \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.

Функция множества $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ называется *конечно-аддитивной мерой в X*, если S — полукольцо множеств в X и функция $\mathfrak{m}$ — конечно-аддитивна.

Конечно-аддитивная мера $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ называется *σ-аддитивной мерой в X* (или счетно-аддитивной мерой), если функция $\mathfrak{m}$ является σ-аддитивной.

Продолжением меры $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ называется такая мера $\mathfrak{m}' : S' \to \mathbb{R}_+$, что $S \subset S'$ и $\mathfrak{m}'|_S = \mathfrak{m}$, т.е. $\mathfrak{m}'(A) = \mathfrak{m}(A)$ для всех $A \in S$. При этом предполагается, что продолжением конечно-аддитивной меры является конечно-аддитивная мера, а продолжением σ-аддитивной меры является σ-аддитивная мера.

Теорема. *Для любой меры $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$, заданной на полукольце S, существует единственное продолжение $\mathfrak{m}' : \mathcal{R}(S) \to \mathbb{R}_+$ на минимальное кольцо $\mathcal{R}(S)$.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{m}'(A) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k)$ при всех $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in S$. Если мы имеем два представления $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{l=1}^{m} B_l$, где $A_k, B_l \in S$, то

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{l=1}^{m} (A_k \cap B_l)\,, \quad \mathfrak{m}'(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (A_k \cap B_l) = \sum_{l=1}^{m} \mathfrak{m}(B_l)\,,$$

т.е. определение меры $\mathfrak{m}'$ не зависит от представления множества $A \in \mathcal{R}(S)$.

Докажем конечную аддитивность $\mathfrak{m}'$. Пусть $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in \mathcal{R}(S)$. Тогда по лемме имеем $A_k = \bigsqcup_{l=1}^{m} A_{kl}$, где $A_{kl} \in S$. Отсюда следует, что

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{l=1}^{m} A_{kl}\,, \quad \mathfrak{m}'(A) = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{l=1}^{m} \mathfrak{m}(A_{kl}) = \bigsqcup_{k=1}^{n} \mathfrak{m}'(A_k)\,.$$

Доказательство σ-аддитивности меры $\mathfrak{m}'$, в предположении σ-аддитивности меры $\mathfrak{m}$, проводится аналогично, полагая $n = \infty$. Единственность меры $\mathfrak{m}'$ очевидна. □

Рассмотрим свойства σ-аддитивной меры $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$, заданной на полукольце. Ее продолжение на минимальное кольцо $\mathcal{R}(S)$ обозначается также через $\mathfrak{m}$.

1. *Мера пустого множества:* так как $\mathfrak{m}(\emptyset) = \mathfrak{m}(\emptyset \sqcup \emptyset) = 2\mathfrak{m}(\emptyset)$, то $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$.

2. *Монотонность: если $A \supset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $A, A_n \in S$, то* $\mathfrak{m}(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$.

Пусть $A \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_n\right) = \bigsqcup_{l=1}^{m} B_l$, где $B_l \in S$. Тогда $A = \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{l=1}^{m} B_l\right)$ и

$$\mathfrak{m}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) + \sum_{l=1}^{m} \mathfrak{m}(B_l) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) \to \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k)\,, \quad n \to \infty\,.$$

Заметим, что при доказательстве утверждений 1 и 2 мы использовали только конечную аддитивность меры $\mathfrak{m}$.

3. *Полуаддитивность: если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $A, A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, то имеет место неравенство* $\mathfrak{m}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$.

Пусть $B_1 \doteqdot A_1$ и $B_n \doteqdot A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$, $n = 2, 3 \ldots$ Тогда имеем $A \subset B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$ и, следовательно, $\mathfrak{m}(A) \leqslant \mathfrak{m}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$, поскольку $B_n \subset A_n$. В случае конечно-аддитивной меры свойство полуаддитивности имеет место только для конечного числа слагаемых.

4. *Непрерывность снизу: если $A_n \nearrow A$ и $A_n, A \in S$, то* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n) = \mathfrak{m}(A)$.

По условию $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $A_0 \doteqdot \emptyset$ и $B_n \doteqdot A_n \setminus A_{n-1}$. Тогда справедливо равенство $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$ и поэтому получим

$$\mathfrak{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mathfrak{m}(A_n) - \mathfrak{m}(A_{n-1})\big) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n)\,.$$

Обратно, если конечно-аддитивная мера непрерывна снизу, то она σ-аддитивна. Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in S$. Положим $B_n \doteqdot \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$. Тогда $B_n \nearrow A$ и, значит, выполняется равенство $\mathfrak{m}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k)$.

5. *Непрерывность сверху: если $A_n \searrow A$ и $A_n, A \in S$, то* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n) = \mathfrak{m}(A)$.

По условию $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $B \doteqdot A_1 \setminus A$ и $B_n \doteqdot A_1 \setminus A_n$. Тогда

$$B_n \nearrow B\,, \quad \mathfrak{m}(A_1) - \mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \mathfrak{m}(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n)\,.$$

Обратно, если конечно-аддитивная мера непрерывна сверху, то она σ-аддитивна. Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in S$, и $B_n \doteqdot A \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right)$. Тогда имеем $B_n \searrow \emptyset$ и, значит, предел мер равен $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = 0$, т.е. $\mathfrak{m}(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k)$.

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $S \subset \mathbf{2}^X$ полукольцо. Конечно-аддитивная мера $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ называется *регулярной*, если для любого $A \in S$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие $B, C \in S$, что $\overline{B}$ — компактно, выполняются включения $\overline{B} \subset A \subset \mathring{C}$ и мера разности $\mathfrak{m}(C \setminus B) < \varepsilon$.

Теорема. *Регулярная мера* $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ *является* σ*-аддитивной.*

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in S$. По свойству монотонности имеем неравенство $\mathfrak{m}(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$. Докажем обратное неравенство.

В силу условия регулярности для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $B, C, B_n, C_n \in S$, т.ч. $\overline{B}, \overline{B_n}$ — компактны, $\overline{B} \subset A \subset \mathring{C}$, $\overline{B}_n \subset A_n \subset \mathring{C}_n$, $\mathfrak{m}(C \setminus B) < \varepsilon/2$ и $\mathfrak{m}(C_n \setminus B_n) < \varepsilon/2^n$. Так как $\overline{B} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{C}_k$, то из компактности вытекает $\overline{B} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathring{C}_k$ при некотором n. Из свойства полуаддитивности получим $\mathfrak{m}(B) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(C_k)$ и, следовательно,

$$\mathfrak{m}(A) \leqslant \mathfrak{m}(C) < \mathfrak{m}(B) + \varepsilon/2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(C_k) + \varepsilon/2 < \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(B_k) + \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) + \varepsilon\,.$$

Отсюда выполняется обратное неравенство и, значит, $\mathfrak{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$. □

Определение. Пусть $S \doteqdot \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b\}$ образует полукольцо в $\mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ является неубывающей функцией на $\mathbb{R}$. Функция $\mathfrak{m}_\alpha([a, b)) \doteqdot \alpha(b) - \alpha(a)$ называется *мерой Сти́лтьеса* на прямой $\mathbb{R}$.

Мера Сти́лтьеса $\mathfrak{m}_\alpha$ является конечно-аддитивной мерой на полукольце S, так как если $[a, b) = \bigsqcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k)$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то имеют место равенства $\mathfrak{m}_\alpha([a, b)) = \alpha(b) - \alpha(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}([x_{k-1}, x_k))$.

Теорема. *Мера Сти́лтьеса* $\mathfrak{m}_\alpha : S \to \mathbb{R}_+$ *является* σ*-аддитивной тогда и только тогда, когда функция* $\alpha(x)$ *непрерывна слева.*

Доказательство. Необходимость. Если $\mathfrak{m}_\alpha$ является σ-аддитивной, то она непрерывна сверху. Пусть $x_n \nearrow x$, тогда $[x_n, x) \searrow \emptyset$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}_\alpha([x_n, x)) = 0$ и, следовательно, $\lim \alpha(x_n) = \alpha(x) - \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}_\alpha([x_n, x)) = \alpha(x)$.

Достаточность. Пусть функция $\alpha(x)$ непрерывна слева. Достаточно показать, что $\mathfrak{m}_\alpha$ является регулярной мерой. Для любого $\delta > 0$ справедливы включения $[a, b - \delta] \subset [a, b) \subset (a - \delta, b)$, при этом $\mathfrak{m}_\alpha([a - \delta, b) \setminus [a, b - \delta)) = \mathfrak{m}_\alpha([a - \delta, a)) + \mathfrak{m}_\alpha([b - \delta, b)) = \alpha(a) - \alpha(a - \delta) + \alpha(b) - \alpha(b - \delta) < \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$. □

6 ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть X — множество и $\overline{\mathbb{R}}_+ \doteqdot \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$ — расширенное множество неотрицательных чисел, в котором выполняются следующие постулаты: при всех $a \in \mathbb{R}_+$

$$a + \infty \doteqdot \infty\,; \quad a \cdot \infty \doteqdot \infty \ (a \neq 0)\,; \quad 0 \cdot \infty \doteqdot 0\,; \quad a < \infty\,.$$

Определения. Функция $\mu : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *внешней мерой*, если $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ при всех $A \subset B$ и $\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ при всех $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Множество $E \subset X$ называется *измеримым*, если для всех $A \subset X$ выполняется равенство $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$. Совокупность всех измеримых множеств относительно внешней меры μ обозначается через Σ.

В силу свойства полуаддитивности внешней меры для доказательства измеримости $E \in \Sigma$ достаточно показать, что $\mu(A) \geqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$ при всех $A \subset X$. Обозначим далее для краткости через $AB \doteqdot A \cap B$, $A' \doteqdot X \setminus A$ и $\mu_A(B) \doteqdot \mu(AB)$. Тогда включение $E \in \Sigma$ будет равносильно равенству $\mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$ при всех $A \subset X$. Очевидно, что множества $\emptyset$ и X измеримы.

1. *Если $\mu(E) = 0$ и $B \subset E$, то $B \in \Sigma$.*

В силу монотонности внешней меры имеем $\mu_A(B) = \mu(AB) = 0$ при всех $A \subset X$ и, следовательно, выполняется неравенство $\mu_A(X) \geqslant \mu_A(B') = \mu_A(B) + \mu_A(B')$.

2. *Если $E \in \Sigma$, то $E' \in \Sigma$.*

Из равенства $E'' = E$ следует, что $\mu_A(X) = \mu_A(E') + \mu_A(E'')$.

3. *Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то $E = E_1E_2 \in \Sigma$.*

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1') = \mu_{AE_1}(X) + \mu_A(E_1') = \mu_{AE_1}(E_2) + \mu_{AE_1}(E_2') + \mu_A(E_1') =$$
$$= \mu_A(E) + \mu_A(E_1E_2') + \mu_A(E_1') = \mu_A(E) + \mu_A(E_1E') + \mu_A(E_1'E') = \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

4. *Если $E_1, E_2 \in \Sigma$, то $E_1 \setminus E_2, E_1 \cup E_2 \in \Sigma$.*

Поскольку имеют место равенства $E_1 \setminus E_2 = E_1E_2'$ и $E_1 \cup E_2 = (E_1'E_2')'$, то эти множества измеримы. Таким образом, Σ является алгеброй.

5. *$\mu_A : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — конечно-аддитивная мера на алгебре Σ при всех $A \subset X$.*

Действительно при всех $E = E_1 \sqcup E_2$, т.ч. $E_1, E_2 \in \Sigma$, имеют место равенства

$$\mu_A(E) = \mu_{AE}(E_1) + \mu_{AE}(E_1') = \mu_A(EE_1) + \mu_A(EE_1') = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_2)\,.$$

Теорема (Каратеодо́ри). *Пусть $\mu : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ является внешней мерой в X, тогда система Σ всех измеримых множеств образует σ-алгебру и функция $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ на этой σ-алгебре определяет σ-аддитивную меру.*

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и $E_k \in \Sigma$. Положим $F_n \doteqdot \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k$, тогда $F_n \in \Sigma$. Применяя свойство аддитивности меры μ_A и устремляя $n \to \infty$, имеем

$$\mu_A(X) = \mu_A(F_n) + \mu_A(F_n') \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \to \sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E') \geqslant \mu_A(E) + \mu_A(E').$$

Отсюда $E \in \Sigma$ и выполняется равенство $\mu_A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_A(E_k) + \mu_A(E')$ при всех $A \subset X$. Заменяя в этом равенстве A на E, получим $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$. □

Далее мы будем предполагать, что σ-аддитивная мера $\mathfrak{m} : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ является *σ-конечной* в X, т.е. существуют такие $A_n \in S$, что $\mathfrak{m}(A_n) < \infty$ и $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение. *Внешней мерой Лебе́га* называется следующая функция:

$$\mathfrak{m}^*(A) \doteqdot \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n) \,\Big|\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,,\ A_n \in S \Big\}\,.$$

Тройка (X, Σ, ν) образует *измеримое пространство* меры $\mathfrak{m}$, где Σ σ-алгебра измеримых множеств внешней меры $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*$ и $\nu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_{\Sigma}$ ограничение $\mathfrak{m}^*$ на Σ.

1. $\mathfrak{m}^*(\emptyset) = 0$.

2. *Если $A \subset B$, то* $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(B)$.

3. *Если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то* $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_n)$.

Докажем свойство 3. Если $\mathfrak{m}^*(A_n) = \infty$ при некотором n, то это утверждение очевидно. Пусть $\mathfrak{m}^*(A_n) < \infty$ при всех n и $\varepsilon > 0$. По определению $\mathfrak{m}^*$ найдутся такие множества $B_{nk} \in S$, что $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{nk}) < \mathfrak{m}^*(A_n) + \varepsilon/2^n$. Тогда

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}\,, \quad \mathfrak{m}^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{nk}) < \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_n) + \varepsilon\,.$$

4. *Если $A \in S$, то $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(A)$, т.е. $\mathfrak{m}^*|_S = \mathfrak{m}$.*

Используя полуаддитивность меры $\mathfrak{m}$, получим $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$ при всех $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $A_n \in S$. Отсюда следует, что $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(A)$ при всех $A \in S$.

Теорема (о продолжении меры)**.** *Если $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ σ-аддитивная и σ-конечная мера в X, то $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^* : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ σ-аддитивная мера на σ-алгебре Σ измеримых множеств, содержащей полукольцо $S \subset \Sigma$, и имеет место равенство $\mu|_S = \mathfrak{m}$.*

Доказательство. В силу теоремы Каратеодо́ри и свойства 4 достаточно доказать, что $S \subset \Sigma$. Пусть $E \in S$ и $A \subset X$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $B_n \in S$, т.ч. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$. Применяя полуаддитивность $\mathfrak{m}^*$, получим

$$\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(A \cap E) + \mathfrak{m}^*(A \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mathfrak{m}(B_n \cap E) + \mathfrak{m}(B_n \setminus E)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon.$$

Поэтому справедливо равенство $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(A \cap E) + \mathfrak{m}^*(A \setminus E)$ при всех $A \subset X$. □

Следствие. *Имеют место включения* $S \subset \mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}_\sigma(S) \subset \mathcal{A}_\sigma(S) \subset \Sigma$.

В силу условия σ-конечности X является единицей σ-алгебры $\mathcal{A}_\sigma(S)$.

Теорема (единственности). *Для каждой σ-аддитивной и σ-конечной меры в X $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ существует единственное продолжение на σ-алгебру Σ измеримых множеств внешней меры $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*$.*

Доказательство. В силу предположения σ-конечности меры $\mathfrak{m}$ нам достаточно рассмотреть случай, когда $X \in S$. Пусть $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ какое-нибудь продолжение меры $\mathfrak{m}$ в Σ. Если $E \in \Sigma$, то в силу свойства полуаддитивности меры ν

$$\nu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n) \text{ для всех } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in S.$$

Поэтому из определения внешней меры Лебéга $\mu = \mathfrak{m}^*$ вытекает, что $\nu(E) \leqslant \mu(E)$ при всех $E \in \Sigma$. Тогда из равенства $\nu(E) + \nu(E') = \mathfrak{m}(X) = \mu(E) + \mu(E')$ следует, что $\nu(E) = \mu(E)$ при всех $E \in \Sigma$. □

Лемма (об измеримой оболочке). *Пусть $\mu = \mathfrak{m}^*$ внешняя мера Лебéга и $A \subset X$. Тогда существует $B \in \Sigma$, т.ч. $A \subset B$ и $\mu(A) = \mu(B)$.*

Доказательство. Если $\mu(A) = \infty$, то берем $B \doteqdot X$. Если $\mu(A) < \infty$, то найдутся такие $B_{nk} \in S$, что $A \subset B_n \doteqdot \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $\mu(B_n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{nk}) < \mu(A) + 1/n$. Пусть $B \doteqdot \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, тогда $A \subset B$ и выполняется неравенство $\mu(B) \leqslant \mu(B_n) < \mu(A) + 1/n$ при всех n. Таким образом, $B \in \Sigma$ и имеет место равенство $\mu(A) = \mu(B)$. □

Определение. Пусть $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*$ и мера $\mu(X) < \infty$. Множество $E \subset X$ называется *измеримым по Лебéгу*, если выполняется равенство $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E')$.

Ясно, что если E измеримо, то оно измеримо по Лебéгу. Докажем обратное. По лемме существуют $A, B \in \Sigma$, т.ч. $E \subset A$, $E' \subset B$, $\mu(E) = \mu(A)$ и $\mu(E') = \mu(B)$. Тогда $A \cup B = X$ и, следовательно, имеет место равенство

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B) = \mu(E) + \mu(E') - \mu(X) = 0\,.$$

Поскольку $A \setminus E \subset A \cap B$, то $\mu(A \setminus E) = 0$ и, значит, множество $A \setminus E$ измеримо. Поэтому множество $E = A \setminus (A \setminus E)$ также измеримо.

