Теоремы Рунге и Мергеляна

Из спецкурса проф. Парамонова П.В., мехмат МГУ, осень 2012 г.

Лекция №1

Формула Помпейю. Стандартное разбиение единицы. Основные пространства функций.

Формула Помпейю

Напомним, что если f есть $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция в точке $a \in \mathbb{C}$, то, по определению,

$$\overline{\partial} f(a) = \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_a .$$

По теореме Коши-Римана f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $\in \mathbb{C}$, если и только если она $\mathbb{R}$-дифференцируема в этой точке и $\overline{\partial} f(a) = 0$.

Оператор $\overline{\partial} : f \to \overline{\partial} f$ называют оператором Коши-Римана.

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$. Положим $C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) : \mathrm{supp}(f)$ – компакт в $\Omega\}$, где $\mathrm{supp}(f)$ - наименьшее замкнутое подмножество из Ω, вне которого f обращается в ноль (в Ω). При $k = 0$ пишем $C_0^0(\Omega) = C_0(\Omega)$.

1.1. Теорема (формула Помпейю). Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$, тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta},$$

где $\Lambda(\cdot)$ – мера Лебега в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Фиксируем $z \in \mathbb{C}$ и найдем $R > 0$ с условием $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(z, R)$. Введем полярные координаты ρ, θ с центром z:

$$\zeta - z = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \overline{\zeta - z} = \rho e^{-i\theta}$$

при $\zeta \neq z$. Таким образом,

$$e^{2i\theta} = \frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \quad , \quad \rho^2 = (\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\,.$$

Дифференцируя последние два равенства по $\overline{\zeta}$, находим:

$$e^{2i\theta} 2i \frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = -\frac{\zeta - z}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} \quad , \quad 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \zeta - z\,,$$

откуда

$$\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{ie^{i\theta}}{2\rho} \quad , \quad \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{e^{i\theta}}{2}\,.$$

Рассмотрим $F(\rho,\theta) = \varphi(\zeta) = \varphi(z + \rho e^{i\theta})$, являющуюся 2π -периодической по θ при $\rho > 0$. Тогда при $\zeta \neq z$ имеем:

$$\overline{\partial}\varphi(\zeta) = F'_\rho \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} + F'_\theta \frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = F'_\rho \frac{e^{i\theta}}{2} \ + F'_\theta \frac{ie^{i\theta}}{2\rho}\,.$$

Интегрируя повторно в полярных координатах и учитывая периодичность F по θ, получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta} = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_\delta^R (F'_\rho \frac{e^{i\theta}}{2} + F'_\theta \frac{ie^{i\theta}}{2\rho}) \frac{1}{-\rho e^{i\theta}} \rho d\rho d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\delta\to 0} \left(\int_0^{2\pi} \int_\delta^R F'_\rho d\rho d\theta + \int_\delta^R \int_0^{2\pi} F'_\theta d\theta \frac{i}{\rho} d\rho \right) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F(\delta,\theta) - F(R,\theta)) d\theta = \varphi(z),$$

где в последнем равенстве мы пользуемся непрерывностью φ в точке z и условием $F(R,\theta) = 0$. Отметим, что переходом к введенным выше полярным координатам легко доказывается и абсолютная сходимость исходного интеграла. $\square$

1.2. Замечание. При $z = 0$ имеем:

$$\varphi(0) = \frac{-1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{\zeta}.$$

По определению обобщенных производных последнее означает, что $\overline{\partial}(1/(\pi\zeta))$ есть δ-функция Дирака, т.е. $1/(\pi\zeta)$ есть *фундаментальное решение* уравнения Коши-Римана $\overline{\partial} f = 0$.

Стандартное разбиение единицы

Пусть $\mathbb{Z}^2 = \{j = (j_1, j_2) \equiv j_1 + ij_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$ – стандартная 1-решетка, $\delta\mathbb{Z}^2 = \{a_j \equiv \delta j_1 + i\delta j_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$ – стандартная δ-решетка $(\delta > 0)$ в $\mathbb{C}$ и

$$Q_j^\delta = [\delta j_1, \delta(j_1 + 1)) \times [\delta j_2, \delta(j_2 + 1))$$

– соответствующие этой решетке квадраты, покрывающие $\mathbb{C}$.

Через $B(a, r)$ обозначим открытый круг с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$. Фиксируем функцию

$$\varphi^1 \in C_0^1(B(0, 1)), \quad 0 \le \varphi^1 \le 1, \quad \int_{B(0,1)} \varphi^1(z)d\Lambda(z) = 1.$$

Пусть $A_1 = \|\overline{\partial}\varphi^1\|$, где, как и ранее, при произвольном $E \subset \mathbb{C}$ полагаем

$$\|f\|_E = \sup\{|f(z)| : z \in E\}, \quad \|f\| = \|f\|_{\mathbb{C}}.$$

Фиксируем $\delta > 0$. Пусть $\varphi^\delta(z) = \delta^{-2}\varphi^1(z/\delta)$, $Q_j = Q_j^\delta$, $\chi_{Q_j} \equiv \chi_j$ – индикатор Q_j (т.е. $\chi_j = 1$ на Q_j и $\chi_j = 0$ вне Q_j).

При $j \in \mathbb{Z}^2$ определим

$$\varphi_j^\delta(z) \equiv \varphi_j(z) = \int \varphi^\delta(z - \zeta)\chi_j(\zeta)d\Lambda(\zeta)$$

– функции разбиения единицы. Справедлива

1.3. Лемма. Пусть $B_j = B(a_j, 3\delta), j \in \mathbb{Z}^2$, тогда

$$\varphi_j \in C_0^1(B_j), \quad 0 \le \varphi_j \le 1, \quad \|\overline{\partial}\varphi_j\| \le \frac{A_1}{\delta}, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1 \text{ на } \mathbb{C},$$

причем каждая точка z принадлежит не более чем 50 кругам B_j.

Доказательство. Если $|z - a_j| \ge 3\delta$ и $\zeta \in Q_j$, то $|z - \zeta| > \delta$, откуда $\varphi^\delta(\zeta - z) = 0$, так что $\varphi_j(z) = 0$. Далее, дифференцируя по переменным x и y $(z = x + iy)$, по определению $\overline{\partial}\varphi_j(z)$ получаем:

$$\overline{\partial}\varphi_j(z) = \int \overline{\partial}\varphi^\delta(z - \zeta)\chi_j(\zeta)d\Lambda(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$.

Для любого z имеем:

$$|\overline{\partial}\varphi_j(z)| \leq \int_{Q_j} |\overline{\partial}\varphi^\delta(z-\zeta)|d\Lambda(\zeta) \leq \frac{A_1}{\delta},$$

поскольку

$$\overline{\partial}\varphi^\delta(w) = \overline{\partial}(\frac{1}{\delta^2}\varphi^1(\frac{w}{\delta})) = \frac{1}{\delta^3}[\overline{\partial}\varphi^1](\frac{w}{\delta}),$$

и, следовательно, $\|\overline{\partial}\varphi^\delta\| \leq A_1/\delta^3$.

Осталось доказать, что $\sum_j \varphi_j \equiv 1$. Действительно:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j(z) = \int \varphi^\delta(z-\zeta) \sum_j \chi_j(\zeta) d\Lambda(\zeta) = \int \varphi^\delta(z-\zeta)\, d\Lambda(\zeta) = 1. \ \square$$

Определения основных пространств функций

1.4. Введем (или напомним) ряд общепринятых обозначений, важных для дальнейшего. Пусть E – произвольное множество в $\mathbb{C}$. Обозначим через $A(E)$ класс функций f, каждая из которых определена и голоморфна в некоторой (своей) окрестности U_f множества E (если E открыто, то $A(E)$ есть класс всех голоморфных на E функций). Как и ранее, $C(E)$ – пространство всех комплекснозначных *непрерывных и ограниченных* на E функций f с равномерной нормой $\|f\|_E$. Для *компакта* X через $P(X)$ обозначается *замыкание* в $C(X)$ подпространства $\{P\}|_X$, где $\{P\}$ – совокупность всех полиномов комплексного переменного z. Ясно, что $f \in P(X)$, если и только если f равномерно на X приближается (с любой точностью) полиномами от z. Определим еще пространство $R(X)$ – замыкание в $C(X)$ подпространства $\{g|_X\}$, где g пробегает класс всех рациональных функций (от z) с полюсами вне X. По аналогии, $f \in R(X)$ тогда и только тогда, когда f равномерно на X приближается рациональными функциями. Наконец, положим $C_A(X) = C(X) \cap A(X^o)$, где E^o – множество внутренних точек множества E. Следующие включения очевидны:

$$P(X) \subseteq R(X) \subseteq C_A(X) \subseteq C(X).$$

Иначе говоря, приближать (с любой точностью) полиномами и рациональными функциями равномерно на X можно только функции класса $C_A(X)$ ("простейшее"необходимое условие приближаемости).

