Московский государственный
университет

имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

П.В. Парамонов

М о с к в а   2000 год

Парамонов П.В.

Избранные главы комплексного анализа

Учебное пособие. — Издательство механико-математического факультета МГУ, Москва, 2000 г. — 95 стр.

В настоящем пособии приведены подробные доказательства классических результатов комплексного анализа: теорем Коши, принципа аргумента, теорем Римана, Каратеодори (для жордановых областей) и Рунге в их современном "окончательном" виде. Центральным во всех отношениях является доказательство теоремы Мергеляна, основанное на локализационной технике Витушкина. Из топологии (кроме стандартных элементарных фактов) мы опираемся на известную теорему Жордана и существенно используем понятие индекса произвольного замкнутого пути относительно точки.
Для студентов, аспирантов и сотрудников математических факультетов университетов.

Содержание

Лекция 9.
Свойства локализационного оператора Витушкина. Теорема Брауэра о продолжении непрерывной функции.

Лекция 10.
Схема аппроксимации: разбиение единицы и оценочная лемма при касании третьего порядка. Завершение доказательства теоремы Мергеляна (построение g_j).

Лекция 11.
Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Обратный принцип соответствия границ. Критерии однолистности и локальной обратимости. Теорема Гурвица и ее следствия.

Лекция 12.
Принцип симметрии Римана-Шварца. Пространства функций и функционалы. Доказательство теоремы Римана о конформном отображении.

Лекция 13.
Доказательство теоремы Каратеодори для жордановых областей.

Лекция 14.
Гомотопные пути в области. Эквивалентные определения односвязности области в $\mathbb{C}$. Допустимые области (доказательство связности). Другие примеры применения основных теорем теории конформных отображений.

Предисловие

В настоящем пособии предпринята попытка изложить подробные доказательства базовых теорем “обычного” университетского курса комплексного анализа в их наиболее общих естественных формулировках.

Из топологии мы “постулируем” только классическую теорему Жордана, все остальные необходимые в курсе топологические факты (например, эквивалентность различных определений односвязности) доказываются или (в отдельных несложных случаях) предлагаются в виде упражнений. Понятия односвязности по Жордану и индекса произвольного замкнутого пути относительно точки играют существенную роль.

Второй, центральной точкой опоры нашего курса является теорема Мергеляна о полиномиальных аппроксимациях (как правило, она не входит в программы обычных курсов ТФКП). Предлагаемое здесь доказательство этой теоремы основано на локализационной технике Витушкина, ставшей уже классической и знакомство с которой представляется весьма полезным. Интегральная теорема Коши и принцип аргумента в их “окончательном” виде совсем не так тривиальны, как зачастую излагаются. Теорема Мергеляна дает возможность провести безупречные доказательства этих теорем и их следствий.

Некоторые разделы курса, “стандартные"по модулю теорем Коши, опущены. Это ряды Тейлора и Лорана, нули голоморфных функций, особые точки однозначного характера и вычеты. К сожалению, вне рассмотрения также осталась теория аналитического продолжения по Вейерштрассу, поэтому при доказательстве теоремы Римана мы пользуемся подходом Гурсы, позволяющим обойтись без теоремы о монодромии. В завершение приводится доказательство теоремы Каратеодори для жордановых областей и рассматриваются примеры применения основных теорем теории конформных отображений к задачам топологии на плоскости, теории гармонических функций в $\mathbb{R}^2$ (задаче Дирихле), к доказательствам других теорем курса ТФКП.

Пособие возникло на основе общих и специальных курсов лекций по комплексному анализу, прочитанных автором за 1994-2000 годы на механико-математическом факультете МГУ. *Данный* материал представляет собой *семестровый* специальный курс лекций (для студентов пятого курса), читаемый от кафедры

Теории функций и функционального анализа в осеннем семестре 2000 года.

В качестве дополнительной литературы назван только легко доступный учебник Б.В. Шабата: “Комплексный анализ”, ч. 1, “Наука”, 1976. По ходу изложения дается большое количество упражнений.

Есть надежда, что этот курс принесет определенную пользу при подготовке студентов и аспирантов математиков к экзаменам по специальности. Работа также рассчитана на преподавателей и научных сотрудников, специализирующихся в области комплексного анализа.

Автор весьма признателен профессору Е.П. Долженко за обсуждение работы и ряд ценных советов. Искреннюю благодарность выражаю доценту А.В. Домрину, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему множество важных замечаний, способствовавших ее улучшению.

Лекция №1

Поле $\mathbb{C}$. Основные топологические понятия

Поле $\mathbb{C}$.

По определению, $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, где i – символ ($z = x + iy$ – *алгебраическая форма* комплексного числа z, $x = \operatorname{Re} z$ – его *действительная часть*, $y = \operatorname{Im} z$ – *мнимая часть*) и введены следующие *операции*:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

при условии, что $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$.

1.1. Упражнение. Проверить, что $\mathbb{C}$ – поле, его подполе $\{x + i0 \mid x \in \mathbb{R}\}$ изоморфно $\mathbb{R}$ (далее они отождествляются), $i^2 = (0 + i1)^2 = -1 + i0 = -1$.

Нулем и *единицей* здесь являются $0 = 0 + i0$ и $1 = 1 + i0$ соответственно, а при $z \neq 0$ *обратный элемент* числа z находится по формуле:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

где $\overline{z} = x - iy$ – число, *сопряженное* к $z = x + iy$.

1.2. Тригонометрическая форма z.

При $z = x + iy$ положим $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – *модуль* числа z ($r = |z|$ – полярный радиус, $z\overline{z} = r^2$). Если $z \neq 0$, то существует единственное φ_0 в промежутке $(-\pi, \pi]$ ($\varphi_0 = \arg(z)$ – *главное значение (полярного) аргумента* z) с условиями $x = r\cos(\varphi_0)$, $y = r\sin(\varphi_0)$. Наконец, вводится $\operatorname{Arg}(z) = \{\varphi_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ – *совокупный (полярный) аргумент* числа z. При любом $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (*тригонометрическая форма* z).

Полезно заметить, что если $z = x + iy$ и $x > 0$ (z лежит в *правой* полуплоскости), то $\arg(z) = \operatorname{arctg}(y/x)$.

Элементарно проверяется, что если $\varphi_{1,2} \in \operatorname{Arg}(z_{1,2})$, $r_{1,2} = |z_{1,2}|$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отсюда вытекает

1.3. Формула Муавра. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, то

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

1.4. Корни степени n **(**$\sqrt[n]{z}$**).**

Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$. По определению, $w \in \sqrt[n]{z} \Longleftrightarrow w^n = z$.

Из (1.1) следует, что при $z \neq 0$ совокупность $\sqrt[n]{z}$ состоит из n элементов $\{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$, находящихся по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{z}_{(k)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

$k = 0, \cdots, n-1$. Ясно, что $\sqrt[n]{0} = \{0\}$.

Топология в $\mathbb{C}$

В $\mathbb{C}$ вводится метрика $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ такая же, как в $\mathbb{R}^2$ (так что как *метрические* пространства они тождественны). Предполагаются известными определения *открытых, замкнутых, ограниченных, компактных, связных* множеств в метрическом пространстве, определения *предела* последовательности и функции (в точке по множеству), *непрерывности* функции (в точке множества и на множестве). Тем не менее, ряд важных понятий мы напомним.

1.5. Определение. *Окрестностью* точки a в $\mathbb{C}$ называется всякое *открытое* множество, содержащее a.

1.6. Определение. Подмножество E в $\mathbb{C}$ называется *связным*, если нельзя найти открытые множества U_1 и U_2 со следующими свойствами: $U_1 \cap E \neq \emptyset$, $U_2 \cap E \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $E \subset U_1 \cup U_2$.

1.7. Определение. *Областью* (в $\mathbb{C}$) называется всякое (не пустое) открытое связное множество в $\mathbb{C}$.

Простейшим примером области является *открытый круг* $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$.

1.8. Упражнение. Пусть G – область в $\mathbb{C}$. Если $E \subset G$ – не пусто, *открыто и замкнуто в* G, то $E = G$.

1.9. Определение. Произвольное непрерывное *отображение* γ какого-либо отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ называется *путем* (в $\mathbb{C}$), а множество $[\gamma] = \gamma([\alpha, \beta])$ – его *носителем*.

1.10. Определение. Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *линейно-связным*, если для любых $z_1 \in E$ и $z_2 \in E$ существует путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to E$ с условием $\gamma(\alpha) = z_1$, $\gamma(\beta) = z_2$.

Нетрудно доказать, что всякая область в $\mathbb{C}$ линейно-связна.

1.11. Определение. Два пути $\gamma_{1,2} : [\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}] \to \mathbb{C}$ называются *эквивалентными*, если существует непрерывная строго возрастающая функция ψ из $[\alpha_1, \beta_1]$ на $[\alpha_2, \beta_2]$ с условием $\gamma_1(t) = \gamma_2(\psi(t))$ для любого $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. (Для краткости пишем $\gamma_1 \sim \gamma_2$).

1.12. Определение. Класс эквивалентных путей называют (непрерывной) *кривой.*

При этом корректно определен *носитель кривой.* Обозначения: $\Gamma = \{\gamma\}$ – кривая с представителем γ, $[\Gamma] = [\gamma]$ – ее носитель.

1.13. Определение. Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется *жордановым*, если он взаимно однозначен на $[\alpha, \beta]$ (т.е.$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$).

1.14. Определение. Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется *замкнутым жордановым*, если $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при всех $t_1 < t_2$ из $[\alpha, \beta)$, но $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Носитель всякого жорданова пути гомеоморфен отрезку $[0, 1]$, а замкнутого жорданова пути – единичной окружности $\{|z| = 1\}$.

1.15. Определение. *Жорданова кривая* – класс эквивалентности жордановых путей. *Замкнутая жорданова кривая* – класс эквивалентности замкнутых жордановых путей.

Следующая весьма сложная топологическая теорема имеет принципиальное значение в анализе.

1.16. Теорема (Жордана).

1. Пусть Γ – жорданова кривая. Тогда $\Omega = \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ *связно* и $\partial\Omega = [\Gamma]$.

2. Пусть Γ – *замкнутая* жорданова кривая. Тогда множество $\mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ *не связно* – оно состоит из *двух* непересекающихся компонент (областей): ограниченной – D и неограниченной – Ω, причем $\partial D = \partial\Omega = [\Gamma]$.

Через ∂E обозначается *граница*, через $\overline{E}$ – *замыкание*, а через E^o – *внутренность* множества E в $\mathbb{C}$. *Компонентой связности* множества E в $\mathbb{C}$ называется всякое связное подмножество из E, которое не содержится ни в каком большем связном подмножестве в E. Всякое *открытое* множество распадается на конечное или счетное число своих компонент связности, являющихся (попарно непересекающимися) областями.

Считаем также, что читатель знаком с конструкцией *сферы Римана* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – стандартной одноточечной компактификацией $\mathbb{C}$ (ее *метризуемая* топология *согласована* с топологией $\mathbb{C}$). В случае, если E неограниченно, или $\infty \in E \subset \overline{\mathbb{C}}$, мы каждый раз конкретизируем: какие из упомянутых выше топологических понятий определяются *относительно топологии* в $\overline{\mathbb{C}}$.

Ветви многозначных функций. Приращение аргумента вдоль пути. Индекс пути

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ непусто. Будем говорить, что Φ – *многозначная функция* на E, если для любого $z \in E$ объект $\Phi(z)$ представляет собой некоторое *непустое* подмножество в $\mathbb{C}$ (для однозначной функции множество $\Phi(z)$ – одноточечно). Иногда вместо $\mathbb{C}$ берется множество $\overline{\mathbb{C}}$.

1.17. Определение. Пусть $\emptyset \neq E_1 \subset E$. Функция $f : E_1 \to \mathbb{C}$ называется *однозначной ветвью* многозначной функции Φ на E_1, если для любого $z \in E_1$ имеем $f(z) \in \Phi(z)$.

Скажем, что Φ *распадается* на однозначные ветви $\{f_j\}_{j \in J}$ над E_1, если $\Phi(z) = \cup_{j \in J}\{f_j(z)\}$ при каждом $z \in E_1$.

1.18. Теорема. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – путь. Тогда многозначная функция $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ распадается *над всем* $[\alpha, \beta]$ на счетное множество *непрерывных* ветвей $\{\varphi_j(t)\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Любые две из этих ветвей отличаются друг от друга на аддитивную постоянную, кратную 2π.

Доказательство. Нетрудно вывести формулу $\mathrm{Arg}(z)$ через x и y и убедиться, что над каждым кругом $B(a, |a|)$, $a \neq 0$, многозначная функция $\mathrm{Arg}(z)$ распадается на счетное число непрерывных ветвей, отличающихся друг от друга на аддитивные постоянные, кратные 2π. Пользуясь последним замечанием и равномерной непрерывностью γ на $[\alpha, \beta]$, мы можем разбить отрезок $[\alpha, \beta]$ на равные достаточно малые отрезки, на каждом из которых требуемая непрерывная ветвь заведомо имеется (надо взять композицию γ и подходящей непрерывной ветви $\mathrm{Arg}(z)$). Остается надлежащим образом “склеить"эти ветви. Аккуратное доказательство предлагаем провести читателю. □

1.19. Определение. В условиях последней теоремы, величина $\varphi_j(\beta) - \varphi_j(\alpha)$ (независящая от j) называется *приращением (полярного) аргумента* вдоль пути γ и обозначается $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z)$.

1.20. Упражнение. Функция $\Delta_{(\gamma-w)} \operatorname{Arg}(z)$ непрерывна по w вне $[\gamma]$.

Здесь и далее $(\gamma - w)(t) = \gamma(t) - w\,,\ t \in [\alpha, \beta]$.

1.21. Определение. Пусть $\gamma\ :\ [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – *замкнутый* путь, т.е. $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. При $a \notin [\gamma]$ величина

$$\operatorname{ind}_a(\gamma) = (2\pi)^{-1}\Delta_{(\gamma-a)} \operatorname{Arg}(z)$$

называется *индексом* пути γ относительно точки a.

Пусть E_1 и E_2 – непустые множества, а γ_1 и γ_2 – пути в $\mathbb{C}$, определенные на $[\alpha, \beta]$. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями:

$$\operatorname{dist}(E_1, E_2) = \inf\{|z_1 - z_2| \,|\, z_1 \in E_1, z_2 \in E_2\},$$

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max\{|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|\ :\ t \in [\alpha, \beta]\}.$$

1.22. Лемма. Пусть γ_1 и γ_2 – *замкнутые* пути в $\mathbb{C}$, определенные на $[\alpha, \beta]$. Пусть $a \notin [\gamma_1]$, причем $d(\gamma_1, \gamma_2) < \operatorname{dist}(a, [\gamma_1])$. Тогда $\operatorname{ind}_a(\gamma_1) = \operatorname{ind}_a(\gamma_2)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – некоторые непрерывные на $[\alpha, \beta]$ ветви многозначных функций $\operatorname{Arg}(\gamma_1(t) - a)$ и $\operatorname{Arg}(\gamma_2(t) - a)$ соответственно. Из условия леммы вытекает, что функция $\varphi(t) - \psi(t)$ не принимает на $[\alpha, \beta]$ значений $\{\pi + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Нужное утверждение вытекает из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции ($\varphi - \psi$ на $[\alpha, \beta]$). □

1.23. Следствие. Функция $\operatorname{ind}_w(\gamma)$ постоянна (по w) в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ и принимает только целочисленные значения.

1.24. Упражнение. Доказать, что $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z)$ и $\operatorname{ind}_a(\gamma)$ *не меняются* при замене γ на любой *эквивалентный* путь, так что $\Delta_{\{\gamma\}} \operatorname{Arg}(z)$ и $\operatorname{ind}_a(\{\gamma\})$ определены корректно для *кривой* $\{\gamma\}$.

Действия с кривыми.

1.25. Определение.
(1) Пусть Γ – кривая, $\gamma \in \Gamma$, γ определен на $[\alpha, \beta]$. Положим $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha+\beta-t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Кривая $\Gamma^- = \{\gamma^-\}$ называется *противоположной к* Γ (имеющей противоположную *ориентацию*).
(2) Пусть Γ_1 и Γ_2 – кривые, причем конец Γ_1 *совпадает* с началом Γ_2. Возьмем какие-либо $\gamma_1 \in \Gamma_1$ и $\gamma_2 \in \Gamma_2$, *определенные на* $[0, 1]$. Кривая $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (*объединение* Γ_1 и Γ_2, порядок важен!) определяется представителем

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

1.26. Замечание. По индукции определяется объединение нескольких кривых, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$. Нетрудно доказывается корректность введенных определений.

1.27. Пусть Γ_1 – замкнутая жорданова кривая, а Γ_2 – жорданова кривая с условием $[\Gamma_2] \subset [\Gamma_1]$ и “сонаправленная"с Γ_1. Дать корректное определение *кривой* $\Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ (это будет одна из двух возможных *жордановых* кривых с носителем, равным *замыканию* множества $[\Gamma_1] \setminus [\Gamma_2]$).

1.28. Если кривые Γ, Γ_1 и Γ_2 не проходят через 0 и кривая $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ определена, то
(1)$\Delta_{\Gamma^-} \operatorname{Arg}(z) = -\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}(z)$;
(2)$\Delta_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \operatorname{Arg}(z) = \Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg}(z) + \Delta_{\Gamma_2} \operatorname{Arg}(z)$.

1.29. Доказать эквивалентность понятий связности и линейной связности для открытых множеств в $\mathbb{C}$.

1.30. Привести пример линейно связного компакта в $\mathbb{C}$, не являющегося носителем никакого пути.

1.31. Пусть K – компакт в $\mathbb{C}$ и $f : K \to \mathbb{C}$ – непрерывна и взаимнооднозначна на K. Тогда $f(K)$ – компакт, а f – гомеоморфизм K и $f(K)$. Важное следствие: носитель всякого жорданова пути в $\mathbb{C}$ гомеоморфен отрезку, а носитель всякого замкнутого жорданова пути в $\mathbb{C}$ гомеоморфен окружности.

1.32. Построить жорданов путь в $\mathbb{C}$, носитель которого имеет положительную плоскую меру Лебега.

Лекция №2

$\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$-дифференцируемость и конформность функций комплексного переменного.

Пусть $E \subset \mathbb{C}_z$ не пусто, $f : E \to \mathbb{C}_w$, $w = u + iv$.

2.1. Определение. Пусть z_0 – предельная точка E. По определению, $\lim\limits_{E, z \to z_0} f(z) = w_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из условий $0 < |z - z_0| < \delta$, $z \in E$, следует $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Если $z_0 \in (E \cup \{z_0\})^o$, то пишем $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, опуская E.

2.2. Определение. Функция $f(z)$ *непрерывна* в точке z_0 (по множеству E), если $z_0 \in E$ и выполняется одно из двух: либо z_0 – *изолированная* (т.е. не предельная) точка E, либо z_0 – предельная точка E и $\lim\limits_{E, z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Положим $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$.

2.3. Упражнение. Доказать, что $\lim\limits_{E, z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$ если и только если $\lim\limits_{E, z \to z_0} u(x, y) = u_0$ и $\lim\limits_{E, z \to z_0} v(x, y) = v_0$.

2.4. Определение. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Говорят, что f является $\mathbb{R}$-*дифференцируемой* в точке z_0, если $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y)$ и $\operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции двух переменных.