Теорема (критерий измеримости Валлé-Пуссéна). *Пусть $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*$ и $\mu(X) < \infty$. Множество $E \subset X$ является измеримым тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B \in \mathcal{R}(S)$, что $\mu(E \triangle B) < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся такие $A_k \in S$, что

$$E \subset A \doteqdot \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\,, \quad \mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) < \mu(E) + \varepsilon/2\,.$$

Выберем число n, т.ч. выполняется неравенство $\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathfrak{m}(A_k)<\varepsilon/2$, и положим $B_n\doteqdot\bigcup_{k=1}^{n}A_k$. Тогда, применяя свойство полуаддитивности, получим

$$\mu(E\bigtriangleup B_n)\leqslant\mu(E\setminus B_n)+\mu(B_n\setminus E)\leqslant\mu(A\setminus B_n)+\mu(A\setminus E)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathfrak{m}(A_k)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\,.$$

Достаточность. Так как $(E\setminus B)\sqcup(B\setminus E)=E\bigtriangleup B$ и $E'\bigtriangleup B'=E\bigtriangleup B$, то по условию теоремы найдется такое $B\in\mathcal{R}(S)$, что будут выполняться неравенства

$$|\mu(E)-\mu(B)|\leqslant\mu(E\bigtriangleup B)<\varepsilon\,,\quad|\mu(E')-\mu(B')|\leqslant\mu(E'\bigtriangleup B')<\varepsilon\,.$$

В силу измеримости по Лебéгу множества $B\in\mathcal{R}(S)$ имеем $\mu(X)=\mu(B)+\mu(B')$. Складывая указанные неравенства, получим $|\mu(X)-\mu(E)-\mu(E')|<2\varepsilon$. Поскольку величина $\varepsilon>0$ произвольна, то $\mu(X)=\mu(E)+\mu(E')$. □

Определение. Пусть $\mathfrak{m}_\alpha([a,b))=\alpha(b)-\alpha(a)$ является мерой Сти́лтьеса, определенной на полукольце S полуинтервалов $[a,b)\subset\mathbb{R}$ по неубывающей функции $\alpha(x)$, непрерывной слева. Ограничение внешней меры $\mu_\alpha\doteqdot\mathfrak{m}_\alpha^*$ на σ-алгебру Σ_α измеримых множеств называется *мерой Лебéга–Сти́лтьеса*, а в случае $\alpha(x)=x$ мера $\mu\doteqdot\mathfrak{m}_x^*$ σ-алгебре Σ измеримых множеств называется *мерой Лебéга*.

Мера Лебéга–Сти́лтьеса любого промежутка вычисляется по формулам:

$$\mu_\alpha([a,b))=\alpha(b)-\alpha(a)\,,\quad\mu_\alpha((a,b))=\alpha(b)-\alpha(a+0)\,,$$
$$\mu_\alpha([a,b])=\alpha(b+0)-\alpha(a)\,,\quad\mu_\alpha((a,b])=\alpha(b+0)-\alpha(a+0)\,.$$

Поэтому мера Лебéга–Сти́лтьеса любого открытого множества $A\subset\mathbb{R}$ равна

$$\mu_\alpha(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\big(\alpha(b_n)-\alpha(a_n+0)\big),\ \text{ где }\ A=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n).$$

Пример. Докажем, что у меры Лебéга μ существуют неизмеримые множества. Введем отношение эквивалентности точек $x,y\in[0,1]$. Полагаем $x\sim y$, если число $x-y\in\mathbb{Q}$ рационально. Тогда имеем $[0,1]=\bigsqcup_{i\in I}C_i$, где C_i — непересекающиеся классы эквивалентных точек. В каждом таком классе выберем по одной точке $x_i\in C_i$ и образуем множество $E\doteqdot\{x_i\}_{i\in I}$, состоящее из неэквивалентных точек.

Пусть $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}\doteqdot[-1,1]\cap\mathbb{Q}$ — перенумерованные рациональные числа отрезка $[-1,1]$. Множества $E_n\doteqdot E+r_n$ не пересекаются, поскольку если $x\in E_n\cap E_m$, то $x=x_i+r_n=x_j+r_m$, что невозможно, т.к. элементы x_i и x_j не эквивалентны.

Если множество $E\in\Sigma$ измеримо, то $E_n\in\Sigma$ также измеримо и $\mu(E_n)=\mu(E)$. Поскольку имеют место включения $[0,1]\subset\bigsqcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset[-1,2]$, то выполняются неравенства $1\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\leqslant3$, что невозможно, поскольку все множества E_n имеют одну и ту же меру. Таким образом, множество $E\notin\Sigma$ неизмеримо.

7 ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $(X,\ \Sigma,\ \mu)$ — *измеримое пространство*, где Σ — σ-алгебра с единицей X и $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — σ-аддитивная мера, для которой каждое подмножество множества меры нуль принадлежит Σ. Множества $E \in \Sigma$ называются *измеримыми*.

Определение. Действительная функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если при всех $c \in \mathbb{R}$ множества $E(f < c) \doteqdot \{x \in E \,|\, f(x) < c\}$ измеримы.

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима, то поскольку Σ является σ-алгеброй, будут также измеримы следующие множества:

$E(f \leqslant c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < c + \frac{1}{n})$;
$E(f \geqslant c) = E \setminus E(f < c)$;
$E(f > c) = E \setminus E(f \leqslant c)$;
$E(a \leqslant f < b) = E(f < b) \setminus E(f < a)$;
$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leqslant a)$;
$E(a < f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f \leqslant a)$;
$E(a \leqslant f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f < a)$.

Лемма. *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда измерим прообраз $f^{-1}(A)$ любого боре́левского множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Достаточность очевидна, поскольку $E(f < c) = f^{-1}(-\infty, c)$ и интервал $(-\infty, c)$ является боре́левским множеством. Докажем необходимость.

Предположим, что f измерима, и обозначим через S систему множеств $A \subset \mathbb{R}$, у которых прообраз $f^{-1}(A)$ измерим. Так как Σ является σ-алгеброй и

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)\,, \quad f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)\,,$$

то S также σ-алгебра. По условию множества $f^{-1}(a, b) = E(a < f < b)$ измеримы. Отсюда система S содержит все интервалы $(a, b) \in S$. Поскольку каждое открытое множество $\mathbb{R}$ является объединением не более, чем счетного числа интервалов, то топология прямой $\mathbb{R}$ содержится в системе S. Поэтому в силу минимальности боре́левской σ-алгебры мы получаем включение $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset S$. □

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ обладает *C-свойством* на множестве $E \in \Sigma$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное измеримое множество $K \subset E$, т.ч. $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$ и сужение $g = f|_K$ на K является непрерывной функцией.

Теорема (Лу́зина)**.** *Пусть $(X,\ \Sigma,\ \mu)$ — измеримое пространство с регулярной мерой, в котором открытые множества измеримы. Тогда функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима в том и только в том случае, когда она обладает C-свойством.*

Доказательство. Необходимость. В силу регулярности меры для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $A_0, B_0 \in \Sigma$ что A_0 — компактно, B_0 — открыто, $A_0 \subset E \subset B_0$ и $\mu(B_0 \setminus A_0) < \varepsilon/2$. Пусть $\{I_n\}$ обозначает счетную систему всех интервалов $\mathbb{R}$ с рациональными концами. Тогда найдутся такие $A_n, B_n \in \Sigma$, что A_n — компактно, B_n — открыто, $A_n \subset f^{-1}(I_n) \subset B_n$ и $\mu(B_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Пусть $G \doteqdot \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \setminus A_n$, тогда $\mu(G) < \varepsilon$ и множество $K \doteqdot E \setminus G$ является компактным, поскольку

$$K \doteqdot E \setminus G = \big(E \setminus (B_0 \setminus A_0)\big) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus A_n\right) = A_0 \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus A_n\right).$$

Так как $g^{-1}(I_n) = f^{-1}(I_n) \cap K = B_n \cap K$, то множество $g^{-1}(I_n)$ открыто в K. Таким образом, сужение $g = f|_K$ на компакте K является непрерывной функцией.

Достаточность. Пусть f обладает C-свойством. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется компактное множество $K_n \in \Sigma$, т.ч. $K_n \subset E$, $\mu(E \setminus K_n) < 1/n$ и сужение $g_n \doteqdot f|_{K_n}$ на компакте K_n является непрерывной функцией. Так как прообраз $g_n^{-1}(I)$ любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ открыт в K_n, то найдутся такие открытые множества B_n, что $f^{-1}(I) \cap K_n = B_n \cap K_n$. Пусть $F \doteqdot \bigcap_{n=1}^{\infty} E \setminus K_n$, тогда множество

$$f^{-1}(I) \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \cap K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap K_n$$

является измеримым. Поскольку мера $\mu(F) = 0$ равна нулю, то прообраз $f^{-1}(I)$ будет также измеримым и, следовательно, функция f является измеримой. □

Лемма. *Пусть функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ измеримы, функция двух переменных $h(u, v)$ непрерывна на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^2$ и $(f(x), g(x)) \in D$ для всех $x \in E$. Тогда $F(x) \doteqdot h(f(x), g(x))$ является измеримой функцией на E.*

Доказательство. В силу непрерывности $h(u, v)$ множество $D(h < c) \subset \mathbb{R}^2$ является открытым. Тогда $D(h < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$, где $\Pi_n \doteqdot (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)$. Так как множество $E((f, g) \in \Pi_n) = E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n)$ является измеримым, то множество

$$E(F < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\big((f, g) \in \Pi_n\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n)$$

будет также измеримо, поскольку Σ является σ-алгеброй. □

В качестве следствия получаются следующие свойства:

1. *если функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ измеримы, то их сумма $f + g$ и произведение fg также измеримы. Частное f/g измеримо, если функция $g(x) \neq 0$ при всех $x \in E$. Степень f^p измерима, если $p > 0$ и функция $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in E$;*

2. *если функции $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримы и функции $\inf f_n(x)$, $\sup f_n(x)$, $\overline{\lim} f_n(x)$, $\underline{\lim} f_n(x)$ принимают конечные значения на множестве E, то они измеримы;*

3. *если функции* $f_n : E \to \mathbb{R}$ *измеримы и предел* $f(x) = \lim f_n(x)$ *существует при всех* $x \in E$*, то* f *является измеримой функцией.*

Измеримость нижней $\inf f_n$ и верхней $\sup f_n$ граней последовательности измеримых функций можно доказать при помощи следующих соотношений:

$$E(\inf f_n < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < c), \quad E(\sup f_n > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c).$$

Так как при всех $x \in E$ справедливы равенства

$$\overline{\lim}\, f_n(x) = \inf_{m \geqslant 1} \{\sup_{n \geqslant m} f_n(x)\}, \quad \underline{\lim}\, f_n(x) = \sup_{m \geqslant 1} \{\inf_{n \geqslant m} f_n(x)\},$$

то верхний и нижний пределы будут также измеримы. Отсюда предел $f = \lim f_n$ является измеримым, поскольку имеет место равенство $f = \overline{\lim}\, f_n = \underline{\lim}\, f_n$.

Введем следующие обозначения: $f \leqslant g$ на E, если $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in E$; $f_n \to f$ на E, если $f(x) = \lim f_n(x)$ при всех $x \in E$; $f_n \nearrow f$ на E, если $f_n \to f$ и $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ на E; $f_n \searrow f$ на E, если $f_n \to f$ и $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$ на E.

Функция $h : X \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она имеет конечное множество значений $h(X) \doteqdot \{h_1, \ldots h_m\}$. Пусть $H_l \doteqdot \{x \in X \mid h(x) = h_l\}$, тогда имеем

$$h(x) = \sum_{l=1}^{m} h_l\, \chi_{H_l}(x), \text{ где } X = \bigsqcup_{l=1}^{m} H_l \text{ и } \chi_A(x) \doteqdot \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Теорема. *Для каждой измеримой неотрицательной функции* $f : E \to \mathbb{R}_+$ *найдутся такие простые измеримые функции* $h_n : E \to \mathbb{R}_+$*, что* $h_n \nearrow f$ *на* E*.*

Доказательство. Определим последовательность простых функций по формуле

$$h_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n}\, \chi_{H_k^n}(x) + 2^n\, \chi_{H^n}(x), \quad x \in E,$$

где $H_k^n \doteqdot E(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n})$ и $H^n \doteqdot E(f \geqslant 2^n)$. Поскольку $H_k^n = H_{2k-1}^{n+1} \sqcup H_{2k}^{n+1}$, то

$$h_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant h_{n+1}(x) \text{ при всех } x \in H_k^n, \ k = 1, \ldots, 2^{2n}.$$

Так как $f(x) - h_n(x) < 1/2^n$ при всех $x \in E(f < 2^n)$, то $f_n \to f$ на E. При этом, если функция f ограничена на E, то сходимость будет равномерной $f_n \rightrightarrows f$ на E. $\square$

Определение. Последовательность сходится $f_n \to f$ *почти всюду* (п.в.) на E, если существует множество $A \in \Sigma$ меры нуль $\mu(A) = 0$, т.ч. $f_n \to f$ на $E \setminus A$.

Последовательность сходится $f_n \to f$ *почти равномерно* (п.р.) на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $A \in \Sigma$ с мерой $\mu(A) < \varepsilon$, т.ч. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus A$.

Функции называются *эквивалентными* $f \sim g$ на множестве E, если найдется множество $A \in \Sigma$ меры нуль $\mu(A) = 0$, т.ч. $f = g$ на $E \setminus A$. Если функции $f \sim g$ эквивалентны на E и f измерима на E, то g будет также измеримой на E.

Теорема (Его́рова)**.** *Если мера $\mu(E) < \infty$ и функции $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ измеримы, то $f_n \to f$ п.в. на E тогда и только тогда, когда $f_n \to f$ п.р. на E.*

Доказательство. Необходимость. Исключая из E множество меры нуль, можно считать, что $f_n \to f$ всюду на E. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множества

$$B_n \doteq \bigcap_{l=n}^{\infty} E\Big(|f_l - f| < \frac{1}{k}\Big), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поскольку по условию $B_n \nearrow E$, то в силу свойства непрерывности снизу имеем $\mu(E) = \lim \mu(B_n)$. Полагая $A_n \doteq E \setminus B_n$, получим $\lim \mu(A_n) = 0$. Поэтому найдется такой индекс n_k, что $\mu(A_{n_k}) < \varepsilon/2^k$. Пусть $A \doteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$, тогда $A \in \Sigma$ и $\mu(A) < \varepsilon$. Так как $E \setminus A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$, то для всех $x \in E \setminus A$ и $l \geqslant n_k$ получим $|f_l(x) - f(x)| < 1/k$. Таким образом, последовательность сходится равномерно на множестве $E \setminus A$.

Достаточность. По определению п.р. сходимости существуют $A_k \in \Sigma$ с мерой $\mu(A_k) < 1/k$, т.ч. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus A_k$. Тогда, полагая $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, мы получим, что $\mu(A) = 0$ и при этом последовательность сходится $f_n \to f$ на $E \setminus A$. □

Определение. Последовательность измеримых функций $f_n : E \to \mathbb{R}$ сходится $f_n \to f$ *по мере на множестве E* к измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ предел $\lim_{n\to\infty} \mu\big(E(|f - f_n| \geqslant \varepsilon)\big) = 0$ равен нулю.

Теорема. *Пусть функции $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ измеримы. Тогда если $\mu(E) < \infty$, то из $f_n \to f$ п.в. на E следует, что $f_n \to f$ по мере на E. Обратно, если $f_n \to f$ по мере на E, то найдется подпоследовательность $\{m_k\}$, т.ч. $f_{m_k} \to f$ п.в. на E*

Доказательство. Если $\mu(E) < \infty$ и последовательность $f_n \to f$ сходится п.в. на E, то по теореме Его́рова для любого $\varepsilon > 0$ найдется $A \in \Sigma$ с мерой $\mu(A) < \varepsilon$ и такое число n, что $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ при всех $k \geqslant n$ и при всех $x \in E \setminus A$. Отсюда $\mu\big(E(|f - f_k| \geqslant \varepsilon)\big) \leqslant \mu(A) < \varepsilon$ при всех $k \geqslant n$, т.е. $f_n \to f$ сходится по мере на E.

Если $f_n \to f$ сходится по мере на E, то существует такая последовательность индексов m_k, что $\mu\big(E(|f - f_{m_k}| \geqslant 1/2^k)\big) < 1/2^k$. Определим множества

$$A_n \doteq \bigcup_{k=n}^{\infty} E\Big(|f - f_{m_k}| \geqslant \frac{1}{2^k}\Big), \quad A \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\,.$$

Тогда $\mu(A_n) < 1/2^{n-1}$ и $\mu(A) = 0$. Если $x \in E \setminus A$, то $x \in E \setminus A_n$ при некотором n и, значит, $|f(x) - f_{m_k}(x)| < 1/2^k$ при всех $k \geqslant n$, т.е. $f_{m_k} \to f$ сходится на $E \setminus A$. □

Пример (Ри́сса)**.** Пусть $E \doteq [0, 1]$ и μ есть мера Лебега. Определим функции $f_n(x) \doteq \chi_{A_n}(x)$, где $A_n \doteq [k/2^m, (k+1)/2^m]$, $n = 2^m + k$, $k = 0, \ldots, 2^m - 1$. Тогда $\mu(E(f_n \geqslant \varepsilon)) \leqslant 1/2^m$ при $\varepsilon > 0$. Поэтому $f_n \to 0$ сходится по мере на $[0, 1]$. Однако $\overline{\lim} f_n(x) = 1$ и $\underline{\lim} f_n(x) = 0$ при всех $x \in [0, 1]$, т.е. f_n не сходится на $[0, 1]$.

8 ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство и $E \in \Sigma$. Обозначим через $\alpha = \{A_k\}_{k=1}^n$ произвольное измеримое разбиение множества $E = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$, где $A_k \in \Sigma$, а через

$$S_\alpha(f) \doteqdot \sum_{k=1}^n a_k(f)\mu(A_k), \text{ где } a_k(f) \doteqdot \inf_{x\in A_k} f(x),$$

сумму Дарбу неотрицательной функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ по разбиению α.

Определение. *Интегралом Лебега* от измеримой и неотрицательной функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ называется верхняя грань сумм Дарбу по всем измеримым разбиениям

$$\int_E f\,d\mu \doteqdot \sup_\alpha S_\alpha(f) = \sup_\alpha \sum_{k=1}^n a_k(f)\mu(A_k).$$

Интегралом Лебега от измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}$ произвольного знака называется разность интегралов от соответствующих неотрицательных функций

$$\int_E f\,d\mu \doteqdot \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu, \text{ где } f_\pm(x) \doteqdot \max\{\pm f(x),\, 0\}.$$

При этом предполагается, что один из интегралов от $f_\pm$ является конечным, иначе интеграл не имеет смысла. Функция называется *интегрируемой* на множестве E и обозначается $f \in \boldsymbol{L}(E, \mu)$, если она измерима и интегралы от неотрицательных функций $f_\pm$ являются конечными.

Замечание. Данное определение интеграла Лебега распространяется на любые измеримые функции, принимающие бесконечные значения. При этом для каждой интегрируемой функции $f : E \to \overline{\mathbb{R}} \doteqdot \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ мера множества $E(f = \pm\infty)$ равна нулю, иначе один из интегралов от $f_\pm$ принимал бы бесконечное значение. Поэтому всякая интегрируемая функция эквивалентна $f \sim g$ функции $g : E \to \mathbb{R}$, принимающей только конечные значения.

1. *Интеграл равен нулю $\int_E f\,d\mu = 0$ от неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда функция эквивалентна нулю $f \sim 0$.*

Пусть $E_n \doteqdot E(f \geqslant 1/n)$. Так как все суммы Дарбу $S_\alpha(f) = 0$, то $\mu(E_n) = 0$ и $\mu(E(f > 0)) = \lim \mu(E_n) = 0$. Обратно, из $\mu(E(f > 0)) = 0$ следует, что $S_\alpha(f) = 0$.