Напомним, что компонентой (связности) множества E в $\mathbb{C}$ называется всякое максимальное связное подмножество из E. Если E – открыто, то всякая его связная компонента является областью, причем E есть конечное или счетное объединение своих компонент. Поэтому, если X – компакт, то его *дополнение* состоит из неограниченной компоненты Ω и ограниченных компонент $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ (если они есть).

1.5. Определение. *Оболочкой* компакта в $\mathbb{C}$ (обозначается через $\widehat{X}$) называется объединение компакта X и всех ограниченных компонент его дополнения.

Условие $X = \widehat{X}$ очевидно означает, что $\mathbb{C} \setminus X = \Omega$ – связно.

В 1885 г. К. Вейерштрасс и К. Рунге доказали свои знаменитые теоремы о равномерных приближениях функций полиномами. Приведем их формулировки, используя введенные выше обозначения.

1.6. Теорема (Вейерштрасса). Пусть X – отрезок на вещественной оси, тогда $C(X) = P(X)$.

1.7. Теорема (Рунге). Пусть X – произвольный компакт в $\mathbb{C}$, тогда

1. $A(X) \subset R(X)$;
2. $\{A(X) \subset P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

Нашей ближайшей целью является доказательство теоремы Рунге. Одной из основных задач этого раздела является доказательство следующего *критерия* полиномиальной аппроксимации, полученного С.Н. Мергеляном в 1952 г.

1.8. Теорема (Мергеляна). $\{C_A(X) = P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

Лекция №2

Свойства потенциала Коши. Доказательство теоремы Рунге

Свойства потенциала Коши

Нам неоднократно понадобится следующее утверждение.

2.1. Лемма. Пусть K - компакт, $h \in L_\infty(K, \Lambda(\cdot))$. Положим

$$f(z) = \int_K \frac{h(\zeta)d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta}$$

(интеграл абсолютно сходится при всех z, см. ниже). Тогда

(а) Для любого компакта X с условием $X \cap K = \emptyset$ имеем $f \in R(X)$, причем f равномерно на X с любой точностью приближается рациональными дробями вида

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z-a_n}, \quad \text{где } a_n \in K, \quad \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

(б) Функция f голоморфна вне K, $f \in C(\overline{\mathbb{C}})$, $f(\infty) = 0$, причем

$$\|f\| = \|f\|_{\overline{\mathbb{C}}} \leq 2M\sqrt{\pi\Lambda(K)},$$

где $M = \|h\|_{K,\Lambda}$ – норма h в $L_\infty(K, \Lambda(\cdot))$.

2.2. Замечание. Функция f, определенная в предыдущей лемме, называется *потенциалом Коши* функции h *по мере Лебега* $\Lambda(\cdot)$. При этом наша функция h *финитна*, т.е. обращается в ноль вне компакта K.

Доказательство Леммы 2.1. (а) Пусть $d = \operatorname{dist}(X, K)$, $d > 0$. При $\mu \in (0, d/2)$ разобьем K на конечное число ($N = N(\mu)$) попарно непересекающихся борелевских множеств K_n, $1 \leq n \leq N$, с условиями $\operatorname{diam}(K_n) < \mu$. Фиксируем

$$a_n \in K_n, \quad \lambda_n = \int_{K_n} h(\zeta)d\Lambda(\zeta),$$

тогда при $z \in X$ получаем:

$$\Big|\int_K \frac{h(\zeta)d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} - \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n}{z-a_n}\Big| = \Big|\sum_{n=1}^N \int_{K_n} \frac{h(\zeta)d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta}$$

$$-\sum_{n=1}^N \int_{K_n} \frac{h(\zeta)d\Lambda(\zeta)}{z-a_n}\Big| \le \sum_{n=1}^N M \int_{K_n} \Big|\frac{(z-a_n)-(z-\zeta)}{(z-\zeta)(z-a_n)}\Big| d\Lambda(\zeta)$$

$$\le M \sum_{n=1}^N \frac{\mu}{d^2}\Lambda(K_n) \le \frac{\Lambda(K)M}{d^2}\mu \to 0 \quad \text{при } \mu \to 0.$$

(б) Поскольку функции $\displaystyle\sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n}{z-a_n}$ голоморфны вне K, то в силу (а) и теоремы Вейерштрасса f голоморфна вне K. Свойство $f(\infty) = 0$ очевидно. Оценим $|f(z)|$ для произвольного $z \in \mathbb{C}$. Пусть $r = \sqrt{\Lambda(K)/\pi}$. Поскольку $\Lambda(B(z,r)) = \Lambda(K)$ и функция $1/|\zeta - z|$ *убывает* при удалении ζ от (фиксированного) z, мы получаем:

$$|f(z)| \le M \int_K \frac{1}{|z-\zeta|} d\Lambda(\zeta) \le M \int_{B(z,r)} \frac{1}{|z-\zeta|} d\Lambda(\zeta) =$$

$$M \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\rho d\rho d\theta}{\rho} = 2M\pi r = 2M\sqrt{\pi\Lambda(K)},$$

причем вместе с нужной равномерной оценкой мы автоматически доказали абсолютную сходимость (при всех z) интеграла, определяющего f. Непрерывность f вытекает из Леммы 2.4 ниже. □

2.3. Определение. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $\tau \in (0,1]$. Пространство $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ есть совокупность функций $g \in C(E)$, для каждой из которых найдется $c = c(g) \in [0,\infty)$ с условиями

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le c|z_1 - z_2|^\tau, \quad |g(z_1)| \le c$$

для всех $z_1, z_2 \in E$. Банахова норма в $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ определяется так: $\|g\|_{\tau,E} = \min\{c(g)\}$, где (достигающийся) min берется по всем $c(g)$, удовлетворяющим последним двум неравенствам (проверить!).

Очевидно, что $\mathrm{Lip}_\tau(E) \subset C(E)$ при всех $\tau \in (0,1]$.

2.4. Лемма. В условиях Леммы 2.1, для любого $\tau \in (0,1)$ имеем $f \in \mathrm{Lip}_\tau \mathbb{C}$, причем $\|f\|_{\tau,\mathbb{C}} \le Mc(\tau, K)$. Однако найдется K, такой, что даже при $h \equiv 1|_K$ имеем $f \notin \mathrm{Lip}_1(\mathbb{C})$.