Положим $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Условие $\mathbb{R}$-дифференцируемости f в точке z_0 означает, что

$$\begin{aligned}
\Delta f|_{z_0}(\Delta z) &:= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u|_{z_0}(\Delta x, \Delta y) + i\Delta v|_{z_0}(\Delta x, \Delta y) \\
&= u'_x|_{z_0}\Delta x + u'_y|_{z_0}\Delta y + o(\Delta z) + i(v'_x|_{z_0}\Delta x + v'_y|_{z_0}\Delta y + o(\Delta z)) \\
&= (u'_x + iv'_x)|_{z_0}\Delta x + (u'_y + iv'_y)|_{z_0}\Delta y + o(\Delta z) \\
&=: \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{z_0}\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{z_0}\Delta y + o(\Delta z)
\end{aligned}$$

при $\Delta z \to 0$. Напомним, что $g(z) = o(h(z))$ при $z \to z_0$, если $h(z) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки z_0, причем $\lim\limits_{z \to z_0} g(z)/h(z) = 0$.

2.5. Определение. Выражение

$$df|_{z_0}(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{z_0} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{z_0} \Delta y,$$

представляющее собой *главную линейную часть приращения* f в точке z_0, называется *дифференциалом* функции f в точке z_0.

Отметим, что df есть функция *двух* комплексных переменных z_0 и Δz, а при *фиксированном* z_0 она представляет собой $\mathbb{R}$-*линейную* функцию (т.е. функцию вида $a\Delta x + b\Delta y$, где $a, b \in \mathbb{C}$ – постоянны).

Согласно этой (стандартной) терминологии, имеем: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy = \overline{dz}$, откуда $dx = (dz + d\overline{z})/2$, $dy = (dz - d\overline{z})/(2i)$.

Окончательно получаем:

$$df|_{z_0}(dz) = \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z_0} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\bigg|_{z_0} d\overline{z},$$

где, по определению,

$$\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_{z_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\bigg|_{z_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_{z_0}.$$

2.6. Упражнение. Пусть $df|_{z_0}(dz) = adz + bd\overline{z}$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда $a = (\partial f/\partial z)|_{z_0}$ и $b = (\partial f/\partial \overline{z})|_{z_0}$ находятся однозначно.

2.7. Замечание. Из анализа хорошо известно, что если u'_x, u'_y, v'_x, v'_y существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в самой этой точке, то u и v – дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и, следовательно, f – $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке z_0.

2.8. Определение. $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке z_0 функция f называется $\mathbb{C}$-*дифференцируемой* в точке z_0, если $df|_{z_0}(dz)$ имеет вид adz (где $a \in \mathbb{C}$ – константа, т.е $df|_{z_0}$ есть $\mathbb{C}$-*линейная* функция переменной dz).

Ясно, что последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда $a = \partial f/\partial z|_{z_0}$ и, одновременно, $\partial f/\partial \overline{z}|_{z_0} = 0$.

2.9. Пример. Функции $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ являются $\mathbb{C}$-дифференцируемыми всюду. При этом $dz^n|_{z_0}(dz) = nz_0^{n-1}dz$.

2.10. Теорема. Функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0, если и только если f имеет в точке z_0 *комплексную производную* $f'(z_0)$, т.е. существует

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f|_{z_0}(\Delta z)}{\Delta z} =: \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0} =: f'(z_0).$$

Доказательство. Очевидно. $\square$

2.11. Следствие. $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке z_0 функция f имеет комплексную производную $f'(z_0)$, если и только если $\partial f/\partial \overline{z}|_{z_0} = 0$. При этом условии $f'(z_0) = \partial f/\partial z|_{z_0}$.

Доказательство следующей важной теоремы также не составляет труда.

2.12. Теорема (Коши-Римана). $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке z_0 функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке тогда и только тогда, когда выполняются *условия Коши-Римана*:

$$\begin{aligned} u'_x(x_0,y_0) &= v'_y(x_0,y_0)\,, \\ u'_y(x_0,y_0) &= -v'_x(x_0,y_0)\,. \end{aligned}$$

Свойства комплексной производной

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда f *индуцирует* отображение $F : (x,y)^t \to (u(x,y), v(x,y))^t$ из окрестности точки $(x_0,y_0)^t$ в пространство $\mathbb{R}^2$, дифференцируемое в точке $(x_0,y_0)^t$ (здесь $\mathbb{R}^2$ рассматривается как пространство *столбцов* $\{(x,y)^t\}$, t – знак транспонирования).

Пусть $[F']|_{z_0}$ – линейное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с матрицей

$$\left.\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)^t}$$

2.13. Теорема. Функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0, если и только если отображение F дифференцируемо в точке $(x_0, y_0)^t$ и

$$[F']|_{z_0} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

При этом $a + ib = f'(z_0)$.

2.14. Следствие. Если f – $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z_0, то $\det([F']|_{z_0}) = |f'(z_0)|^2$. В частности, F *вырождено* в точке $(x_0, y_0)^t$ (т.е. $\det([F']|_{z_0}) = 0$), если и только если $f'(z_0) = 0$. Если же $f'(z_0) \neq 0$, то $[F']|_{z_0}$ *сохраняет ориентацию*, поскольку $\det([F']|_{z_0}) = |f'(z_0)|^2 > 0$.

Доказательства приведенных выше утверждений непосредственно следуют из определений дифференцируемости и условий Коши-Римана. Детали опускаем.

2.15. Упражнение. Если f и g – $\mathbb{C}$-дифференцируемы в точке z_0, то $f \pm g$, fg, f/g (при $g(z_0) \neq 0$) – $\mathbb{C}$-дифференцируемы в точке z_0 и выполняются стандартные правила вычисления производных.

2.16. Упражнение. Вывести формулы для $(\partial\varphi/\partial z)|_{z_0}$ и $(\partial\varphi/\partial\overline{z})|_{z_0}$ при $\varphi = f \pm g$, $\varphi = fg$, $\varphi = f/g$, где f и g – $\mathbb{R}$-дифференцируемы в точке z_0.

2.17. Теорема (производная сложной функции). Пусть g – $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z_0, а f – в точке $w_0 = g(z_0)$. Тогда $f \circ g(z) = f(g(z))$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0, причем $(f \circ g)'(z_0) = f'(w_0)g'(z_0)$.

Доказательство. Стандартное, прямое доказательство этой теоремы точно такое же, как в одномерном вещественном анализе. Приведем еще одно.

Пусть g индуцирует G (для краткости пишем $g \sim G$), $f \sim F$. По Теореме 2.13 имеем:

$$[G']|_{z_0} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \qquad a_1 + ib_1 = g'(z_0)$$

$$[F']|_{w_0} = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \qquad a_2 + ib_2 = f'(w_0).$$

Ясно, что $f \circ g \sim F \circ G$ и

$$[(F \circ G)']|_{z_0} = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

причем $a + ib = (a_2 + ib_2)(a_1 + ib_1)$. $\square$

Нам будет пока хватать следующего упрощенного варианта теоремы об обратной функции.

2.18. Теорема (об обратной функции). Пусть f – *гомеоморфное* отображение окрестности точки z_0 на некоторую *окрестность* точки $w_0 = f(z_0)$, g – обратное к f в последней окрестности. Если f – $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то g – $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точке w_0, причем $g'(w_0) = 1/f'(z_0)$.

Доказательство. Пусть $\Delta w = \Delta f|_{z_0}(\Delta z)$. Из гомеоморфности имеем: $\{\Delta z \to 0, \quad \Delta z \neq 0\} \iff \{\Delta w \to 0, \quad \Delta w \neq 0\}$. Остается перейти к пределу в равенстве $\Delta z/\Delta w = (\Delta w/\Delta z)^{-1}$. $\square$

2.19. Замечание. Из анализа известно, что условия последней теоремы будут выполнены, если потребовать, чтобы индуцированное отображение F было непрерывно дифференцируемым в окрестности $(x_0, y_0)^t$ и , дополнительно, $\det([F']|_{z_0}) \neq 0$.

2.20. Определение. Пусть f определена и конечна в окрестности ∞. Функция f называется $\mathbb{C}$-*дифференцируемой в точке* ∞, если функция $g(w) = f(1/w)$, доопределенная $g(0) = f(\infty)$, является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке 0. По определению полагается

$$f'(\infty) = g'(0) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)).$$

2.21. Пример. $f(z) = 1/z$, $f(\infty) = 0$, $f'(\infty) = 1$.

2.22. Определение. Функция f называется *голоморфной в точке* z_0, если f – $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой *окрестности* точки z_0.

2.23. Пример. $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Условия Коши-Римана показывают, что $z = 0$ – единственная точка, где f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой. Следовательно, функция f нигде не голоморфна.

2.24. Определение. Функция f называется *голоморфной в области* $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, если f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой (а, следовательно, голоморфной) в каждой точке области D.

Класс всех голоморфных функций в области D обозначается $A(D)$. Функции класса $A(\mathbb{C})$ называются *целыми*.

Содержательные примеры мы приведем чуть позже.

Конформные отображения и геометрический смысл комплексной производной

2.25. Определение. Пусть функция f – $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $z_0 \in \mathbb{C}$. Говорят, что f *конформна в точке* z_0 (по другой терминологии : f – *конформное отображение* в точке z_0), если ее дифференциал $df|_{z_0}(\Delta z)$ в точке z_0 (как функция от Δz) есть композиция гомотетии и поворота (оба с центром в 0, т.е. порядок не важен).

2.26. Теорема. f конформна в точке z_0, если и только если f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. При этом $k = |f'(z_0)|$ – коэффициент растяжения, а $\mathrm{th} = \arg(f'(z_0))$ – угол поворота при ($\mathbb{C}$-линейном) отображении $df|_{z_0}$.

Доказательство. Оставляем читателю.

2.27. Упражнение. Пусть $f = u+iv$ – конформна в точке z_0, причем u и v имеют непрерывные частные производные в окрестности z_0. Тогда f *сохраняет углы* между гладкими кривыми в точке z_0.

2.28. Определение. Пусть f отображает окрестность точки $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Говорят, что f *конформна в точке* ∞, если отображение $g(w) = f(1/w)$ (при $g(0) = f(\infty) \neq \infty$) или $g(w) = 1/f(1/w)$, $g(0) = 0$ (при $f(\infty) = \infty$) конформно в точке 0.

2.29. Определение. Функция f *локально-конформна в области* $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, если f конформна в каждой точке области D.

2.30. Определение. Функция f *конформна в области* D, если она локально конформна и взаимно-однозначна (*однолистна*) в D.

2.31. Следствие. Пусть $f \ : \ D \to \mathbb{C}$ (D – область в $\mathbb{C}$).

1. f локально конформна в D тогда и только тогда, когда $f \in A(D)$ и $f'(z) \neq 0$ всюду в D.

2. f конформна в D тогда и только тогда, когда $f \in A(D)$, $f'(z) \neq 0$ всюду в D и f взаимно-однозначна в D.

2.32. Пример. $f(z) = z^2$ локально конформна, но не конформна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

та же f конформна в любой полуплоскости с границей, содержащей точку 0, но ни в какой большей области.

2.33. Привести пример функции f, всюду в плоскости $\mathbb{C}$ имеющей частные производные, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, но не имеющей комплексной производной в точке $z_0 = 0$.

2.34. Как записываются условия Коши-Римана в полярных координатах?

Лекция №3

Основные элементарные функции. Интегрирование вдоль пути.

Основные элементарные функции и их области конформности.

3.1. Дробно-линейное отображение (ДЛО). ДЛО – это функция (отображение) вида $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d – *постоянные* из $\mathbb{C}$, такие, что указанная функция отлична от тождественной константы (в том числе и ∞). При $c = 0$, $d = 1$ ДЛО становится *линейной функцией*. Всякое ДЛО является *конформным изоморфизмом* $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. Основные свойства ДЛО и их применение хорошо изложены, например, в упомянутой выше книге Б.В. Шабата (см. аннотацию).

3.2. Целые степенные функции. Вместе с $f_0(z) = 1$ и $f_1(z) = z$ к ним относятся функции вида $f(z) = z^n$, где $n \geq 2$ – натуральное. Поскольку $f'(z) = nz^{n-1}$, то f локально конформна всюду, кроме точки $z = 0$. Следовательно, область G является областью конформности (однолистности) функции $f(z) = z^n$, $n \geq 2$, если и только если $0 \notin G$ и f взаимно-однозначна в G.

Пусть $G(\alpha, \beta) = \{z \neq 0 \,:\, \arg(z) \in (\alpha, \beta) (\mod 2\pi)\}$, где $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$. Из формулы Муавра следует, что при любом $\alpha \in (-\pi, \pi]$ функция z^n конформно отображает $G(\alpha, \alpha + 2\pi/n)$ на $G(n\alpha, n\alpha + 2\pi)$, так что $G(\alpha, \alpha + 2\pi/n)$ – одна из *максимальных областей конформности* указанной функции.

3.3. Экспонента По определению, при любом $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$

Пусть $z = x + iy$. Докажем, что $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, т.е. $|e^z| = e^x$, $\mathrm{Arg}(e^z) = \{y + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Действительно, пусть n – достаточно велико, тогда $1 + z/n = 1 + x/n + iy/n$ лежит в правой полуплоскости. По формуле Муавра находим:

$$|1 + z/n|^n = \big((1 + x/n)^2 + (y/n)^2\big)^{n/2} =$$

$$= \exp\left(\frac{n}{2}\ln(1+\frac{2x}{n}+o(n^{-1}))\right) \to e^x ,$$

$$\arg((1+z/n)^n) = (mod\, 2\pi) = n\,\mathrm{arctg}(y/(x+n)) \to y$$

при $n \to +\infty$. Что и требовалось.

Из полученной формулы и условий Коши-Римана вытекают все основные свойства экспоненты. Мы отметим только некоторые из них.

(1) $f(z) = e^z$ является целой функцией с (основным) периодом $2\pi i$; ее основными (максимальными) областями конформности являются полосы $\{z = x+iy \,|\, \alpha < y < \alpha+2\pi\}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), переходящие под действием f в области $G(\alpha, \alpha+2\pi)$;

(2) $(e^z)' = e^z \quad , \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

(3) Пусть $z \neq 0$, $r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$, тогда $z = re^{i\varphi}$ (*показательная* форма z); в частности, $\cos(\varphi) = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$, $\sin(\varphi) = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/(2i)$.

3.4. Тригонометрические функции. Здесь мы ограничимся только их определением: $\cos(z) = (e^{iz}+e^{-iz})/2$, $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, $tg(z) = \sin(z)/\cos(z)$, $ctg(z) = \cos(z)/\sin(z)$.

Корни степени n *и* Ln

Как мы уже знаем из Лекции 1, обратное отображение к степенному ($f(z) = z^n$) есть *многозначная* функция $\sqrt[n]{z}$ ($n \geq 2$ – натурально).

3.5. Определение. Пусть Φ – многозначная функция на области G, f – голоморфна в области $G_1 \subset G$ и при всех $z \in G_1$ выполняется $f(z) \in \Phi(z)$. Тогда f называется *голоморфной ветвью* многозначной функции Φ в G_1.

3.6. Предложение. На каждой из областей $G(\alpha, \alpha+2\pi)$ ($\alpha \in (-\pi, \pi]$) существует ровно n голоморфных ветвей многозначной функции $\sqrt[n]{z}$. Одна из них:

$$\sqrt[n]{z}_{(\alpha,\alpha+2\pi)} = \sqrt[n]{r}\exp(i\varphi/n)\,,\; z = re^{i\varphi}\,,\; \varphi \in (\alpha, \alpha+2\pi)\,,$$

конформно отображает $G(\alpha, \alpha+2\pi)$ на $G(\alpha/n, (\alpha+2\pi)/n)$.

Остальные ветви отличаются от указанной на множители $\exp(2\pi ik/n)$, $k = 1, \ldots, n-1$.

3.7. Упражнение. Пользуясь теоремой об обратной функции, доказать, что если $V(z)$ – какая-либо непрерывная (и, следовательно, гомеоморфная) ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{z}$ в области G, то V – ее голоморфная ветвь в G со свойством $V'(z) = V(z)/nz$.

3.8. Логарифм. Логарифм – это (бесконечнозначная) функция $\mathrm{Ln}(z)$, обратная к экспоненте: $w \in \mathrm{Ln}(z)$, если и только если $e^w = z$. Пользуясь алгебраической формой для e^w, легко установить, что (при $z \neq 0$) $\mathrm{Ln}\, z = \{\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)\} = \{\ln(z) + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где $\ln(z) = \ln|z| + i\arg z$ – *главное значение* логарифма. По теореме об обратной функции, над каждой областью $G(\alpha, \alpha+2\pi)$ ($\alpha \in (-\pi, \pi]$) многозначная функция $\mathrm{Ln}(z)$ распадается на счетное множество голоморфных ветвей $\{L_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ со следующими свойствами:

1. $(L_k(z))' = 1/z$, $L_k(z) = L_0(z) + 2\pi ik$;

2. L_0 конформно отображает $G(\alpha, \alpha+2\pi)$ на горизонтальную полосу $\{w = u + iv \mid \alpha < v < \alpha + 2\pi\}$.

Позднее мы докажем, что $\sqrt[n]{z}$ и $\mathrm{Ln}(z)$ распадаются на (однозначные) голоморфные ветви над всякой *односвязной* областью в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Спрямляемые и гладкие пути и кривые.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – путь, $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ ($\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \beta$) – какое-либо *разбиение* (порядка N) отрезка $[\alpha, \beta]$. Величина $\ell(\gamma, T) := \sum\limits_{n=1}^{N} |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})|$ представляет собой длину соответствующей *вписанной ломаной.*

3.9. Определение. Путь γ – *спрямляем*, если $\ell(\gamma) := \sup\{\ell(\gamma, T)\} < +\infty$, где указанный sup берется по всем T (любого порядка). Значение $\ell(\gamma)$, конечное или бесконечное, называется *длиной* пути γ.

Пусть $\lambda(T) := \max\limits_{1\le n\le N}\{\Delta t_n\}$ – *диаметр* разбиения T, где $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$.

3.10. Упражнение. Доказать, что $\ell(\gamma) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \ell(\gamma, T)$.

Из определения следует, что если $\gamma_1 \sim \gamma_2$ (т.е. пути γ_1 и γ_2 эквивалентны), то они спрямляемы (или нет) *одновременно*, причем $\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2)$. Таким образом, корректно ("однозначно !") определяется понятие *спрямляемой кривой* и ее *длины*. Длина кривой Γ обозначается через $\ell(\Gamma)$.

Пусть γ – спрямляем и не постоянен ни на каком (невырожденном) интервале в $[\alpha, \beta]$. Тогда функция $s(t) = \ell(\gamma|_{[\alpha,t]})$ строго возрастает и непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, ее обратная функция $t = \psi(s)$ – строго возрастает и непрерывна на $[0, \ell(\gamma)]$.

3.11. Определение. Путь $\gamma \circ \psi : [0, l(\gamma)] \to \mathbb{C}$, эквивалентный пути γ, называется *натуральной параметризацией кривой* $\{\gamma\}$.

3.12. Определение. Путь $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ (определенный на $[\alpha, \beta]$) называют *непрерывно дифференцируемым*, если его *производная* $\gamma'(t) := x'(t) + iy'(t)$) непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

3.13. Упражнение. Если γ – непрерывно дифференцируем, то он спрямляем и

$$\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

.

3.14. Определение. Непрерывно дифференцируемый путь γ называют *гладким* если при всех $t \in [\alpha, \beta]$ имеет место $\gamma'(t) \neq 0$.

3.15. Определение. Два гладких пути $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ *эквивалентны как гладкие*, если существует диффеоморфизм $h : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha_2, \beta_2]$ (непрерывно дифференцируемое отображение с непрерывно дифференцируемым обратным) такой, что $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.

Гладкая кривая – это класс гладких путей, эквивалентных как гладкие (что не есть *обычная* кривая, где берется класс *всех* эквивалентных путей).