2. *Если неотрицательные функции $f, g : E \to \mathbb{R}_+$ измеримы и $f \leqslant g$ на E, то интегралы удовлетворяют неравенству $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.*

В свойстве 2 интегрируемость не предполагается, т.е. интегралы могут быть бесконечными. Для доказательства заметим, что если $f \leqslant g$ на E, то их суммы Дарбу удовлетворяют неравенству $S_\alpha(f) \leqslant S_\alpha(g)$ для любого разбиения α.

3. *Если функции $f, g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ интегрируемы и $f \leqslant g$ на E, то их интегралы удовлетворяют неравенству $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.*

Действительно, в силу свойства 2 выполняются неравенства $\int_E f_+\,d\mu \leqslant \int_E g_+\,d\mu$ и $\int_E f_-\,d\mu \geqslant \int_E g_-\,d\mu$ и, следовательно, имеет место $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.

Лемма. *Интеграл простой функции $h \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ вычисляется по формуле*

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{l=1}^{m} h_l\,\mu(E\cap H_l),\ \text{где}\ \ h(x) = \sum_{l=1}^{m} h_l\chi_{H_l}(x),\ \ H_l \doteqdot \{x\in X \mid h(x)=h_l\}.$$

Доказательство. Достаточно доказать эту лемму для неотрицательных функций. Поскольку $a_k(h) \leqslant h_l$, если $B_{kl} = A_k \cap H_l \neq \emptyset$ не пусто, то

$$S_\alpha(h) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_k\mu(B_{kl}) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} h_l\mu(B_{kl}) = \sum_{l=1}^{m} h_l\mu(E\cap H_l)\,.$$

В случае, когда разбиение $\alpha = \{E\cap H_l\}_{l=1}^{m}$, это неравенство будет равенством. □

Следствие 1. *Интеграл простой функции $h \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ будет σ-аддитивным*

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} h\,d\mu,\ \text{где}\ \ E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ \ E_n \in \Sigma.$$

Следствие 2. *Интеграл неотрицательной измеримой функции f равен*

$$\int_E f\,d\mu = \sup_{0\leqslant h\leqslant f}\int_E h\,d\mu$$

верхней грани интегралов от простых измеримых функций, т.ч. $0 \leqslant h \leqslant f$.

В самом деле, если $h \leqslant f$ на E, то из свойства 2 следует, что интеграл от h не превосходит интеграла от f. С другой стороны, в силу леммы каждая сумма Дарбу является интегралом от некоторой простой функции $0 \leqslant h \leqslant f$.

Теорема (о монотонной сходимости)**.** *Если неотрицательные измеримые функции $f_n : E \to \mathbb{R}_+$ монотонно сходятся $f_n \nearrow f$ на E, то* $\lim\int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$.

Доказательство. В силу монотонности существует предел $I = \lim\int_E f_n\,d\mu$. Из неравенства $f_n \leqslant f$ на E получим $I \leqslant \int_E f\,d\mu$. Докажем обратное неравенство.

Пусть $0 \leqslant h \leqslant f$, где h — простая измеримая функция на E. Возьмем $0 < \varepsilon < 1$ и определим $E_n \doteqdot E(\varepsilon h \leqslant f_n)$. Тогда имеем $E_n \nearrow E$ и выполняются неравенства

$$\varepsilon\int_{E_n} h\,d\mu = \int_{E_n}\varepsilon h\,d\mu \leqslant \int_{E_n} f_n\,d\mu \leqslant \int_E f_n\,d\mu \leqslant I.$$

По свойству σ-аддитивности интеграла простой функции $\lim\int_{E_n} h\,d\mu = \int_E h\,d\mu$. Отсюда $\varepsilon\int_E h\,d\mu \leqslant I$ при всех $0 < \varepsilon < 1$. Поэтому $\int_E h\,d\mu \leqslant I$ при всех $0 \leqslant h \leqslant f$ и из следствия 2 $\int_E f\,d\mu \leqslant I$. Таким образом, имеет место равенство $\int_E f\,d\mu = I$. □

4. *Пусть $f, g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda f, f+g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и выполняются равенства $\int_E \lambda f\, d\mu = \lambda \int_E f\, d\mu$, $\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$.*

Первое равенство выводится из определений. Докажем второе. Если f и g — простые неотрицательные измеримые функции, то доказательство вытекает из леммы (достаточно взять пересечение разбиений, на которых простые функции f и g принимают постоянные значения). Если f и g — измеримые неотрицательные функции, то существуют монотонные последовательности простых неотрицательных измеримых функций $f_n \nearrow f$ и $g_n \nearrow g$. Так как $f_n + g_n \nearrow f + g$, то, применяя теорему о монотонной сходимости, получим

$$\int_E (f+g)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E (f_n + g_n)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu.$$

В общем случае, пусть $f = f_+ - f_-$ и $g = g_+ - g_-$. Тогда из равенства $f + g = (f+g)_+ - (f+g)_-$ следует, что $(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$. Интегрируя это равенство, а затем группируя его слагаемые, получим требуемый результат.

5. *Если $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, то модуль $|f| \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $|\int_E f\, d\mu| \leqslant \int_E |f|\, d\mu$.*

Интегрируемость модуля $|f| = f_+ + f_-$ следует из свойства 4, а неравенство для интегралов можно получить из свойства 2, поскольку $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$.

Лемма (Фату). *Если неотрицательные функции $f_n : E \to \mathbb{R}_+$ измеримы и $f = \varliminf f_n$ п.в. на E, то выполняется неравенство $\int_E f\, d\mu \leqslant \varliminf \int_E f_n\, d\mu$.*

Доказательство. В силу свойств 1 и 4 мы можем считать, что $f = \varliminf f_n$ всюду на E. Положим $g_m \doteqdot \inf_{n\geqslant m} f_n$ на E. Тогда $g_m \nearrow f$ на E и из неравенства $g_m \leqslant f_n$ при всех $n \geqslant m$ вытекает, что $\int_E g_m\, d\mu \leqslant \int_E f_n\, d\mu$ при всех $n \geqslant m$. Отсюда имеем $\int_E g_m\, d\mu \leqslant \inf_{n\geqslant m} \int_E f_n\, d\mu$. Применяя теорему о монотонной сходимости, получим

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_E g_m\, d\mu \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf_{n\geqslant m} \int_E f_n\, d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu.$$

Таким образом, неравенство доказано. □

Теорема (Лебега о предельном переходе). *Пусть функции $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримы, существует предел $f = \lim f_n$ п.в. на E и найдется неотрицательная функция $g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, т.ч. $|f_n| \leqslant g$ на E. Тогда $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\int_E f\, d\mu = \lim \int_E f_n\, d\mu$.*

Доказательство. Так как f_n, f измеримы и $f_{n\pm} f_\pm \leqslant g$ п.в. на E, то в силу свойств $1, 2, 4$ получим $f_n, f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$. Поскольку $g \pm f_n \geqslant 0$ на E, то по лемме Фату

$$\int_E (g+f)\, d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g+f_n)\, d\mu, \qquad \int_E (g-f)\, d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g-f_n)\, d\mu.$$

Таким образом, в силу свойства 4 выполняются неравенства

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu \leqslant \int_E f\, d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_i\, d\mu.$$

Так как нижний предел не превосходит верхний, то из этих неравенств следует, что предел $\lim \int_E f_n\,d\mu$ существует и равен интегралу от f. $\square$

Теорема (о счетной аддитивности)**.** *Пусть* $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *и* $E_n \in \Sigma$. *Тогда* $\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu$, *т.е. интеграл Лебега является* σ*-аддитивным.*

Доказательство. Пусть вначале функция $f \geqslant 0$ неотрицательна и $E = E_1 \sqcup E_2$. Каждое разбиение α множества E порождает разбиения $\alpha_1 \doteqdot \alpha \cap E_1$ и $\alpha_2 \doteqdot \alpha \cap E_2$ множеств E_1 и E_2. В этом случае имеет место неравенство $S_\alpha(f) \leqslant S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$. С другой стороны, если α_1 — разбиение E_1 и α_2 — разбиение E_2, то, полагая $\alpha = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$, получим $S_\alpha(f) = S_{\alpha_1}(f) + S_{\alpha_2}(f)$. Таким образом, переходя к верхней грани по всем разбиениям, имеем равенство $\int_E f\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu$.

Пусть теперь $f \geqslant 0$ и $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \Sigma$. Положим $F_n \doteqdot \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k$ и $f_n \doteqdot \chi_{F_n} f$. Тогда $f_n \nearrow f$ и по теореме о монотонной сходимости

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu.$$

В общем случае, заменяя функцию разностью $f = f_+ - f_-$ двух неотрицательных функций $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$, мы сведем доказательство к предыдущему случаю. $\square$

Неравенство Чебышёва: *для всякой неотрицательной измеримой функции* $f : E \to \mathbb{R}_+$ *при всех* $t > 0$ *выполняется неравенство:*

$$\mu(E_t) \leqslant \frac{1}{t} \int_E f\,d\mu, \text{ где } E_t \doteqdot E(f \geqslant t).$$

В самом деле, применяя свойство 2, имеем неравенство $\int_E f\,d\mu \geqslant \int_{E_t} f\,d\mu \geqslant t\mu(E_t)$, из которого вытекает неравенство Чебышёва.

Определение. Функция $\lambda_f(t) \doteqdot \mu(E_t)$, определенная при всех $t > 0$, называется *функцией распределения* неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$. Если $\lambda_f(t) = \lambda_g(t)$ при всех $t > 0$, то функции f и g называются *равноизмеримыми.*

Заметим, что функция распределения не возрастает, непрерывна слева и может принимать бесконечные значения на некотором интервале $(0, a)$, где $0 < a \leqslant \infty$. Если $\mu(E(f = t)) > 0$ и $t > a$, то t является точкой разрыва этой функции.

Пусть $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, тогда $\lambda_f(t)$ конечна при всех $t > 0$. Так как пересечение всех множеств E_t пусто, то $E_t \searrow \emptyset$. Поэтому по свойству непрерывности сверху $\lim_{t\to\infty} \int_{E_t} f\,d\mu = 0$. Следовательно, в силу неравенства $t\mu(E_t) \leqslant \int_{E_t} f\,d\mu$ имеет место соотношение $\lambda_f(t) = o(1/t)$ при $t \to \infty$. По теореме Фуби́ни получим

$$\int_E f\,d\mu = \int_0^\infty \mu(E_t)\,dt = \int_0^\infty \lambda_f(t)\,dt.$$

Таким образом, равноизмеримые функции имеют равные интегралы Лебега.

9 АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство и $\Sigma_E \doteqdot \{A \subset E \mid A \in \Sigma\}$ обозначает σ-алгебру измеримых подмножеств с единицей $E \in \Sigma$.

Определение. Функция множества $\varphi : \Sigma_E \to \mathbb{R}$, определенная на σ-алгебре Σ_E, называется *зарядом на* E, если она σ-аддитивна. Заряд φ называется *абсолютно непрерывным на* E, т.е. $\varphi \ll \mu$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $A \in \Sigma_E$ с мерой $\mu(A) < \delta$ выполняется неравенство $|\varphi(A)| < \varepsilon$.

Теорема (об абсолютной непрерывности)**.** *Если функция $f \in \boldsymbol{L}(E, \mu)$, то ее неопределенный интеграл Лебега $\varphi(A) \doteqdot \int_A f\, d\mu$, $A \in \Sigma_E$, является абсолютно непрерывным зарядом на множестве E.*

Доказательство. Используя разложение $f = f_+ - f_-$, мы можем считать, что $f \geqslant 0$. Пусть $E_n \doteqdot E(f \leqslant n)$, тогда $E_n \nearrow E$ и в силу свойства непрерывности снизу $\lim \varphi(E_n) = \varphi(E)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\varphi(E \setminus E_n) < \varepsilon/2$. Следовательно, для всякого $A \in \Sigma_E$ с мерой $\mu(A) < \delta = \varepsilon/2n$ мы получим

$$\varphi(A \cap E_n) = \int_{A \cap E_n} f\, d\mu \leqslant n\mu(A \cap E_n) < n\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда вытекает неравенство $\varphi(A) = \varphi(A \cap E_n) + \varphi(A \setminus E_n) < \varepsilon$. □

Теорема (Радóна–Никоди́ма)**.** *Если для заряда $\varphi : \Sigma_E \to \mathbb{R}$ на множестве E σ-конечной меры выполняется условие: $\varphi(A) = 0$ для всякого $A \in \Sigma_E$ меры нуль $\mu(A) = 0$, то существует единственная функция $f \in \boldsymbol{L}(E, \mu)$ с точностью до эквивалентности, т.ч. $\varphi(A) = \int_A f\, d\mu$ при всех $A \in \Sigma_E$* (без доказательства)*.*

Докажем единственность. Пусть $\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$ для всех множеств $A \in \Sigma_E$. Если предположить, что на множестве $B \in \Sigma_E$ положительной меры $\mu(B) > 0$ выполняется неравенство $f - g > 0$, то $\int_B (f - g)\, d\mu > 0$, что невозможно.

Следствие (критерий абсолютной непрерывности)**.** *Заряд $\varphi : \Sigma_E \to \mathbb{R}$ является абсолютно непрерывным $\varphi \ll \mu$ тогда и только тогда, когда $\varphi(A) = 0$ для всякого множества $A \in \Sigma_E$ меры нуль $\mu(A) = 0$.*

Необходимость этого утверждения очевидна, а достаточность следует из теорем Радóна–Никоди́ма и абсолютной непрерывности интеграла Лебéга.

Обозначим через $\boldsymbol{BV}[a, b]$ пространство функций $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, т.е. у которых величина вариации конечна:

$$\mathrm{Var}_a^b(F) \doteqdot \sup_{\tau} \sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $\tau \doteqdot \{a = x_0 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$. Пространство $\boldsymbol{BV}[a, b]$ является нормированным пространством, в котором норма функции $F \in \boldsymbol{BV}[a, b]$ определяется по формуле $\|F\| \doteqdot |F(a)| + \mathrm{Var}_a^b(F)$.

Следующие свойства хорошо известны из курса математического анализа.

1. *Если* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, *то* $\mathrm{Var}_a^b(F) = \mathrm{Var}_a^c(F) + \mathrm{Var}_c^b(F)$ *при* $a < c < b$.

2. *Если функция* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ *непрерывна слева в точке* $c \in (a,b]$, *то функция* $V(x) \doteqdot \mathrm{Var}_a^x(F)$ *также непрерывна слева в этой точке.*

3. Разложение Жорда́на: *если* $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, *то* $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ *и* $\mathrm{Var}_a^x(F) = \alpha(x) + \beta(x)$, *где* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *неубывающие функции,* $\alpha(a) = \beta(a) = 0$. *При этом, если* F *непрерывна слева, то* α *и* β *также непрерывны слева.*

Эти неубывающие функции α и β вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha(x) \doteqdot \frac{1}{2}\Big\{\mathrm{Var}_a^x(F) + F(x) - F(a)\Big\}, \quad \beta(x) \doteqdot \frac{1}{2}\Big\{\mathrm{Var}_a^x(F) - F(x) + F(a)\Big\}.$$

Теорема (Лебе́га о производной монотонной функции)**.** *Всякая монотонная функция* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *имеет производную п.в. на* $[a,b]$ *(*без доказательства*).*

Из разложения Жорда́на и теоремы Лебе́га следует, что функция ограниченной вариации $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ является ограниченной на $[a,b]$, имеет производную п.в. на $[a,b]$ и множество ее точек разрыва на отрезке $[a,b]$ не более, чем счетно.

Пусть функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ непрерывна слева и $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ ее разложение Жорда́на. Рассмотрим меры Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β, определенные по неубывающим функциям α и β. Разность этих мер $\varphi_F \doteqdot \mu_\alpha - \mu_\beta$ называется *зарядом Лебе́га–Сти́лтьеса*. Он задается на пересечении $\Sigma_F \doteqdot \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ σ-алгебр измеримых множеств Σ_α и Σ_β соответствующих мер μ_α и μ_β.

Определение. *Интеграл Лебе́га–Сти́лтьеса* равен разности интегралов

$$\int_a^b f\, d\varphi_F \doteqdot \int_a^b f\, d\mu_\alpha - \int_a^b f\, d\mu_\beta$$

по мерам Лебе́га–Сти́лтьеса μ_α и μ_β на промежутке $[a,b)$. Функция f называется *интегрируемой по заряду* φ_F, если она интегрируема по мерам μ_α и μ_β.

Интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса по отрезку $[a,b]$ равен пределу

$$\int_a^b f\, dF \doteqdot \lim_{d(\tau)\to 0} R_\tau(f,\xi,F), \quad R_\tau(f,\xi,F) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})),$$

интегральных сумм Ри́мана, когда диаметр $d(\tau)$ разбиения τ стремится к нулю, где $\tau \doteqdot \{a = x_0 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$, $\xi \doteqdot \{\xi_k\}$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $d(\tau) \doteqdot \max(x_k - x_{k-1})$. Если использовать разложение Жорда́на, то интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса будет равен разности интегралов Ри́мана–Сти́лтьеса по функциям α и β.

Лемма. *Интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса существует для всякой непрерывной функции* $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$. *В этом случае он не зависит от изменения функции* F *на счетном множестве точек отрезка* $[a,b]$.

Доказательство. Заметим, что суммы Ри́мана $R_\tau(f, \xi, F)$ будут совпадать с интегралами Лебе́га–Сти́лтьеса от простых функций $h_\tau(x) = f(\xi_k)$ при $x \in [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Поскольку f равномерно непрерывна на $[a, b]$, то $h_\tau \rightrightarrows f$, когда $d(\tau) \to 0$. Поэтому по теореме Лебе́га предел этих интегралов существует и функция f будет интегрируемой в смысле Ри́мана–Сти́лтьеса. □

Теорема (сравнения интегралов)**.** *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена, то из существования интеграла Ри́мана–Сти́лтьеса вытекает существование интеграла Лебе́га–Сти́лтьеса и их равенство.*

Доказательство. В силу разложения Жорда́на, мы можем считать, что функция $F = \alpha$ неубывающая. Кроме того, так как f ограничена, то мы можем считать ее неотрицательной. Рассмотрим нижние и верхние суммы Дарбу́ по разбиению τ

$$\underline{D}_\tau(f, \alpha) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \underline{a}_k \mathfrak{m}_\alpha([x_{k-1}, x_k)), \quad \overline{D}_\tau(f, \alpha) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k \mathfrak{m}_\alpha([x_{k-1}, x_k)),$$

где $\underline{a}_k \doteqdot \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ и $\overline{a}_k \doteqdot \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Заметим, что суммы Дарбу́ по произвольным измеримым разбиениям промежутка $[a, b)$, которые продолжают разбиение τ, находятся между $\underline{D}_\tau(f, \alpha)$ и $\overline{D}_\tau(f, \alpha)$. Пусть I обозначает интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. выполняется неравенство $I - \varepsilon < R_\tau(f, \xi, \alpha) < I + \varepsilon$ для всех разбиений $d(\tau) < \delta$. Поэтому

$$I - \varepsilon \leqslant \underline{D}_\tau(f, \alpha) \leqslant R_\tau(f, \xi, \alpha) \leqslant \overline{D}_\tau(f, \alpha) \leqslant I + \varepsilon$$

для всех разбиений $d(\tau) < \delta$. Отсюда вытекает утверждение теоремы. □

Определение. Функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. для всякой системы непересекающихся интервалов $\bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subset [a, b]$ с суммой длин $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ имеет место неравенство $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$. Обозначим через $\boldsymbol{AC}[a, b]$ нормированное пространство всех абсолютно непрерывных функций, в котором норма определяется по формуле $\|F\| \doteqdot |F(a)| + \int_a^b |F'(t)|\, dt$.