Доказательство. Фиксируем $z_1 \ne z_2$ и пусть $\delta = |z_1 - z_2|/2$, $a = (z_1 + z_2)/2$, $D_1 = B(z_1, \delta)$, $D_2 = B(z_2, \delta)$, $D_3 = B(a, 2\delta) \setminus (D_1 \cup D_2)$, $D_4 = \mathbf{C} \setminus B(a, 2\delta)$. Нам нужно оценить слагаемые в правой части неравенств:

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le \sum_{s=1}^{4} \int_{D_s \cap K} |h(\zeta)| \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \zeta||z_2 - \zeta|} d\Lambda(\zeta) \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{4} 2M\delta \int_{D_s \cap K} \frac{1}{|z_1 - \zeta||z_2 - \zeta|} d\Lambda(\zeta).$$

Слагаемое, соответствующее $s = 1$ ($s = 2$ аналогично), оценивается сверху величиной $4\pi M\delta$ как в предыдущей лемме переходом к полярным координатам с центром z_1 и интегрированием по всему D_1. Слагаемое при $s = 3$ оценивается сверху тривиально (тем же $4\pi M\delta$). Выберем $r > 0$ так, что $\Lambda(B(a, r) \cap D_4) = \Lambda(K)$. При интегрировании по D_4 мы пользуемся оценкой $|z_1 - \zeta||z_2 - \zeta| \ge |\zeta - a|^2/4$, монотонным убыванием подинтегральной функции (от $|\zeta - a|$) и полярными координатами с центром a:

$$\int_{D_4 \cap K} \frac{1}{|z_1 - \zeta||z_2 - \zeta|} d\Lambda(\zeta) \le \int_{D_4 \cap K} \frac{4}{|\zeta - a|^2} d\Lambda(\zeta) \le$$

$$8\pi \int_{2\delta}^{r} \rho^{-1} d\rho = 8\pi \ln(r/(2\delta)).$$

Теперь легко видеть, что при фиксированном $\tau \in (0,1)$ величина $|f(z_1) - f(z_2)|/(|z_1 - z_2|^\tau)$ имеет оценку сверху, не зависящую от z_1 и z_2, если $\delta < 1$. Случай $\delta \ge 1$ оставляем читателю.

Контрпример для $\tau = 1$ строится так. Полагаем $K = \{z : |z| \le 1, \mathrm{Re}(z) \ge |\mathrm{Im}(z)|\}$ и рассматриваем $z_1 = 0$, $z_2 = -2\delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. $\square$

Доказательство Теоремы 1.7 (Рунге). (1). Докажем, что $A(X) \subset R(X)$ для любого компакта X.

Пусть f голоморфна в d-окрестности U_d компакта X, надо приблизить f рациональными функциями. Пусть $\delta = d/7$. Построим стандартное 3δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}$ (см. Лемму 1.3) : $B_j = B(a_j, 3\delta)$ $(a_j \in \delta\mathbb{Z}^2)$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$, $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1$. Пусть

$$J = \{j \in \mathbb{Z}^2 : \; B_j \subset U_d\}, \quad \varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j \in C_0^1(U_d).$$

Ясно, что $\varphi = 1$ в δ-окрестности U_δ компакта , $\varphi = 0$ вне U_d.

Положим $g = f\varphi$, $g \in C_0^1(\mathbb{C})$. По Теореме 1.1 (Помпейю), при $z \in X$ имеем:

$$f(z) = g(z) = \frac{1}{\pi}\int_{U_d\setminus U_\delta} \frac{\overline{\partial} g(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta},$$

поскольку $\overline{\partial} g(\zeta) = \overline{\partial} f(\zeta) = 0$ в U_δ. Остается воспользоваться Леммой 2.1 при $h(\zeta) = \overline{\partial} g(\zeta)$, $K = \overline{U_d} \setminus U_\delta$.

Следует отметить, что при доказательстве этой части теоремы Рунге как правило пользуются интегральной формулой Коши. Однако для *аккуратного* ее применения (при построении специального контура интегрирования) требуются дополнительные топологические построения, которые в контексте нашего изложения проще обойти интегрированием по площади, т.е. с помощью формулы Помпейю.

(2). Надо показать, что $\{A(X) \subset P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

($\Rightarrow$). Пусть, от противного, $A(X) \subset P(X)$, но $\mathbb{C}\setminus X$ не связно, т.е. существует ограниченная связная компонента Ω_1 в $\mathbb{C} \setminus X$, в частности $\partial\Omega_1 \subset X$. Фиксируем $a_1 \in \Omega_1$. Так как $f(z) = 1/(z - a_1) \in A(X) \subset P(X)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется полином $p_\varepsilon(z)$ с условием $|1/(z-a_1) - p_\varepsilon(z)| < \varepsilon$ при всех $z \in X$ и, в частности, при $z \in \partial\Omega_1$. Пусть $d = \operatorname{diam}(\Omega_1)$, тогда

$$|1 - p_\varepsilon(z)(z-a_1)| \le \varepsilon d, \quad \forall z \in \partial\Omega_1.$$

При $\varepsilon < 1/d$ мы получаем противоречие с принципом максимума модуля в Ω_1, так как функция $1-p_\varepsilon(z)(z-a_1)$ равна 1 при $z = a_1$.

($\Leftarrow$). Пусть $\Omega = \mathbb{C} \setminus X$ – связно, $f \in A(X)$. Согласно (1), для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $\{a_1, \cdots, a_N\} \subset \Omega$ и $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ такие, что

$$|f(z) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z-a_n}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in X.$$

Остается доказать, что $1/(z-a)|_X \in P(X)$ при всех $a \in \Omega$ (потом каждую функцию $\lambda_n/(z-a_n)$ приблизим многочленом $p_{\varepsilon_n}(z)$ с точностью $\varepsilon_n = \varepsilon/(2N)$, так что f будет приближена с точностью ε).

Пусть $G = \{a \in \Omega : 1/(z-a)|_X \in P(X)\}$. Установим, что $G = \Omega$. Действительно, во-первых $G \neq \emptyset$, так как по Теореме 6.13 (Коши-Тейлора) G содержит все точки из внешности какого-либо круга, содержащего X. Во-вторых, G – замкнуто в Ω, ибо если $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset G$ и $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k \in \Omega$, то $a \in G$, что непосредственно вытекает из равномерной сходимости $1/(z-a_k)$ к $1/(z-a)$ на X при $k \to \infty$. Установим, в-третьих, что G – открыто в Ω. Пусть $a \in G$, $d = \operatorname{dist}(a, X)$, $a_1 \in B(a, d)$. Докажем, что $a_1 \in G$. Из элементарных свойств геометрических прогрессий вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное L, что

$$\Big|\frac{1}{z-a_1} - \sum_{l=1}^{L} \frac{(a_1-a)^{l-1}}{(z-a)^l}\Big| < \varepsilon$$

для всех $z \in X$. Но $1/(z-a) \in P(X)$, откуда $1/(z-a)^l \in P(X)$ при всех натуральных l и, следовательно, $1/(z-a_1) \in P(X)$.

Теперь равенство $G = \Omega$ следует из связности Ω. $\square$

2.5. Замечание. Определим $\overline{A(X)}$ как замыкание в $C(X)$ пространства $A(X)|_X$. Тогда теорема Рунге в точности означает, что $\overline{A(X)} = R(X)$ для всякого компакта X, причем $\{R(X) = P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

2.6. Пусть $f \in C^1(\mathbb{C})$, причем $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$ – компакт. Положим

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta}\,.$$

Доказать, что $f - F$ – целая функция, причем $f \equiv F \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.

2.7. Пусть X – произвольный компакт в $\mathbb{C}$, а $\Omega_1, \cdots$ – его ограниченные компоненты дополнения (если есть). Фиксируем a_j в каждой из Ω_j. Доказать, что для любой $f \in A(X)$ и произвольного $\varepsilon > 0$, найдется $R(\cdot)$ – рациональная функция с полюсами, принадлежащими множеству $\{a_j\}_{j\geq 1}$ такая, что $\|f - R\|_X < \varepsilon$.

Лекция №3

Формулировка теорем Мергеляна. Свойства локализационного оператора Витушкина. Теорема Брауэра.

Формулировка теорем Мергеляна и доказательство теоремы Коши

3.1. Теорема (Мергеляна). Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$. Для выполнения равенства $C_A(X) = P(X)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{C} \setminus X$ было связным.

3.2. Следствие (теорема Лаврентьева). $C(X) = P(X)$ если и только если $X = \widehat{X}$ и $X^o = \emptyset$.

Доказательство Теоремы 9.1. ($\Rightarrow$) Пусть $C_A(X) = P(X)$, тогда автоматически $A(X) \subset P(X)$ и по теореме Рунге $X = \widehat{X}$.