3.16. Упражнение. Если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, причем они оба гладкие и жордановы, то они эквивалентны как гладкие пути.

Определение *кусочно* непрерывно дифференцируемых и *кусочно* гладких путей и кривых оставляем читателю.

Интеграл вдоль кривой.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – путь, $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$, $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ – разбиение $[\alpha, \beta]$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$ – *выборка, подчиненная разбиению* T (т.е. $\tau_n \in [t_{n-1}, t_n], 1 \le n \le N$).

Вводится *интегральная сумма*

$$\Sigma_\gamma(T, \tau, f) = \sum_{n=1}^{N} f(\gamma(\tau_n))(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})).$$

3.17. Определение. Функция f *интегрируема вдоль пути* γ, если существует и конечен предел

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Sigma_\gamma(T, \tau, f) =: \int_\gamma f(z)dz$$

– *интеграл* от f *вдоль* γ.

3.18. Замечание. Напомним, что существование последнего предела в точности означает, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall T$ с условием $\lambda(T) < \delta$ и $\forall \tau$, подчиненного T, имеет место

$$\left| \Sigma_\gamma(T, \tau, f) \;-\; \int_\gamma f(z)dz \right| \;<\; \varepsilon\;.$$

3.19. Упражнение. Доказать, что $\int_\gamma 1dz$ существует для любого γ. Привести пример, когда не существует $\int_\gamma zdz$.

3.20. Упражнение. Если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то для любой f на $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ интегралы $\int_{\gamma_1} fdz$ и $\int_{\gamma_2} fdz$ существуют или нет одновременно (а когда существуют – равны). Таким образом, корректно определяется *интеграл* от f *вдоль кривой* $\{\gamma\}$, $\int_{\{\gamma\}} fdz$.

3.21. Замечание. Разбивая интегральную сумму $\Sigma_\gamma(T, \tau, f)$ на действительную и мнимую части, мы сводим $\int_\gamma f(z)dz$ к четырем интегралам Римана-Стильтьеса по отрезку $[\alpha, \beta]$, так что можно использовать все известные свойства таких интегралов. Тем не менее, для полноты изложения, мы приведем доказательства следующих двух теорем, ввиду их важности.

3.22. Теорема. Если γ спрямляем, а $f \in C([\gamma])$, то $\int_\gamma f(z)dz$ существует.

Следовательно, здесь путь γ может быть заменен на *кривую* $\{\gamma\}$.

Напомним, что $C(E)$ – пространство всех *непрерывных ограниченных* (комплекснозначных) функций на множестве $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ с *равномерной нормой* $\|f\|_E := \sup\{|f(z)| \mid z \in E\}$.

3.23. Определение. Пусть g определена и ограничена на $E \subset \mathbb{C}$. Ее *модулем непрерывности* (на E) называется функция

$$\omega_E(g, \delta) = \sup\{|g(z_1) - g(z_2)| \mid z_1 \in E, z_2 \in E, |z_1 - z_2| \leq \delta\}.$$

По определению, g *равномерно непрерывна* на E, если $\omega_E(g,\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Хорошо известно, что если E – компакт и $g \in C(E)$, то g равномерно непрерывна на E.

Доказательство Теоремы 3.22.

3.24. Лемма. Пусть $T = \{t_0, \dots, t_N\}$, $T' = \{t'_0, \dots, t'_J\}$ – разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$, причем $T \subset T'$ (при этом говорят, что T' – *размельчение* T) и пусть $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ и $\tau' = \{\tau'_1, \dots, \tau'_J\}$ – соответствующие подчиненные им выборки. Тогда

$$|\Sigma_\gamma(T, \tau, f) - \Sigma_\gamma(T', \tau', f)| \leq \omega(\lambda(T))\ell(\gamma),$$

где $\omega(\delta) = \omega_{[\alpha,\beta]}(f \circ \gamma, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство Леммы 3.24. Для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$ введем $J_n = \{j : t'_j \in (t_{n-1}, t_n]\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|\Sigma_\gamma(T, \tau, f) - \Sigma_\gamma(T', \tau', f)| = \\
&\qquad \left| \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{j \in J_n} f(\gamma(\tau_n))[\gamma(t'_j) - \gamma(t'_{j-1})] - \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. \sum_{j \in J_n} f(\gamma(\tau'_j))[\gamma(t'_j) - \gamma(t'_{j-1})] \right) \right| \\
&\qquad\qquad\qquad \leq \omega(\lambda(T))\ell(\gamma, T') \leq \omega(\lambda(T))\ell(\gamma),
\end{aligned}$$

так как $|\tau_n - \tau'_j| \le \lambda(T)$ при $j \in J_n$. $\square$

3.25. Следствие. Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$, а $\tau_{(1)}$ и $\tau_{(2)}$ – соответственно подчиненные им выборки. Справедлива оценка:

$$\left|\Sigma_\gamma(T_1, \tau_{(1)}, f) - \Sigma_\gamma(T_2, \tau_{(2)}, f)\right| \le (\omega(\lambda(T_1)) + \omega(\lambda(T_2)))\ell(\gamma)\,.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть размельчение $T' = T_1 \cup T_2$ разбиений T_1 и T_2, какую-либо выборку τ', подчиненную T', и применить предыдущую лемму к парам (T_1, T'), (T_2, T') и соответствующим им выборкам. $\square$.

Завершим *доказательство Теоремы 3.22.* Рассмотрим $T(N) = \{t_0, \dots, t_N\}$ – *равномерное* разбиение $[\alpha, \beta]$ на N равных частей и выборку $\tau(N) = T(N) \setminus \{t_0\}$. Поскольку последовательность $\{\Sigma_\gamma(T(N), \tau(N), f)\}$ – ограничена величиной $\|f\|_{[\gamma]}\ell(\gamma))$, найдется последовательность $\{N_k\}$, $N_k \to \infty$ при $k \to \infty$ с условием, что $\Sigma_\gamma(T(N_k), \tau(N_k), f)$ сходится к некоторому числу I при $k \to \infty$. Пользуясь предыдущим следствием, нетрудно установить, что $\int_\gamma f(z)dz$ существует и равен I. $\square$

3.26. Теорема. Пусть γ – непрерывно дифференцируемый путь на $[\alpha, \beta]$, $f \in C([\gamma])$. Тогда f интегрируема вдоль γ, причем

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, где $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \in C[\alpha, \beta]$. Введем функцию
$\omega(\delta) = \omega_{[\alpha,\beta]}(x'(t), \delta) + \omega_{[\alpha,\beta]}(y'(t), \delta)$, так что $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

3.27. Лемма. Пусть $t \in [\alpha, \beta]$, $\Delta t > 0$, $[t, t + \Delta t] \subset [\alpha, \beta]$. Тогда для всякого $\mathrm{th} \in [t, t + \Delta t]$ имеет место оценка: $|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t) - \gamma'(\mathrm{th})\Delta t| \le \omega(\Delta t)\Delta t$.

3.28. Замечание. Пример $\gamma(t) = e^{it}$ на $[0, 2\pi]$ показывает, что $\gamma'(t) = -\sin t + i\cos t = ie^{it} \ne 0$ для всех t, однако $\gamma(0) - \gamma(2\pi) = 0$, т.е. непосредственного аналога теоремы Лагранжа для *путей* в $\mathbb{C}$ нет.

Доказательство Леммы 3.27. Имеем: $\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)=x(t+\Delta t)-x(t)+i(y(t+\Delta t)-y(t))=x'(\mathrm{th}_1)\Delta t+iy'(\mathrm{th}_2)\Delta t$ при некоторых th_1, th_2 на $[t,t+\Delta t]$ по теореме Лагранжа. Отсюда, для любого $\mathrm{th}\in[t,t+\Delta t]$, получаем:

$$|\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)-\gamma'(\mathrm{th})\Delta t|\le|x'(\mathrm{th}_1)-x'(\mathrm{th})|\Delta t+|y'(\mathrm{th}_2)-y'(\mathrm{th})|\Delta t$$

$$\le\omega(\Delta t)\Delta t\,.\ \square$$

Доказательство Теоремы 3.26. Фиксируем произвольное разбиение $T=\{t_0,t_1,\dots,t_N\}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ и подчиненную ему выборку $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_N)$. Тогда, по предыдущей лемме,

$$\left|\Sigma_\gamma(T,\tau,f)-\sum_{n=1}^{n=N}f(\gamma(\tau_n))\gamma'(\tau_n)\Delta t_n\right|\le$$

$$\sum_{n=1}^{n=N}|f(\gamma(\tau_n))(\gamma(t_n)-\gamma(t_{n-1}))-f(\gamma(\tau_n))\gamma'(\tau_n)\Delta t_n|\le$$

$$\sum_{n=1}^{n=N}|f(\gamma(\tau_n))|\omega(\Delta t_n)\Delta t_n\le\|f\|_{[\gamma]}\omega(\lambda(T))(\beta-\alpha)\to 0$$

при $\lambda(T)\to 0$. Так как существование $\int_\gamma f(z)dz$ доказано выше, то мы автоматически доказали существование $\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ и равенство этих двух интегралов. $\square$

3.29. Пример. Найдем $\int_\gamma z^n dz$, где $n\in\mathbb{Z}$, $\gamma(t)=e^{it}$ на $[0,2\pi]$. Имеем:

$$\int_\gamma z^n dz=\int_0^{2\pi}(e^{int})ie^{it}dt=$$

$$i\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}dt=i\int_0^{2\pi}(\cos(n+1)t)dt-\int_0^{2\pi}(\sin(n+1)t)dt=$$

$$\begin{cases}0, & \text{если }\ n\neq -1\ ;\\ 2\pi i, & \text{если }\ n=-1\ .\end{cases}$$

3.30. **Н**айти модуль непрерывности $\omega_{\mathbb{R}}(\sin(\cdot),\delta)$ функции $f(z)=\sin z$, $z\in\mathbb{R}$.

3.31. **Д**ать определение интеграла $\int_\gamma f(z)|dz|$ по длине кривой и доказать его существование в случае, когда γ – спрямляем и $f\in C([\gamma])$.

Лекция №4

Свойства интеграла. Теорема Коши для односвязной области.

4.1. Основные свойства интеграла вдоль кривой.

1. *Линейность.* Пусть f_1 и f_2 интегрируемы вдоль Γ, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\int_\Gamma (\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))dz = \lambda_1 \int_\Gamma f_1(z)dz + \lambda_2 \int_\Gamma f_2(z)dz.$$

2. *Аддитивность.* Если f интегрируема вдоль Γ_1 и вдоль Γ_2, причем конец Γ_1 есть начало Γ_2,то

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f dz = \int_{\Gamma_1} f dz + \int_{\Gamma_2} f dz.$$

3. *Изменение ориентации.* Функция f интегрируема (или нет) вдоль Γ и Γ^- одновременно. В случае интегрируемости имеем:

$$\int_{\Gamma^-} f dz = -\int_\Gamma f dz.$$

4. *Оценка интеграла.* Если Γ спрямляема, а f интегрируема вдоль Γ (и, следовательно, ограничена на $[\Gamma]$), то

$$\left| \int_\Gamma f dz \right| \leq \|f\|_{[\Gamma]} \ell(\Gamma).$$

5. *Предел под знаком интеграла.* Пусть M_ρ – произвольное метрическое пространство (ρ – метрика на множестве M), $m_0 \in M$ – предельная точка в M. Пусть для каждого $m \in M$ определена $f_m : E \to \mathbb{C}$ ($E \subset \overline{\mathbb{C}}$ – фиксировано). Напомним, что *семейство* $\{f_m \,|\, m \in M\}$ *равномерно на* E *сходиться к* f_{m_0} *при* $m \to m_0$ (обозначается $f_m \overset{E}{\rightrightarrows} f_{m_0}$, $m \to m_0$), если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\{\rho(m, m_0) < \delta\} \implies \{\|f_m - f_{m_0}\|_E < \varepsilon\}$.

Например, если $M = \{1, 2, \ldots, \infty\}$, а $\rho(m_1, m_2) = |1/m_1 - 1/m_2|$ (полагаем $1/\infty = 0$), то условие $f_m \overset{E}{\rightrightarrows} f_\infty$ при $m \to$

∞ – есть обычная равномерная сходимость последовательности функций.

Свойство **(5)** означает следующее.

4.2. Предложение. Пусть Γ – спрямляема и $f_m \in C([\Gamma])$ при всех $m \in M$. Если $f_m \overset{[\Gamma]}{\rightrightarrows} f_{m_0}$ при $m \to m_0$ (в M_ρ), то

$$\int_\Gamma f_m(z)dz \to \int_\Gamma f_{m_0}(z)dz \qquad \text{при } m \to m_0.$$

Доказательство всех указанных свойств стандартно.

Индекс замкнутой жордановой кривой. Локальное закругление жорданова пути в $\mathbb{C}$.

Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$. Через $D(\Gamma)$ и $\Omega(\Gamma)$ далее обозначаются соответственно ограниченная и неограниченная компоненты дополнения к $[\Gamma]$ (см. Теорему 1.16). Будем говорить, что $D(\Gamma)$ – *жорданова область*, ограниченная *кривой* Γ (отождествляя, где это не приводит к недоразумениям, Γ и $[\Gamma]$).

4.3. Теорема. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$. Тогда:

(1) найдется $p \in \{1,2\}$ такое, что $\operatorname{ind}_w(\Gamma) = (-1)^p$ при всех $w \in D(\Gamma)$;

(2) $\operatorname{ind}_w(\Gamma) = 0$ для любого $w \in \Omega(\Gamma)$.

4.4. Начало доказательства Теоремы 4.3. Фиксируем произвольный путь γ из Γ. Достаточно установить требуемое в теореме для γ вместо Γ.

Утверждение (2) вытекает из Следствия 1.23 и того простого факта, что $\operatorname{ind}_w(\gamma) = 0$ для достаточно “больших"w.

Для доказательства (1) предположим сначала, что γ “содержит"нетривиальную (направленную) дугу σ некоторой окружности. Пусть b – некоторая фиксированная (не концевая) точка этой дуги, а ν ($\nu \in \mathbb{C}$, $|\nu| = 1$) – как вектор в $\mathbb{R}^2$ – является вектором единичной нормали к σ в точке b, направленным “влево"относительно движения по σ. Из Упражнений 1.20, 1.24, 1.27

и 1.28 (для кривой $\{\gamma\} \setminus \{\sigma\}$ и $w = b \pm t\nu$) и элементарных геометрических соображений (для $\{\sigma\}$ и $w = b \pm t\nu$), где $t > 0$ достаточно мало, получаем:

$$\lim_{t \to 0+} (\mathrm{ind}_{b+t\nu}(\gamma) - \mathrm{ind}_{b-t\nu}(\gamma)) = 1 \ .$$

Таким образом, из Следствия 1.23 и Теоремы 1.16 (вблизи b с одной стороны от γ находятся точки из $D(\gamma)$, а с другой – из $\Omega(\gamma)$), получаем, что $|\operatorname{ind}_w(\gamma)| = 1$ в $D(\gamma)$. Более того, нетрудно видеть, что $\mathrm{ind}_w(\gamma) = 1$ в $D(\gamma)$, если и только если при движении по σ (вдоль γ) область $D(\gamma)$ остается "слева".

Для окончания доказательства теоремы нам потребуется следующая конструкция, которую мы будем использовать и в дальнейшем.

4.5. Локальное "закругление" жорданова пути. Пусть γ – замкнутый жорданов путь, определенный на $[\alpha, \beta]$, $a \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ и $t_0 \in (\alpha, \beta)$ таковы, что $d = \mathrm{dist}(a, [\gamma]) = |a - \gamma(t_0)| < |\gamma(\alpha) - \gamma(t_0)|$, причем $|a - \gamma(t_0)| < |a - \gamma(t)|$ при всех $t \neq t_0$. Для всякого $\delta \in (0, d)$ пусть $t_\delta^- \in [\alpha, t_0]$ – минимальное и $t_\delta^+ \in [t_0, \beta]$ – максимальное значения $t \in [\alpha, \beta]$, при которых $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| = \delta$ и пусть $b \in [\gamma(t_0), a]$ такова, что $|b - \gamma(t_0)| = \delta$.

Будем обозначать через $\gamma(a, \delta)$ – путь, совпадающий с γ на $[\alpha, t_\delta^-] \cup [t_\delta^+, \beta]$, равномерно на $[t_\delta^-, t_0]$ проходящий дугу окружности $\{z \,|\, |z - \gamma(t_0)| = \delta\}$, соединяющую $\gamma(t_\delta^-)$ и b (не содержащую $\gamma(t_\delta^+)$), и равномерно на $[t_0, t_\delta^+]$ проходящий дугу той же окружности , соединяющую b и $\gamma(t_\delta^+)$ (не содержащую $\gamma(t_\delta^-)$).

Заметим, что *кривая* $\{\gamma(a, \delta)\}$ определяется кривой $\{\gamma\}$, а не какой-либо конкретной ее параметризацией.

Наконец отметим, что t_δ^- и t_δ^+ стремятся к t_0 при $\delta \to 0$, так что $d(\gamma, \gamma(a, \delta)) \to 0$ при $\delta \to 0$ и, следовательно, $\mathrm{ind}_w(\gamma) = \mathrm{ind}_w(\gamma(a, \delta))$ при любом фиксированном w вне $[\gamma]$ и всех достаточно малых δ.

4.6. Окончание доказательства Теоремы 4.3. Пусть теперь γ – произвольный жорданов путь на $[\alpha, \beta]$, ограничивающий жорданову область $D = D(\{\gamma\})$. Фиксируем $a_1 \in D$ и $t_0 \in (\alpha, \beta)$ такие, что $d_1 = \mathrm{dist}(a_1, [\gamma]) = |a_1 - \gamma(t_0)| < |\gamma(\alpha) - \gamma(t_0)|$. Пусть a – середина отрезка $[\gamma(t_0), a_1]$ и $d = d_1/2$. Пользуясь равномерной непрерывностью γ, выберем $\delta \in (0, d)$ так, что (в обозначениях пункта 4.5) выполняется $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < d/2$ при всех $t \in [t_\delta^-, t_\delta^+]$, так что $d(\gamma,\gamma(a,\delta)) < d/2$. По Лемме 1.22 , $\mathrm{ind}_a(\gamma) = \mathrm{ind}_a(\gamma(a,\delta))$, так что либо $|\,\mathrm{ind}_a(\gamma)| = 1$ и все доказано (см. пункты **4.4, 4.5** и Следствие 1.23), либо $\mathrm{ind}_a(\gamma) = 0$. Докажем от противного, что последний случай исключен. Действительно, иначе имеем $\mathrm{ind}_w(\gamma) = 0$ для *всех* $w \in \mathbb{C}\setminus[\gamma]$. Поскольку γ и $\gamma(a,\delta)$ отличаются только на $[t_\delta^-, t_\delta^+]$, причем траектории этих путей на указанном отрезке лежат в $B(\gamma(t_0), d/2)$, легко показать, что $\mathrm{ind}_w(\gamma) = \mathrm{ind}_w(\gamma(a,\delta)) = 0$ при $w \in \mathbb{C}\setminus(B(\gamma(t_0),d)\cup[\gamma])$. Последнее противоречит доказанному в пункте **4.4** свойству $|\,\mathrm{ind}_w(\gamma(a,\delta))| = 1$ в $D(\gamma(a,\delta))$, поскольку из Теоремы 1.16 следует, что $\gamma(\alpha) \in \partial D(\gamma(a,\delta))$, а значит в любой окрестности точки $\gamma(\alpha)$ есть точки из $D(\gamma(a,\delta))$. $\square$

Свойства индекса кривой, полученные в Теореме 4.3, позволяют ввести строгое понятие ориентации границы для широкого класса областей и в дальнейшем доказать основные теоремы стандартных курсов комплексного анализа в максимальной общности.