1. *Пусть $F \in \boldsymbol{Lip}[a, b]$, т.е. существует $c > 0$, т.ч. выполняется условие Ли́пшица $|F(x) - F(y)| \leqslant c\,|x - y|$ при всех $x, y \in [a, b]$. Тогда $F \in \boldsymbol{AC}[a, b]$.*

2. *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a, b]$, то $F \in \boldsymbol{BV}[a, b]$ имеет ограниченную вариацию и, следовательно, существует производная $F'(x)$ п.в. на отрезке $[a, b]$.*

Пусть $(x_k - x_{k-1}) = \delta/2 = \frac{(b-a)}{n}$, тогда $\mathrm{Var}_a^b(F) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_{x_{k-1}}^{x_k}(F) \leqslant n\varepsilon = \frac{(b-a)}{\delta}\varepsilon$.

3. *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a, b]$ и $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ задает разложение Жордана, то $\alpha, \beta \in \boldsymbol{AC}[a, b]$ абсолютно непрерывны.*

Достаточно доказать, что $V(x) \doteqdot \mathrm{Var}_a^x(F) \in \boldsymbol{AC}[a, b]$. По определению, если сумма длин $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, то $\sum_{k=1}^{n} |V(b_k) - V(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_{a_k}^{b_k}(F) \leqslant \varepsilon$.

4. *Пусть $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Тогда существует единственная функция $f \in \boldsymbol{L}[a,b]$ с точностью до эквивалентности, т.ч. $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$.*

Пусть $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ — разложение Жорда́на, где $\alpha, \beta \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Тогда меры Лебе́га-Сти́лтьеса μ_α и μ_β абсолютно непрерывны по мере Лебе́га. Поэтому заряд $\varphi_F = \mu_\alpha - \mu_\beta$ абсолютно непрерывен по мере Лебе́га и по теореме Радо́на–Никоди́ма $F(x) - F(a) = \varphi_F([a,x)) = \int_a^x f(t)\,dt$, где $f \in \boldsymbol{L}[a,b]$.

Лемма. *Если $F(t)$ неубывает на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b F'(t)dt \leqslant F(b) - F(a)$. Если, кроме того, $F \in \boldsymbol{Lip}[a,b]$, то это неравенство будет равенством.*

Доказательство. Положим $F(t) \doteqdot F(b)$ при $t \in [b, b+1]$. Тогда по теореме Лебе́га $F_n(t) \doteqdot n(F(t+1/n) - F(t)) \to F'(t)$ п.в. на $[a,b]$. Применяя лемму Фату́, имеем

$$\int_a^b F'(t)dt \leqslant \varliminf \int_a^b F_n(t)dt = \varliminf \Big(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)dt - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)dt \Big) \leqslant F(b) - F(a).$$

Пусть $F \in \boldsymbol{Lip}[a,b]$, тогда $|F_n(t)| \leqslant c$ при всех $x \in [a,b]$. Теперь вместо леммы Фату́ мы можем применить теорему Лебе́га, откуда вытекает равенство. □

Теорема (характеристическое свойство)**.** *Функция $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда существует производная $F'(t)$ п.в. на $[a,b]$, $F' \in \boldsymbol{L}[a,b]$ и $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$.*

Доказательство. Достаточность следует из абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Докажем необходимость. Пусть $F(a) = 0$. Тогда, применяя свойство 4, получим такую функцию $f \in \boldsymbol{L}[a,b]$, что $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$. Затем, представляя ее в виде разности $f = f_+ - f_-$ неотрицательных функций $f_\pm$, мы можем считать функцию f неотрицательной, а функцию F неубывающей. Осталось доказать, что $F'(x) = f(x)$ п.в. на отрезке $[a,b]$.

Пусть $f_n(t) = \min\{f(t), n\}$ и $F_n(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Так как $f - f_n \geqslant 0$, то функция $F(x) - F_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t))\,dt$ является неубывающей. Поэтому $F'(x) \geqslant F_n'(x)$ п.в. на $[a,b]$. Поскольку функция $F_n \in \boldsymbol{Lip}[a,b]$, то в силу леммы имеет место равенство $F_n(x) = \int_a^x F_n'(t)\,dt = \int_a^x f_n(t)\,dt$. Отсюда вытекает, что $F_n'(x) = f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$ в силу свойства 4 (единственности). Тогда $F'(x) \geqslant F_n'(x) = f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$ и, переходя к пределу, получаем неравенство $F'(x) \geqslant f(x)$ п.в. на $[a,b]$. Поэтому $\int_a^b (F'(t) - f(t))\,dt \geqslant 0$. С другой стороны, в силу леммы будет выполняться неравенство $\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$ и, следовательно, имеет место равенство $\int_a^b (F'(t) - f(t))\,dt = 0$. Так как подынтегральная функция неотрицательна п.в. на $[a,b]$, то она равна $F'(x) - f(x) = 0$ п.в. на $[a,b]$. □

Пример. Функция Ка́нтора $k(x)$ (*канторова лестница*) имеет производную, равную $k'(x) = 0$ п.в. на $[0,1]$, поскольку на каждом дополнительном интервале к канторову множеству $C \subset [0,1]$ она постоянная, а канторово множество имеет меру нуль. Поэтому функция Ка́нтора $k(x)$ не является абсолютно непрерывной.

10 ТЕОРЕМА ФУБИНИ

Пусть S_k является полукольцом множеств в X_k, $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $S \doteqdot S_1 \times \ldots \times S_n$ прямое произведение полуколец, состоящее из всех множеств $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_k \in S_k$. Рассмотрим меры $\mathfrak{m}_k : S_k \to \mathbb{R}_+$, заданные на полукольцах S_k, $k = 1, \ldots, n$. Функция множества $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$,

$$\mathfrak{m}(A) \doteqdot \mathfrak{m}_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}(A_n), \quad \text{где } A = A_1 \times \ldots \times A_n \in S,$$

называется *прямым произведением мер* и обозначается через $\mathfrak{m} \doteqdot \mathfrak{m}_1 \times \ldots \times \mathfrak{m}_n$.

Теорема. *Если $\mathfrak{m}_k : S_k \to \mathbb{R}_+$, $k = 1, \ldots, n$, являются σ-аддитивными мерами, то функция множества $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \ldots \times \mathfrak{m}_n$ является σ-аддитивной мерой на полукольце $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ множеств в $X = X_1 \times \ldots \times X_n$.*

Доказательство. Нам достаточно рассмотреть случай $n = 2$, а затем применить индукцию. Докажем, что S является полукольцом. Если $A = A_1 \times A_2$ и $B = B_1 \times B_2$, то пересечение $A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$, а разность представляется в виде

$$A \setminus B = \big((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big) \sqcup \big((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)\big) \sqcup \big((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big).$$

Следовательно, S образует полукольцо множеств в X.

Доказательство конечной аддитивности и σ-аддитивности функции $\mathfrak{m}$ проведем одновременно. Пусть $A = \bigsqcup_{l=1}^{m} B^{(l)}$, где $A = A_1 \times A_2$, $B^{(l)} = B_1^{(l)} \times B_2^{(l)}$, $l = 1, \ldots, m$, где m конечно или счетно. Положим $f_l(x_1) \doteqdot \mathfrak{m}_2(B_2^{(l)})\chi_{B_1^{(l)}}(x_1)$ при всех $x_1 \in A_2$.

Заметим, что множество A_2 является объединением множеств $B_2^{(l)}$. Поскольку множество $A = A_1 \times A_2$ является дизъюнктным объединением всех множеств $B^{(l)} = B_1^{(l)} \times B_2^{(l)}$, то для каждого $x_1 \in A_1$ множество A_2 является дизъюнктным объединением тех множеств $B_2^{(l)}$, у которых индекс l удовлетворяет включению $x_1 \in B_1^{(l)}$. Поэтому имеем равенство $\mathfrak{m}_2(A_2) = \sum_{l=1}^{m} f_l(x_1)$ при всех $x_1 \in A_1$.

Обозначим через μ_1 продолжение меры $\mathfrak{m}_1$ на σ-алгебру измеримых множеств. Тогда, применяя свойство 4 линейности интеграла или теорему о монотонной сходимости (в случае $m = \infty$), получим равенство

$$\mathfrak{m}_1(A_1)\mathfrak{m}_2(A_2) = \int_{A_1} \mathfrak{m}_2(A_2)\, d\mu_1 = \sum_{l=1}^{m} \int_{A_1} f_l\, d\mu_1 = \sum_{l=1}^{m} \mathfrak{m}_1(B_1^{(l)})\mathfrak{m}_2(B_2^{(l)}).$$

Таким образом, функция $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$ является σ-аддитивной. □

Определение. Пусть (X_k, Σ_k, μ_k) — измеримые пространства, $k = 1, \ldots, n$, и $\mathfrak{m} \doteqdot \mu_1 \times \ldots \times \mu_n$ есть прямое произведение мер, определенное на полукольце $S = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$. *Произведением измеримых пространств* называется такое измеримое пространство (X, Σ, μ), в котором μ является продолжением меры $\mathfrak{m}$ на σ-алгебру Σ измеримых множеств внешней меры $\mathfrak{m}^*$, т.е. $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_{\Sigma}$. Мера μ называется *произведением мер* и обозначается через $\mu \doteqdot \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$.

Произведение измеримых пространств обладает свойством ассоциативности. В частности, имеет место равенство $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$, поскольку этим свойством, очевидно, обладает прямое произведение мер. Для сокращения записи далее будем рассматривать произведение двух измеримых пространств.

Пусть далее (Z, Σ, μ) обозначает произведение двух измеримых пространств (X, Σ_x, μ_x) и (Y, Σ_y, μ_y), где $Z \doteqdot X \times Y$ и $\mu \doteqdot \mu_x \otimes \mu_y$. Следующие множества

$$E_x \doteqdot \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}, \quad E_y \doteqdot \{x \in X \mid (x, y) \in E\} \quad \text{где } x \in X,\ y \in Y,$$

называются *сечениями множества* $E \subset Z$ по переменным x и y соответственно. Функции $f_x : E_x \to \mathbb{R}$, $f_x(y) \doteqdot f(x, y)$, и $f_y : E_y \to \mathbb{R}$, $f_y(x) \doteqdot f(x, y)$, называются *сечениями функции* $f : E \to \mathbb{R}$ по переменным x и y соответственно.

Теорема (вычисление меры при помощи сечений). *Если измеримое множество $E \in \Sigma$ имеет σ-конечную меру, то $\mu(E) = \int_X \mu_y(E_x)\, d\mu_x = \int_Y \mu_x(E_y)\, d\mu_y$.*

Доказательство. Докажем первое равенство. Если $E = A \times B \in S \doteqdot \Sigma_x \times \Sigma_y$, то

$$\mu(E) = \mu_x(A)\mu_y(B) = \int_A \mu_y(B)\, d\mu_x = \int_X \mu_y(E_x)\, d\mu_x.$$

Если $E \in \mathcal{R}(S)$, то утверждение вытекает из аддитивности мер μ и μ_y, а также из аддитивности интеграла по мере μ_x. Пусть множество $E \in \Sigma$ имеет конечную меру $\mu(E) < \infty$. Обозначим через A оболочку E, определенную по формуле

$$A \doteqdot \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где } E \subset A_k \doteqdot \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl},\ A_{kl} \in S,\ \mu(A_k \setminus E) < 1/k.$$

Отсюда $E \subset A$ и $\mu(A \setminus E) = 0$. Пусть $B_n \doteqdot \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ и $D_{nm} \doteqdot \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m} A_{kl} \in \mathcal{R}(S)$. Тогда имеем $B_n \searrow A$ и $D_{nm} \nearrow B_n$ и, следовательно, $B_{nx} \searrow A_x$ и $D_{nmx} \nearrow B_{nx}$. Таким образом, применяя свойства непрерывности снизу и сверху мер μ и μ_y, а также теорему о монотонной сходимости, мы получим равенство $\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x)\, d\mu_x$. Осталось проверить это равенство для множества $B = A \setminus E$ меры нуль $\mu(B) = 0$. Как и в предыдущем случае, возьмем оболочку C множества B, тогда получим $\int_X \mu_y(C_x)\, d\mu_x = 0$. Поскольку $B \subset C$, то $B_x \subset C_x$ и, значит, $\int_X \mu_y(B_x)\, d\mu_x = 0$.

Наконец, в случае множества $E \in \Sigma$ σ-конечной меры, нужно представить его в виде дизъюнктного объединения множеств конечной меры, а затем использовать σ-аддитивность мер μ, μ_y и теорему о монотонной сходимости. □

Пример 1. Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство и $f : E \to \mathbb{R}_+$ измеримая неотрицательная функция на E. Рассмотрим произведение мер $\lambda \doteqdot \mu \otimes dt$, где dt обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}_+$. Тогда подграфик $G \doteqdot \{(x, t) \mid x \in E,\ 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ функции f измерим в $X \times \mathbb{R}_+$. Применяя теорему, получим равенства

$$\lambda(G) = \int_E f\, d\mu = \int_0^{\infty} \lambda_f(t)\, dt, \quad \text{где } \lambda_f(t) \doteqdot \mu(G_t) \text{ — функция распределения.}$$

Лемма. *Подграфик измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ является измеримым.*

Доказательство. Рассмотрим следующие «ступенчатые» функции:

$$h_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n}\chi_{H_k^n}(x), \text{ где } H_k^n \doteqdot E\Big(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n}\Big) \text{ и } \chi_A(x) \doteqdot \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Поскольку H_k^n измеримы, то подграфик G_n функции h_n измерим, а так как $h_n \searrow f$ сходятся монотонно на E, то подграфик $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ функции f измерим. □

Теорема (Фуби́ни)**.** *Если измеримое множество $E \in \Sigma$ имеет σ-конечную меру и $f \in \boldsymbol{L}(E, \mu)$, то справедливы следующие равенства:*

$$\int_E f\,d\mu = \int_X\Big(\int_{E_x} f_x\,d\mu_y\Big)\,d\mu_x = \int_Y\Big(\int_{E_y} f_y\,d\mu_x\Big)\,d\mu_y.$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Представляя функцию f разностью неотрицательных функций $f_\pm$, мы сведем доказательство к случаю, когда $f \geqslant 0$. Рассмотрим произведение мер $\lambda \doteqdot \mu_x \otimes \mu_y \otimes dt = \mu \otimes dt = \mu_x \otimes \nu$, где $\nu \doteqdot \mu_y \otimes dt$ и dt мера Лебега в $\mathbb{R}_+$. Тогда подграфик $G \doteqdot \{(x, y, t) \mid (x, y) \in E,\ 0 \leqslant t \leqslant f(x, y)\}$ функции f является измеримым в $X \times Y \times \mathbb{R}_+$. Вычисляя меру подграфика G при помощи сечений, получим следующие равенства:

$$\lambda(G) = \int_E f\,d\mu = \int_X \nu(G_x)\,d\mu_x = \int_X\Big(\int_{E_x} f_x\,d\mu_y\Big)\,d\mu_x.$$

Аналогично доказывается второе равенство. □

Определение. *Мера Лебе́га в $\mathbb{R}^n$.* Рассмотрим n экземпляров $(\mathbb{R}, \Sigma_k, \mu_k)$, где $k = 1, \ldots, n$, измеримых пространств меры Лебега на прямой $\mathbb{R}$. Их произведение $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ называется *измеримым пространством меры Лебе́га* $\mu \doteqdot \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. По традиции мера Лебега часто обозначается через dx.

Рассмотрим связь между интегралами Ри́мана и Лебе́га на n-мерном отрезке $\Delta \doteqdot [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Обозначим далее через $\boldsymbol{R}(\Delta)$ пространство функций, интегрируемых по Ри́ману, а через $\boldsymbol{L}(\Delta)$ пространство функций, интегрируемых по Лебе́гу. Известно, что всякая функция $f \in \boldsymbol{R}(\Delta)$ ограничена. Пусть

$$\underline{f}(x) \doteqdot \lim_{r\to 0} \inf_{y\in\Delta\cap S_r(x)} f(y), \quad \overline{f}(x) \doteqdot \lim_{r\to 0} \sup_{y\in\Delta\cap S_r(x)} f(y), \quad \text{где } x \in \Delta,$$

обозначают *нижнюю* и *верхнюю функции Бэ́ра* ограниченной функции $f : \Delta \to \mathbb{R}$. Ясно, что $\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x)$ при всех $x \in \Delta$. При этом функция f непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$. Обозначим далее через $E_f \doteqdot \{x \in \Delta \mid \underline{f}(x) \neq \overline{f}(x)\}$ множество всех точек разрыва функции f на отрезке Δ. Так как множества $\Delta(\underline{f} > c)$ и $\Delta(\overline{f} < c)$ являются открытыми в $\mathbb{R}^n$, то функции Бэра $\underline{f}$ и $\overline{f}$ измеримы на отрезке Δ.