($\Leftarrow$) Пусть $X = \widehat{X}$. По теореме Рунге достаточно установить, что $C_A(X) = \overline{A(X)}$. Мы докажем следующий более сильный результат.

3.3. Теорема (Мергеляна). Пусть X – компакт, $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \widehat{X}$, $\Omega_1, \cdots$ – компоненты дополнения компакта , т.е. $\mathbb{C} \setminus X = \sqcup_s \Omega_s$. Если $d = \inf\limits_s \{\operatorname{diam}(\Omega_s)\} > 0$, то $C_A(X) = \overline{A(X)}$.

3.4. Замечание. Если $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus X$, т.е. $\mathbb{C} \setminus X$ связно, то индексы $s = 1, \cdots$ отсутствуют и мы полагаем $d = \infty$. Доказательство Теоремы 9.3 весьма сложно. Мы приведем его в следующей лекции после соответствующей подготовки.

3.5. Следствие (уточненная интегральная теорема Коши). Пусть D – область в $\mathbb{C}$, ограниченная конечным числом попарно непересекающихся спрямляемых замкнутых жордановых кривых. Тогда для любой функции $f \in A(D) \cap C(\overline{D})$ выполняется равенство:

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = 0.$$

При этих же условиях справедлива интегральная формула Коши, а также формула Коши для производных.

Доказательство. Используется Теорема 3.3 и Упражнение 2.7. Детали оставляем читателю. □

Свойства локализационного оператора Витушкина

Напомним, что если $f \in C^1(\mathbb{C})$, то по теореме Коши-Римана множество $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$ есть множество особых точек функции f (вне него f голоморфна). Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Рассмотрим функцию

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\varphi(\zeta)}{z-\zeta} d\Lambda(\zeta).$$

В последней формуле интегрирование (реально) ведется по множеству $K = \operatorname{supp}(\overline{\partial} f) \cap \operatorname{supp}(\varphi)$. По Лемме 2.1 $f_{(\varphi)}$ голоморфна вне K, т.е. ее особые точки лежат среди особых точек функции f и одновременно на $\operatorname{supp} \varphi$. Говорят, что оператор $f \to f_{(\varphi)}$ (при фиксированном φ) *локализует* особенности f на $\operatorname{supp}(\varphi)$.

Пусть $f \in C_0^1(\mathbb{C})$. Сделаем стандартное 3δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}$ (см. Лемму 1.3). Положим $J = \{j : \overline{B_j} \cap \operatorname{supp}(\overline{\partial} f) \neq \emptyset\}$. Ясно, что J – конечное множество индексов, причем функция $\varphi = \sum\limits_{j \in J} \varphi_j$ удовлетворяет условиям $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$ и $\varphi(z) = 1$ в некоторой окрестности $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$.

Пусть $f_j = f_{(\varphi_j)}$. Тогда по Теореме 1.1 (Помпейю)

$$\sum_{j \in J} f_j(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \sum\limits_{j \in J} \varphi_j(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} = f(z)$$

для всех z. Тем самым f разлагается в конечную сумму функций с "локализованными"особенностями. (Для указанной цели нельзя полагать $f_j = f\varphi_j$, так как φ_j не голоморфна в $\mathbb{C}$ и у таких f_j могут появиться новые особенности.)

Нашей ближайшей целью является получение аналогичного разложения для произвольной функции f класса $C_0(\mathbb{C})$.

Пусть пока $f \in C^1(\mathbb{C})$. Пользуясь формулой Помпейю, получим:

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial}(f(\zeta)\varphi(\zeta)) - f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta} d\Lambda(\zeta) =$$

$$= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta} d\Lambda(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta) d\Lambda(\zeta).$$

Это уже нужная формула локализации.

3.6. Определение. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. *Локализационным* оператором (оператором *А.Г. Витушкина*), соответствующим функции φ, называется оператор $f \to V_\varphi f$, где $f \in C(\mathbb{C})$ и

$$V_\varphi f(z) \equiv f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta) d\Lambda(\zeta) =$$

$$= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta} d\Lambda(\zeta). \tag{3.1}$$

3.7. Лемма (свойства $V_\varphi f$). Пусть $B = B(a,r)$, $\varphi \in C_0^1(B)$, т.е. $S := \mathrm{supp}(\varphi) \subset B$. При $f \in C_0(\mathbb{C})$ обозначим через $\omega(t)$ модуль непрерывности функции f на $\mathbb{C}$, $t \geq 0$. Тогда:

(а) $V_\varphi f \equiv f_{(\varphi)} \in C(\overline{\mathbb{C}})$, $f_{(\varphi)}(\infty) = 0$, причем имеет место оценка:
$$\|f_{(\varphi)}\| \leq 4\omega(r)r\|\overline{\partial}\varphi\| \tag{3.2}$$

(б) Если f голоморфна на открытом множестве U, то $f_{(\varphi)}$ голоморфна на множестве $U \cup (\mathbb{C} \setminus S)$ (т.е. особенности $f_{(\varphi)}$ локализуются на носителе S функции φ).

Пусть $U_1 = \{z : \varphi(z) = 1\}^o$, тогда $f - f_{(\varphi)} \in A(U_1)$, т.е. $V_\varphi f$ "вбирает"в себя все особенности функции f на U_1.

(в) Разложим $f_{(\varphi)}$ вне $\overline{B(a,r)}$ в ряд Лорана:
$$f_{(\varphi)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}.$$

Тогда справедливы оценки:
$$|c_n| \leq \omega(r)r^{n+1}\|\overline{\partial}\varphi\|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Первое и второе утверждения в (а), а также голоморфность $f_{(\varphi)}$ вне S вытекают из Леммы 2.1(б) и локализационной формулы (3.1). Для доказательства (3.2) воспользуемся принципом максимума модуля вне B, согласно которому нам достаточно оценить $|f_{(\varphi)}(z)|$ только при $z \in \overline{B}$:

$$|f_{(\varphi)}(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_B \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{|z - \zeta|} |\overline{\partial}\varphi(\zeta)| d\Lambda(\zeta) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \omega(2r) \|\overline{\partial}\varphi\| \int_B \frac{1}{|z - \zeta|} d\Lambda(\zeta) \leq 4\omega(r) r \|\overline{\partial}\varphi\|.$$

При этом мы воспользовались очевидным неравенством $\omega(2r) \leq 2\omega(r)$ и оценкой, полученной в Лемме 2.1 :

$$\int_B \frac{1}{|z - \zeta|} d\Lambda(\zeta) \leq 2\pi r.$$

(б). Пусть f голоморфна в $B(b, \delta) \subset U$; докажем, что $f_{(\varphi)} \in A(B(b, \delta/2))$. Выберем $\psi \in C_0^1(B(b, \delta))$, $\psi(z) = 1$ в $B(b, \delta/2)$, и рассмотрим $g = f\psi$, $h = f(1 - \psi)$, так что $f_{(\varphi)} = g_{(\varphi)} + h_{(\varphi)}$. Для функции g класса $C_0^1(\mathbb{C})$ соответствующее утверждение доказано выше. А поскольку $h = 0$ в $B(b, \delta/2)$, то голоморфность $h_{(\varphi)}$ в $B(b, \delta/2)$ вытекает из локализационной формулы и Леммы 8.1(б). Итак, $f_{(\varphi)} \in A(U)$.