Жордановы области и их ориентированные границы.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – гомеоморфный образ отрезка. Существуют ровно две жордановы *кривые* Γ_1 и Γ_2 с условиями $[\Gamma_1] = [\Gamma_2] = E$, причем $\Gamma_1 = \Gamma_2^-$.

Это утверждение доказать не сложно. Следующее, более содержательное утверждение, выводится из Теоремы 4.3.

4.7. Следствие. Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – гомеоморфный образ окружности, a – произвольная точка из E. Существует единственная замкнутая жорданова кривая $\Gamma(a)$ с концами в точке a и условиями: $[\Gamma(a)] = E$, причем

$$\mathrm{ind}_w(\Gamma(a)) = \begin{cases} 1\ , & w \in D(\Gamma(a))\,, \\ 0\ , & w \in \Omega(\Gamma(a))\,. \end{cases}$$

4.8. Определение. Будем при этом говорить, что $\Gamma(a)$ *ориентирована положительно* относительно ограниченной ею области D (или что D остается *слева* при “движении"вдоль $\Gamma(a)$).

Ориентированной границей указанной области D называется *класс* кривых
$$\partial^+ D \;=\; \{\Gamma(a)\,|\, a \in \partial D\}.$$

4.9. Замечание. Отметим, что, в отличие от *топологической* границы ∂D, ориентированная (точнее *положительно ориентированная*) граница $\partial^+ D$ будет использоваться в основном при интегрировании. Ясно, что для любой функции $f : \partial D \to \mathbb{C}$ интегралы $\int_{\Gamma(a)} f(z)dz$ существуют (или нет) одновременно для всех $a \in \partial D$. В случае существования, значения этих интегралов совпадают и определяют $\int_{\partial^+ D} f(z)dz$.

Нам потребуется также *отрицательно ориентированная* граница жордановой области, $\partial^- D = \{\Gamma(a)^- \mid a \in \partial D\}$, и интеграл вдоль нее: $\int_{\partial^- D} f(z)dz = -\int_{\partial^+ D} f(z)dz$.

Лемма Гурсы. Условие треугольника.

Положим $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$.

4.10. Упражнение. При $n \in \mathbb{Z}_+$ и $a, b \in \mathbb{C}$ имеем:

$$\int_{[a,b]} z^n dz = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} .$$

Указание: использовать стандартную параметризацию: $\gamma(t) = a + t(b-a)$, $t \in [0, 1]$.

Через Δ в пределах этой лекции мы обозначаем *внутренность* какого-либо треугольника, представляющую собой жорданову область.

4.11. Следствие. Для всякого треугольника Δ и многочлена $P(z)$ (переменного z) справедливо равенство $\int_{\partial^+ \Delta} P(z)dz = 0$.

4.12. Лемма (Гурсы). Пусть G – произвольная область и $f \in A(G)$. Тогда для всякого Δ с условием $\overline{\Delta} \subset G$ имеет место

$$\int_{\partial^+ \Delta} f(z)dz = 0 .$$

Доказательство. Фиксируем произвольный треугольник Δ, $\Delta \subset G$. Пусть $\Delta_0 = \Delta$.

Положим $I_0 = |\int_{\partial^+ \Delta_0} f(z)dz|$. “Разделим"$\Delta_0$ средними линиями на 4 равных треугольника $\Delta(k)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Как легко видеть,

$$\int\limits_{\partial^+ \Delta_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\partial^+ \Delta(k)} f(z)dz ,$$

поэтому среди $\{\Delta(k)\}$ найдется такой треугольник (обозначим его Δ_1), что

$$I_1 := \left| \int_{\partial^+ \Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{I_0}{4} .$$

Пусть треугольник Δ_j с условием

$$I_j := \left| \int_{\partial^+ \Delta_j} f(z) dz \right| \geq \frac{I_{j-1}}{4}$$

найден. Опять делим его средними линиями на 4 равных треугольника и выбираем один из них (Δ_{j+1}) так, что выполняется предыдущее неравенство с заменой j на $j+1$. Итак,

$$\ell(\partial \Delta_j) = \frac{\ell(\partial \Delta_0)}{2^j} , \quad I_j \geq \frac{I_0}{4^j} .$$

Последовательность вложенных компактов $\{\overline{\Delta_j}\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ имеет единственную общую точку, скажем z_0, $z_0 \in G$.

По определению $\mathbb{C}$-дифференцируемости функции f в точке z_0 имеем: $f(z) = p_1(z) + \omega(z, z_0)(z - z_0)$, где $p_1(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ – полином, а $\omega(z, z_0) \to 0$ при $z \to z_0$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется окрестность U точки z_0 ($U \subset G$) с условием $\{z \in U\} \Longrightarrow \{|\omega(z, z_0)| < \varepsilon\}$. Начиная с некоторого j, все Δ_j лежат в U, так что для этих j, пользуясь Следствием 4.11 и Свойством 4.1(4), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{4^j} \leq \left| \int_{\partial^+ \Delta_j} f(z) dz \right| \leq & \\ \left| \int_{\partial^+ \Delta_j} p_1(z) dz \right| + \left| \int_{\partial^+ \Delta_j} \omega(z, z_0)(z - z_0) dz \right| & \\ \leq 0 + \varepsilon \ell(\partial \Delta_j)^2 = \varepsilon \frac{\ell(\partial \Delta_0)^2}{4^j} & . \end{aligned}$$

Окончательно получаем: $I_0 \leq \varepsilon \ell(\partial \Delta_0)^2$, так что $I_0 = 0$. $\square$

4.13. Определение. Функция f удовлетворяет *условию треугольника* в области G, если f *непрерывна* в G и для всякого треугольника Δ с условием $\overline{\Delta} \subset G$ выполняется $\int_{\partial^+ \Delta} f dz = 0$.

По лемме Гурсы, всякая $f \in A(G)$ удовлетворяет условию треугольника в G.

Теорема Коши для односвязной области.

4.14. Определение. Область G в $\mathbb{C}$ называется *односвязной* (в смысле Жордана), если для любой замкнутой жордановой кривой Γ с носителем в G область $D(\Gamma)$ (ограниченная кривой Γ по теореме Жордана) целиком лежит в G.

4.15. Упражнение. Если область G в $\mathbb{C}$ такова, что ее *граница* $\partial G_{\overline{\mathbb{C}}}$ *(взятая в* $\overline{\mathbb{C}}$*) связна в* $\overline{\mathbb{C}}$, то G – односвязна.

4.16. Замечание. Имеется несколько эквивалентных определений односвязности. Пока мы будем пользоваться только приведенным выше определением и следующим за ним *достаточным* условием односвязности области в $\mathbb{C}$. После доказательства теоремы Римана о конформных отображениях и определения гомотопии кривых в областях мы приведем другие определения односвязности и докажем их эквивалентность.

4.17. Теорема Коши для односвязной области. Если f удовлетворяет условию треугольника в односвязной области G, то для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ с носителем в G имеет место равенство $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

4.18. Следствие. В условиях предыдущей теоремы, если Γ_1 и Γ_2 – две спрямляемые кривые в G с одинаковыми началами и концами соответственно, то $\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$.

Доказательство. (1). Утверждение теоремы справедливо, если Γ – замкнутая *жорданова ломаная.* Доказываем по индукции с применением леммы Гурсы и следующего элементарно-геометрического факта: найдутся две *несоседние* вершины a и b ломаной Γ с условием, что “открытый"интервал (a, b) (диагональ) принадлежит $D(\Gamma)$.

(2). Утверждение теоремы справедливо, если Γ – произвольная замкнутая ломаная в G. Для доказательства достаточно воспользоваться предыдущим случаем и следующим фактом. Для произвольной замкнутой ломаной Γ найдется конечное число замкнутых жордановых ломаных $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ таких, что $[\Gamma_n] \subset [\Gamma]$ для всех возможных n и *для любой* $f \in C([\Gamma])$ имеет место $\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} f(z)dz$.

(3). Общий случай. Сначала введем некоторые обозначения. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – произвольный путь, $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ – какое-либо разбиение (порядка N) отрезка $[\alpha, \beta]$, $z_n = \gamma(t_n)$. Обозначим через $\Lambda = \Lambda_\gamma(T)$ – соответствующую *вписанную ломаную*, т.е. *путь* на $[\alpha, \beta]$, который на $[t_{n-1}, t_n]$ *равномерно* проходит отрезок $[z_{n-1}, z_n]$ $(n = 0, \ldots, N)$ в соответствующем направлении. Положим еще $\gamma_n = \gamma|_{[t_{n-1}, t_n]}$ и $\Lambda_n = \Lambda|_{[t_{n-1}, t_n]}$ и напомним, что $\lambda(T)$ – диаметр разбиения T, а $d(\gamma, \Lambda) = \sup|\gamma(t) - \Lambda(t|$ на $[\alpha, \beta]$.

Случай (3) непосредственно вытекает из следующей леммы.

4.19. Лемма (об аппроксимации). Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$ – произвольный спрямляемый путь (в G), f – непрерывна в G. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[\alpha, \beta]$ с условием $\lambda(T) < \delta$ выполнено (в приведенных выше обозначениях):

(1) $d(\gamma, \Lambda) < \varepsilon$, в частности, $\Lambda = \Lambda_\gamma(T)$ – замкнутая ломаная в G при всех достаточно малых ε ;

(2) $|\int_\Lambda f(z)dz - \int_\gamma f(z)dz| < \varepsilon$.

Доказательство леммы. Пусть $d = \min\{1\,, \operatorname{dist}([\gamma], \partial G)\}$. Введем $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(z, [\gamma]) \le d/2\}$ – компакт в G ($d/2$-*раздутие* $[\gamma]$), причем $\operatorname{dist}(K, \partial G) \ge d/2$. Поскольку $f \in C(K)$ и $\gamma \in C([\alpha, \beta])$, то $\mu(\delta) := \omega_K(f, \delta) \to 0$ и $\omega(\delta) = \omega_{[\alpha,\beta]}(\gamma, \delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Фиксируем произвольное ε, $\varepsilon < d/2$, и *выберем* $\delta > 0$ так, что $\omega(\delta) < \varepsilon$, $\mu(\omega(\delta))\ell(\gamma) < \varepsilon/2$ и для всякого T с условием $\lambda(T) < \delta$ выполнено:

$$\left| \int_\gamma f(z)dz - \Sigma_\gamma(T, \tau, f) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{4.1}$$

где $\tau = T \setminus \{\alpha\}$ – выборка, подчиненная T.

Покажем (в приведенных выше обозначениях), что δ – искомое. *Возьмем* произвольное T, $\lambda(T) < \delta$, и указанную чуть выше выборку τ.

Свойство (1) выполнено, поскольку всякое $t \in [\alpha, \beta]$ лежит в некотором $[t_{n-1}, t_n]$ (при этом $\Lambda(t) \in [z_{n-1}, z_n]$) , так что

$$|\gamma(t) - \Lambda(t)| \le \max\{|\gamma(t) - \gamma(t_{n-1})|\,, |\gamma(t) - \gamma(t_n)|\} \le \omega(\lambda(T)) \le$$

$$\le \omega(\delta) < \varepsilon < d/2\,.$$

Проверим (2). Согласно условиям на выбор δ,

$$\left|\int_{\Lambda} f(z)dz - \Sigma_{\gamma}(T,\tau,f)\right| \le$$

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\int_{\Lambda_n} f(z)dz - f(z_n)(z_n - z_{n-1})\right| =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\int_{\Lambda_n} (f(z) - f(z_n))dz\right| \le$$

$$\mu(\omega(\lambda(T)))\ell(\Lambda) < \mu(\omega(\delta))\ell(\gamma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая (4.1), получаем требуемое. □

Доказательство следствия тривиально.

4.20. Доказать, что для всякого многоугольника (ограниченного замкнутой жордановой ломаной, не обязательно выпуклого) найдутся 3 последовательные вершины такие, что определяемый ими треугольник целиком лежит в исходном многоугольнике.

4.21. Доказать, что если Γ – некоторая замкнутая ориентированная ломаная в $\mathbb{C}$, а f непрерывна на ее носителе $[\Gamma]$, то существуют замкнутые жордановы ломаные $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ с носителями в $[\Gamma]$ такие, что

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k} f(z)dz\,.$$

Лекция №5

Первообразная. Интегральная теорема Коши.

Первообразная и ее свойства

5.1. Определение. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$. Функция $F : G \to \mathbb{C}$ называется *первообразной* (комплексной первообразной) для f в G, если $F \in A(G)$ и $F'(z) = f(z)$ всюду в G.

5.2. Предложение. Если F – первообразная для f в G, то $\{F + c \,|\, c \in \mathbb{C}\}$ – совокупность *всех* первообразных для f в G.

Доказательство. Свести к случаю $f = 0$ и воспользоваться условиями Коши-Римана.

5.3. Теорема (о существовании первообразной в односвязной области). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – *односвязна*, а f удовлетворяет условию треугольника в G (всякая $f \in A(G)$ подходит). Тогда f имеет первообразную в D.

Доказательство. Фиксируем произвольное $a \in D$. При $z \in G$ положим $F(z) = \int_a^z f(\zeta)d\zeta$, где интеграл берется по любому спрямляемому пути в G, соединяющему a и z. По следствию из теоремы Коши все эти интегралы совпадают, так что F определена корректно и для всех $z \in G$ (G – линейно связна).

Фиксируем $z_0 \in G$ и пусть $|z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$, тогда

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| =$$

$$\left| \frac{1}{z - z_0} \left(\int\limits_a^z f(\zeta)d\zeta - \int\limits_a^{z_0} f(\zeta)d\zeta - f(z_0)(z - z_0) \right) \right| =$$

$$\frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{[z_0,z]} (f(\zeta) - f(z_0))d\zeta \right| \le \frac{1}{|z - z_0|} \|f - f(z_0)\|_{[z_0,z]} |z - z_0| =$$

$$\|f - f(z_0)\|_{[z_0,z]} \ \to \ 0$$

при $z \to z_0$ ввиду непрерывности f в точке z_0. $\square$

5.4. Следствие. Пусть G – односвязная область в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Тогда существует голоморфная ветвь $L(z)$ многозначной функции $\mathrm{Ln}\,(z)$ ("Логарифм") и голоморфная ветвь $V(z)$ многозначной функции $\sqrt[n]{z}$ ("корень степени n") в G. При этом $L'(z)=1/z$ и $V'(z)=V^{1-n}(z)/n$ в G. В частности, при $n=2$ имеем $V'(z)=1/(2V(z))$.

Доказательство. Фиксируем $a\in G$. По предыдущей теореме, функция $1/z\in A(G)$ имеет первообразную L в G с условием $L(a)\in\mathrm{Ln}\,(a)$. Утверждается, что L – искомая ветвь Логарифма. Действительно, пусть $E=\{z\in G\,|\,L(z)\in\mathrm{Ln}\,(z)\}$. По доказанному ранее у каждой точки $z_0\in G$ *есть* окрестность $B=B(z_0,r)$ в G (можно взять $r=\mathrm{dist}(z_0,\partial G)$) и голоморфная в B ветвь ψ Логарифма, удовлетворяющая $\psi'(z)=1/z$. Следовательно, $L-\psi=const$ в B. Отсюда легко следует, что E не пусто, открыто и замкнуто в G, т.е. $E=G$.

Искомая ветвь корня степени n в G имеет вид $V(z)=\exp\,(L(z)/n)$. По Теореме 2.17 (производная сложной функции):

$$V'(z)=\exp\,(L(z)/n)L'(z)/n=V(z)/(nz)=(V(z))^{1-n}/n\ .\ \square$$

Интегральная теорема Коши.

Теперь определим *ориентированную границу* произвольной *допустимой* области и интеграл *вдоль нее.*

Пусть $D_1,\dots,D_S$ – жордановы области в $\mathbb{C}$ ($S>1$ – натурально) с ориентированными границами $\partial^+D_1,\dots,\partial^+D_S$ соответственно. Предположим, что *замыкания* областей $D_2,\dots,D_S$ попарно не пересекаются и целиком содержатся внутри D_1. Можно доказать, что множество $D=D_1\setminus(\cup_{s=2}^{s=S}\overline{D_s})$ связно, т.е. *всегда* является областью (мы докажем это позже, как элементарное следствие из теоремы Римана о конформном отображении, а пока нам это нигде не потребуется).

5.5. Определение. Указанные множества D будем называть *допустимыми областями ранга* S (пользуясь, что они действительно *являются* областями, только в конкретных случаях, где это очевидно). Ранг жордановой области считается равным 1.

Из теоремы Жордана следует, что $\partial D=\cup_{s=1}^{S}\partial D_s$, поэтому указанное представление множества D (раз уж существует) единственно с точностью до порядка нумерации областей D_s, $s\geq 2$. Следовательно, определение ранга корректно.

В приведенных обозначениях дадим следующее

5.6. Определение. (Положительно) *ориентированной* границей допустимой области D ранга $S \geq 2$ называется совокупность (*цепь*) границ:

$$\partial^+ D = \{\partial^+ D_1, \partial^- D_2, \ldots, \partial^- D_S\}.$$

Для $f : \partial D \to \mathbb{C}$ интеграл от f вдоль (или *по*) $\partial^+ D$ определяется по формуле:

$$\int\limits_{\partial^+ D} f dz = \int\limits_{\partial^+ D_1} f dz - \sum_{s=2}^{S} \int\limits_{\partial^+ D_s} f dz,$$

при условии, что *все* интегралы справа существуют.

5.7. Упражнение. Дать определение *спрямляемости и длины* границы, $\ell(\partial D)$, допустимой области D.

5.8. Определение. Пусть $E \subset \mathbb{C}$. Будем говорить, что f *голоморфна на* E, если существует открытое множество U, содержащее E, такое, что f определена и $\mathbb{C}$-дифференцируема всюду в U.

5.9. Упражнение. Если D – область в $\mathbb{C}$ и $f \in A(\overline{D})$, то найдется *область* G, содержащая $\overline{D}$, с условием $f \in A(G)$.

5.10. Теорема (интегральная теорема Коши). Пусть D – допустимая область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей, $f \in A(\overline{D})$. Тогда

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = 0\,. \tag{5.1}$$

Доказательство. Проведем индукцию по рангу S допустимой области D. Пусть сначала $S = 1$, т.е. D – жорданова. Этот случай по теореме 4.17 сводится к следующей лемме.

5.11. Лемма. Пусть D – жорданова область, U – открытое множество, содержащее $\overline{D}$. Тогда найдется *односвязная* область G с условиями $\overline{D} \subset G \subset U$.

Доказательство леммы. Воспользуемся следующим утверждением, непосредственно вытекающим из определения односвязности (по Жордану): если $G_1, \ldots, G_N$ – конечное семейство односвязных областей в $\mathbb{C}$ и G – какая-либо непустая компонента связности их пересечения, то G – односвязная область.