Теорема (Лебе́га). *Пусть $f : \Delta \to \mathbb{R}$ является ограниченной функцией на отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $f \in \boldsymbol{R}(\Delta)$ в том и только в том случае, когда $\mu(E_f) = 0$. При этом, если $f \in \boldsymbol{R}(\Delta)$, то $f \in \boldsymbol{L}(\Delta)$ и интегралы совпадают.*

Доказательство. Пусть $\tau = \{\Delta_l\}_{l=1}^m$ образует разбиение отрезка $\Delta = \bigcup_{l=1}^m \Delta_l$, где $\mathring{\Delta}_l \cap \mathring{\Delta}_{l'} = \emptyset$ при $l \neq l'$. Рассмотрим нижние и верхние суммы Дарбу́

$$\underline{D}_\tau(f) \doteqdot \sum_{l=1}^m \underline{a}_l \mu(\Delta_l), \quad \overline{D}_\tau(f) \doteqdot \sum_{l=1}^m \overline{a}_l \mu(\Delta_l),$$

где $\underline{a}_l \doteqdot \inf_{x\in\Delta_l} f(x)$, $\overline{a}_l \doteqdot \sup_{x\in\Delta_l} f(x)$. Покажем, что нижний и верхний интегралы Дарбу равны интегралам Лебе́га от нижней и верхней функций Бэ́ра, т.е.

$$\underline{\int} f(x)\,dx \doteqdot \sup_\tau \underline{D}_\tau(f) = \int_\Delta \underline{f}\,d\mu, \quad \overline{\int} f(x)\,dx \doteqdot \inf_\tau \overline{D}_\tau(f) = \int_\Delta \underline{f}\,d\mu.$$

Рассмотрим такую последовательность разбиений $\tau_k = \{\Delta_l^k\}_{l=1}^{m_k}$ отрезка Δ, что

$$1)\; d(\tau_k) \to 0; \quad 2)\; \tau_k \supset \tau_{k+1}; \quad 3)\; \underline{\int} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \underline{D}_{\tau_k}(f) = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^k \mu(\Delta_l^k).$$

Определим простые функции $h_k(x) = \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^k \chi_{\Delta_l^k}(x)$. Тогда имеем $h_k(x) \nearrow \underline{f}(x)$, если $x \in \mathring{\Delta}_l^k$ при всех l и k. Поэтому $h_k \nearrow \underline{f}$ п.в. на Δ и по теореме Лебе́га

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{m_k} \underline{a}_l^k \mu(\Delta_l^k) = \lim_{k\to\infty} \int_\Delta h_k\,d\mu = \int_\Delta \underline{f}\,d\mu.$$

Аналогично получаем второе равенство. По условию интегрируемости по Ри́ману $f \in \boldsymbol{R}(\Delta)$ верхний и нижний интегралы Дарбу́ совпадают. Следовательно, имеем $\int_\Delta (\overline{f} - \underline{f})\,d\mu = 0$ и из неравенства $\underline{f}(x) \leqslant \overline{f}(x)$ получаем равенство $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ п.в. на отрезке Δ. Отсюда вытекает первое утверждение. Для доказательства второго заметим, что $\overline{f}(x) = f(x) = \underline{f}(x)$ п.в. на Δ. Поэтому все интегралы совпадают

$$\int_\Delta f(x)\,dx = \underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx = \int_\Delta \underline{f}\,d\mu = \int_\Delta \overline{f}\,d\mu = \int_\Delta f\,d\mu.$$

$\square$

Пример 2. Построим такую функцию на отрезке $[0,1]$, которая интегрируема по Лебе́гу, однако никакая ей эквивалентная функция не интегрируема по Ри́ману. Перенумеруем все рациональные точки $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ и образуем множество $A_\varepsilon \doteqdot \bigcup_{n=1}^\infty (r_n - e_n, r_n + e_n)$, где $e_n \doteqdot \varepsilon/2^{n+1}$ и $0 < \varepsilon < 1$. Так как мера $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, то множество $B_\varepsilon \doteqdot [0,1] \setminus A_\varepsilon$ имеет меру $\mu(B_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Множество B_ε является замкнутым и состоит из иррациональных чисел и, следовательно, нигде не плотно. Отсюда множество всех точек разрыва функции $f(x) \doteqdot \chi_{B_\varepsilon}(x)$ будет совпадать с множеством B_ε. В таком случае нетрудно заметить, что любая эквивалентная ей функция $g \sim f$ будет иметь множество точек разрыва положительной меры.

11 ПРОСТРАНСТВО $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство. Далее всюду $\mathbb{F}$ будет обозначать поле действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел.

Определение. Комплекснозначная функция $f : E \to \mathbb{C}$ называется измеримой, если ее действительная часть $u(x) \doteqdot \Re f(x)$ и мнимая часть $v(x) \doteqdot \Im f(x)$ являются измеримыми функциями. Функция называется *интегируемой* $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, если $u, v \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$. При этом ее интеграл Лебега равен $\int_E f\,d\mu \doteqdot \int_E u\,d\mu + \boldsymbol{i}\int_E v\,d\mu$.

1. *Если $f, g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, то $\lambda f, f+g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ будут выполняться равенства $\int_E \lambda f\,d\mu = \lambda\int_E f\,d\mu$ и $\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$.*

Эти свойства вытекают из доказанных ранее свойств в действительном случае. Докажем, например, первое равенство. Пусть $\lambda = \alpha + \boldsymbol{i}\beta$ и $f = u + \boldsymbol{i}v$, тогда имеем $\lambda f = (\alpha u - \beta v) + \boldsymbol{i}(\alpha v + \beta u)$. Отсюда $\int_E \lambda f\,d\mu = \int_E (\alpha u - \beta v)\,d\mu + \boldsymbol{i}\int_E (\alpha v + \beta u)\,d\mu = (\alpha\int_E u\,d\mu - \beta\int_E v\,d\mu) + \boldsymbol{i}(\alpha\int_E v\,d\mu + \beta\int_E u\,d\mu) = \lambda\int_E f\,d\mu$. Таким образом, $\boldsymbol{L}(E,\mu)$ является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$.

2. *Если $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, то модуль $|f| \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $|\int_E f\,d\mu| \leqslant \int_E |f|\,d\mu$.*

Так как $|f| \leqslant |u| + |v|$, то $|f| \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$. Если $\int_E f\,d\mu = \boldsymbol{e}^{i\theta}|\int_E f\,d\mu|$, то, применяя свойства интеграла, имеем $|\int_E f\,d\mu| = \Re\big(\boldsymbol{e}^{-i\theta}\int_E f\,d\mu\big) = \int_E \Re\big(\boldsymbol{e}^{-i\theta}f\big)\,d\mu \leqslant \int_E |f|\,d\mu$.

3. *Если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$, то $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ и $\lambda f_1 \sim \lambda g_1$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Функции $f \sim g$ эквивалентны на E, если $f = g$ п.в. на E. Указанные свойства отношения эквивалентности очевидны. Таким образом, пространство всех классов эквивалентности функций на E является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$. При этом, если $f \sim g$ и $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, то $g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и их интегралы равны.

Определение. Пространство $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ над полем $\mathbb{F}$ состоит из всех классов эквивалентности ограниченных измеримых функций $f : E \to \mathbb{F}$ на множестве E и его норма задается по формуле $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \doteqdot \inf_{\mu(A)=0}\sup_{x\in E\setminus A}|f(x)|$. Это пространство называется *пространством существенно ограниченных функций*.

Так как множество ограниченных функций, эквивалентных нулю на E, образует подпространство $L \subset \boldsymbol{B}(E)$, то $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ является факторпространством $\boldsymbol{B}(E)/L$, а его классы эквивалентности соответствуют смежным классам $\boldsymbol{B}(E)/L$. Далее мы будем обращаться с классами эквивалентности как с обычными функциями.

Норма $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ называется *существенной верхней гранью* функции f. Покажем, что существует множество $A_f \subset E$, т.ч. $\mu(A_f) = 0$ и $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x\in E\setminus A_f}|f(x)|$. Для этого рассмотрим такие множества $A_n \subset E$, что $\mu(A_n) = 0$ и $|f(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} + 1/n$ при всех $x \in E \setminus A_n$. Тогда множество $A_f = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ имеет меру нуль $\mu(A_f) = 0$ и выполняется равенство $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x\in E\setminus A_f}|f(x)|$. Таким образом, существенная верхняя грань достигается для некоторого множества меры нуль.

Докажем, что выполнены свойства нормы. Если $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = 0$, то из доказанного выше вытекает, что $f \sim 0$. Однородность нормы $\|\lambda f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = |\lambda|\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ очевидна. Пусть $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x\in E\setminus A_f}|f(x)|$ и $\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x\in E\setminus A_g}|g(x)|$, где $\mu(A_f) = \mu(A_g) = 0$. Положим $A = A_f \cap A_g$, тогда $\mu(A) = 0$ и выполняется неравенство

$$\|f+g\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \leqslant \sup_{x\in E\setminus A}|f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{x\in E\setminus A}|f(x)| + \sup_{x\in E\setminus A}|g(x)| = \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} + \|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ является нормированным пространством.

Теорема. *Пространство $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ является бáнаховым пространством.*

Доказательство. Берем последовательность Коши $\{f_n\} \subset \boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ и определяем множество $A = \bigcup_{n,m=1}^\infty A_{(f_n-f_m)}$ меры нуль $\mu(A) = 0$. Поскольку будут выполняться равенства $\|f_n - f_m\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x\in E\setminus A}|f_n(x) - f_m(x)|$, то $\{f_n\}$ последовательность Коши в $\boldsymbol{B}(E\setminus A)$. В силу полноты $\boldsymbol{B}(E\setminus A)$ она имеет предел $f \in \boldsymbol{B}(E\setminus A)$. Полагая $f(x) = 0$ при всех $x \in A$, получим ограниченную и измеримую функцию на E. При этом в силу равномерной сходимости на $E\setminus A$ имеем $\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = 0$. $\square$

Определение. Пространство $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, над полем $\mathbb{F}$ состоит из всех классов эквивалентности измеримых функций $f : E \to \mathbb{F}$ на множестве E, т.ч. $|f|^p \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, и его норма определяется по формуле $\|f\|_{\boldsymbol{L}_p} \doteqdot \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p}$. Это пространство называется *пространством суммируемых функций степени p*.

Также как и выше, мы будем обращаться в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ с классами эквивалентности функций как с обычными функциями. Пусть $f, g \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$, тогда $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p) \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$. Поэтому $f+g \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Очевидно также, что $\lambda f \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Таким образом, пространство $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ является линейным пространством. Чтобы показать, что пространство $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ является нормированным, нам потребуется доказать несколько неравенств.

1. Неравенство Гёльдера. *Если функции $f, g : E \to \mathbb{R}_+$ являются измеримыми, $1 < p, q < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$, то $\int_E fg\,d\mu \leqslant (\int_E f^p d\mu)^{1/p}(\int_E g^q d\mu)^{1/q}$.*

Вначале докажем неравенство Ю́нга: $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$ при $a, b \in \mathbb{R}_+$. Заметим, что функции $y = x^{p-1}$ и $x = y^{q-1}$ являются взаимно обратными на полуоси $\mathbb{R}_+$, т.к. $1/(p-1) = q-1$. Поэтому имеем $ab \leqslant \int_0^a x^{p-1}\,dx + \int_0^b y^{q-1}\,dy = a^p/p + b^q/q$. Знак равенства имеет место только тогда, когда $a^{p-1} = b$, т.е. $a^p = b^q$.

Пусть $A = \int_E f^p\,d\mu$ и $B = \int_E g^q\,d\mu$. Если один из этих интегралов равен нулю или бесконечности, то утверждение очевидно. Иначе, полагая в неравенстве Юнга $a \doteqdot f/A^{1/p}$ и $b \doteqdot g/B^{1/q}$, а затем интегрируя обе его части, получим

$$\int_E ab\,d\mu \leqslant \int_E f^p d\mu/pA + \int_E g^q d\mu/qB = 1/p + 1/q = 1.$$

Отсюда следует неравенство Гёльдера. При этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $f^p = \lambda g^q$ п.в. на E, где $\lambda = A/B \geqslant 0$.

2. Неравенство Минко́вского. *Если функции $f, g \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ и $1 \leqslant p < \infty$, то $\|f+g\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g\|_{\boldsymbol{L}_p}$. В случае $1 < p < \infty$ равенство выполняется тогда и только тогда, когда $f = \lambda g$ п.в. на E при некотором $\lambda \geqslant 0$.*

В случае $p = 1$ утверждение вытекает из неравенства $|f+g| \leqslant |f| + |g|$. Пусть теперь $p > 1$. Введем обозначения $A = \int_E |f|^p \, d\mu$, $B = \int_E |g|^p \, d\mu$, $C = \int_E |f+g|^p \, d\mu$. Применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что $(p-1)q = p$, получим

$$C \leqslant \int_E |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_E |g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leqslant A^{1/p} C^{1/q} + B^{1/p} C^{1/q}.$$

Поделив на величину $C^{1/q}$, имеем неравенство Минко́вского. При этом равенство имеет место только тогда, когда п.в. на E выполняются следующие равенства: $|f+g| = |f| + |g|$ и $|f|^p/A = |g|^p/B = |f+g|^p/C$. Из первого равенства следует, что $f = hg$ п.в. на E, где функция $h \geqslant 0$ п.в. на E. Из второго равенства следует, что $h = (A/B)^{1/p}$ п.в. на $E(g \neq 0)$. В результате $f = \lambda g$ п.в. на E, где $\lambda = (A/B)^{1/p}$.

3. Обобщенное неравенство Минко́вского. *Пусть $f : E \times F \to \mathbb{R}_+$ является измеримой неотрицательной функцией на множестве $E \times F$ σ-конечной меры. Тогда справедливо неравенство $(\int_E (\int_F f_x d\mu_y)^p \, d\mu_x)^{1/p} \leqslant \int_F (\int_E f_y^p d\mu_x)^{1/p} d\mu_y$ при всех $1 \leqslant p < \infty$. В случае $p = 1$ неравенство превращается в равенство.*

Функция $g(x) = \int_F f_x d\mu_y$ определена при п.в. $x \in E$. Применяя теорему Фуби́ни и неравенство Гёльдера к внутреннему интегралу, получим

$$\int_E g^p(x) \, d\mu_x = \int_E g(x) \, g^{p-1}(x) \, d\mu_x = \int_E \Big(\int_F f(x,y) \, d\mu_y \Big) \, g^{p-1}(x) \, d\mu_x =$$
$$= \int_F \Big(\int_E f(x,y) \, g^{p-1}(x) \, d\mu_x \Big) \, d\mu_y \leqslant \int_F \Big(\int_E f^p(x,y) \, d\mu_x \Big)^{1/p} d\mu_y \, \Big(\int_E g^p(x) \, d\mu_x \Big)^{1/q},$$

где $(p-1)q = p$. Осталось поделить обе части неравенства на последнюю скобку.

Теорема. *Пространство $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$ является ба́наховым.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ есть последовательность Коши́ в $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Выберем последовательность индексов $m_1 < m_2 < \ldots$, т.ч. $\|f_k - f_l\| < 2^{-n}$ при всех $k, l \geqslant m_n$. Заметим, что неотрицательная функция $g(x) \doteqdot |f_{m_1}(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)|$ принадлежит $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. В самом деле, частичные суммы g_n этого ряда образуют монотонно сходящуюся последовательность функций $g_n \nearrow g$. В силу неравенства Минковского $\|g_n\| \leqslant \|f_{n_1}\| + 1$. Поэтому по теореме о монотонной сходимости функция $g \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ и, следовательно, является п.в. конечной на множестве E. Отсюда ряд $f(x) \doteqdot f_{m_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)) = \lim_{n\to\infty} f_{m_n}(x)$ сходится п.в. на множестве E. Из неравенства $|f|^p \leqslant g^p$ следует $f \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Так как частичные суммы равны $f_{m_n}(x) = f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x))$, то, применяя неравенство Минковского и лемму Фату, получим $\|f - f_{m_n}\| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\| < 2^{1-n}$, т.е. имеем $\lim_{n\to\infty} \|f - f_{m_n}\| = 0$. Таким образом, $\{f_n\}$ является последовательностью Коши и содержит сходящуюся подпоследовательность $f_{m_n} \to f$ в $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Поэтому вся последовательность является сходящейся $f_n \to f$ в $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. $\square$

Лемма. *Множество $\boldsymbol{H}(E,\mu)$ простых измеримых функций на множестве E всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ и $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm = \max\{\pm f.0\}$. Тогда существуют такие простые неотрицательные измеримые функции $h_n^\pm \in \boldsymbol{H}(E,\mu)$, что $h_n^\pm \nearrow f_\pm$ на E. При этом в случае $p = \infty$ сходимость является равномерной. Пусть $h_n \doteqdot h_n^+ - h_n^-$, тогда $\|f - h_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f_+ - h_n^+\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|f_- - h_n^-\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ при $n \to \infty$ по теореме о монотонной сходимости. □

Далее будем предполагать, что (X,ρ) — метрическое пространство, в измеримом пространстве (X,Σ,μ) мера μ регулярна и открытые множества измеримы.

Теорема. *Множество $\boldsymbol{C}(X)$ ограниченных непрерывных функций на X всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ при всех $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_p(X,\mu)$ и $\varepsilon > 0$, тогда по лемме существует простая функция $h \in \boldsymbol{H}(X,\mu)$, т.ч. $\|f - h\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/2$. Всякая простая функция записывается в виде линейной комбинации характеристических функций $h(x) = \sum_{l=1}^m h_l \chi_{H_l}(x)$, где $H_l \in \Sigma$. По условию регулярности меры существуют компактное множество $A_l \subset H_l$ и открытое множество $B_l \supset H_l$, т.ч. $\mu(B_l \setminus A_l) < (\varepsilon/2c)^p$, где $c = \sum_{l=1}^m |h_l|$ и $l = 1, \ldots, m$. Обозначим через $\rho(x,A) \doteqdot \inf_{y\in A}\rho(x,y)$ расстояние от точки $x \in X$ до множества $A \subset X$ и рассмотрим непрерывные функции следующего вида:

$$g(x) \doteqdot \sum_{l=1}^m h_l g_l(x), \quad \text{где} \quad g_l(x) \doteqdot \frac{\rho(x, X\setminus B_l)}{\rho(x,A_l) + \rho(x, X\setminus B_l)}\,.$$

Функция $g_l(x) = 1$, если $x \in A_l$, и $g_l(x) = 0$, если $x \notin B_l$. Так как $|\chi_{H_l} - g_l| \leqslant 1$ на множестве $B_l \setminus A_l$, то норма $\|\chi_{H_l} - g_l\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \mu^{1/p}(B_l\setminus A_l) < \varepsilon/2c$ и, следовательно, $\|h - g\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/2$. Таким образом, $\|f-g\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f-h\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|h-g\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon$. □

Следствие. *В пространстве $\boldsymbol{L}_p[0,1]$ при всех $1 \leqslant p < \infty$ всюду плотно*

a) множество $\boldsymbol{H}[0,1]$ простых измеримых функций на $[0,1]$;

b) множество $\boldsymbol{C}[0,1]$ непрерывных функций на $[0,1]$;

c) множество $\tilde{\boldsymbol{C}}[0,1]$ непрерывных функций на $[0,1]$, т.ч. $f(0) = f(1)$;

d) множество $\boldsymbol{S}$ ступенчатых функций $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[x_{k-1},x_k]}$;

e) множество $\boldsymbol{P}$ алгебраических многочленов $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$;

f) множество $\boldsymbol{T}$ тригонометрических полиномов $T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x}$;

g) множество $\boldsymbol{C}^\infty[0,1]$ бесконечно дифференцируемых функций на $[0,1]$.

Свойства c) и d) следуют из того, что всякую непрерывную функцию можно аппроксимировать в $\boldsymbol{L}_p[0,1]$ функциями класса $\tilde{\boldsymbol{C}}[0,1]$ и $\boldsymbol{S}[0,1]$. Свойства e) и f) вытекают из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами.