Аналогично, по Лемме 2.1(б) и ввиду $\overline{\partial}\varphi = 0$ в U_1, имеем:

$$f(z) - f_{(\varphi)}(z) = f(z)(1 - \varphi(z)) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{S \setminus U_1} \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z - \zeta} d\Lambda(\zeta) \in A(U_1).$$

(в) Найдем c_n, $n \geq 1$. Из равенств

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{(f(z) - f(a)) - (f(\zeta) - f(a))}{z - \zeta} \overline{\partial}\varphi(\zeta) d\Lambda(\zeta) =$$

$$= (f(z) - f(a))\varphi(z) - \frac{1}{\pi} \int_{B(a,r)} \frac{(f(\zeta) - f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z - \zeta} d\Lambda(\zeta),$$

учитывая, что $\varphi(z) = 0$ вне $B(a, r) = B$ и используя формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{z - \zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z - a)^n}$$

(при $|z-a|>r$ ряд сходится абсолютно и равномерно по ζ на $\overline{B}$), находим при $|z-a|>r$:

$$f_{(\varphi)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^n} \left[-\frac{1}{\pi} \int\limits_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\Lambda(\zeta) \right].$$

Следовательно,

$$c_n = -\frac{1}{\pi} \int_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\Lambda(\zeta).$$

Теперь оценка (3.3) тривиальна:

$$|c_n| \le \frac{1}{\pi}\omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\| r^{n-1}\pi r^2 = \omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\| r^{n+1}. \ \square$$

Теорема Брауэра о продолжении непрерывной функции

Завершим эту лекцию доказательством следующего частного случая известной теоремы Брауэра-Титце-Урысона, необходимого для доказательства Теоремы 3.3 (Мергеляна).

3.8. Теорема (Брауэра). Если X – компакт в $\mathbb{C}$ и $f \in C(X)$, то найдется функция $F \in C_0(\mathbb{C})$ с условиями $F|_X = f$, $\|F\| \le \|f\|_X$.

Доказательство. При $k \in \mathbb{Z}$ определим $G_k = \{z : \operatorname{dist}(z, X) \in [2^{-k}, 2^{-k+1}]\}$ и пусть $J(k)$ – совокупность тех индексов j в стандартном $3\delta_k$-разбиении единицы $\{B_j^{(k)}, \varphi_j^{(k)}\}$ при $\delta_k = 2^{-k-4}$, для которых $B_j^{(k)} \cap G_k \ne \emptyset$. При всех k и $j \in J(k)$ положим

$$\psi_j^k(z) = \varphi_j^{(k)}(z) \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}, \sigma\in J(l)} \varphi_\sigma^{(l)}(z) \Big)^{-1}$$

– совокупность этих функций представляет собой локально-конечное разбиение единицы на $G = \mathbf{C} \setminus X$ (проверить!). Пусть a_j^k –

центр $B_j^{(k)}$ и z_j^k – какая-либо конкретная точка на X, ближайшая к a_j^k. Теперь остается положить $F(z) = f(z)$ при $z \in X$ и

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in J(k)} f(z_j^k) \psi_j^k(z)$$

при $z \in G$. Окончательную проверку оставляем читателю. $\square$

3.9. Пусть K_1 – замкнуто, а K_2 – компакт в $\mathbb{C}$, причем $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Если $f \in C(\mathbb{C}) \cap A(\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2))$, то существуют такие f_1 и f_2 класса $C(\mathbb{C})$, голоморфные вне K_1 и K_2 соответственно, что $f = f_1 + f_2$. Эти f_1 и f_2 определены однозначно с точностью до аддитивных постоянных.

3.10. Пусть K – компакт, $\mathbb{C} \setminus K$ – связно, $f \in A(K)$. Тогда найдется $\{p_n\}$ – последовательность полиномов таких, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ выполнено $p_n^{(k)} \to f^{(k)}$ при $n \to \infty$ равномерно на K.

Лекция №4

Схема аппроксимации. Окончание доказательства теоремы Мергеляна.

Оценка приближения при касании третьего порядка

Доказательство Теоремы 3.3 (Мергеляна). Фиксируем X с указанным условием и f – произвольную непрерывную на X и голоморфную на X^o функцию. Продолжим f по теореме Брауэра до функции $f \in C_0(\mathbb{C})$. Пусть $\omega(t) = \omega_{\mathbb{C}}(f,t)$ – модуль непрерывности f на $\mathbb{C}$ ($\omega(t) \to 0$ при $t \to 0+$).

Мы докажем, что найдется константа $A_0 > 0$ такая, что для любого $\delta > 0$ существует $g \in A(X)$ с условием $\|f - g\|_X < A_0\omega(\delta)$. Затем останется устремить δ к 0.

Отметим, что через $A_0, A_1, A_2, \cdots$ (в доказательстве сей теоремы) будут обозначаться положительные константы, которым, в принципе, можно придать конкретные числовые значения.

Фиксируем произвольное $\delta \in (0,1)$ и построим стандартное 3δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}$ (см. Лемму 1.3). Напомним, что $B_j = B(a_j, 3\delta)$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$,

$$0 \le \varphi_j(z) \le 1,\ \|\overline{\partial}\varphi_j\| \le \frac{A_1}{\delta},\ \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1.$$

При каждом j определим

$$f_j(z) = V_{\varphi_j} f(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{(f(z) - f(\zeta))}{z - \zeta}\overline{\partial}\varphi_j(\zeta)d\Lambda(\zeta) =$$

$$= f(z)\varphi_j(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi_j(\zeta)}{z-\zeta}d\Lambda(\zeta).$$

Пусть $J = \{j \in \mathbb{Z}^2 : B_j \cap \operatorname{supp}(f) \ne \emptyset\}$. Отметим, что при $j \notin J$ все соответствующие $f_j \equiv 0$ и что число элементов в J (коротко $\sharp J$) может иметь порядок $1/\delta^2$ (не выше), что "очень велико"при малом δ.

4.1. Лемма. Каждая функция f_j обладает следующими свойствами:

(а) $f_j \in C(\overline{\mathbb{C}})$, $f_j(\infty) = 0$, $\|f_j\| \le A_2\omega(\delta)$.

(б) f_j голоморфна на X^o и вне $\mathrm{supp}(\varphi_j)$; в частности, если $B_j \subset X^o$, то $f_j \equiv 0$. Наконец, $\sum\limits_{j\in J} f_j \equiv f$.

(в) Пусть

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^j}{(z-a_j)^n}$$

– ряд Лорана f_j вне B_j. Тогда

$$|c_n^j| \le A_2\omega(\delta)(3\delta)^n.$$

Доказательство. Утверждения (а) и (в) вытекают непосредственно из Леммы 3.7 при $r = 3\delta$ с учетом $\omega(3\delta) \le 3\omega(\delta)$. Установим (б). Рассмотрим $\varphi = \sum\limits_{j\in J} \varphi_j$, $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности $\mathrm{supp}(f)$, т.е. $\mathrm{supp}(f) \subset U_1 = (\varphi^{-1}(1))^o$. Согласно (б) Леммы 3.7 , функция

$$f - \sum_{j\in J} f_j = f - f_{(\varphi)}$$

является целой и равной нулю в точке ∞, т.е она – тождественный ноль. □

Пусть $J_1 = \{j \in J : B_j \cap \partial X \neq \emptyset\}$. Если $j \notin J_1$, то либо $B_j \subset X^o$ и $f_j \equiv 0$, либо $B_j \cap X = \emptyset$ и, по Лемме 4.1(б), $f_j \in A(X)$, так что такие f_j не нуждаются в приближении.

4.2. Замечание. Если $\Lambda(\partial X) > 0$, то $\sharp J_1$ имеет в точности порядок $1/\delta^2$, т.е. при приближении функции f с заданной точностью ε на первый взгляд мы должны бы приближать каждую f_j, $j \in J_1$, с точностью порядка $\varepsilon\delta^2$. Следующая лемма А.Г. Витушкина показывает, что достаточно приближать каждую f_j с точностью порядка ε, если дополнительно имеется "касание"третьего порядка на ∞.

4.3. Лемма (О касании третьего порядка). Пусть существует $A_3 > 0$ такая, что для каждого $j \in J_1$ найдется функция $g_j \in A(X) \cap C(\mathbf{C})$, голоморфная вне $B_j^* = B(a_j, 4\delta)$ и с оценкой $\|g_j\| \le A_3\omega(\delta)$; кроме того, предположим, что

$$f_j(z) - g_j(z) = O(\frac{1}{z^3}) \text{ при } z \to \infty$$

(f_j и g_j имеют касание порядка 3 на ∞).