Пусть B – некоторый (открытый) круг, содержащий $\overline{D}$. Будем считать, что B не содержится в U, иначе $G = B$ дает нужный ответ. Для каждой точки $a \in \overline{B} \setminus U$ пусть $d_a = \mathrm{dist}(a, \overline{D})$, $B_a = B(a, d_a/2)$. При $\overline{B_a} \subset B$ пусть L_a – носитель какой-либо жордановой ломаной, соединяющей ∂B_a и ∂B в $\overline{B} \setminus \overline{D}$ (причем кроме концов вся L_a лежит в $B \setminus \overline{D}$), в противном случае полагаем $L_a = \emptyset$. Определим $G_a = B \setminus (\overline{B_a} \cup L_a)$, так что всякая G_a – односвязна, ибо связна *ее граница.*

Выберем конечное покрытие $\{B_{a_n}\}_{n=1}^N$ мн-ва $\overline{B} \setminus U$ кругами $\{B_a \mid a \in \overline{B} \setminus U\}$. Искомая область G есть компонента связности пересечения $\cap_{n=1}^N G_{a_n}$, содержащая $\overline{D}$. $\square$

5.12. Продолжение индукции. Предположим, что теорема доказана для *всех* допустимых (со спрямляемой границей) областей D ранга $S-1$ $(S \geq 2)$ и *всех* $f \in A(\overline{D})$.

Пусть теперь $D = D_1 \setminus (\cup_{s=2}^S \overline{D_s})$ – допустимая область ранга S со спрямляемой границей $\partial^+ D = \{\partial^+ D_1, \partial^- D_2, \ldots, \partial^- D_S\}$, а f – голоморфна на некотором открытом множестве U, содержащем $\overline{D}$. Мы должны установить равенство (5.1).

Положим $K_1 = \partial D_1$, $K_2 = \partial D \setminus \partial D_1$. Из непрерывности функции $d(z,w) = |z-w|$ на компакте $K_1 \times K_2$ следует, что существуют $z_1 \in K_1$ и $z_2 \in K_2$, ближайшие друг к другу, т.е. $|z_1 - z_2| = \mathrm{dist}(K_1, K_2)$. Без ограничения общности *будем* считать, что $z_2 \in \partial D_2$.

5.13. Построение "коридора". Всюду в этом пункте параметр s принимает значения 1 и 2 (т.е. все условия и построения одновременно выполняются для обоих значений s).

Фиксируем какие-либо (замкнутые, жордановы спрямляемые) пути $\gamma_s : [\alpha_s, \beta_s] \to \mathbb{C}$ из $\partial^+ D_s$ с условиями $\gamma_s(\alpha_s) \neq z_s$.

Выберем $d \in (0, |z_1 - z_2|/4)$, удовлетворяющее условиям:

(1) $B(z_s, d) \subset U$;

(2) $d < |\gamma_s(\alpha_s) - z_s|$.

Пусть a_s – точка на отрезке $[z_1, z_2]$ такая, что $|a_s - z_s| = d$. Мы находимся в условиях пункта **4.5**(Лекция 4), т.е. при $\gamma = \gamma_s$, $a = a_s$, $\delta < d$ определен путь $\gamma_s(a_s, \delta)$ (а также соответствующие параметры t_{0s} , $t^-_{\delta s}$, $t^+_{\delta s}$, $z_s = \gamma_s(t_{0s})$). Пусть γ^δ_s – сужение пути γ_s на $[t^-_{\delta s}\, , t^+_{\delta s}]$. Теперь *фиксируем* δ так, что $[\gamma^\delta_s] \subset B(z_s, d/2)$.

Пусть σ_s – сужение пути $\gamma_s(a_s, \delta)$ на $[t^-_{\delta s}\, , t^+_{\delta s}]$. Напомним, что параметризация на *окружности* σ_s выбрана так, что $b_s := \sigma_s(t_{0s}) \in [z_1, z_2]$.

Наконец, выберем $\varepsilon \in (0, t^+_{\delta s} - t_{0s})$ так, что $c_s = \sigma_s(t_{0s} + \varepsilon) \in B(z_{3-s}, |z_1 - z_2|)$, и пусть σ^ε_s – сужение σ_s на $[t_{0s}, t_{0s} + \varepsilon]$. Рассмотрим замкнутую кривую

$$\Gamma^*_1 = (\{\gamma_1(a_1, \delta)\} \backslash \{\sigma^\varepsilon_1\}) \cup [b_1, b_2] \cup (\{\gamma_2(a_2, \delta)\} \backslash \{\sigma^\varepsilon_2\})^- \cup [c_2, c_1] \quad (5.2)$$

Она спрямляема и *жорданова*, поскольку σ_1 проходится *по часовой стрелке* ($a_1 \in D_1$), а σ_2 – *против часовой стрелки* ($a_2 \notin \overline{D_2}$), так что отрезки $[b_1, b_2]$ и $[c_2, c_1]$ не пересекаются. Построение “коридора"закончено.

5.14. Окончание доказательства интегральной теоремы Коши.

Пусть D^*_1 – область, ограниченная Γ^*_1. Докажем, что $\overline{D_s} \subset D^*_1$ при $s \geq 3$ (если таковые есть). По Теореме 4.3 достаточно установить, что $\mathrm{ind}_w(\Gamma^*_1) = 1$ для любого $w \in \overline{D_s}$, $s \geq 3$. Обозначим через Π открытый криволинейный четырехугольник, ограниченный $[b_1, b_2]$, $\{\sigma^\varepsilon_2\}$, $[c_2, c_1]$ и $\{\sigma^\varepsilon_1\}^-$. Согласно Упражнению 1.28, имеем:

$$\mathrm{ind}_w(\Gamma^*_1) = \mathrm{ind}_w(\gamma_1(a_1, \delta)) - \mathrm{ind}_w(\gamma_2(a_2, \delta)) - \mathrm{ind}_w(\partial^+\Pi)\ .$$

Остается учесть, что $\mathrm{ind}_w(\gamma_1(a_1, \delta)) = \mathrm{ind}_w(\gamma_1) = 1$ (ибо $w \in D_1$), $\mathrm{ind}_w(\gamma_2(a_2, \delta)) = \mathrm{ind}_w(\gamma_2) = 0$ ($w \notin \overline{D_2}$), $\mathrm{ind}_w(\partial^+\Pi) = 0$ ($w \notin \overline{\Pi}$). Аналогично доказывается, что $\overline{D^*_1} \subset U$.

Таким образом, $D^* = D^*_1 \setminus (\cup^S_{s=3} \overline{D_s})$ (последнее объединение отсутствует при $S = 2$) – допустимая область ранга $S - 1$ со спрямляемой границей. По предположению индукции, $\int_{\partial^+ D^*} f(z)dz = 0$. Остается установить, что последний интеграл равен $\int_{\partial^+ D} f(z)dz$. Действительно, слагаемые $\int_{\partial^+ D_s} f(z)dz$, $s \geq 3$, у этих интегралов общие, $\int_{\partial^+ \Pi} f(z)dz = 0$ по первому шагу индукции, $\int_{\sigma_s} f(z)dz = \int_{\gamma^\delta_s} f(z)dz$ по теореме Коши в односвязной области $B(z_s, d)$ ($s = 1$ и 2), так что из (5.2) окончательно получаем:

$$\int_{\Gamma^*_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1(a_1, \delta)} f(z)dz - \int_{\gamma_2(a_2, \delta)} f(z)dz - \int_{\partial^+ \Pi} f(z)dz =$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz \ .$$

Теорема доказана. $\square$

Через несколько лекций мы докажем более общий и трудный вариант предыдущей теоремы:

5.15. Теорема (усиленная интегральная теорема Коши). Пусть D – допустимая область со спрямляемой границей, $f \in A(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда $\int_{\partial^+ D} f dz = 0$.

5.16. Доказать справедливость последней теоремы, когда D – круг или кольцо.

5.17. Если Γ – замкнутая спрямляемая кривая, не проходящая через точку $a \in \mathbb{C}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = \mathrm{ind}_a(\Gamma).$$

5.18. Интегралом типа Коши называется интеграл вида

$$F(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \ ,$$

где Γ – спрямляемая кривая, f – непрерывна на ее носителе $[\Gamma]$. Доказать, что F – голоморфна вне $[\Gamma]$ и $F(\infty) = 0$. Найти $f'(\infty)$.

Лекция №6

Интегральная формула Коши и ее основные следствия

Интегральная формула Коши

6.1. Теорема (интегральная формула Коши). Пусть D – допустимая область со спрямляемой границей, $f \in A(\overline{D})$. Тогда для любого $z_0 \in D$ справедлива формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)dz}{z - z_0} \ .$$

Доказательство. Фиксируем $z_0 \in D$ и пусть $d = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. При $\delta \in (0, d/2)$ положим $D_\delta = D \setminus \overline{B(z_0, \delta)}$, $\Gamma_\delta^+ = \partial^+ B(z_0, \delta)$. Тогда D_δ – допустимая область со спрямляемой границей и $f_1(z) := f(z)/(z - z_0) \in A(\overline{D_\delta})$. По интегральной теореме Коши

$$\int_{\partial^+ D_\delta} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 0 \ ,$$

так что

$$\int_{\partial^+ D} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \int_{\Gamma_\delta^+} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

и остается доказать, что

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta^+} \frac{f(z)dz}{z - z_0} \ .$$

Поскольку последний интеграл не зависит от δ (это непосредственно вытекает из предпоследнего равенства) и, по доказанному ранее,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta^+} \frac{dz}{z - z_0} = 1 \ ,$$

то нужное утверждение получается из следующей оценки:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta^+} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_\delta^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\|f-f(z_0)\|_{[\Gamma_\delta]}\frac{1}{\delta}2\pi\delta = \|f-f(z_0)\|_{[\Gamma_\delta]} \to 0 \text{ при } \delta \to 0\ ,$$

которая, в свою очередь, следует из непрерывности f в точке z_0. $\square$

6.2. Теорема (о среднем). Пусть $f \in A(\overline{B(z_0,R)})$, $R \in (0,+\infty)$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})d\varphi\ .$$

Доказательство. По интегральной формуле Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^+}\frac{f(z)dz}{z-z_0}\ ,$$

где $\Gamma_R^+ = \partial^+ B(z_0,R)$. Остается вычислить последний интеграл с помощью стандартной параметризации кривой $\Gamma_R^+ :\ \{z = z_0 + Re^{i\varphi}\,|\,\varphi \in [-\pi,\pi]\}$. $\square$

6.3. Теорема (принцип максимума модуля). Пусть D – произвольная область в $\overline{\mathbb{C}}$, $D \neq \overline{\mathbb{C}}$. Если $f \in A(D)\cap C(\overline{D})$, то для любого $z_0 \in D$ имеем

$$|f(z_0)| \leq \max_{z\in\partial D}|f(z)|. \tag{6.1}$$

При этом, если для некоторого $z_0 \in D$ неравенство (6.1) обращается в равенство, то f постоянна в D.

При $\infty \in \overline{D}$ непрерывность f на $\overline{D}$ понимается в смысле топологии $\mathbb{C}$.

Доказательство. Напомним, что максимум всякой непрерывной на компакте функции достигается.

Достаточно доказать, что если найдется $z_0 \in D$ с условием $|f(z_0)| \geq \max_{\partial D}|f(z)|$, то f – постоянна. Пусть такое z_0 существует. Без ограничения общности мы можем предположить, что $M = \max_{\overline{D}}|f(z)| = |f(z_0)|$ (проверить!). Положим $E = \{z \in D\,|\,|f(z)| = M\}$. Ясно, что $E \neq \emptyset$ и E замкнуто в D (последнее вытекает из непрерывности f). Открытость E следует из теоремы о среднем (провести доказательство!). Из связности D получаем, что $E = D$. Итак, $|f(z)| \equiv M$ на $\overline{D}$. Остается доказать, что $f'(z) = 0$ всюду в D. Случай $M = 0$ тривиален, пусть далее $M \neq 0$. Если, отпротивного, существует $z_1 \in D$ с условием $f'(z_1) \neq 0$, то из определения $\mathbb{C}$-дифференцируемости получаем, что $f(z) = f(z_1) + f'(z_1)(z - z_1) + o(z - z_1)$, так что $|f(z)|$ не может быть постоянным ни в какой окрестности точки z_1. Противоречие. Случай $\infty \in D$ оставляем читателю. $\square$

6.4. Упражнение. Пусть D – произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}$ и $f \in A(D)$, причем *все предельные значения* функции $|f(z)|$ на ∂D изнутри D не превышают константы $M \in [0, +\infty)$. Тогда для любого $z \in D$ имеем $|f(z)| \leq M$.

6.5. Теорема (основная теорема алгебры). Пусть $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ – произвольный многочлен комплексного переменного z, $a_n \neq 0$. Тогда p имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней с учетом кратности.

Доказательство. Пусть $n \geq 1$. По индукции и теореме Безу все сводится к доказательству существования хотя бы одного корня. Пусть, от противного, $p(z) \neq 0$ при всех z. Тогда $f(z) = 1/p(z)$ – целая функция. Поскольку $|p(z)| \to +\infty$ при $z \to \infty$, мы получаем, что $|f(z)| \to 0$ при $z \to \infty$. Применяя принцип максимума модуля для f в кругах достаточно большого радиуса (с центром в 0), получаем, что $f(0) = 0$. Противоречие. $\square$

6.6. Теорема (формула Коши для производных и бесконечная дифференцируемость голоморфных функций). Пусть D – допустимая область со спрямляемой границей, $f \in A(\overline{D})$. Тогда для любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $z_0 \in D$ справедлива формула:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}} ,$$

в частности, $f^{(k)}$ голоморфна в D.

Доказательство. По индукции. Пусть формула справедлива для данного k и *всех* $z_0 \in D$. Докажем ее справедливость для $k+1$ и всех $z_0 \in D$. Фиксируем $z_0 \in D$ и положим $d = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Пусть всюду далее $\Delta z \in B(0, d)$, $\Delta z \neq 0$. Имеем:

$$(f^{(k)}(z_0 + \Delta z) - f^{(k)}(z_0))/\Delta z = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} f(z) g_{\Delta z}(z) dz ,$$

где

$$g_{\Delta z}(z) = \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)^{k+1}} - \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \right) .$$

Остается доказать, что $g_{\Delta z} \rightrightarrows g_0$ на ∂D при $\Delta z \to 0$ (где $g_0(z) = (k+1)(z-z_0)^{-k-2}$) и воспользоваться Предложением 4.2. Для доказательства указанной равномерной сходимости следует учесть, что

$$g_{\Delta z}(z) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(z-z_0)^j (z-z_0-\Delta z)^{k+2-j}} \,,$$

причем $\|(z-z_0-\Delta z)^{-1} - (z-z_0)^{-1}\|_{\partial D} = O(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. $\square$

6.7. Следствие. Если f имеет в D комплексную первообразную, то $f \in A(D)$.

6.8. Теорема (Мореры). Пусть D – произвольная область в $\mathbb{C}$, $f \in C(D)$ и для всякого треугольника Δ с условием $\overline{\Delta} \subset D$ имеет место $\int_{\partial^+\Delta} f(z)dz = 0$. Тогда $f \in A(D)$.

Доказательство. Воспользоваться Теоремой 5.3 (в кругах из D) и последним Следствием. $\square$

6.9. Определение. Пусть D – область в $\mathbb{C}$. Последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n : D \to \mathbb{C}$ сходится *равномерно внутри* D к функции f при $n \to \infty$, если эта последовательность сходится к f равномерно на всяком компакте K из D (т.е. $\|f - f_n\|_K \to 0$ при $n \to \infty$).

6.10. Замечание. Равномерная сходимость внутри D *слабее* равномерной сходимости в (на) области D. В качестве примера можно взять $D = B(0,1)$, $f_n(z) = z^n$ ($n = 1, 2, \cdots$), $f = 0$.

6.11. Определение. Пусть D – область в $\mathbb{C}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функций $f_n : D \to \mathbb{C}$ сходится *равномерно внутри* D к своей сумме S, если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда сходится к S равномерно внутри D при $n \to \infty$.

6.12. Теорема (Вейерштрасса). Пусть $\{f_n\} \subset A(D)$ равномерно внутри D сходится к функции f при $n \to \infty$. Тогда $f \in A(D)$ и для всякого $k \in \{1, 2, \cdots\}$ последовательность $\{f_n^{(k)}\}$ сходится к $f^{(k)}$ равномерно внутри D при $n \to \infty$.

Доказательство. Свойство $f \in A(D)$ следует из Леммы 4.12 (Гурсы), Предложения 4.2 и Теоремы 6.8 (Морера).

Из соображений индукции и компактности нам достаточно установить, что $\|f_n' - f'\|_K \to 0$ при $n \to +\infty$, где K – произвольный замкнутый круг в D. Пусть $K = \overline{B(a,r)}$ и $d > 0$ таково, что $\overline{B(a,r+d)} \subset D$. Положим $\Gamma^+ = \partial^+ B(a, r+d)$ ($\Gamma = \partial B(a,r+d)$ – компакт в D) и воспользуемся Теоремой 6.6 для f_n и f в области $B(a,r+d)$ при $k=1$. Если $z_0 \in K$, то

$$|f_n'(z_0) - f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma^+} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-z_0)^2} dz\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\|f_n - f\|_\Gamma d^{-2} 2\pi(r+d) \ \to \ 0$$

при $n \to \infty$, поскольку $f_n \to f$ равномерно на Γ. $\square$

Мы оставляем для самостоятельного изучения (или повторения) следующие темы, *аккуратное* изложение которых можно найти, например, в цитируемом ранее (см. аннотацию) учебнике Б.В. Шабата.

Доказательство теоремы Коши о разложении голоморфной в круге функции в ряд Тейлора (см. ниже), вывод "табличных" разложений Тейлора, свойств степенных рядов (теорема Абеля, круг сходимости, формула Коши-Адамара, почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда). Нули голоморфных функций (порядок нуля, теорема единственности), ряды Лорана (кольцо сходимости, теорема Лорана, неравенства Коши), изолированные особые точки голоморфных функций и их классификация (в терминах пределов и в терминах рядов Лорана), Теорема Сохоцкого, Лемма Шварца и автоморфизмы круговых областей, вычеты и их вычисление.

Приведем формулировки следующих трех теорем ввиду их важности.

6.13. Теорема Коши о разложении в ряд Тейлора. Пусть $f \in A(B(z_0, r))$, $r \in (0, +\infty]$. Тогда f разлагается *во всем круге* $B(z_0, r)$ в *степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \ ,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

при произвольном фиксированном $\rho \in (0, r)$. Указанный ряд сходится (к f) абсолютно и равномерно внутри $B(z_0, r)$.

6.14. Теорема (единственности). Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $f \in A(D)$ и множество ее нулей имеет хотя бы одну предельную точку в D. Тогда $f \equiv 0$ в D.

6.15. Теорема (Лорана). Пусть $V = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ – *кольцо* с центром z_0 $(0 \le r < R \le +\infty)$, $f \in A(V)$. Тогда f разлагается *всюду в* V в *обобщенный степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

при произвольном фиксированном $\rho \in (r, R)$. Указанный ряд сходится (к f) абсолютно и равномерно внутри V.

Лекция №7

Формула Помпейю.
Стандартное разбиение единицы.
Основные пространства функций.

Формула Помпейю

Напомним, что если f есть $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция в точке $a \in \mathbb{C}$, то, по определению,

$$\overline{\partial} f(a) = \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_a = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_a .$$

По теореме Коши-Римана f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $\in \mathbb{C}$, если и только если она $\mathbb{R}$-дифференцируема в этой точке и $\overline{\partial} f(a) = 0$.

Оператор $\overline{\partial} : f \to \overline{\partial} f$ называют оператором Коши-Римана.

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$. Положим $C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) : \mathrm{supp}(f)$ – компакт в $\Omega\}$, где $\mathrm{supp}(f)$ - наименьшее замкнутое подмножество из Ω, вне которого f обращается в ноль (в Ω). При $k = 0$ пишем $C_0^0(\Omega) = C_0(\Omega)$.