12 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Далее всюду $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ будут обозначать нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел. Нормы в этих пространствах будем обозначать одинаково через $\|x\|$. В каждом конкретном случае легко понять, в каком из пространств $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{F}$ берется норма.

Определение. Отображение $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *линейным оператором* над полем $\mathbb{F}$, если $A(x+y) = A(x) + A(y)$ и $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Норма оператора $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ определяется по формуле $\|A\| \doteqdot \sup_{x \in S} \|A(x)\|$, где $S \doteqdot \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ обозначает *единичный шар* в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Линейный оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если он отображает ограниченные множества в ограниченные. Через $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ обозначим пространство всех ограниченных операторов, действующих из $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$.

Множество $M \subset \boldsymbol{E}$ является ограниченным в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре $M \subset S_r(x)$. Поэтому линейный оператор A ограничен в том и только в том случае, когда его норма $\|A\| < \infty$ конечна. Ранее было доказано, что ограниченность линейного оператора в нормированном пространстве равносильна его непрерывности.

Пример. Рассмотрим оператор $A : \boldsymbol{L}_p(E, \mu) \to \boldsymbol{L}_p(E, \mu)$ умножения на функцию $A(f) \doteqdot \varphi f$, где φ — ограниченная измеримая функция на множестве E. Покажем, что его норма равна $\|A\| = \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$. Очевидно, что $\|A\| \leqslant \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$, поскольку имеет место неравенство $\|A(f)\|^p = \int_E |\varphi f|^p d\mu \leqslant \|\varphi\|^p_{\boldsymbol{L}_\infty} \int_E |f|^p d\mu = \|\varphi\|^p_{\boldsymbol{L}_\infty} \|f\|^p$.

Для доказательства обратного неравенства берем $\varepsilon > 0$ и выберем множество $A \subset E$, т.ч. $\mu(A) > 0$ и $|\varphi(x)| > \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon$ для всех $x \in A$. Тогда при $f \doteqdot \chi_A$ получим $\|A(f)\|^p = \int_A |\varphi|^p d\mu > (\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon)^p \|f\|^p$, т.е. $\|A\| > \|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_\infty} - \varepsilon$.

Теорема. *Если $\boldsymbol{F}$ является ба́наховым пространством, то пространство ограниченных операторов $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ будет ба́наховым пространством.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$. Сумма операторов $A+B$ и умножение на число λA определяются по формулам $(A+B)(x) \doteqdot A(x) + B(x)$ и $(\lambda A)(x) \doteqdot \lambda A(x)$. Очевидно выполняются свойства нормы $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ и $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$. Таким образом, $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ — нормированное пространство. Докажем полноту.

Пусть $\{A_n\}$ — последовательность Коши́ в $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. По определению нормы отсюда вытекает неравенство $\|A_n(x) - A_m(x)\| < \varepsilon \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $n, m \geqslant N$. Следовательно, $\{A_n(x)\}$ есть последовательность Коши́ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. В силу полноты $\boldsymbol{F}$ существует предел $A(x) \doteqdot \lim_{n \to \infty} A_n(x)$. Очевидно, что A является линейным оператором, и, переходя к пределу в неравенстве выше, получим, что $\|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $n \geqslant N$, т.е. $\|A_n - A\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Поэтому $A_n \to A$ по норме, а так как $\|A\| \leqslant \|A_n\| + \varepsilon$, то $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$. $\square$

Теорема (Ба́наха–Штейнга́уза). *Пусть $\boldsymbol{E}$ является ба́наховым пространством и система ограниченных операторов $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ удовлетворяет следующему условию:* $\sup_{i\in I} \|A_i(x)\| < \infty$ *при всех* $x \in \boldsymbol{E}$. *Тогда* $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$.

Доказательство. Теорема устанавливает *принцип равномерной ограниченности* и является следствием *принципа равностепенной непрерывности*, доказанного ранее. В самом деле, если система операторов $\{A_i\}_{i\in I}$ равностепенно непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|A_i(x)\| < \varepsilon$ при всех $\|x\| \leqslant \delta$ и $i \in I$. Отсюда следует, что $\|A_i\| \leqslant \varepsilon/\delta$ при всех $i \in I$. $\square$

Следствие. *Пусть $\boldsymbol{E}$ является ба́наховым пространством и последовательность ограниченных операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ сходится в каждой точке, т.е. существует предел* $\lim A_n(x) = A(x)$ *при всех* $x \in \boldsymbol{E}$. *Тогда* $\sup \|A_n\| < \infty$.

Так как последовательность $A_n(x) \to A(x)$ сходится, то она ограничена в $\boldsymbol{F}$.

Определение. Множество X называется *упорядоченным*, если в множестве X задано *отношение порядка* $x \leqslant y$, удовлетворяющее следующим трём условиям: 1) $x \leqslant x$; 2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$; 3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Множество $A \subset X$ называется *цепью*, если для любых $x, y \in A$ выполняется $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. Цепь $A \subset X$ называется *ограниченной*, если существует $y \in X$, т.ч. $x \leqslant y$ при всех $x \in A$. Элемент $x \in X$ называется *максимальным* в X, если из $x \leqslant y$ следует $x = y$. Следующая лемма является аксиомой в теории множеств.

Лемма (Цо́рна). *Если каждая цепь $A \subset X$ в упорядоченном множестве X является ограниченной, то X имеет максимальный элемент.*

Естественным отношением порядка является *отношение включения* множеств. В этом случае лемма Цо́рна нетривиальна и равносильна *аксиоме выбора*.

Отображение $f : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$ называется *линейным функционалом* на линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ над полем $\mathbb{F}$, если $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Также как для операторов, в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ определяется норма функционала $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in S} |f(x)|$. Функционал f является ограниченным, т.е. $\|f\| < \infty$, тогда и только тогда, когда f непрерывен. Множество всех ограниченных функционалов $\boldsymbol{E}^*$ называется *сопряженным пространством*. По доказанной теореме пространство $\boldsymbol{E}^* = \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \mathbb{F})$ является ба́наховым.

Напомним, что *полунормой* в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$ называется функция $p : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ и $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Пара $(\boldsymbol{E}, p)$, где $\boldsymbol{E}$ является линейным пространством, а p — полунормой в $\boldsymbol{E}$, называется *полунормированным пространством*.

Функционал $g : M \to \mathbb{F}$ называется *продолжением* функционала $f : L \to \mathbb{F}$, если $L \subset M$ и $g(x) = f(x)$ для всех $x \in L$. Во всяком множестве линейных функционалов $f : L \to \mathbb{F}$, заданных на подпространствах $L \subset \boldsymbol{E}$ пространства $\boldsymbol{E}$, *отношение продолжения* функционалов будет отношением порядка.

Теорема (Ха́на–Ба́наха). *Пусть $(\boldsymbol{E}, p)$ — полунормированное пространство. Тогда для каждого линейного функционала $f : L \to \mathbb{F}$, заданного на линейном подпространстве $L \subset \boldsymbol{E}$ и удовлетворяющего условию $|f(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in L$, существует такой линейный функционал $g : \boldsymbol{E} \to \mathbb{F}$, который является продолжением функционала f, и такой, что $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Доказательство. Вначале мы рассмотрим действительный случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Пусть $L_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{L, e_1\}$ определяет линейную оболочку L и e_1, где $e_1 \notin L$. Так как

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x - e_1) + p(y + e_1), \text{ где } x, y \in L,$$

то выполняется неравенство $f(x) - p(x - e_1) \leqslant p(y + e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Поэтому существует $c_1 \in \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - p(x - e_1) \leqslant c_1 \leqslant p(y + e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Заменяя здесь x и y на элемент x/λ, где $\lambda > 0$, а затем умножая на λ, получим неравенства $f(x) \pm \lambda c_1 \leqslant p(x \pm \lambda e_1)$ при всех $\lambda > 0$ и $x \in L$.

Определим на подпространстве L_1 функционал по формуле $f_1(z) \doteqdot f(x) + \lambda c_1$, где $z = x + \lambda e_1$, $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда имеем $f_1(x) = f(x)$ при всех $x \in L$ и $f_1(z) \leqslant p(z)$ при всех $z \in L_1$. Так как $p(-z) = p(z)$, то $|f_1(z)| \leqslant p(z)$ при всех $z \in L_1$. Следовательно, получили продолжение f_1 функционала f на подпространство L_1. Аналогично можно доказать существование продолжения f_2 функционала f_1 на подпространство $L_2 \doteqdot \mathrm{sp}\{L_1, e_2\}$, если существует элемент $e_2 \notin L_1$, и т.д.

Рассмотрим множество всех продолжений данного функционала f на некоторые подпространства $\boldsymbol{E}$, для которых выполнено условие теоремы. Отношение порядка в этом множестве мы определяем отношением продолжения. Тогда получим, что каждая цепь является ограниченной. По лемме Цо́рна существует максимальный элемент. Так как каждый функционал продолжается на более широкое подпространство, то максимальное продолжение будет определено на всем пространстве $\boldsymbol{E}$ и будет удовлетворять утверждению теоремы.

Переход от действительного к комплексному случаю производится следующим образом. Пусть $u(x) = \Re f(x)$ и $v(x) = \Im f(x)$. Поскольку $f(x) = u(x) + \boldsymbol{i}v(x)$, то $f(\boldsymbol{i}x) = u(\boldsymbol{i}x) + \boldsymbol{i}v(\boldsymbol{i}x)$ и $\boldsymbol{i}f(x) = \boldsymbol{i}u(x) - v(x)$. Поэтому получаем $v(x) = -u(\boldsymbol{i}x)$, т.е. $f(x) = u(x) - \boldsymbol{i}u(\boldsymbol{i}x)$. Пусть теперь h определяет продолжение функционала u, удовлетворяющее условию теоремы. Тогда для функционала $g(x) \doteqdot h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)$, имеет место равенство $g(\boldsymbol{i}x) = h(\boldsymbol{i}x) - \boldsymbol{i}h(-x) = \boldsymbol{i}(h(x) - \boldsymbol{i}h(\boldsymbol{i}x)) = \boldsymbol{i}g(x)$.

Следовательно, функционал g является линейным над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и задает продолжение функционала f. Докажем неравенство $|g(x)| \leqslant p(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если $g(x) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}|g(x)|$, то $|g(x)| = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}g(x) = g(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = h(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) \leqslant p(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = p(x)$. Таким образом, функционал g удовлетворяет всем условиям теоремы. □

Следствие. *Если $L \subset \boldsymbol{E}$ — подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{E}$, то для каждого $f \in L^*$ существует $g \in \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|_L$.*

Для доказательства нужно положить $p(x) \doteqdot \|f\|_L \|x\|$, затем применить теорему. Ясно, что $\|g\| \leqslant \|f\|_L$, а в силу условия $g|_L = f$ получим равенство $\|g\| = \|f\|_L$.

Теорема (Ри́сса)**.** *Для любого функционала $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ существует такая функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, что $\alpha(f) = \int_a^b f\,dF$ при всех $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ и $\|\alpha\| = \mathrm{Var}_a^b(F)$.*

Доказательство. Так как $\boldsymbol{C}[a,b]$ является подпространством $\boldsymbol{B}[a,b]$, то в силу следствия из теоремы Ха́на–Ба́наха каждый функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a,b]$ допускает продолжение на $\boldsymbol{B}[a,b]$ с сохранением его нормы. Это продолжение обозначается также через α. Покажем, что функция $F(t) \doteqdot \alpha(u_t)$, где $u_t(x) \doteqdot \chi_{[a,t)}(x)$, имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Взяв разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ и полагая $\theta_k \doteqdot \arg\bigl(F(x_k) - F(x_{k-1})\bigr)$, представим вариационную сумму в виде

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{e}^{-i\theta_k}\bigl(\alpha(u_{x_k}) - \alpha(u_{x_{k-1}})\bigr) = \alpha\Bigl(\sum_{k=1}^n \boldsymbol{e}^{-i\theta_k}(u_{x_k} - u_{x_{k-1}})\Bigr).$$

Поскольку $\|\sum_{k=1}^n \boldsymbol{e}^{-i\theta_k}(u_{x_k} - u_{x_{k-1}})\| = 1$, то получаем $\mathrm{Var}_a^b(F) \leqslant \|\alpha\|$.

Для каждой непрерывной функции $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ построим ступенчатые функции вида $f_\tau(x) \doteqdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(u_{x_k}(x) - u_{x_{k-1}}(x))$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. В силу равномерной непрерывности функции f эти функции сходятся $f_\tau \rightrightarrows f$ равномерно на $[a,b]$, когда диаметр разбиения $d(\tau) \to 0$. Из непрерывности α следует, что

$$\alpha(f) = \lim_{d(\tau)\to 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\bigl(F(x_k) - F(x_{k-1})\bigr) = \int_a^b f\,dF.$$

Поскольку интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса от непрерывной функции не зависит от изменения функции F на счетном множестве точек в (a,b), то функцию $F(t)$ можно считать непрерывной слева во всех точках разрыва в (a,b). При этом ясно, что ее вариация $\mathrm{Var}_a^b(F)$ не увеличится. Так как справедливо неравенство

$$\Bigl|\int_a^b f\,dF\Bigr| \leqslant \lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\,|F(x_k) - F(x_{k-1})| \leqslant \|f\|\,\mathrm{Var}_a^b(F),$$

то $|\alpha(f)| \leqslant \|f\|\,\mathrm{Var}_a^b(F)$ и, следовательно, получаем равенство $\|\alpha\| = \mathrm{Var}_a^b(F)$. □

Следствие. *Сопряженное пространство $\boldsymbol{C}^*[a,b]$ изометрически изоморфно подпространству $\boldsymbol{BV}_0[a,b] \subset \boldsymbol{BV}[a,b]$ функций $F(t)$ ограниченной вариации, непрерывных слева $F(t-0) = F(t)$ при всех $t \in (a,b)$, и таких, что $F(a) = 0$.*

Пусть $(X, \varSigma, \mu)$ — измеримое пространство и $E \in \varSigma$ имеет σ-конечную меру.

Теорема. *Для каждого функционала $\alpha \in \boldsymbol{L}_p^*(E,\mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$, существует такая функция $g \in \boldsymbol{L}_q(E,\mu)$, где $1/p + 1/q = 1$, единственная с точностью до эквивалентности, что $\alpha(f) = \int_E fg\,d\mu$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ и $\|\alpha\| = \|g\|_{\boldsymbol{L}_q}$.*

Эту теорему принимаем без доказательства. Из нее вытекает, что сопряженное пространство $\boldsymbol{L}_p^*(E,\mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$, изометрически изоморфно пространству $\boldsymbol{L}_q(E,\mu)$, где $1/p + 1/q = 1$, при этом $q = \infty$ в случае $p = 1$.

13 СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ — нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ обозначает пространство ограниченных операторов.

Определение. Сходимость последовательности операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ по норме пространства $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ называется *равномерной сходимостью*.

Множество операторов $M \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ называется *равномерно ограниченным*, если оно ограничено по норме, т.е. существует $c > 0$, т.ч. $\|A\| \leqslant c$ для всех $A \in M$.

Определение. Последовательность операторов $A_n : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *сходится сильно*, если существует предел $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. сходится поточечно.

Множество M операторов $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ называется *сильно ограниченным*, если для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует $c_x > 0$, т.ч. $\|A(x)\| \leqslant c_x$ для всех $A \in M$.

1. *Если $A_n \to A$ сходится равномерно, то $A_n \to A$ сходится сильно.*

Так как по условию $\|A_n - A\| \to 0$, то $\|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \|A_n - A\| \, \|x\| \to 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Если размерность $\dim(\boldsymbol{E}) < \infty$ конечна, то нетрудно проверить, используя эквивалентность норм в $\boldsymbol{E}$, что верно и обратное утверждение.

2. *Если $A_n \to A$ сходится сильно, то $\{A_n\}$ сильно ограничена и $\|A\| \leqslant \underline{\lim} \|A_n\|$.*

Поскольку $\{A_n(x)\}$ сходится в $\boldsymbol{F}$, то она ограничена в $\boldsymbol{F}$ и определяет линейный оператор $A(x)$. Выберем последовательность $\{n_k\}$, т.ч. $\underline{\lim} \|A_n\| = \lim \|A_{n_k}\|$. Тогда получим $\|A(x)\| = \lim \|A_{n_k}(x)\| \leqslant \lim \|A_{n_k}\| \, \|x\| = \underline{\lim} \|A_n\| \, \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Поэтому имеет место неравенство $\|A\| \leqslant \underline{\lim} \|A_n\|$.

3. *Пусть $\boldsymbol{E}$ — банахово пространство. Тогда множество $M \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ сильно ограничено в том и только в том случае, когда оно равномерно ограничено.*

Необходимость является утверждением теоремы Ба́наха–Штейнга́уза, а достаточность вытекает из неравенства $\|A(x)\| \leqslant \|A\| \, \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Пример 1. Пусть $A_n : \boldsymbol{L}_p(E, \mu) \to \boldsymbol{L}_p(E, \mu)$ — последовательность операторов умножения на функцию $A_n(f) \doteqdot \varphi_n f$, где $\varphi_n = \chi_{E_n}$ характеристические функции, $E_n \nearrow E$, $\mu(E \setminus E_n) > 0$, $\mu(E \setminus E_n) \to 0$ и $1 \leqslant p < \infty$. Покажем, что $A_n \to I$ сходится сильно к тождественному оператору $I(f) = f$. В самом деле, так как $\mu(E \setminus E_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега получим, что $\|A_n(f) - f\|^p = \int_{E \setminus E_n} |f|^p d\mu \to 0$. Однако последовательность $\{A_n\}$ не сходится равномерно, поскольку $\|A_n - I\| = \|\chi_{(E \setminus E_n)}\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = 1$.

Лемма. *Если последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ определена на банаховом пространстве $\boldsymbol{E}$ и сходится сильно $A_n \to A$, то $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$.*

Доказательство. В силу существования предела $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ оператор $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ линейный и в силу следствия теоремы Ба́наха-Штейнга́уза $\sup \|A_n\| < \infty$. Так как $\|A\| \leqslant \underline{\lim} \|A_n\|$, то оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$. □

Определение. Для каждой системы элементов K нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ существует наименьшее замкнутое подпространство $M \subset \boldsymbol{E}$, содержащее K. Оно совпадает с замкнутой линейной оболочкой $M = \overline{\mathrm{sp}}(K)$. Система K называется *полной*, если $M = \boldsymbol{E}$. В этом случае говорят, что K порождает пространство $\boldsymbol{E}$.