Тогда найдется A_0 (выражающаяся только через A_1, A_2, A_3) с условием

$$\| \sum_{j \in J_1} (f_j - g_j) \| \leq A_0 \omega(\delta).$$

4.4. Замечание. Смысл этой леммы таков: если ее требования выполнены при всех достаточно малых δ (где A_3 не зависит от δ), то $f \in \overline{A(X)}$, поскольку она равномерно на X (с точностью $A_0\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$) приближается функциями

$$g = \sum_{j \in J_1} g_j + \sum_{j \in J \setminus J_1} f_j$$

класса $A(X)$.

Доказательство Леммы 4.3. Ниже подразумевается, что встречающиеся по мере необходимости константы $A_4 - A_8$ выражаются только через A_1, A_2 и A_3.

Разложим каждую g_j (здесь всюду $j \in J_1$) в ряд Лорана вне B_j^* (с центром a_j):

$$g_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^j}{(z - a_j)^n}.$$

Напомним, что

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^j}{(z - a_j)^n}.$$

Условие "касания"(порядка 3) эквивалентно тому, что

$$c_1^j = b_1^j, \quad c_2^j = b_2^j,$$

т.е. у функций f_j и g_j "уравнены"первые два коэффициента Лорана.

Следующие оценки сразу следуют из свойств f_j и g_j:

$$\|f_j - g_j\| \leq A_4 \omega(\delta) \tag{4.1}$$

Теперь покажем, что при $|z - a_j| \geq 4\delta$ (т.е. вне B_j^*) справедливы неравенства:

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leq A_5 \omega(\delta) \frac{\delta^3}{|z - a_j|^3}. \tag{4.2}$$

Действительно, пусть $F_j(z) = (f_j(z) - g_j(z))(z - a_j)^3$, тогда F_j голоморфна вне B_j^*, причем ∞ – устранима для F_j, ибо F_j ограничена вблизи ∞ по условиям "касания". Так как на $\overline{B_j^*}$ очевидным образом (см. (4.1)) выполнено

$$|F_j(z)| \leq A_4\omega(\delta)(4\delta)^3 = A_5\omega(\delta)\delta^3,$$

то по принципу максимума модуля вне B_j^* последняя оценка верна для всех z, что дает (4.2).

Фиксируем z и оценим

$$|\sum_{j\in J_1}(f_j(z) - g_j(z))|.$$

Пусть $J_3 = \{j \in J_1 : |z - a_j| < 4\delta\}$, а при $k = 4, 5, \cdots$ положим $J_k = \{j \in J_1 : k\delta \leq |z - a_j| < (k+1)\delta\}$.

Из элементарной геометрии находим, что $\sharp J_k \leq A_6 k$ при всех $k \geq 3$. Отсюда, а также из (4.1) и (4.2) окончательно получаем:

$$|\sum_{j\in J_1}(f_j(z) - g_j(z))| \leq \sum_{j\in J_3}|f_j(z) - g_j(z)| + \sum_{k=4}^{\infty}\sum_{j\in J_k}|f_j(z) - g_j(z)| \leq$$

$$\leq A_7\omega(\delta) + \sum_{k=4}^{\infty} A_6 k A_5 \omega(\delta)\frac{1}{k^3} = A_0\omega(\delta). \ \square$$

Отметим, что ввиду Замечания 4.4 нам остается для всех достаточно малых $\delta \in (0, 1)$ найти g_j, удовлетворяющие Лемме 4.3
.

Окончание доказательства теоремы Мергеляна

Завершим доказательство Теоремы 3.3.

4.5. Предложение. В условиях Теоремы 3.3 и Леммы 4.3 при любом $\delta < \min\{1, d/3\}$ соответствующие g_j, $j \in J_1$, существуют.

Доказательство. Фиксируем δ $(0 < \delta < \min\{1, d/3\})$, $j \in J_1$. Тогда найдется такое s, что $B_j \cap \Omega_s \neq \emptyset$ и, следовательно, имеется жорданова ломаная $\Gamma_1 : [0, 1] \to \Omega_s \cap B_j^*$ с условием $\mathrm{diam}([\Gamma_1]) = \delta$. Поскольку функция $\mathrm{diam}(\Gamma_1([t_0, t]))$ непрерывна по t $(0 \leq t_0 \leq$

$t \le 1$), нетрудно показать, что существуют t_1 и t_2 ($0 \le t_1 < t_2 \le 1$) такие, что ломаная $\Gamma = \Gamma_1|_{[t_1,t_2]}$ с началом $\Gamma(t_1) = \alpha$ и концом $\Gamma(t_2) = \beta$ удовлетворяет свойствам: $\operatorname{diam}(\Gamma) = |\beta - \alpha| = \delta$ и $\Gamma \subset \Omega_s \cap B_j^*$. В частности, Γ лежит вне X (здесь и далее мы отождествляем Γ и ее носитель).

Положим $G_1 = B(\alpha, \delta) \cap B(\beta, \delta)$, так что $\Gamma \subset \overline{G_1}$; пусть I – замкнутый луч с вершиной в точке α, идущий в направлении $(\alpha - \beta)$. Нетрудно доказать, что в $\mathbb{C} \setminus I$ существует голоморфная ветвь $V_1(z)$ многозначной функции $\sqrt{z - \alpha}$, а в $\mathbb{C} \setminus (I \cup \Gamma)$ –голоморфная ветвь $V_2(z)$ многозначной функции $\sqrt{z - \beta}$.

Определим $h_0(z) = V_1(z)V_2(z)$ в $\mathbb{C} \setminus (I \cup \Gamma)$. Так как при переходе через I функции V_1 и V_2 меняют только свой знак, то h_0 непрерывно продолжается на область $G_2 = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, а из теоремы Мореры сразу следует, что $h_0 \in A(G_2)$. Меняя, при необходимости, знак у V_1, мы дополнительно можем считать, что $h_0(z) = z + o(z)$ при $z \to \infty$. Теперь положим

$$h_1(z) = \frac{8}{\delta}\Big(h_0(z) - z + \frac{\alpha + \beta}{2}\Big) = \frac{8}{\delta}\,\frac{(z-\alpha)(z-\beta) - (z - \frac{\alpha+\beta}{2})^2}{h_0(z) + (z - \frac{\alpha+\beta}{2})} =$$

$$= \frac{8}{\delta}\,\frac{\alpha\beta - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}}{2z + o(z)} = -\frac{(\beta - \alpha)^2}{\delta(z + o(z))}.$$

Следовательно, разложение Лорана функции h_1 вне B_j^* имеет вид:

$$h_1(z) = \frac{\delta e^{i\theta}}{z - a_j} + \frac{d_2}{(z - a_j)^2} + \cdots$$

(напомним, что $|\beta - \alpha| = \delta$, т.е. указанное $\theta \in \mathbb{R}$ существует).

По принципу максимума вне $\overline{G_1}$ (полагаем $h_1 = 0$ на Γ) имеем:

$$\|h_1\| \le \|h_1\|_{\overline{G_1}} \le \frac{8}{\delta}(\delta + \delta) \le 16,$$

откуда

$$|d_2| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z - a_j| = 4\delta} h_1(\zeta)(\zeta - a_j)d\zeta\Big| \le \frac{1}{2\pi}16 \cdot 4\delta \cdot 2\pi 4\delta = 256\delta^2.$$

Пусть $\mu = \operatorname{dist}(X, \Gamma)$, U – открытая $\mu/2$-окрестность ломаной Γ. По теореме Брауэра продолжим h_1 из $\mathbb{C} \setminus U$ до функции $h \in C(\mathbb{C})$

с сохранением sup-нормы (вне B_j^* функция h_1 не меняется). При этом h голоморфна вне $\overline{U}$, т.е в окрестности X.