7.1. Теорема (формула Помпейю). Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$, тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)dm(\zeta)}{z-\zeta},$$

где $m(\cdot)$ – мера Лебега в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Фиксируем $z \in \mathbb{C}$ и найдем $R > 0$ с условием $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(z, R)$. Введем полярные координаты ρ, θ с центром z:

$$\zeta - z = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \overline{\zeta - z} = \rho e^{-i\theta}$$

при $\zeta \neq z$. Таким образом,

$$e^{2i\theta} = \frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \quad , \quad \rho^2 = (\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z}) .$$

Дифференцируя последние два равенства по $\overline{\zeta}$, находим:

$$e^{2i\theta}2i\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = -\frac{\zeta - z}{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2} \quad , \quad 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \zeta - z\ ,$$

откуда

$$\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{ie^{i\theta}}{2\rho} \quad , \quad \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{e^{i\theta}}{2}\ .$$

Рассмотрим $F(\rho,\theta) = \varphi(\zeta) = \varphi(z+\rho e^{i\theta})$, являющуюся 2π -периодической по θ при $\rho > 0$. Тогда при $\zeta \neq z$ имеем:

$$\overline{\partial}\varphi(\zeta) = F'_\rho\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} + F'_\theta\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = F'_\rho\frac{e^{i\theta}}{2} + F'_\theta\frac{ie^{i\theta}}{2\rho}\ .$$

Интегрируя повторно в полярных координатах и учитывая периодичность F по θ, получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)dm(\zeta)}{z-\zeta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_\delta^R (F'_\rho\frac{e^{i\theta}}{2} + F'_\theta\frac{ie^{i\theta}}{2\rho})\frac{1}{-\rho e^{i\theta}}\rho d\rho d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\left(\int_0^{2\pi}\int_\delta^R F'_\rho d\rho d\theta + \int_\delta^R\int_0^{2\pi} F'_\theta d\theta\frac{i}{\rho}d\rho\right) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(F(\delta,\theta) - F(R,\theta))d\theta = \varphi(z),$$

где в последнем равенстве мы пользуемся непрерывностью φ в точке z и условием $F(R,\theta) = 0$. Отметим, что переходом к введенным выше полярным координатам легко доказывается и абсолютная сходимость исходного интеграла. □

7.2. Замечание. При $z = 0$ имеем:

$$\varphi(0) = \frac{-1}{\pi}\int\frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)dm(\zeta)}{\zeta}.$$

По определению обобщенных производных последнее означает, что $\overline{\partial}(1/(\pi\zeta))$ есть δ-функция Дирака, т.е. $1/(\pi\zeta)$ есть *фундаментальное решение* уравнения Коши-Римана $\overline{\partial}f = 0$.

Стандартное разбиение единицы

Пусть $\mathbb{Z}^2 = \{j = (j_1, j_2) \equiv j_1 + ij_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$ – стандартная 1-решетка, $\delta\mathbb{Z}^2 = \{a_j \equiv \delta j_1 + i\delta j_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$ – стандартная δ-решетка ($\delta > 0$) в $\mathbb{C}$ и

$$Q_j^\delta = [\delta j_1, \delta(j_1 + 1)) \times [\delta j_2, \delta(j_2 + 1))$$

– соответствующие последней решетке квадраты, покрывающие $\mathbb{C}$. Фиксируем функцию

$$\varphi^1 \in C_0^1(B(0,1)), \quad 0 \le \varphi^1 \le 1, \quad \int_{B(0,1)} \varphi^1(z)dm(z) = 1.$$

Пусть $c_1 = \|\overline{\partial}\varphi^1\|$, где, как и ранее, при произвольном $E \subset \mathbb{C}$ полагаем

$$\|f\|_E = \sup\{|f(z)| : z \in E\}, \quad \|f\| = \|f\|_{\mathbb{C}}.$$

Фиксируем $\delta > 0$. Пусть $\varphi^\delta(z) = \delta^{-2}\varphi^1(z/\delta)$, $Q_j = Q_j^\delta$, $\chi_{Q_j} \equiv \chi_j$ – индикатор Q_j (т.е. $\chi_j = 1$ на Q_j и $\chi_j = 0$ вне Q_j).

При $j \in \mathbb{Z}^2$ определим

$$\varphi_j^\delta(z) \equiv \varphi_j(z) = \int \varphi^\delta(z - \zeta)\chi_j(\zeta)dm(\zeta)$$

– функции разбиения единицы. Справедлива

7.3. Лемма. Пусть $B_j = B(a_j, 3\delta), j \in \mathbb{Z}^2$, тогда

$$\varphi_j \in C_0^1(B_j), \quad 0 \le \varphi_j \le 1, \quad \|\overline{\partial}\varphi_j\| \le \frac{c_1}{\delta}, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1 \text{ на } \mathbb{C},$$

причем каждая точка z принадлежит не более чем 50 кругам B_j.

Доказательство. Если $|z - a_j| \ge 3\delta$ и $\zeta \in Q_j$, то $|z - \zeta| > \delta$, откуда $\varphi^\delta(\zeta - z) = 0$, так что $\varphi_j(z) = 0$. Далее, дифференцируя по переменным x и y ($z = x + iy$), по определению $\overline{\partial}\varphi_j(z)$ получаем:

$$\overline{\partial}\varphi_j(z) = \int \overline{\partial}\varphi^\delta(z - \zeta)\chi_j(\zeta)dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$.

Для любого z имеем:

$$|\overline{\partial}\varphi_j(z)| \le \int_{Q_j} |\overline{\partial}\varphi^\delta(z-\zeta)|dm(\zeta) \le \frac{c_1}{\delta},$$

поскольку

$$\overline{\partial}\varphi^\delta(w) = \overline{\partial}(\frac{1}{\delta^2}\varphi^1(\frac{w}{\delta})) = \frac{1}{\delta^3}[\overline{\partial}\varphi^1](\frac{w}{\delta}),$$

и, следовательно, $\|\overline{\partial}\varphi^\delta\| \le c_1/\delta^3$.

Осталось доказать, что $\sum_j \varphi_j \equiv 1$. Действительно:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j(z) = \int \varphi^\delta(z-\zeta) \sum_j \chi_j(\zeta) dm(\zeta) = \int \varphi^\delta(z-\zeta)\, dm(\zeta) = 1. \ \square$$

Определения основных пространств функций

7.4. Введем (или напомним) ряд общепринятых обозначений, важных для дальнейшего. Пусть H – произвольное множество в $\mathbb{C}$. Обозначим через $A(E)$ класс функций f, каждая из которых определена и голоморфна в некоторой (своей) окрестности U_f множества E (если E открыто, то $A(E)$ есть класс всех голоморфных на E функций). Как и ранее, $C(E)$ – пространство всех комплекснозначных *непрерывных и ограниченных* на E функций f с равномерной нормой $\|f\|_E$. Для *компакта* X через (X) обозначается *замыкание* в $C(X)$ подпространства $\{P\}|_X$, где $\{P\}$ – совокупность всех полиномов комплексного переменного z. Ясно, что $f \in P(X)$, если и только если f равномерно на X приближается (с любой точностью) полиномами от z. Определим еще пространство $R(X)$ – замыкание в $C(X)$ подпространства $\{g|_X\}$, где g пробегает класс всех рациональных функций (от z) с полюсами вне X. По аналогии, $f \in R(X)$ тогда и только тогда, когда f равномерно на X приближается рациональными функциями. Наконец, положим $C_A(X) = C(X) \cap A(X^o)$, где E^o – множество внутренних точек множества E. Следующие включения очевидны:

$$P(X) \subseteq R(X) \subseteq C_A(X) \subseteq C(X).$$

Иначе говоря, приближать полиномами и рациональными функциями (равномерно на X) можно только функции класса $C_A(X)$ ("простейшее"необходимое условие приближаемости).

Напомним, что компонентой (связности) множества E в $\mathbb{C}$ называется всякое максимальное связное подмножество из E. Если E – открыто, то всякая его связная компонента является областью, причем E есть конечное или счетное объединение своих компонент. Поэтому, если X – компакт, то его *дополнение* состоит из неограниченной компоненты Ω и ограниченных компонент $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ (если они есть).

7.5. Определение. *Оболочкой* компакта в $\mathbb{C}$ (обозначается через $\widehat{X}$) называется объединение компакта X и всех ограниченных компонент его дополнения.

Условие $X = \widehat{X}$ очевидно означает, что $\mathbb{C} \setminus X = \Omega$ – связно.

В 1885 г. К. Вейерштрасс и К. Рунге доказали свои знаменитые теоремы о равномерных приближениях функций полиномами. Приведем их формулировки, используя введенные выше обозначения.

7.6. Теорема (Вейерштрасса). Пусть X – отрезок на вещественной оси, тогда $C(X) = P(X)$.

7.7. Теорема (Рунге). Пусть – произвольный компакт в $\mathbb{C}$, тогда

1. $A(X) \subset R(X)$;
2. $\{A(X) \subset P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

Нашей ближайшей целью является доказательство теоремы Рунге. Одной из основных задач этого раздела является доказательство следующего *критерия* полиномиальной аппроксимации, полученного С.Н. Мергеляном в 1952 г.

7.8. Теорема (Мергеляна). $\{C_A(X) = P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

Лекция №8

Свойства потенциала Коши. Доказательство теоремы Рунге

Свойства потенциала Коши

Нам неоднократно понадобится следующее утверждение.

8.1. Лемма. Пусть - компакт, $h \in L_\infty(K, m(\cdot))$. Положим

$$f(z) = \int_K \frac{h(\zeta)dm(\zeta)}{z-\zeta}$$

(интеграл абсолютно сходится при всех z, см. ниже). Тогда

(а) Для любого компакта X с условием $X \cap K = \emptyset$ имеем $f \in R(X)$, причем f равномерно на с любой точностью приближается рациональными дробями вида

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z-a_n}, \quad \text{где } a_n \in K, \quad \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

(б) Функция f голоморфна вне , $f \in C(\overline{\mathbb{C}})$, $f(\infty) = 0$, причем

$$\|f\| = \|f\|_{\overline{\mathbb{C}}} \le 2M\sqrt{\pi m(K)},$$

где $M = \|h\|_{K,m}$ – норма h в $L_\infty(K, m(\cdot))$.

8.2. Замечание. Функция f, определенная в предыдущей лемме, называется *потенциалом Коши* функции h *по мере Лебега* $m(\cdot)$. При этом наша функция h *финитна*, т.е. обращается в ноль вне компакта K.

Доказательство Леммы 8.1. (а) Пусть $d = \operatorname{dist}(X, K)$, $d > 0$. При $\mu \in (0, d/2)$ разобьем K на конечное число ($N = N(\mu)$) попарно непересекающихся борелевских множеств K_n, $1 \le n \le N$, с условиями $\operatorname{diam}(K_n) < \mu$. Фиксируем

$$a_n \in K_n, \quad \lambda_n = \int_{K_n} h(\zeta)dm(\zeta),$$

тогда при $z \in X$ получаем:

$$\Big|\int_K \frac{h(\zeta)dm(\zeta)}{z-\zeta} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z-a_n}\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{N} \int_{K_n} \frac{h(\zeta)dm(\zeta)}{z-\zeta}$$

$$-\sum_{n=1}^{N} \int_{K_n} \frac{h(\zeta)dm(\zeta)}{z-a_n}\Big| \le \sum_{n=1}^{N} M \int_{K_n} \Big|\frac{(z-a_n)-(z-\zeta)}{(z-\zeta)(z-a_n)}\Big| dm(\zeta)$$

$$\le M \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu}{d^2} m(K_n) \le \frac{m(K)M}{d^2}\mu \to 0 \quad \text{при } \mu \to 0.$$

(б) Поскольку функции $\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z-a_n}$ голоморфны вне K, то в силу (а) и теоремы Вейерштрасса f голоморфна вне K. Свойство $f(\infty) = 0$ очевидно. Оценим $|f(z)|$ для произвольного $z \in \mathbb{C}$. Пусть $r = \sqrt{m(K)/\pi}$. Поскольку $m(B(z,r)) = m(K)$ и функция $1/|\zeta - z|$ *убывает* при удалении ζ от (фиксированного) z, мы получаем:

$$|f(z)| \le M \int_K \frac{1}{|z-\zeta|} dm(\zeta) \le M \int_{B(z,r)} \frac{1}{|z-\zeta|} dm(\zeta) =$$

$$M \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\rho d\rho d\theta}{\rho} = 2M\pi r = 2M\sqrt{\pi m(K)},$$

причем вместе с нужной равномерной оценкой мы автоматически доказали абсолютную сходимость (при всех z) интеграла, определяющего f. Непрерывность f вытекает из Леммы 8.4 ниже. $\square$

8.3. Определение. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $\tau \in (0, 1]$. Пространство $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ есть совокупность функций $g \in C(E)$, для каждой из которых найдется $c = c(g) \in [0, \infty)$ с условиями

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le c|z_1 - z_2|^\tau, \quad |g(z_1)| \le c$$

для всех $z_1, z_2 \in E$. Банахова норма в $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ определяется так: $\|g\|_{\tau,E} = \min\{c(g)\}$, где (достигающийся) min берется по всем $c(g)$, удовлетворяющим последним двум неравенствам (проверить!).

Очевидно, что $\mathrm{Lip}_\tau(E) \subset C(E)$ при всех $\tau \in (0,1]$.

8.4. Лемма. В условиях Леммы 8.1, для любого $\tau \in (0,1)$ имеем $f \in \mathrm{Lip}_\tau \mathbb{C}$, причем $\|f\|_{\tau,\mathbb{C}} \le Mc(\tau, K)$. Однако найдется K, такой, что даже при $h \equiv 1|_K$ имеем $f \notin \mathrm{Lip}_1(\mathbb{C})$.

Доказательство. Фиксируем $z_1 \ne z_2$ и пусть $\delta = |z_1 - z_2|/2$, $a = (z_1+z_2)/2$, $D_1 = B(z_1,\delta)$, $D_2 = B(z_2,\delta)$, $D_3 = B(a, 2\delta) \setminus (D_1 \cup D_2)$, $D_4 = \mathbf{C} \setminus B(a, 2\delta)$. Нам нужно оценить слагаемые в правой части неравенств:

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le \sum_{s=1}^{4} \int_{D_s \cap K} |h(\zeta)| \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \zeta||z_2 - \zeta|} dm(\zeta) \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{4} 2M\delta \int_{D_s \cap K} \frac{1}{|z_1 - \zeta||z_2 - \zeta|} dm(\zeta).$$

Слагаемое, соответствующее $s = 1$ ($s = 2$ аналогично), оценивается сверху величиной $4\pi M\delta$ как в предыдущей лемме переходом к полярным координатам с центром z_1 и интегрированием по всему D_1. Слагаемое при $s = 3$ оценивается сверху тривиально (тем же $4\pi M\delta$). Выберем $r > 0$ так, что $m(B(a,r) \cap D_4) = m(K)$. При интегрировании по D_4 мы пользуемся оценкой $|z_1 - \zeta||z_2 - \zeta| \ge |\zeta - a|^2/4$, монотонным убыванием подинтегральной функции (от $|\zeta - a|$) и полярными координатами с центром a:

$$\int_{D_4 \cap K} \frac{1}{|z_1 - \zeta||z_2 - \zeta|} dm(\zeta) \le \int_{D_4 \cap K} \frac{4}{|\zeta - a|^2} dm(\zeta) \le$$

$$8\pi \int_{2\delta}^{r} \rho^{-1} d\rho = 8\pi \ln(r/(2\delta)).$$

Теперь легко видеть, что при фиксированном $\tau \in (0,1)$ величина $|f(z_1) - f(z_2)|/(|z_1 - z_2|^\tau)$ имеет оценку сверху, не зависящую от z_1 и z_2, если $\delta < 1$. Случай $\delta \ge 1$ оставляем читателю.

Контрпример для $\tau = 1$ строится так. Полагаем $K = \{z : |z| \le 1, \mathrm{Re}(z) \ge |\mathrm{Im}(z)|\}$ и рассматриваем $z_1 = 0$, $z_2 = -2\delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. $\square$

Доказательство Теоремы 7.7 (Рунге). (1). Докажем, что $A(X) \subset R(X)$ для любого компакта X.

Пусть f голоморфна в d-окрестности U_d компакта , надо приблизить f рациональными функциями. Пусть $\delta = d/7$. Построим стандартное 3δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}$ (см. Лемму 7.3) : $B_j = B(a_j, 3\delta)$ $(a_j \in \delta\mathbb{Z}^2)$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$, $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1$. Пусть

$$J = \{j \in \mathbb{Z}^2 : \ B_j \subset U_d\}, \quad \varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j \in C_0^1(U_d).$$

Ясно, что $\varphi = 1$ в δ-окрестности U_δ компакта , $\varphi = 0$ вне U_d.

Положим $g = f\varphi$, $g \in C_0^1(\mathbb{C})$. По Теореме 7.1 (Помпейю), при $z \in X$ имеем:

$$f(z) = g(z) = \frac{1}{\pi}\int_{U_d\setminus U_\delta} \frac{\overline{\partial} g(\zeta) dm(\zeta)}{z-\zeta},$$

поскольку $\overline{\partial} g(\zeta) = \overline{\partial} f(\zeta) = 0$ в U_δ. Остается воспользоваться Леммой 8.1 при $h(\zeta) = \overline{\partial} g(\zeta)$, $K = \overline{U_d} \setminus U_\delta$.

Следует отметить, что при доказательстве этой части теоремы Рунге как правило пользуются интегральной формулой Коши. Однако для *аккуратного* ее применения (при построении специального контура интегрирования) требуются дополнительные топологические построения, которые в контексте нашего изложения проще обойти интегрированием по площади, т.е. с помощью формулы Помпейю.

(2). Надо показать, что $\{A(X) \subset P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

($\Rightarrow$). Пусть, от противного, $A(X) \subset P(X)$, но $\mathbb{C} \setminus X$ не связно, т.е. существует ограниченная связная компонента Ω_1 в $\mathbb{C} \setminus X$, в частности $\partial\Omega_1 \subset X$. Фиксируем $a_1 \in \Omega_1$. Так как $f(z) = 1/(z - a_1) \in A(X) \subset P(X)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется полином $p_\varepsilon(z)$ с условием $|1/(z - a_1) - p_\varepsilon(z)| < \varepsilon$ при всех $z \in X$ и, в частности, при $z \in \partial\Omega_1$. Пусть $d = \mathrm{diam}(\Omega_1)$, тогда

$$|1 - p_\varepsilon(z)(z - a_1)| \le \varepsilon d, \quad \forall z \in \partial\Omega_1.$$

При $\varepsilon < 1/d$ мы получаем противоречие с принципом максимума модуля в Ω_1, так как функция $1 - p_\varepsilon(z)(z - a_1)$ равна 1 при $z = a_1$.

($\Leftarrow$). Пусть $\Omega = \mathbb{C} \setminus X$ – связно, $f \in A(X)$. Согласно (1), для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $\{a_1, \cdots, a_N\} \subset \Omega$ и $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ такие, что

$$|f(z) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z - a_n}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in X.$$

Остается доказать, что $1/(z-a)|_X \in P(X)$ при всех $a \in \Omega$ (потом каждую функцию $\lambda_n/(z-a_n)$ приблизим многочленом $p_{\varepsilon_n}(z)$ с точностью $\varepsilon_n = \varepsilon/(2N)$, так что f будет приближена с точностью ε).