Теорема (критерий сильной сходимости)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ банаховы пространства, то последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ сходится сильно к оператору $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ тогда и только тогда, когда* $\sup \|A_n\| < \infty$ *и существует такая полная система элементов $K \subset \boldsymbol{E}$, что* $\lim A_n(x) = A(x)$ *при всех $x \in K$.*

Доказательство. Необходимость утверждения вытекает из следствия теоремы Ба́наха–Штейнга́уза. Докажем достаточность. Если $L \doteqdot \mathrm{sp}(K)$ линейная оболочка системы K, то каждый элемент $y \in L$ представляется в виде $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k \in \mathbb{F}$ и $x_k \in K$. Следовательно, по условию существует предел $\lim A_n(y) = A(y)$ при всех $y \in L$. Так как оболочка $L \subset \boldsymbol{E}$ всюду плотна в пространстве $\boldsymbol{E}$, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in \boldsymbol{E}$ существует такой $y \in L$, что $\|x - y\| < \varepsilon/4c$, где $c > \sup \|A_n\|$. Выберем число N так, чтобы $\|A_n(y) - A_m(y)\| < \varepsilon/2$ при всех $n, m \geqslant N$. Поскольку $\|A_n(x) - A_n(y)\| \leqslant \|A_n\| \, \|x - y\| < \varepsilon/4$, то

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leqslant \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{A_n(x)\}$ является последовательностью Коши и в силу полноты пространства $\boldsymbol{F}$ существует предел $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$. Кроме того, по лемме оператор $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$ является ограниченным. □

Определение. Последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}^*$ *сходится слабо**, если существует предел $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$, т.е. сходится поточечно.

Множество функционалов $M \subset \boldsymbol{E}^*$ называется *слабо* ограниченным*, если для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ существует $c_x > 0$, т.ч. $|f(x)| \leqslant c_x$ при всех $f \in M$.

Из свойств сильной сходимости операторов следуют свойства слабой* сходимости.

1. *Если $f_n \to f$ сходится по норме, то $f_n \to f$ сходится слабо*.*

2. *Если $f_n \to f$ сходится слабо*, то $\{f_n\}$ слабо* ограничена и* $\|f\| \leqslant \underline{\lim} \|f_n\|$.

3. *Пусть $\boldsymbol{E}$ — банахово пространство. Тогда множество $M \subset \boldsymbol{E}^*$ слабо* ограничено в том и только в том случае, когда оно ограничено по норме $\boldsymbol{E}^*$.*

Теорема (критерий слабой* сходимости)**.** *Если $\boldsymbol{E}$ банахово пространство, то последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \boldsymbol{E}^*$ сходится слабо* к функционалу $f \in \boldsymbol{E}^*$ тогда и только тогда, когда* $\sup \|f_n\| < \infty$ *и существует такая полная система элементов $K \subset \boldsymbol{E}$, что* $\lim f_n(x) = f(x)$ *при всех $x \in K$.*

Пример 2. Пусть (X, ρ) является метрическим пространством и $\{\delta_{x_n}\} \subset \boldsymbol{C}^*(X)$ последовательность функционалов Дира́ка $\delta_{x_n}(f) \doteqdot f(x_n)$, где $x_n \to x$ сходится в X и $x_n \neq x$. Тогда $\delta_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) = \delta_x(f)$ для всех $f \in \boldsymbol{C}(X)$. Поэтому $\delta_{x_n} \to \delta_x$ сходится слабо* в $\boldsymbol{C}^*(X)$. Однако не сходится по норме, так как $\|\delta_{x_n} - \delta_x\| = 2$.

Теорема. *Отображение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ во второе сопряженное пространство $\boldsymbol{E}^{**}$, определенное по формуле $J(x) \doteqdot \delta_x$, является изометричным, где $\delta_x(f) \doteqdot f(x)$ функционал Дира́ка и $f \in \boldsymbol{E}^*$.*

Доказательство. Пусть S^* обозначает единичный шар в $\boldsymbol{E}^*$. Тогда $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $f \in S^*$. Поэтому $\|J(x)\| = \|\delta_x\| \leqslant \|x\|$. Докажем, что это неравенство является равенством. Для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ определим функционал $f(\lambda x) = \lambda\|x\|$, где $\lambda \in \mathbb{F}$, на линейной оболочке $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x\}$ элемента x. Так как норма $\|f\|_L = 1$, то в силу следствия из теоремы Хана–Банаха существует функционал $g \in S^*$, т.ч. $g(x) = \|x\|$. Отсюда $\delta_x(g) = \|x\|$ и, следовательно, $\|\delta_x\| = \|x\|$. □

Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *рефлексивным*, если образ этого вложения $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$ равен $J(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}^{**}$. Например, конечномерные пространства и пространства $\boldsymbol{L}_p(E, \mu)$ при всех $1 < p < \infty$ являются рефлексивными.

Определение. Последовательность элементов $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ *сходится слабо* $x_n \to x$ к элементу $x \in \boldsymbol{E}$, если существует предел $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in \boldsymbol{E}^*$.

Множество элементов $M \subset \boldsymbol{E}$ называется *слабо ограниченным*, если для каждого $f \in \boldsymbol{E}$ существует $c_f > 0$, т.ч. $|f(x)| \leqslant c_f$ при всех $x \in M$.

Используя изометричное вложение $J : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{**}$, каждый элемент $x \in \boldsymbol{E}$ можно считать функционалом Дира́ка δ_x на сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$. Поэтому из свойств слабой* сходимости вытекают свойства слабой сходимости.

1. *Если $x_n \to x$ сходится по норме, то $x_n \to x$ сходится слабо.*

2. *Если $x_n \to x$ сходится слабо, то $\{x_n\}$ слабо ограничена и $\|x\| \leqslant \underline{\lim}\, \|x_n\|$.*

3. *Множество $M \subset \boldsymbol{E}$ слабо ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено по норме пространства $\boldsymbol{E}$.*

Теорема (критерий слабой сходимости)**.** *Последовательность $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда сходится слабо $x_n \to x$, когда $\sup \|x_n\| < \infty$ и существует полная система функционалов $K \subset \boldsymbol{E}^*$, т.ч. $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in K$.*

Для доказательства критерия достаточно заметить, что функционалы Дирака имеют норму $\|\delta_{x_n}\| = \|x_n\|$ и $\delta_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) = \delta_x(f)$ при всех $f \in K$. Поэтому можно применить критерий слабой* сходимости к $\delta_{x_n} \to \delta_x$.

Пример 3. Если последовательность функций $\{f_n\} \subset \boldsymbol{C}[a, b]$ сходится слабо к функции $f \in \boldsymbol{C}[a, b]$, то по критерию она является равномерно ограниченной и сходиться $f_n(x) \to f(x)$ при всех $x \in [a, b]$. В самом деле, взяв функционалы Дирака $\delta_x \in \boldsymbol{C}^*[a, b]$, мы получим $f_n(x) = \delta_x(f_n) \to \delta_x(f) = f(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Для доказательства обратного утверждения заметим, что всякий ограниченный функционал $\alpha \in \boldsymbol{C}^*[a, b]$ представляется интегралом Ри́мана–Сти́лтьеса $\alpha(f) = \int_a^b f\, dF$. А так как интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса совпадает с интегралом Лебе́га–Сти́лтьеса, то можно применить теорему Лебе́га о предельном переходе.

Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *сепарабельным*, если существует счетная и полная система элементов $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}$. Введем метрику в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}^*$ к сепарабельному пространству $\boldsymbol{E}$ по следующей формуле:

$$\rho(f, g) \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{|f(x_n) - g(x_n)| + 1}, \quad f, g \in \boldsymbol{E}^*.$$

Проверим аксиомы метрики. Симметричность $\rho(f, g) = \rho(f, g)$ очевидна. Так как функция $\varphi(t) = t/(t+1)$ возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+$ и является полуаддитивной $\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b)$ при всех $a, b \in \mathbb{R}_+$, то выполняется неравенство треугольника $\rho(f, g) \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g)$. Пусть $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x_n\}$ линейная оболочка системы $\{x_n\}$. Если $\rho(f, g) = 0$, то $f(x_n) = g(x_n)$ при всех n. Тогда $f(x) = g(x)$ при всех $x \in L$ и в силу непрерывности функционалов $f(x) = g(x)$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.

Лемма. *Последовательность $\{f_n\} \subset S^*$ сходится слабо* в том и только в том случае, когда она сходится в метрическом пространстве* (S^*, ρ).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем m так, чтобы $1/2^m < \varepsilon/2$. Поскольку последовательность сходится $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке $x \in \boldsymbol{E}$, то найдется N, т.ч. $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2m$ при всех $n \geqslant N$ и $k = 1, \ldots, m$. Отсюда

$$\rho(f_n, f) \leqslant \textstyle\sum_{k=1}^{m} |f_n(x_k) - f(x_k)| + \sum_{k=m+1}^{\infty} 1/2^k < \varepsilon.$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N, т.ч. $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Тогда для каждого фиксированного k мы имеем неравенство

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| \,/\, 2^k\big(|f_n(x_k) - f(x_k)| + 1\big) < \varepsilon \quad \text{при всех } n \geqslant N.$$

Отсюда при всех $\varepsilon < 1/2^k$ получим $|f_n(x_k) - f(x_k)| \leqslant 2^k\varepsilon/(1 - 2^k\varepsilon)$ при всех $n \geqslant N$. Следовательно, существует предел $\lim f_n(x_k) = f(x_k)$ в каждой точке x_k. Поэтому по критерию слабой* сходимости последовательность $f_n \to f$ сходится слабо*. $\square$

Теорема. *Единичный шар $S^* \subset \boldsymbol{E}^*$ сопряженного пространства $\boldsymbol{E}^*$ к сепарабельному нормированному пространству $\boldsymbol{E}$ является слабо* компактным метрическим пространством.*

Доказательство. В силу леммы сходимость в метрическом пространстве (S^*, ρ) совпадает со слабой* сходимостью. Поэтому для доказательства слабой* компактности шара S^* требуется показать, что всякая последовательность $\{f_n\} \subset S^*$ имеет слабо* сходящуюся подпоследовательность. Так как последовательность $\{f_n(x_1)\}$ ограничена в $\mathbb{F}$, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. Так как последовательность $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ ограничена в $\mathbb{F}$, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$, и т.д. Поэтому диагональная подпоследовательность $\{f_{m_n}\}$, где $f_{m_n} = f_n^{(n)}$, сходится в каждой точке x_k. Тогда по критерию слабой* сходимости подпоследовательность $f_{m_n} \to f$ сходится слабо*, а поскольку имеет место неравенство $\|f\| \leqslant \varliminf \|f_{m_n}\|$, то $f \in S^*$. $\square$

14 ГИ́ЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ обозначает линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел.

Определение. *Скалярным произведением* $\langle x, y\rangle$ называется функционал двух переменных $x, y \in \boldsymbol{E}$, принимающий значения в поле $\langle x, y\rangle \in \mathbb{F}$ и обладающий следующими свойствами:

a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ при всех $x, y \in \boldsymbol{E}$;

b) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle + \lambda_2\langle x_2, y\rangle$ при всех $x_1, x_2, y \in \boldsymbol{E}$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$;

c) $\langle x.x\rangle \geqslant 0$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$ и $\langle x, x\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пространство $\boldsymbol{E}$, в котором введено скалярное произведение $\langle x, y\rangle$, называется *евклидовым пространством* над полем $\mathbb{F}$; $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x, x\rangle}$ называется *евклидовой нормой*; $\rho(x, y) \doteqdot \|x - y\|$ называется *евклидовой метрикой*.

1. Неравенство Коши́–Буняко́вского: *$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, где $x, y \in \boldsymbol{E}$.*

Пусть $z = tx + \lambda y$, где $\lambda \doteqdot \langle x, y\rangle/|\langle x, y\rangle|$. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ получим

$$\langle z, z\rangle = t^2\langle x, x\rangle + t\big(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\langle x, y\rangle}\big) + |\lambda|^2\langle y, y\rangle = t^2\|x\|^2 + 2t|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \geqslant 0.$$

Так как дискриминант этого трехчлена неположительный, то $|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $z = tx + \lambda y = 0$ при некотором $t \in \mathbb{R}$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимы над полем $\mathbb{F}$.

2. Неравенство треугольника: *$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, где $x, y \in \boldsymbol{E}$.*

Применяя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем следующее неравенство:

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\Re\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\Re\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$. Поэтому элементы x и y линейно зависимы $x = \lambda y$ и $\Re\lambda = |\lambda|$, т.е. $\lambda \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ является строго нормированным.

3. Равенство параллелограмма: *$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$, где $x, y \in \boldsymbol{E}$.*

Складывая два равенства $\langle x \pm y, x \pm y\rangle = \langle x, x\rangle \pm 2\Re\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$, получим равенство параллелограмма $\langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle = 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle$.

4. Непрерывность скалярного произведения *$\langle x, y\rangle$ для всех $(x, y) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$.*

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $0 < \delta < \varepsilon/3c$, где $\delta < c$ и $\max(\|x_0\|, \|y_0\|) < c$. Тогда при всех $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - y_0\| < \delta$ из неравенства Коши́–Буняко́вского получим

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \leqslant |\langle x - x_0, y_0\rangle| + |\langle x_0, y - y_0\rangle| + |\langle x - x_0, y - y_0\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|x - x_0\|\,\|y_0\| + \|x_0\|\,\|y - y_0\| + \|x - x_0\|\,\|y - y_0\| < \varepsilon.$$

5. Неравенство Беппó Лéви. *Пусть $L \subset \boldsymbol{E}$ — линейное подпространство в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$, $x \in \boldsymbol{E}$ и $d = \rho(x, L)$. Тогда при всех $y, z \in L$ имеет место неравенство $\|y - z\| \leqslant \sqrt{\|x - y\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - z\|^2 - d^2}$.*

Пусть $u = (ty + z)/(t + 1) \in L$, тогда $\|x - u\| \geqslant d$ и, следовательно, выполняется неравенство $\|t(x - y) + (x - z)\|^2 = \|(t + 1)(x - u)\|^2 \geqslant (t + 1)^2 d^2$. Раскрывая левую норму и перенося правую часть неравенства влево, получим при всех $t \in \mathbb{R}$

$$t^2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2t(\Re\langle x - y, x - z\rangle - d^2) + (\|x - z\|^2 - d^2) \geqslant 0.$$

Так как дискриминант этого трехчлена является неположительным, то мы имеем неравенство $(\Re\langle x - y, x - z\rangle - d^2)^2 \leqslant (\|x - y\|^2 - d^2)(\|x - z\|^2 - d^2)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|y - z\|^2 &= \|(x - y) - (x - z)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\Re\langle x - y, x - z\rangle + \|x - z\|^2 = \\ &= \big(\|x - y\|^2 - d^2\big) - 2\big(\Re\langle x - y, x - z\rangle - d^2\big) + \big(\|x - z\|^2 - d^2\big) \leqslant \\ &\leqslant \big(\|x - y\|^2 - d^2\big) + 2\sqrt{\big(\|x - y\|^2 - d^2\big)\big(\|x - z\|^2 - d^2\big)} + \big(\|x - z\|^2 - d^2\big).\end{aligned}$$

Замечая, что это полный квадрат, получаем неравенство Беппó Лéви.

Теорема (характеристическое свойство евклидовых пространств)**.** *Нормированное пространство в том и только в том случае является евклидовым, когда выполняется равенство параллелограмма* (без доказательства достаточности).

Пример 1. Пространство $\boldsymbol{B}(X)$ не является евклидовым пространством. В самом деле, пусть $f(x) = \chi_A(x)$ и $g(x) = \chi_B(x)$, где $A \sqcup B = X$. Тогда имеем $\|f\| = \|g\| = \|f + g\| = \|f - g\| = 1$. Поэтому равенство параллелограмма не выполняется.

Говорят, что элементы $x, y \in \boldsymbol{E}$ *ортогональны* и обозначают $x \perp y$, если их скалярное произведение $\langle x, y\rangle = 0$. Элемент $x \in \boldsymbol{E}$ называется *ортогональным подпространству* $L \subset \boldsymbol{E}$ и обозначается $x \perp L$, если $\langle x, y\rangle = 0$ при всех $y \in L$. Два подпространства $L, M \subset \boldsymbol{E}$ называются *ортогональными* и обозначаются через $L \perp M$, если $\langle x, y\rangle = 0$ для всех $x \in L$ и $y \in M$.

Лемма. *Элемент $y \in L$ является наилучшим приближением элемента $x \in \boldsymbol{E}$ подпространством $L \subset \boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда $x - y \perp L$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle x - y, z\rangle \neq 0$ при некотором $z \in L$. Положим $u \doteqdot y + \lambda z \in L$, где $\lambda \doteqdot \langle x - y, z\rangle/\langle z, z\rangle$. Тогда получим

$$\|x - u\|^2 = \|(x - y) - \lambda z\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\Re\big(\overline{\lambda}\langle x - y, z\rangle\big) + |\lambda|^2\langle z, z\rangle = \|x - y\|^2 - |\lambda|^2\langle z, z\rangle.$$

Отсюда имеем $\|x - u\| < \|x - y\|$, что противоречит предположению.

Достаточность. Пусть $\langle x - y, z\rangle = 0$ при всех $z \in L$. Тогда при всех $z \in L$ имеем

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x - y, x - z\rangle \leqslant \|x - y\|\,\|x - z\|.$$

Поэтому $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$ при всех $z \in L$, т.е. $\rho(x, L) = \|x - y\|$. □

Теорема. *Пусть* $L \doteqdot \mathrm{sp}\{x_1, \ldots, x_n\}$ *образует n-мерное подпространство в* $\boldsymbol{E}$*, порожденное линейно независимой системой элементов* $x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{E}$*. Тогда величина наилучшего приближения элемента* $x \in \boldsymbol{E}$ *подпространством* L

$$\rho(x, L) = \sqrt{\frac{D(x_1, \ldots, x_n, x)}{D(x_1, \ldots, x_n)}}, \quad \text{где } D(x_1, \ldots, x_n) \doteqdot \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_n \rangle & \ldots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$$

обозначает определитель Гра́ма.

Доказательство. Поскольку евклидово пространство $\boldsymbol{E}$ строго нормированное, то в силу доказанных ранее теорем элемент $y \in L$ наилучшего приближения существует и единственный. Пусть $d^2 = \rho(x, L)^2 = \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle$. Так как $\langle x - y, y \rangle = 0$, то $\langle y, x \rangle = \langle x, x \rangle - d^2$. Кроме того, из равенств $\langle x - y, x_k \rangle = 0$ следует, что $\langle y, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle$ при $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, если $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, то получим систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\begin{cases} \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle x_n, x_1 \rangle & = & \langle x, x_1 \rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots\cdots \\ \lambda_1 \langle x_1, x_n \rangle + \cdots + \lambda_n \langle x_n, x_n \rangle & = & \langle x, x_n \rangle \\ \lambda_1 \langle x_1, x \rangle + \cdots + \lambda_n \langle x_n, x \rangle & = & \langle x, x \rangle - d^2. \end{cases}$$

По теореме Кро́некера–Капе́лли ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов. Значит определитель расширенной матрицы равен нулю. Тогда, записывая последний столбец расширенной матрицы в виде суммы двух столбцов, получим равенство $D(x_1, \ldots, x_n, x) - d^2 D(x_1, \ldots, x_n) = 0$. В частности, из этого равенства по индукции вытекает, что $D(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ тогда и только тогда, когда система элементов $x_1, \ldots, x_n$ линейно независима над полем $\mathbb{F}$. □

Определение. Евклидово пространство, которое является полным по евклидовой норме, называется *ги́льбертовым пространством* и обозначается через $\boldsymbol{H}$.