Наконец, ищем g_j в виде $g_j(z) = \lambda_1 h(z) + \lambda_2 (h(z))^2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$. Напомним, что

$$f_j(z) = \frac{c_1^j}{z - a_j} + \frac{c_2^j}{(z - a_j)^2} + \cdots ,$$
$$|c_1^j| \leq 3A_2\delta\omega(\delta),\ |c_2^j| \leq 9A_2\delta^2\omega(\delta).$$

Нужные условия "касания"имеют вид:

$$c_1^j = \lambda_1 \delta e^{i\theta}, \quad c_2^j = \lambda_1 d_2 + \lambda_2 \delta^2 e^{2i\theta},$$

откуда λ_1 и λ_2 однозначно находятся, причем очевидны оценки:

$$|\lambda_1| \leq A_8\omega(\delta), \quad |\lambda_2| \leq A_8\omega(\delta).$$

Таким образом $\|g_j\| \leq A_3\omega(\delta)$ и Теорема 3.3 полностью доказана. □

4.6. Доказать теорему Гартогса-Розенталя: если $\Lambda(K) = 0$, то $C(K) = R(K)$.

4.7. Привести пример компакта K с условиями $K^\circ = \emptyset$ и $C(K) \neq R(K)$.

4.8. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Доказать, что оператор Витушкина $V_\varphi : f \to V_\varphi f$ (действующий по формуле (3.1)) непрерывен в пространствах $\mathrm{Lip}_\tau(\mathbb{C})$ $(\tau \in (0,1))$, $C^1(\mathbb{C})$, $L^p_{loc}(\mathbb{C})$ при $p \geq 1$.

Лекция №5

Индекс кривой относительно точки. Доказательство интегральной теоремы Коши.

Приращение аргумента вдоль пути. Индекс пути и кривой относительно точки.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ непусто. Будем говорить, что Φ – *многозначная функция* на E, если для любого $z \in E$ объект $\Phi(z)$ представляет собой некоторое *непустое* подмножество в $\mathbb{C}$ (для однозначной функции множество $\Phi(z)$ – одноточечно). Иногда вместо $\mathbb{C}$ берется множество $\overline{\mathbb{C}}$.

5.1. Определение. Пусть $\emptyset \neq E_1 \subset E$. Функция $f : E_1 \to \mathbb{C}$ называется *однозначной ветвью* многозначной функции Φ на E_1, если для любого $z \in E_1$ имеем $f(z) \in \Phi(z)$.

Скажем, что Φ *распадается* на однозначные ветви $\{f_j\}_{j\in J}$ над E_1, если $\Phi(z) = \cup_{j\in J}\{f_j(z)\}$ при каждом $z \in E_1$.

5.2. Теорема. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – путь. Тогда многозначная функция $\operatorname{Arg}(\gamma(t))$ распадается *над всем* $[\alpha, \beta]$ на счетное множество *непрерывных* ветвей $\{\varphi_j(t)\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Любые две из этих ветвей отличаются друг от друга на аддитивную постоянную, кратную 2π.

Доказательство. Нетрудно вывести формулу $\operatorname{Arg}(z)$ через x и y и убедиться, что над каждым кругом $B(a, |a|)$, $a \neq 0$, многозначная функция $\operatorname{Arg}(z)$ распадается на счетное число непрерывных ветвей, отличающихся друг от друга на аддитивные постоянные, кратные 2π. Пользуясь последним замечанием и равномерной непрерывностью γ на $[\alpha, \beta]$, мы можем разбить отрезок $[\alpha, \beta]$ на равные достаточно малые отрезки, на каждом из которых требуемая непрерывная ветвь заведомо имеется (надо взять композицию γ и подходящей непрерывной ветви $\operatorname{Arg}(z)$). Остается надлежащим образом “склеить"эти ветви. Аккуратное доказательство предлагаем провести читателю. $\square$

5.3. Определение. В условиях последней теоремы, величина $\varphi_j(\beta) - \varphi_j(\alpha)$ (не зависящая от j) называется *приращением (полярного) аргумента* вдоль пути γ и обозначается $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z)$.

5.4. Упражнение. Функция $\Delta_{(\gamma-w)} \operatorname{Arg}(z)$ непрерывна по w вне $[\gamma]$.

Здесь и далее $(\gamma - w)(t) = \gamma(t) - w$, $t \in [\alpha, \beta]$.

5.5. Определение. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – *замкнутый* путь, т.е. $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. При $a \notin [\gamma]$ величина

$$\operatorname{ind}_\gamma(a) = (2\pi)^{-1} \Delta_{(\gamma-a)} \operatorname{Arg}(z)$$

называется *индексом* пути γ относительно точки a.

Пусть E_1 и E_2 – непустые множества, а γ_1 и γ_2 – пути в $\mathbb{C}$, определенные на $[\alpha, \beta]$. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями:

$$\operatorname{dist}(E_1, E_2) = \inf\{|z_1 - z_2| \,:\, z_1 \in E_1, z_2 \in E_2\},$$

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max\{|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \,:\, t \in [\alpha, \beta]\}.$$

5.6. Лемма. Пусть γ_1 и γ_2 – замкнутые пути в $\mathbb{C}$, определенные на $[\alpha, \beta]$. Пусть $a \notin [\gamma_1]$, причем $d(\gamma_1, \gamma_2) < \operatorname{dist}(a, [\gamma_1])$. Тогда $\operatorname{ind}_{\gamma_1}(a) = \operatorname{ind}_{\gamma_2}(a)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – некоторые непрерывные на $[\alpha, \beta]$ ветви многозначных функций $\operatorname{Arg}(\gamma_1(t)-a)$ и $\operatorname{Arg}(\gamma_2(t)-a)$ соответственно. Из условия леммы вытекает, что функция $\varphi(t)-\psi(t)$ не принимает на $[\alpha, \beta]$ значений $\{\pi+2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Нужное утверждение вытекает из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции ($\varphi - \psi$ на $[\alpha, \beta]$). $\square$

5.7. Следствие. Пусть γ – *замкнутый* путь в $\mathbb{C}$. Тогда функция $\operatorname{ind}_\gamma(w)$ постоянна (по w) в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ и принимает только целочисленные значения.

5.8. Упражнение. Доказать, что $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z)$ и $\operatorname{ind}_a(\gamma)$ *не меняются* при замене γ на любой *эквивалентный* путь, так что $\Delta_{\{\gamma\}} \operatorname{Arg}(z)$ и $\operatorname{ind}_{\{\gamma\}}(a)$ определены корректно для *кривой* $\{\gamma\}$.

5.9. Определение.
(1) Пусть Γ – кривая, $\gamma \in \Gamma$, γ определен на $[\alpha, \beta]$. Положим $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha+\beta-t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Кривая $\Gamma^- = \{\gamma^-\}$ называется *противоположной к* Γ (имеющей противоположную *ориентацию*).
(2) Пусть Γ_1 и Γ_2 – кривые, причем конец Γ_1 *совпадает* с началом Γ_2. Возьмем какие-либо $\gamma_1 \in \Gamma_1$ и $\gamma_2 \in \Gamma_2$, *определенные на*

$[0,1]$. Кривая $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (*объединение* Γ_1 и Γ_2, порядок важен!) определяется представителем

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0,1/2] \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

5.10. Замечание. По индукции определяется объединение нескольких кривых, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n$. Нетрудно доказывается корректность введенных определений.

5.11. Пусть Γ_1 – замкнутая жорданова кривая, а Γ_2 – жорданова кривая с условием $[\Gamma_2] \subset [\Gamma_1]$ и “сонаправленная"с Γ_1. Дать корректное определение *кривой* $\Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ (это будет одна из двух возможных *жордановых* кривых с носителем, равным *замыканию* множества $[\Gamma_1] \setminus [\Gamma_2]$).

5.12. Если кривые Γ, Γ_1 и Γ_2 не проходят через 0 и кривая $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ определена, то
(1)$\Delta_{\Gamma^-} \operatorname{Arg}(z) = -\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}(z)$;
(2)$\Delta_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \operatorname{Arg}(z) = \Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg}(z) + \Delta_{\Gamma_2} \operatorname{Arg}(z)$.