Пусть $G = \{a \in \Omega : 1/(z-a)|_X \in P(X)\}$. Установим, что $G = \Omega$. Действительно, во-первых $G \neq \emptyset$, так как по Теореме 6.13 (Коши-Тейлора) G содержит все точки из внешности какого-либо круга, содержащего X. Во-вторых, G – замкнуто в Ω, ибо если $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset G$ и $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k \in \Omega$, то $a \in G$, что непосредственно вытекает из равномерной сходимости $1/(z-a_k)$ к $1/(z-a)$ на X при $k \to \infty$. Установим, в-третьих, что G – открыто в Ω. Пусть $a \in G$, $d = \mathrm{dist}(a, X)$, $a_1 \in B(a, d)$. Докажем, что $a_1 \in G$. Из элементарных свойств геометрических прогрессий вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное L, что

$$\Big|\frac{1}{z-a_1} - \sum_{l=1}^{L} \frac{(a_1-a)^{l-1}}{(z-a)^l}\Big| < \varepsilon$$

для всех $z \in X$. Но $1/(z-a) \in P(X)$, откуда $1/(z-a)^l \in P(X)$ при всех натуральных l и, следовательно, $1/(z-a_1) \in P(X)$.

Теперь равенство $G = \Omega$ следует из связности Ω. $\square$

8.5. Замечание. Определим $\overline{A(X)}$ как замыкание в () пространства $A(X)|_X$. Тогда теорема Рунге в точности означает, что $\overline{A(X)} = R(X)$ для всякого компакта X, причем $\{R(X) = P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

8.6. Пусть $f \in C^1(\mathbb{C})$, причем $\mathrm{supp}(\overline{\partial} f)$ – компакт. Положим

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) dm(\zeta)}{z-\zeta}\,.$$

Доказать, что $f - F$ – целая функция, причем $f \equiv F \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.

8.7. Пусть X – произвольный компакт в $\mathbb{C}$, а $\Omega_0, \cdots$ – его компоненты дополнения. Фиксируем a_j в каждой из Ω_j. Доказать, что для любой $f \in A(X)$ и произвольного $\varepsilon > 0$, найдется $R(\cdot)$ – рациональная функция с полюсами, принадлежащими множеству $\{a_j\}_{j\geq 0}$ такая, что $\|f - R\|_X < \varepsilon$.

Лекция №9

Формулировка теорем Мергеляна. Свойства локализационного оператора Витушкина. Теорема Брауэра.

Формулировка теорем Мергеляна и доказательство теоремы Коши

9.1. Теорема (Мергеляна). Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$. Для выполнения равенства $C_A(X) = P(X)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{C} \setminus X$ было связным.

9.2. Следствие (теорема Лаврентьева). $() = ()$ если и только если $X = \widehat{X}$ и $X^o = \emptyset$.

Доказательство Теоремы 9.1. ($\Rightarrow$) Пусть $C_A(X) = P(X)$, тогда автоматически $A(X) \subset P(X)$ и по теореме Рунге $X = \widehat{X}$.

($\Leftarrow$) Пусть $X = \widehat{X}$. По теореме Рунге достаточно установить, что $C_A(X) = \overline{A(X)}$. Мы докажем следующий более сильный результат.

9.3. Теорема (Мергеляна). Пусть – компакт, $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \widehat{X}$, $\Omega_1, \cdots$ – компоненты дополнения компакта , т.е. $\mathbb{C} \setminus X = \sqcup_s \Omega_s$. Если $d = \inf\limits_s \{\mathrm{diam}(\Omega_s)\} > 0$, то $C_A(X) = \overline{A(X)}$.

9.4. Замечание. Если $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus X$, т.е. $\mathbb{C} \setminus X$ связно, то индексы $s = 1, \cdots$ отсутствуют и мы полагаем $d = \infty$. Доказательство Теоремы 9.3 весьма сложно. Мы приведем его в следующей лекции после соответствующей подготовки.

9.5. Следствие (уточненная интегральная теорема Коши). Пусть D – допустимая область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей. Тогда для любой функции $f \in C(\overline{D}) \cap A(D)$ выполняется равенство:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

При этих же условиях справедлива интегральная формула Коши, а также формула Коши для производных.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть ℓ – длина ∂D. По Теореме 9.3 (для $X = \overline{D}$) найдется $g \in A(\overline{D})$ с условием $\|f - g\|_{\overline{D}} < \varepsilon/\ell$, откуда

$$\left| \int_{\partial D} (f(z) - g(z)) dz \right| < \varepsilon.$$

По Теореме 5.10 (упрощенный вариант интегральной теоремы Коши),

$$\int_{\partial D} g(z) dz = 0,$$

откуда все нужные утверждения следуют стандартным образом. $\square$

Свойства локализационного оператора Витушкина

Напомним, что если $f \in C^1(\mathbb{C})$, то по теореме Коши-Римана множество $\mathrm{supp}(\overline{\partial} f)$ есть множество особых точек функции f (вне него f голоморфна). Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Рассмотрим функцию

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \varphi(\zeta)}{z - \zeta} dm(\zeta).$$

В последней формуле интегрирование (реально) ведется по множеству $K = \mathrm{supp}(\overline{\partial} f) \cap \mathrm{supp}(\varphi)$. По Лемме 8.1 $f_{(\varphi)}$ голоморфна вне K, т.е. ее особые точки лежат среди особых точек функции f и одновременно на $\mathrm{supp}\, \varphi$. Говорят, что оператор $f \to f_{(\varphi)}$ (при фиксированном φ) *локализует* особенности f на $\mathrm{supp}(\varphi)$.

Пусть $f \in C_0^1(\mathbb{C})$. Сделаем стандартное 3δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}$ (см. Лемму 7.3). Положим $J = \{j : \overline{B_j} \cap \mathrm{supp}(\overline{\partial} f) \neq \emptyset\}$. Ясно, что J – конечное множество индексов, причем функция $\varphi = \sum\limits_{j \in J} \varphi_j$ удовлетворяет условиям $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$ и $\varphi(z) = 1$ в некоторой окрестности $\mathrm{supp}(\overline{\partial} f)$.

Пусть $f_j = f_{(\varphi_j)}$. Тогда по Теореме 7.1 (Помпейю)

$$\sum_{j \in J} f_j(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \sum\limits_{j \in J} \varphi_j(\zeta) dm(\zeta)}{z - \zeta} = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) dm(\zeta)}{z - \zeta} = f(z)$$

для всех z. Тем самым f разлагается в конечную сумму функций с "локализованными"особенностями. (Для указанной цели нельзя полагать $f_j = f\varphi_j$, так как φ_j не голоморфна в $\mathbb{C}$ и у таких f_j могут появиться новые особенности.)

Нашей ближайшей целью является получение аналогичного разложения для произвольной функции f класса $C_0(\mathbb{C})$.

Пусть пока $f \in C^1(\mathbb{C})$. Пользуясь формулой Помпейю, получим:

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial}(f(\zeta)\varphi(\zeta)) - f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}dm(\zeta) =$$

$$= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}dm(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta)dm(\zeta).$$

Это уже нужная формула локализации.

9.6. Определение. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. *Локализационным* оператором (оператором *А.Г. Витушкина*), соответствующим функции φ, называется оператор $f \to \Upsilon_\varphi f$, где $f \in C(\mathbb{C})$ и

$$\Upsilon_\varphi f(z) \equiv f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta)dm(\zeta) =$$

$$= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}dm(\zeta).$$

9.7. Лемма (свойства $\Upsilon_\varphi f$). Пусть $B = B(a,r)$, $\varphi \in C_0^1(B)$, т.е. $S := \operatorname{supp}(\varphi) \subset B$. При $f \in C_0(\mathbb{C})$ обозначим через $\omega(t)$ модуль непрерывности функции f на $\mathbb{C}$, $t \geq 0$. Тогда:

(а) $\Upsilon_\varphi f \equiv f_{(\varphi)} \in C(\overline{\mathbb{C}})$, $f_{(\varphi)}(\infty) = 0$, причем имеет место оценка:

$$\|f_{(\varphi)}\| \leq 4\omega(r)r\|\overline{\partial}\varphi\| \qquad (9.1)$$

(б) Если f голоморфна на открытом множестве U, то $f_{(\varphi)}$ голоморфна на множестве $U \cup (\mathbb{C} \setminus S)$ (т.е. особенности $f_{(\varphi)}$ локализуются на носителе S функции φ).

Пусть $U_1 = \{z : \varphi(z) = 1\}^o$, тогда $f - f_{(\varphi)} \in A(U_1)$, т.е. $\Upsilon_\varphi f$ "вбирает"в себя все особенности функции f на U_1.

(в) Разложим $f_{(\varphi)}$ вне $\overline{B(a,r)}$ в ряд Лорана:

$$f_{(\varphi)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}.$$

Тогда справедливы оценки:

$$|c_n| \leq \omega(r) r^{n+1} \|\overline{\partial}\varphi\|. \tag{9.2}$$

Доказательство. Первое и второе утверждения в (а), а также голоморфность f_φ вне S вытекают из Леммы 8.1(б) и локализационной формулы. Для доказательства (9.1) воспользуемся принципом максимума модуля вне B, согласно которому нам достаточно оценить $|f_{(\varphi)}(z)|$ только при $z \in \overline{B}$:

$$|f_{(\varphi)}(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_B \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{|z-\zeta|} |\overline{\partial}\varphi(\zeta)| dm(\zeta) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \omega(2r) \|\overline{\partial}\varphi\| \int_B \frac{1}{|z-\zeta|} dm(\zeta) \leq 4\omega(r) r \|\overline{\partial}\varphi\|.$$

При этом мы воспользовались очевидным неравенством $\omega(2r) \leq 2\omega(r)$ и оценкой, полученной в Лемме 8.1 :

$$\int_B \frac{1}{|z-\zeta|} dm(\zeta) \leq 2\pi r.$$

(б). Пусть f голоморфна в $B(b,\delta) \subset U$; докажем, что $f_{(\varphi)} \in A(B(b,\delta/2))$. Выберем $\psi \in C_0^1(B(b,\delta))$, $\psi(z) = 1$ в $B(b,\delta/2)$, и рассмотрим $g = f\psi$, $h = f(1-\psi)$, так что $f_{(\varphi)} = g_{(\varphi)} + h_{(\varphi)}$. Для функции g класса $C_0^1(\mathbb{C})$ соответствующее утверждение доказано выше. А поскольку $h = 0$ в $B(b,\delta/2)$, то голоморфность $h_{(\varphi)}$ в $B(b,\delta/2)$ вытекает из локализационной формулы и Леммы 8.1(б). Итак, $f_{(\varphi)} \in A(U)$.

Аналогично, по Лемме 8.1(б) и ввиду $\overline{\partial}\varphi = 0$ в U_1, имеем:

$$f(z) - f_{(\varphi)}(z) = f(z)(1 - \varphi(z)) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{S \setminus U_1} \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta} dm(\zeta) \in A(U_1).$$

(в) Найдем c_n, $n \geq 1$. Из равенств

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{(f(z)-f(a)) - (f(\zeta)-f(a))}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta)dm(\zeta) =$$

$$= (f(z)-f(a))\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int_{B(a,r)} \frac{(f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}dm(\zeta),$$

учитывая, что $\varphi(z) = 0$ вне $B(a,r) = B$ и используя формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

(при $|z-a| > r$ ряд сходится абсолютно и равномерно по ζ на $\overline{B}$), находим при $|z-a| > r$:

$$f_{(\varphi)}(z) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^n}\left[-\frac{1}{\pi}\int\limits_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}dm(\zeta)\right].$$

Следовательно,

$$c_n = -\frac{1}{\pi}\int_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}dm(\zeta).$$

Теперь оценка (9.2) тривиальна:

$$|c_n| \leq \frac{1}{\pi}\omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\|r^{n-1}\pi r^2 = \omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\|r^{n+1}. \ \square$$

Теорема Брауэра о продолжении непрерывной функции

Завершим эту лекцию доказательством следующего частного случая известной теоремы Брауэра-Титце-Урысона, необходимого для доказательства Теоремы 9.3 (Мергеляна).

9.8. Теорема (Брауэра). Если – компакт в $\mathbb{C}$ и $f \in C(X)$, то найдется функция $F \in C_0(\mathbb{C})$ с условиями $F|_X = f$, $\|F\| \leq \|f\|_X$.

Доказательство. При $k \in \mathbb{Z}$ определим $G_k = \{z : \operatorname{dist}(z, X) \in [2^{-k}, 2^{-k+1}]\}$ и пусть $J(k)$ – совокупность тех индексов j в стандартном $3\delta_k$-разбиении единицы $\{B_j^{(k)}, \varphi_j^{(k)}\}$ при $\delta_k = 2^{-k-4}$, для которых $B_j^{(k)} \cap G_k \neq \emptyset$. При всех k и $j \in J(k)$ положим

$$\psi_j^k(z) = \varphi_j^{(k)}(z)\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z},\sigma\in J(l)} \varphi_\sigma^{(l)}(z)\Big)^{-1}$$

– совокупность этих функций представляет собой локально-конечное разбиение единицы на $G = \mathbf{C} \setminus X$ (проверить!). Пусть a_j^k – центр $B_j^{(k)}$ и z_j^k – какая-либо конкретная точка на X, ближайшая к a_j^k. Теперь остается положить $F(z) = f(z)$ при $z \in X$ и

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\in J(k)} f(z_j^k)\psi_j^k(z)$$

при $z \in G$. Окончательную проверку оставляем читателю. $\square$

9.9. Пусть K_1 – замкнуто, а K_2 – компакт в $\mathbb{C}$, причем $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Если $f \in C(\mathbb{C}) \cap A(\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2))$, то существуют такие f_1 и f_2 класса $C(\mathbb{C})$, голоморфные вне K_1 и K_2 соответственно, что $f = f_1 + f_2$. Эти f_1 и f_2 определены однозначно с точностью до аддитивных постоянных.

9.10. Пусть K – компакт, $\mathbb{C} \setminus K$ – связно, $f \in A(K)$. Тогда найдется $\{p_n\}$ – последовательность полиномов таких, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ выполнено $p_n^{(k)} \to f^{(k)}$ при $n \to \infty$ равномерно на K.

Лекция №10

Схема аппроксимации. Окончание доказательства теоремы Мергеляна.

Оценка приближения при касании третьего порядка

Доказательство Теоремы 9.3 (Мергеляна). Фиксируем с указанным условием и f – произвольную непрерывную на и голоморфную на X^o функцию. Продолжим f по теореме Брауэра до функции $f \in C_0(\mathbb{C})$. Пусть $\omega(t) = \omega_{\mathbb{C}}(f,t)$ – модуль непрерывности f на $\mathbb{C}$ ($\omega(t) \to 0$ при $t \to 0+$).

Мы докажем, что найдется константа $c > 0$ такая, что для любого $\delta > 0$ существует $g \in A(X)$ с условием $\|f - g\|_X < c\omega(\delta)$. Затем останется устремить δ к 0.

Отметим, что через c, $c(1)$, $c(2)$, $\cdots$ (в доказательстве сей теоремы) будут обозначаться положительные константы, которым, в принципе, можно придать конкретные числовые значения.

Фиксируем произвольное $\delta \in (0,1)$ и построим стандартное 3δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}$ (см. Лемму 7.3). Напомним, что $B_j = B(a_j, 3\delta)$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$,

$$0 \le \varphi_j(z) \le 1,\ \|\overline{\partial}\varphi_j\| \le \frac{c(1)}{\delta},\ \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1.$$

При каждом j определим

$$f_j(z) = \Upsilon_{\varphi_j} f(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{(f(z) - f(\zeta))}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi_j(\zeta)dm(\zeta) =$$

$$= f(z)\varphi_j(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi_j(\zeta)}{z-\zeta}dm(\zeta).$$

Пусть $J = \{j \in \mathbb{Z}^2 : B_j \cap \mathrm{supp}(f) \ne \emptyset\}$. Отметим, что при $j \notin J$ все соответствующие $f_j \equiv 0$ и что число элементов в J (коротко $\sharp J$) может иметь порядок $1/\delta^2$ (не выше), что "очень велико"при малом δ.

10.1. Лемма. Каждая функция f_j обладает следующими свойствами:

(а) $f_j \in C(\overline{\mathbb{C}})$, $f_j(\infty) = 0$, $\|f_j\| \le c(2)\omega(\delta)$.

(б) f_j голоморфна на X^o и вне $\mathrm{supp}(\varphi_j)$; в частности, если $B_j \subset X^o$, то $f_j \equiv 0$. Наконец, $\sum\limits_{j\in J} f_j \equiv f$.

(в) Пусть

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^j}{(z-a_j)^n}$$

– ряд Лорана f_j вне B_j. Тогда

$$|c_n^j| \le c(2)\omega(\delta)(3\delta)^n.$$

Доказательство. Утверждения (а) и (в) вытекают непосредственно из Леммы 9.7 при $r = 3\delta$ с учетом $\omega(3\delta) \le 3\omega(\delta)$. Установим (б). Рассмотрим $\varphi = \sum\limits_{j\in J} \varphi_j$, $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности $\mathrm{supp}(f)$, т.е. $\mathrm{supp}(f) \subset U_1 = (\varphi^{-1}(1))^o$. Согласно (б) Леммы 9.7 , функция

$$f - \sum_{j\in J} f_j = f - f_{(\varphi)}$$

является целой и равной нулю в точке ∞, т.е она – тождественный ноль. $\Box$

Пусть $J_1 = \{j \in J : B_j \cap \partial X \ne \emptyset\}$. Если $j \notin J_1$, то либо $B_j \subset X^o$ и $f_j \equiv 0$, либо $B_j \cap X = \emptyset$ и, по Лемме 10.1(б), $f_j \in A(X)$, так что такие f_j не нуждаются в приближении.

10.2. Замечание. Если $m(\partial X) > 0$, то $\sharp J_1$ имеет в точности порядок $1/\delta^2$, т.е. при приближении функции f с заданной точностью ε на первый взгляд мы должны бы приближать каждую f_j, $j \in J_1$, с точностью порядка $\varepsilon\delta^2$. Следующая лемма А.Г. Витушкина показывает, что достаточно приближать каждую f_j с точностью порядка ε, если дополнительно имеется "касание"третьего порядка на ∞.

10.3. Лемма (О касании третьего порядка). Пусть существует $c(3) > 0$ такая, что для каждого $j \in J_1$ найдется функция $g_j \in A(X) \cap C(\mathbf{C})$, голоморфная вне $B_j^* = B(a_j, 4\delta)$ и с оценкой $\|g_j\| \le c(3)\omega(\delta)$. Кроме того, предположим, что

$$f_j(z) - g_j(z) = O(\frac{1}{z^3}) \text{ при } z \to \infty$$

(f_j и g_j имеют касание порядка 3 на ∞).

Тогда найдется c (выражающаяся только через $c(2)$ из Леммы 10.1 и $c(3)$) с условием

$$\|\sum_{j\in J_1}(f_j-g_j)\|\leq c\omega(\delta).$$

10.4. Замечание. Смысл этой леммы таков: если ее требования выполнены при всех достаточно малых δ (где $c(3)$ не зависит от δ), то $f\in\overline{A(X)}$, поскольку она равномерно на X (с точностью $c\omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$) приближается функциями

$$g=\sum_{j\in J_1}g_j+\sum_{j\in J\setminus J_1}f_j$$

класса $A(X)$.

Доказательство Леммы 10.3. Ниже подразумевается, что встречающиеся по мере необходимости константы $c(4)$ – $c(7)$ выражаются только через $c(2)$ и $c(3)$.

Разложим каждую g_j (здесь всюду $j\in J_1$) в ряд Лорана вне B_j^* (с центром a_j):

$$g_j(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^j}{(z-a_j)^n}.$$

Напомним, что

$$f_j(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^j}{(z-a_j)^n}.$$

Условие "касания"(порядка 3) эквивалентно тому, что

$$c_1^j=b_1^j,\quad c_2^j=b_2^j,$$

т.е. у функций f_j и g_j "уравнены"первые два коэффициента Лорана.