Пример 2. В пространстве $\boldsymbol{L}_2(E, \mu)$ скалярное произведение определяется по формуле $\langle f, g \rangle \doteqdot \int_E f \, \overline{g} \, d\mu$. Ранее было доказано, что $\boldsymbol{L}_2(E, \mu)$ является полным нормированным пространством. Поскольку норма $\|f\|_{\boldsymbol{L}_2} = \left(\int_E |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ является евклидовой, то $\boldsymbol{L}_2(E, \mu)$ является ги́льбертовым пространством. Заметим, что все пространства $\boldsymbol{L}_p(E, \mu)$ при $p \neq 2$ не являются ги́льбертовыми пространствами.

Пример 3. Обозначим через $\boldsymbol{\ell}_2$ пространство последовательностей $x = \{x_n\}$, где $x_n \in \mathbb{F}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ сходится. Скалярное произведение в этом пространстве задается по следующей формуле: $\langle x, y \rangle \doteqdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$. Поэтому евклидова норма в пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$ равна $\|x\|_{\boldsymbol{\ell}_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$.

Пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ является частным случаем пространства $\boldsymbol{L}_2(E, \mu)$, когда $E = \mathbb{N}$ есть множество натуральных чисел и мера каждой точки $n \in \mathbb{N}$ равна единице. Таким образом, $\boldsymbol{\ell}_2$ является ги́льбертовым пространством.

Теорема (о наилучшем приближении)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ является замкнутым подпространством ги́льбертова пространства $\boldsymbol{H}$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y \in L$, т.ч. $\rho(x, L) = \|x - y\|$.*

Доказательство. Пусть $d = \rho(x, L) \doteqdot \inf_{y \in L} \|x - y\|$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $\|x - y_n\|^2 < d^2 + 1/n^2$. В силу неравенства Беппо́ Ле́ви $\|y_n - y_m\| < 1/n + 1/m$. Следовательно, $\{y_n\}$ является последовательностью Коши́ в L. Поэтому в силу полноты $\boldsymbol{H}$ и замкнутости L существует предел $\lim y_n = y \in L$. Тогда, переходя к пределу и используя непрерывность нормы, получим $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = d$.

Таким образом, доказано существование элемента наилучшего приближения замкнутым подпространством $L \subset \boldsymbol{H}$. Единственность элемента наилучшего приближения подпространством L вытекает из ранее доказанной теоремы, поскольку ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ является строго нормированным. □

Теорема (об ортогональном разложении)**.** *Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ является замкнутым подпространством в ги́льбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда пространство $\boldsymbol{H}$ представляется в виде прямой суммы $\boldsymbol{H} = L \oplus L^{\perp}$ подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp} \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in L\}$.*

Доказательство. В силу теоремы о наилучшем приближении для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $y \in L$, т.ч. $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Положим $P(x) \doteqdot y$. Оператор $P : \boldsymbol{H} \to L$ является линейным и называется *ортогональной проекцией* на подпространство L. Пусть $z \doteqdot x - y$. Тогда по лемме $z \in L^{\perp}$. Таким образом, имеем $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$. Докажем единственность этого разложения. Пусть $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, где $y_1, y_2 \in L$ и $z_1, z_2 \in L^{\perp}$. Отсюда мы получаем, что $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^{\perp}$. Поэтому $\|y_1 - y_2\| = 0$, т.е. $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$. □

Следствие. *Пусть $L \subset \boldsymbol{H}$ является линейным подпространством ги́льбертова пространства $\boldsymbol{H}$. Тогда подпространство L всюду плотно в $\boldsymbol{H}$, т.е. $\overline{L} = \boldsymbol{H}$, в том и только в том случае, когда ортогональное дополнение $L^{\perp} = 0$.*

Необходимость. Для каждого $x \in \overline{L} = \boldsymbol{H}$ существует такая последовательность $\{x_n\} \subset L$, что $x_n \to x$. Поэтому, если элемент $y \in L^{\perp}$, то $\langle x, y \rangle = \lim \langle x_n, y \rangle = 0$. Таким образом, ортогональное дополнение $L^{\perp} \subset \boldsymbol{H}^{\perp} = 0$, т.е. $L^{\perp} = 0$.

Достаточность. Пусть $L^{\perp} = 0$. Так как $\overline{L}^{\perp} \subset L^{\perp}$, то $\overline{L}^{\perp} = L^{\perp} = 0$. По теореме об ортогональном разложении получим $\boldsymbol{H} = \overline{L} \oplus \overline{L}^{\perp} = \overline{L}$, т.е. L всюду плотно в $\boldsymbol{H}$.

Пример 4. Покажем, что в евклидовом пространстве утверждение следствия неверно. Рассмотрим $\boldsymbol{C}[0, 1]$ как подпространство $\boldsymbol{L}_2[0, 1]$ с соответствующим скалярным произведением. Пусть $M \subset \boldsymbol{L}_2[0, 1]$ подпространство, состоящее из всех многочленов, ортогональных функции $\chi_{[0,1/2]}$. Ясно, что $M \subset \boldsymbol{C}[0, 1]$ и его ортогональное дополнение в $\boldsymbol{C}[0, 1]$ равно нулю. Однако M не является всюду плотным в $\boldsymbol{C}[0, 1]$, иначе M будет всюду плотным в $\boldsymbol{L}_2[0, 1]$, что невозможно.

15 ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть $\boldsymbol{H}$ обозначает гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел, а $\boldsymbol{H}^*$ его сопряженное пространство.

Теорема (Ри́сса). *Для каждого функционала $\alpha \in \boldsymbol{H}^*$ существует единственный элемент $y \in \boldsymbol{H}$, т.ч. $\alpha(x) = \langle x, y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и $\|\alpha\| = \|y\|$.*

Доказательство. Пусть $L = \ker(\alpha) \doteqdot \{x \in \boldsymbol{H} \mid \alpha(x) = 0\}$ обозначает ядро функционала α. Так как $\alpha \in \boldsymbol{H}^*$ непрерывный функционал, то L является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{H}$. Если $L^\perp = 0$, то в силу следствия теоремы об ортогональном разложении $L = \boldsymbol{H}$. Поэтому в этом случае $\alpha = 0$ и $y = 0$. Пусть $\alpha \neq 0$, тогда $L \neq \boldsymbol{H}$ и, следовательно, существует элемент $z \in L^\perp$, т.ч. $\|z\| = 1$.

Для любого элемента $x \in \boldsymbol{H}$ рассмотрим элемент $u = \alpha(x)z - \alpha(z)x$. Так как $\alpha(u) = \alpha(x)\alpha(z) - \alpha(z)\alpha(x) = 0$, то $u \in L$ и, следовательно, получаем равенство $\langle u, z\rangle = \alpha(x)\langle z, z\rangle - \alpha(z)\langle x, z\rangle = \alpha(x) - \langle x, y\rangle = 0$, где $y \doteqdot \overline{\alpha(z)}z \in \boldsymbol{H}$. Таким образом, имеем представление $\alpha(x) = \langle x, y\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Для доказательства единственности этого представления предположим, что $\langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$. Тогда $\langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$ и, значит, $y_1 - y_2 = 0$.

Используя неравенство Коши́–Буняко́вского, имеем $|\alpha(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, при этом равенство выполняется при $x = y/\|y\|$. Поэтому $\|\alpha\| = \|y\|$. □

Следствие. *Пространства $\boldsymbol{H} \simeq \boldsymbol{H}^*$ изометрически изоморфны.*

Пример 1. В пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$ всякий ограниченный функционал представляется в виде $\alpha(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ при всех $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$, где $y = \{y_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$ — некоторый фиксированный элемент. Норма этого функционала равна $\|\alpha\| = \left(\sum_{n=1}^\infty |y_n|^2\right)^{1/2}$.

Пример 2. В пространстве $\boldsymbol{L}_2(E, \mu)$ всякий ограниченный функционал представляется в виде $\alpha(f) = \int_E f\, g\, d\mu$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2(E, \mu)$, где $g \in \boldsymbol{L}_2(E, \mu)$ – некоторая фиксированная функция. Норма этого функционала равна $\|\alpha\| = \left(\int_E |g|^2\, d\mu\right)^{1/2}$.

Пусть далее $\boldsymbol{E}$ обозначает евклидово пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел.

Определение. Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$ называется *ортогональной*, если $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ при $n \neq m$. Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$ называется *тота́льной*, если всякий элемент $x \in \boldsymbol{E}$, т.ч. $\langle x, e_n\rangle = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, равен нулю $x = 0$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \boldsymbol{E}$ называется *ортонормированной* в $\boldsymbol{E}$, если она является ортогональной и $\|e_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Полная ортонормированная система называется *ортонормированным базисом* евклидова пространства $\boldsymbol{E}$.

Для каждого элемента $x \in \boldsymbol{E}$ определяются *коэффициенты Фурье́* $c_n \doteqdot \langle x, e_n\rangle$ по ортонормированной системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, а соответствующий ряд $x \sim \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ называется *рядом Фурье́* элемента x по ортонормированной системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

1. Неравенство Бе́сселя: *$\|x\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ при всех $x \in \boldsymbol{E}$.*

Пусть $s_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ обозначает *частичную сумму* ряда Фурье. Тогда имеем $\|x-s_n\|^2 = \langle x-s_n, x-s_n\rangle = \langle x.x\rangle - 2\Re\langle x, s_n\rangle + \langle s_n, s_n\rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \geqslant 0$. Отсюда вытекает неравенство Бе́сселя.

2. Равенство Парсева́ля: *равенство $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ выполняется тогда и только тогда, когда ряд Фурье элемента $x \in \boldsymbol{E}$ сходится по норме.*

В самом деле, согласно доказанному выше $\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$. Поэтому $\|x-s_n\| \searrow 0$ тогда и только тогда, когда имеет место $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$.

3. Обобщенное равенство Парсева́ля: *равенство $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ для всех $x \in \boldsymbol{E}$ выполняется тогда и только тогда, когда имеет место обобщенное равенство $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\overline{d_n}$ для всех $x, y \in \boldsymbol{E}$, где $c_n = \langle x, e_n\rangle$ и $d_n = \langle y, e_n\rangle$.*

Применяя равенство Парсева́ля к элементу $x + \lambda y \in \boldsymbol{E}$, где $\lambda \in \mathbb{F}$, получим

$$\|x+\lambda y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x+\lambda y, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Re(\overline{\lambda}\, c_n\overline{d_n}) + |\lambda|^2\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|^2.$$

Так как $\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2$, то $\Re(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) = \sum_{n=1}^{\infty}\Re(\overline{\lambda}\, c_n\overline{d_n})$. Полагая здесь $\lambda = 1$, а затем $\lambda = \boldsymbol{i}$, получим обобщенное равенство Парсева́ля.

Теорема (Стекло́ва). *Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in \boldsymbol{E}$ выполняется равенство Парсева́ля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$, где $c_n \doteqdot \langle x, e_n\rangle$ коэффициенты Фурье́.*

Доказательство. Необходимость. Если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $\boldsymbol{E}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $y = \sum_{l=1}^{m}\lambda_l e_l$, т.ч. $\|x-y\| < \varepsilon$. Пусть $L_m \doteqdot \mathrm{sp}\{e_l\}_{l=1}^{m}$ линейная оболочка системы элементов $\{e_l\}_{l=1}^{m}$. Поскольку $x - s_m \perp L_m$, то s_m является наилучшим приближением элемента x подпространством L_m. Поэтому имеет место неравенство $\|x-s_n\| \leqslant \|x-s_m\| \leqslant \|x-y\| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant m$. Отсюда ряд Фурье сходится по норме и, следовательно, выполняется равенство Парсева́ля.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Па́рсеваля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$. Так как $\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\|x-s_n\| < \varepsilon$. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$. □

Следствие. *Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в том и только в том случае полна в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, когда она тотальна.*

В самом деле, если эта система полна, то выполняется равенство Парсева́ля. Поэтому из условия $c_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ следует, что $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = 0$ и, значит, $x = 0$. Обратно, если система тотальна, то ортогональное дополнение линейной оболочки $L \doteqdot \mathrm{sp}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ равно нулю $L^{\perp} = 0$, а в силу следствия теоремы об ортогональном разложении замыкание линейной оболочки $\overline{L} = \boldsymbol{H}$.

В бесконечномерном евклидовом пространстве тотальность ортонормированной системы не равносильна полноте этой системе, т.е. существуют такие неполные ортонормированные системы, которые являются тота́льными.

Пример 3. Подпространство $M \subset \boldsymbol{C}[0,1]$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{C}[0,1]$, построенное в примере 4 на предыдущей лекции, состоит из многочленов и его ортогональное дополнение в $\boldsymbol{C}[0,1]$ равно нулю. Поскольку многочлены из M, имеющие рациональные коэффициенты, всюду плотны в M и их счетное число, то из них можно выбрать счетную линейно независимую систему, полную в M. Применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, получим ортонормированную систему, которая тота́льна в $\boldsymbol{C}[0,1]$, но не полна в $\boldsymbol{C}[0,1]$.

Теорема (метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта)**.** *Для всякой полной линейно независимой системы элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{E}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}$ существует полная ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, элементы которой являются линейной комбинацией элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Полагаем $y_1 = x_1$ и определяем элемент $e_1 \doteqdot y_1/\|y_1\|$. Затем полагаем $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ и определяем элемент $e_2 \doteqdot y_2/\|y_2\|$, и т.д. На n-том шаге полагаем $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, e_k\rangle e_k$ и определяем элемент $e_n \doteqdot y_n/\|y_n\|$. Так как система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независима, то $\|y_n\| \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, матрица преобразования системы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет треугольной

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & a_{11}x_1 \\ e_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

где $a_{nn} \neq 0$. Обратная матрица также будет треугольной. Поэтому система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна. Нетрудно проверить, что явное выражение элементов системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет следующий вид:

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_1, x_{n-1}\rangle & \cdots & \langle x_n, x_{n-1}\rangle \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

где $D_n \doteqdot D(x_1, \ldots, x_n) = \det\{\langle x_k, x_l\rangle\}_{k,l=1}^{n}$ обозначают определители Гра́ма. □

Теорема (Ри́сса–Фи́шера)**.** *Каждое сепарабельное ги́льбертово пространство $\boldsymbol{H}$ изометрически изоморфно либо пространству $\mathbb{F}^n$, либо пространству $\boldsymbol{\ell}_2$.*

Доказательство. Пусть задана счетная и полная система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\boldsymbol{H}$. Тогда, отбрасывая из этого множества те элементы, которые выражаются линейно через предыдущие, получим полную счетную линейно независимую систему.

Рассмотрим случай, когда эта система бесконечна, т.е. $\dim(\boldsymbol{H}) = \infty$. В случае, когда система конечна, т.е. $\dim(\boldsymbol{H}) < \infty$, доказательство полностью аналогично. Применяя метод ортогонализации Гра́ма–Шми́дта, можно построить полную счетную ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме Стеклова всякий элемент $x \in \boldsymbol{H}$ представляется в виде ряда Фурье $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, сходящимся по норме пространства $\boldsymbol{H}$ к элементу x, где $c_n = \langle x, e_n \rangle$ коэффициенты Фурье́.

Определим линейное отображение $F : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{\ell}_2$ по формуле $F(x) = c \in \boldsymbol{\ell}_2$, где $c = \{c_n\}$ обозначает последовательность коэффициентов Фурье́ элемента $x \in \boldsymbol{H}$. Так как в силу равенства Парсева́ля имеем $\|F(x)\|_{\ell_2} = \|x\|$, то это отображение F изометрично. Докажем, что его образ $F(\boldsymbol{H})$ совпадает с пространством $\boldsymbol{\ell}_2$.

Для произвольной последовательности $c = \{c_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$ положим $s_m \doteqdot \sum_{k=1}^{m} c_k e_k$. Так как $\|s_m - s_n\|^2 = \langle \sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k, \sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0$ при $n \to \infty$, то $\{s_n\}$ является последовательностью Коши́. В силу полноты пространства $\boldsymbol{H}$ существует предел $\lim s_n = x$ по норме $\boldsymbol{H}$. Применяя непрерывность скалярного произведения, мы получим $\langle x, e_n \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle s_m, e_n \rangle = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $F(x) = c$ и, следовательно, отображение F является изометрией. □

Пример 4. Докажем, что тригонометрическая система $e_n(x) \doteqdot \boldsymbol{e}^{2\pi i n x}$, где $n \in \mathbb{Z}$, является ортонормированной и полной в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2[0, 1]$.

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^1 \boldsymbol{e}^{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)x} dx = \frac{\boldsymbol{e}^{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)} - 1}{2\pi \boldsymbol{i}(n-m)} = 0 \quad (n \neq m), \quad \langle e_n, e_n \rangle = 1.$$

Следовательно, система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированной в $\boldsymbol{L}_2[0, 1]$.

Докажем ее полноту. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как множество непрерывных функций $\boldsymbol{C}[0, 1]$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2[0, 1]$, то для любой функции $f \in \boldsymbol{L}_2[0, 1]$ существует $g \in \boldsymbol{C}[0, 1]$, т.ч. $\|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/3$. Затем построим такую функцию $\varphi \in \boldsymbol{C}[0, 1]$, что $\varphi(0) = \varphi(1)$ и $\|g - \varphi\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon/3$. Для этого изменяем функцию g на достаточно малом отрезке $[0, \delta]$, полагая ее линейной. Наконец, по теореме Вейерштрасса об аппроксимации существует тригонометрический полином $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \boldsymbol{e}^{2\pi i k x}$, т.ч. $\|\varphi - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/3$. Так как $\|\varphi - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|\varphi - T\|_{\boldsymbol{C}} < \varepsilon/3$, то получаем

$$\|f - T\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f - g\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|g - \varphi\|_{\boldsymbol{L}_2} + \|\varphi - T\|_{\boldsymbol{L}_2} < \varepsilon.$$

Таким образом, тригонометрическая система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ полна в $\boldsymbol{L}_2[0, 1]$.

Построим изометрический изоморфизм $F : \boldsymbol{L}_2[0, 1] \to \boldsymbol{\ell}_2$ пространства $\boldsymbol{L}_2[0, 1]$ на пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ по указанной в теореме формуле. Тогда полагаем $F(f) = c$, где $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ обозначает совокупность всех коэффициентов Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_2[0, 1]$, т.е. $c_n \doteqdot \int_0^1 f(x) \boldsymbol{e}^{-2\pi i n x} dx$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Из равенства Парсева́ля вытекает, что $\|F(f)\|_{\ell_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_2[0, 1]$. Следовательно, отображение F изометрично и, как показано в теореме, его образ совпадает с $\boldsymbol{\ell}_2$.