5.13. Пусть $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ – путь, $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ ($\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \beta$) – какое-либо *разбиение* (порядка N) отрезка $[\alpha,\beta]$. Величина $\ell(\gamma,T) := \sum\limits_{n=1}^{N} |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})|$ представляет собой длину соответствующей *вписанной ломаной.*

5.14. Определение. Путь γ – *спрямляем*, если $\ell(\gamma) := \sup\{\ell(\gamma,T)\} < +\infty$, где указанный sup берется по всем T (любого порядка). Значение $\ell(\gamma)$, конечное или бесконечное, называется *длиной* пути γ.

Пусть $\lambda(T) := \max\limits_{1 \le n \le N} \{\Delta t_n\}$ – *диаметр* разбиения T, где $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$.

5.15. Упражнение. Доказать, что $\ell(\gamma) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \ell(\gamma,T)$.

5.16. Легко доказать, что если $\gamma_1 \sim \gamma_2$ (т.е. пути γ_1 и γ_2 эквивалентны), то они спрямляемы (или нет) *одновременно*, причем $\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2)$. Таким образом, корректно определяется понятие *спрямляемой кривой* и ее *длины.* Длина кривой Γ обозначается через $\ell(\Gamma)$.

5.17. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$. Через $D(\Gamma)$ и $\Omega(\Gamma)$ далее обозначаются соответственно ограниченная и неограниченная компоненты дополнения к $[\Gamma]$ (см. *Теорему Жордана*). Будем говорить, что $D(\Gamma)$ – *жорданова область*, ограниченная *кривой* Γ (отождествляя, где это не приводит к недоразумениям, Γ и $[\Gamma]$).

5.18. Теорема. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$. Тогда:

(1) найдется $p \in \{1, 2\}$ такое, что $\operatorname{ind}_\Gamma(w) = (-1)^p$ при всех $w \in D(\Gamma)$;

(2) $\operatorname{ind}_\Gamma(w) = 0$ для любого $w \in \Omega(\Gamma)$.

5.19. План доказательства Теоремы 5.18. Фиксируем произвольный путь γ из Γ. Достаточно установить требуемое в теореме для γ вместо Γ.

Утверждение (2) вытекает из Следствия 5.7 и того простого факта, что $\operatorname{ind}_\gamma(w) = 0$ для достаточно "больших"w.

Для доказательства (1) предположим сначала, что γ – замкнутая жорданова ломаная. Выберем произвольную точку b внутри некоторого отрезка I ломаной $[\gamma]$ и пусть ν ($\nu \in \mathbb{C}$, $|\nu| = 1$) как вектор в $\mathbb{R}^2$ является вектором единичной нормали к I в точке b, направленным "влево"относительно движения по γ. Из Упражнения 5.4 (примененного к кривой $\{\gamma\} \setminus I$ и $w = b \pm t\nu$) и элементарных геометрических соображений (для I и $w = b \pm t\nu$, где $t > 0$ достаточно мало) получаем:

$$\lim_{t \to 0+} (\operatorname{ind}_\gamma(b + t\nu) - \operatorname{ind}_\gamma(b - t\nu) = 1 \,.$$

Таким образом, из Следствия 5.7 получаем, что $|\operatorname{ind}_w(\gamma)| = 1$ в $D(\gamma)$. Более того, нетрудно видеть, что $\operatorname{ind}_\gamma(w) = 1$ в $D(\gamma)$, если и только если при движении по I (вдоль γ) область $D(\gamma)$ остается "слева".

Общий случай вытекает из Леммы 3 и Раздела 3 *доказательства теоремы Жордана.*

5.20. Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – гомеоморфный образ отрезка. Существуют ровно две жордановы *кривые* Γ_1 и Γ_2 с условиями $[\Gamma_1] = [\Gamma_2] = E$, причем $\Gamma_1 = \Gamma_2^-$.

Это утверждение доказать не сложно. Следующее, более содержательное утверждение, выводится из Теоремы 5.18.

5.21. Следствие. Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – гомеоморфный образ окружности, a – произвольная точка из E. Существует единственная замкнутая жорданова кривая $\Gamma(a)$ с концами в точке a, удовлетворяющая условиям $[\Gamma(a)] = E$ и

$$\mathrm{ind}_{\Gamma(a)}(w) = \begin{cases} 1\ , & w \in D(\Gamma(a))\,, \\ 0\ , & w \in \Omega(\Gamma(a))\,. \end{cases}$$

5.22. Определение. Будем при этом говорить, что $\Gamma(a)$ *ориентирована положительно* относительно ограниченной ею области D (или что D остается *слева* при “движении"вдоль $\Gamma(a)$).

Ориентированной границей указанной области D называется *класс* кривых

$$\partial^+ D \ = \ \{\Gamma(a)\,|\, a \in \partial D\}.$$

5.23. Замечание. Отметим, что, в отличие от *топологической* границы ∂D, ориентированная (точнее *положительно ориентированная*) граница $\partial^+ D$ будет использоваться в основном при интегрировании. Ясно, что для любой функции $f\,:\,\partial D \to \mathbb{C}$ интегралы $\int_{\Gamma(a)} f(z)dz$ существуют (или нет) одновременно для всех $a \in \partial D$. В случае существования, значения этих интегралов совпадают и определяют $\int_{\partial^+ D} f(z)dz$.

Нам потребуется также *отрицательно ориентированная* граница жордановой области, $\partial^- D \ = \ \{\Gamma(a)^-\,|\, a \in \partial D\}$, и интеграл вдоль нее: $\int_{\partial^- D} f(z)dz = -\int_{\partial^+ D} f(z)dz$.

5.24. Теперь определим *ориентированную границу* произвольной *допустимой* области и интеграл *вдоль нее*.

Пусть $D_1, \ldots, D_S$ – жордановы области в $\mathbb{C}$ ($S > 1$ – натурально) с ориентированными границами $\partial^+ D_1, \ldots, \partial^+ D_S$ соответственно. Предположим, что *замыкания* областей $D_2, \ldots, D_S$ попарно не пересекаются и целиком содержатся внутри D_1. Можно доказать, что множество $D = D_1 \setminus (\cup_{s=2}^{s=S} \overline{D_s})$ связно, т.е. *всегда* является областью (мы докажем это позже, как элементарное следствие из теоремы Римана о конформном отображении).

5.25. Определение. Указанные множества D будем называть *допустимыми областями ранга* S. Ранг жордановой области считается равным 1.

Из теоремы Жордана следует, что $\partial D = \cup_{s=1}^{S} \partial D_s$, поэтому указанное представление множества D (раз уж существует) единственно с точностью до порядка нумерации областей D_s, $s \geq 2$. Следовательно, определение ранга корректно.

В приведенных обозначениях дадим следующее

5.26. Определение. (Положительно) *ориентированной* границей допустимой области D ранга $S \geq 2$ называется совокупность (*цепь*) границ:

$$\partial^+ D = \{\partial^+ D_1, \partial^- D_2, \ldots, \partial^- D_S\}\,.$$

Для $f : \partial D \to \mathbb{C}$ интеграл от f вдоль (или *по*) $\partial^+ D$ определяется по формуле:

$$\int\limits_{\partial^+ D} f dz = \int\limits_{\partial^+ D_1} f dz - \sum_{s=2}^{S} \int\limits_{\partial^+ D_s} f dz\,,$$

при условии, что *все* интегралы справа существуют.

5.27. Упражнение. Дать определение *спрямляемости и длины* границы, $\ell(\partial D)$, допустимой области D.

5.28. Теорема (интегральная теорема Коши). Пусть D – допустимая область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей, $f \in A(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = 0\,.$$

5.29. План доказательства Теоремы 5.28. Теорема 3.3 Мергеляна и Теорема 1.7 Рунге (доказательство её части (1) с помощью Леммы 2.1) сводят доказательство Теоремы 5.28 к случаю, когда $f(z) = 1/(z-a)$, где $a \notin \overline{D}$.

Остается сделать следующее упражнение (доказываемое в общем курсе комплексного анализа).

5.30. Упражнение. Пусть γ – замкнутый спрямляемый путь и $a \notin [\gamma]$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = \operatorname{ind}_\gamma(a)\,.$$