Следующие оценки сразу следуют из свойств f_j и g_j:

$$\|f_j-g_j\|\leq c(4)\omega(\delta) \tag{10.1}$$

Теперь покажем, что при $|z - a_j| \geq 4\delta$ (т.е. вне B_j^*) справедливы неравенства:

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leq c(5)\omega(\delta)\frac{\delta^3}{|z - a_j|^3}. \tag{10.2}$$

Действительно, пусть $F_j(z) = (f_j(z) - g_j(z))(z - a_j)^3$, тогда F_j голоморфна вне B_j^*, причем ∞ – устранима для F_j, ибо F_j ограничена вблизи ∞ по условиям "касания". Так как на $\overline{B_j^*}$ очевидным образом (см. (10.1)) выполнено

$$|F_j(z)| \leq c(4)\omega(\delta)(4\delta)^3 = c(5)w(\delta)\delta^3,$$

то по принципу максимума модуля вне B_j^* (см. Теорему 6.3) последняя оценка верна для всех z, что дает (10.2).

Фиксируем z и оценим

$$|\sum_{j\in J_1}(f_j(z) - g_j(z))|.$$

Пусть $J_3 = \{j \in J_1 : |z - a_j| < 4\delta\}$, а при $k = 4, 5, \cdots$ положим $J_k = \{j \in J_1 : k\delta \leq |z - a_j| < (k+1)\delta\}$.

Из элементарной геометрии находим, что $\sharp J_k \leq c(6)k$ при всех $k \geq 3$. Отсюда, а также из (10.1) и (10.2) окончательно получаем:

$$|\sum_{j\in J_1}(f_j(z) - g_j(z))| \leq \sum_{j\in J_3}|f_j(z) - g_j(z)| + \sum_{k=4}^{\infty}\sum_{j\in J_k}|f_j(z) - g_j(z)| \leq$$

$$\leq c(7)\omega(\delta) + \sum_{k=4}^{\infty}c(6)kc(5)\omega(\delta)\frac{1}{k^3} = c\omega(\delta). \ \square$$

Отметим, что ввиду Замечания 10.4 нам остается для всех достаточно малых $\delta \in (0, 1)$ найти g_j, удовлетворяющие Лемме 10.3 .

Окончание доказательства теоремы Мергеляна

Завершим доказательство Теоремы 9.3.

10.5. Предложение. В условиях Теоремы 9.3 и Леммы 10.3 при любом $\delta < \min\{1, d/3\}$ соответствующие g_j, $j \in J_1$, существуют.

Доказательство. Фиксируем δ $(0 < \delta < \min\{1, d/3\})$, $j \in J_1$. Тогда найдется такое s, что $B_j \cap \Omega_s \neq \emptyset$ и, следовательно, имеется жорданова ломаная $\Gamma_1 : [0,1] \to \Omega_s \cap B_j^*$ с условием $\mathrm{diam}([\Gamma_1]) = \delta$. Поскольку функция $\mathrm{diam}(\Gamma_1([t_0, t]))$ непрерывна по t $(0 \le t_0 \le t \le 1)$, нетрудно показать, что существуют t_1 и t_2 $(0 \le t_1 < t_2 \le 1)$ такие, что ломаная $\Gamma = \Gamma_1|_{[t_1,t_2]}$ с началом $\Gamma(t_1) = \alpha$ и концом $\Gamma(t_2) = \beta$ удовлетворяет свойствам: $\mathrm{diam}(\Gamma) = |\beta - \alpha| = \delta$ и $\Gamma \subset \Omega_s \cap B_j^*$. В частности, Γ лежит вне X (здесь и далее мы отождествляем Γ и ее носитель).

Положим $G_1 = B(\alpha, \delta) \cap B(\beta, \delta)$, так что $\Gamma \subset \overline{G_1}$; пусть I – замкнутый луч с вершиной в точке α, идущий в направлении $(\alpha - \beta)$. По Следствию 5.4 , в $\mathbb{C} \setminus I$ существует голоморфная ветвь $V_1(z)$ многозначной функции $\sqrt{z - \alpha}$, а в $\mathbb{C} \setminus (I \cup \Gamma)$ –голоморфная ветвь $V_2(z)$ многозначной функции $\sqrt{z - \beta}$.

Определим $h_0(z) = V_1(z)V_2(z)$ в $\mathbb{C} \setminus (I \cup \Gamma)$. Так как при переходе через I функции V_1 и V_2 меняют только свой знак, то h_0 непрерывно продолжается на область $G_2 = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, а из Теоремы 6.8 (Мореры) сразу следует, что $h_0 \in A(G_2)$. Меняя, при необходимости, знак у V_1, мы дополнительно можем считать, что $h_0(z) = z + o(z)$ при $z \to \infty$. Теперь положим

$$h_1(z) = \frac{8}{\delta}\Big(h_0(z) - z + \frac{\alpha+\beta}{2}\Big) = \frac{8}{\delta}\;\frac{(z-\alpha)(z-\beta) - (z - \frac{\alpha+\beta}{2})^2}{h_0(z) + (z - \frac{\alpha+\beta}{2})} =$$

$$= \frac{8}{\delta}\;\frac{\alpha\beta - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}}{2z + o(z)} = -\frac{(\beta-\alpha)^2}{\delta(z + o(z))}.$$

Следовательно, разложение Лорана функции h_1 вне B_j^* имеет вид:

$$h_1(z) = \frac{\delta e^{i\theta}}{z - a_j} + \frac{d_2}{(z-a_j)^2} + \cdots$$

(напомним, что $|\beta - \alpha| = \delta$, т.е. указанное $\theta \in \mathbb{R}$ существует).

По принципу максимума (вне $\overline{G_1}$, и полагаем $h_1 = 0$ на Γ) имеем:

$$\|h_1\| \le \|h_1\|_{\overline{G_1}} \le \frac{8}{\delta}(\delta + \delta) \le 16,$$

откуда

$$|d_2| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a_j|=4\delta} h_1(\zeta)(\zeta - a_j)d\zeta\Big| \le \frac{1}{2\pi}16\cdot 4\delta\cdot 2\pi 4\delta = 256\delta^2.$$

Пусть $\mu = \mathrm{dist}(X, \Gamma)$, U – открытая $\mu/2$-окрестность ломаной Γ. По Теореме 9.8 продолжим h_1 из $\mathbb{C} \setminus U$ до функции $h \in C(\mathbb{C})$ *с сохранением* sup-нормы (вне B_j^* функция h_1 не меняется). При этом h голоморфна вне $\overline{U}$, т.е в окрестности X.

Наконец, ищем g_j в виде $g_j(z) = \lambda_1 h(z) + \lambda_2 (h(z))^2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$. Напомним, что

$$f_j(z) = \frac{c_1^j}{z - a_j} + \frac{c_2^j}{(z - a_j)^2} + \cdots,$$
$$|c_1^j| \le 3c(2)\delta\omega(\delta), \ |c_2^j| \le 9c(2)\delta^2\omega(\delta).$$

Нужные условия "касания"имеют вид:

$$c_1^j = \lambda_1 \delta e^{i\theta}, \quad c_2^j = \lambda_1 d_2 + \lambda_2 \delta^2 e^{2i\theta},$$

откуда λ_1 и λ_2 однозначно находятся, причем очевидны оценки:

$$|\lambda_1| \le c(8)\omega(\delta), \quad |\lambda_2| \le c(8)\omega(\delta).$$

Таким образом $\|g_j\| \le c\omega(\delta)$ и теоремы Мергеляна полностью доказаны. $\square$

10.6. Доказать теорему Гартогса-Розенталя: если $m(K) = 0$, то $C(K) = R(K)$.

10.7. Привести пример компакта K с условиями $K^\circ = \emptyset$ и $C(K) \ne R(K)$.

10.8. Привести пример компакта K с условиями $K^\circ \ne \emptyset$ – связна, односвязна и плотна в K, причем $C_A(K) \ne R(K)$.

10.9. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Доказать, что оператор Витушкина $\Upsilon_\varphi : f \to \Upsilon_\varphi f$ (действующий по стандартной формуле) непрерывен в пространствах $\mathrm{Lip}_\tau(\mathbb{C})$ $(\tau \in (0,1))$, $C^1(\mathbb{C})$, $L_p(\mathbb{C})$ при $p > 2$.

10.10. Пусть K – график непрерывной функции на отрезке $[0, 1]$ с ограниченной вариацией. Тогда K – аналитически устраним в классе непрерывных функций.

Лекция №11
Принцип аргумента и его следствия

Принцип аргумента и теорема Руше. Обратный принцип соответствия границ

Для произвольного компакта K в $\mathbb{C}$ положим $C_*(K) = \{f \in C(K) \mid f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in K\}$.

11.1. Определение. Пусть γ – путь в $\mathbb{C}$, $f \in C_*([\gamma])$. Величина $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f) := \Delta_{f\circ\gamma} \operatorname{Arg}(z)$ называется *приращением (полярного) аргумента функции* f вдоль γ.

Нетрудно доказать, что если пути γ_1 и γ_2 *эквивалентны* и $f \in C_*[\gamma_1]$, то $\Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg}(f) = \Delta_{\gamma_2} \operatorname{Arg}(f)$. Таким образом, можно корректно определить выражение $\Delta_{\Gamma^+} \operatorname{Arg}(f)$ для произвольной *кривой* Γ^+ и $f \in C_*([\Gamma])$.

Мы доверяем читателю дать (единственно разумное) определение величины $\Delta_{\partial^+ G} \operatorname{Arg}(f)$ для произвольной *жордановой* области G в $\mathbb{C}$ и $f \in C_*(\partial G)$.

Наконец, если $D = D_1 \setminus (\cup_{s=2}^{s=S} D_s)$ – *допустимая* область ранга $S \geq 2$ (см. Лекцию 5) и $f \in C_*(\partial D)$, то

$$\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f) = \Delta_{\partial^+ D_1} \operatorname{Arg}(f) - \sum_{s=2}^{S} \Delta_{\partial^+ D_s} \operatorname{Arg}(f) \ .$$

11.2. Лемма. Пусть D – допустимая область, $h \in C(\partial D)$, причем $\|h\|_{\partial D} < 1$. Тогда $\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(1+h) = 0$.

Доказательство. Из приведенных выше определений вытекает, что нам достаточно установить следующий факт: если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – *замкнутый* путь и $h \in C([\gamma])$ удовлетворяет условию $\|h\|_{[\gamma]} < 1$, то $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(1+h) = 0$. Имеем

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(1+h) = \Delta_{(h\circ\gamma+1)} \operatorname{Arg}(z) \ ,$$

причем носитель пути $\gamma_1 = h\circ\gamma + 1$ есть компактное подмножество (открытой) правой полуплоскости. В качестве непрерывной ветви многозначной функции $\operatorname{Arg}(\gamma_1(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, (см. Теорему 1.18) можно взять функцию

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\gamma_1(t))}{\operatorname{Re}(\gamma_1(t))} \ .$$

При этом ясно, что $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = 0$. $\square$

11.3. Теорема (принцип аргумента). Пусть D – допустимая область в $\mathbb{C}$, а функция f голоморфна в D, за исключением полюсов $\{b_1, \cdots, b_M\}$, и непрерывна на $\overline{D} \setminus \{b_1, \cdots, b_M\}$. Если f не обращается в 0 на ∂D, то

$$N_D(f) - P_D(f) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f). \tag{11.1}$$

Здесь $N_D(f)$ и $P_D(f)$ – общее число нулей (с учетом кратностей) и общее число полюсов (с учетом порядков) функции f в D соответственно.

Доказательство. Следующие утверждения непосредственно выводятся из соответствующих определений и Теоремы 4.3 :

(а) Если f_1 и f_2 принадлежат $C_*(\partial D)$, то

$$\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f_1 f_2) = \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f_1) + \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f_2),$$

и

$$\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f_1 / f_2) = \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f_1) - \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f_2).$$

(б)

$$\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(z - b)\Big|_{b \in D} = 2\pi, \quad \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(z - b)\Big|_{b \notin \overline{D}} = 0.$$

Отсюда получаем, что (11.1) имеет место для любой рациональной функции f, не имеющей нулей и полюсов на ∂D. Более того, если (11.1) верно для f_1 и f_2, то оно верно и для $f_1 f_2$ и f_1/f_2.

Пусть $\{a_1, \cdots, a_N\}$ – нули f в D (a_n имеет порядок k_n). Определим $P(z) = (z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_N)^{k_N}$, $Q(z) = (z - b_1)^{p_1} \cdots (z - b_M)^{p_M}$, где p_m – порядок полюса b_m у исходной функции f, $m = 1, \cdots, M$ (так что $N_D(f) = k_1 + \cdots + k_N$, $P_D(f) = p_1 + \cdots + p_M$). Положим $F = fQ/P$. В точках $\{a_n\}$ и $\{b_m\}$ особенности устранимы, так что $F \in A(D) \cap C(\overline{D})$. Таким образом, достаточно установить (11.1) для F вместо f ($f = FP/Q$, а для P и Q утверждение доказано).

Поскольку $\varepsilon := \min\{|F(z)| : z \in \overline{D}\} > 0$, то по Теореме 9.3 (Мергеляна) и Теореме 7.7 (Рунге) существуют многочлены P_ε и Q_ε ($Q_\varepsilon \neq 0$ в $\overline{D}$) такие, что

$$\|F - \frac{P_\varepsilon}{Q_\varepsilon}\|_{\overline{D}} < \varepsilon \, .$$

Так как, очевидно, P_ε также не обращается в 0 на $\overline{D}$, то справедливо

$$N_D(F) = N_D(P_\varepsilon/Q_\varepsilon) = P_D(F) = P_D(P_\varepsilon/Q_\varepsilon) = 0 \, .$$

Для $P_\varepsilon/Q_\varepsilon$ равенство (11.1), по доказанному, верно. Остается учесть, что

$$0 = \triangle_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(\frac{P_\varepsilon}{Q_\varepsilon}) = \triangle_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(\frac{P_\varepsilon}{Q_\varepsilon} - F + F) =$$

$$\triangle_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(F) + \triangle_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}\Big(1 + \frac{\frac{P_\varepsilon}{Q_\varepsilon} - F}{F}\Big) = \triangle_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(F),$$

поскольку из неравенства

$$\Big|\frac{\frac{P_\varepsilon}{Q_\varepsilon} - F}{F}\Big| < 1$$

на ∂D по Лемме 11.2 получаем, что

$$\triangle_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}\Big(1 + \frac{\frac{P_\varepsilon}{Q_\varepsilon} - F}{F}\Big) = 0 \, . \; \square$$

11.4. Теорема (Руше). Пусть D — допустимая область в $\mathbb{C}$. Пусть $f, g \in A(D) \cap C(\overline{D})$, причем $|g(z)| < |f(z)|$ всюду на ∂D. Тогда $N_D(f) = N_D(f+g)$.

Доказательство. По предыдущей теореме и по Лемме 11.2 (при $h = g/f$) получаем:

$$N_D(f+g) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f+g) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f) +$$

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(1 + g/f) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f) = N_D(f) \, . \; \square$$

В качестве приложения докажем следующий важный факт.

11.5. Теорема (принцип сохранения области). Если D – область в $\mathbb{C}$ и $f \in A(D)$ не постоянна, то $\Omega := f(D)$ – область.

Доказательство. Связность Ω очевидна. Докажем открытость. Фиксируем $w_0 \in \Omega$ и $z_0 \in D$, $f(z_0) = w_0$. Функция $f_1(z) = f(z) - w_0$ не постоянна, следовательно z_0 – ее *изолированный ноль*. Найдется $\delta > 0$ со свойствами $\overline{B(z_0, \delta)} \subset D$ и $f_1(z) \neq 0$ на $\Gamma := \partial B(z_0, \delta)$, так что $\varepsilon := \min_{z \in \Gamma} |f_1(z)| > 0$. Утверждаем, что $B(w_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Действительно, пусть $|w - w_0| < \varepsilon$. По теореме Руше в области $B_\delta := B(z_0, \delta)$ для функций f_1 и $g_1 \equiv w_0 - w$ (на Γ имеем $|g_1(z)| < |f_1(z)|$) находим :

$$N_{f-w}(B_\delta) = N_{f_1+g_1}(B_\delta) = N_{f_1}(B_\delta) \geq 1 \ . \ \square$$

11.6. Следствие. Пусть D – область в $\overline{\mathbb{C}}$ и f конформна в D. Тогда $\Omega = f(D)$ – область, а f – *гомеоморфизм* D и Ω.

Доказательство. Пусть D и Ω лежат в $\mathbb{C}$. Из предыдущей теоремы следует открытость Ω, а также тот факт, что при отображении f^{-1} прообраз всякого открытого множества – открыт. Связность Ω очевидна. Остальные случаи легко сводятся к рассмотренному с помощью Определения 2.28. $\square$

Мы также получаем наиболее общий вариант следующей теоремы.

11.7. Теорема (обратный принцип соответствия границ). Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$ с (положительно ориентированной) границей Γ^+, $f \in A(D) \cap C(\overline{D})$, причем f – взаимнооднозначна на ∂D. Тогда $\Sigma^+ = f(\Gamma^+)$ – жорданова (замкнутая) кривая, ориентированная положительно относительно ограниченной ею области Ω, а f – конформно отображает D на Ω.

Доказательство. Носители Γ^+ и Σ^+ обозначим через Γ и Σ соответственно. Жордановость Σ^+ очевидна, так что по теореме Жордана она "ограничивает"некоторую область Ω (в $\mathbb{C}_w$). Пусть $b \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. По принципу аргумента (ввиду $f - b \neq 0$ на Γ) имеем:

$$N_D(f-b) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma^+} \operatorname{Arg}(f-b) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Sigma^+} \operatorname{Arg}(w-b) = 1$$

при $b \in \Omega$ (поскольку $N_D(f-b) \geq 0$, то случай значения -1 в последнем равенстве исключается). Аналогично, $N_D(f-b) = 0$ при $b \notin \overline{\Omega}$. $\square$

Однолистные функции и их сходящиеся последовательности

Нашей целью является доказательство теоремы Римана и теоремы Каратеодори (частного случая). Для этого нам потребуется значительная предварительная подготовка.

11.8. Определение. Пусть $f \in A(a)$, $a \in \mathbb{C}$. Функция f называется *однолистной* в точке a, если существует $\delta > 0$ такое, что f взаимно-однозначна в $B(a, \delta)$.

Пусть D – область в $\mathbb{C}$.

11.9. Определение. Функция $f \in A(D)$ *локально однолистна в* D, если f однолистна в каждой точке области D.

11.10. Определение. Функция $f \in A(D)$ *однолистна в области* D, если она взаимно-однозначна в D. (Всюду ниже термин "однолистность функции в области"подразумевает ее голоморфность в той же области).

11.11. Теорема (критерии однолистности).
(1) $f \in A(a)$ однолистна в точке a, если и только если $f'(a) \neq 0$;
(2) f – локально однолистна в области D, если и только если $f \in A(D)$ и $f'(z) \neq 0$ при всех $z \in D$;
(3) f – однолистна в области D, если и только если f *конформна* в D и не обращается в ∞.

Доказательство. Достаточно доказать (1) и воспользоваться критерием конформности (Теорема 2.26). Итак, пусть $a \in \mathbb{C}$, $f \in A(a)$ и $f'(a) \neq 0$. Положим $f(z) - f(a) = f'(a)(z-a) + h(z)(z-a)$, где h голоморфна там же, где и f (возможная особенность у h в точке a устранима), причем $h(a) = 0$. Следовательно, найдется $\delta_1 > 0$ такое, что f и h голоморфны *в замыкании* области $G_1 := B(a, \delta_1)$, причем $\|h\|_{\overline{G_1}} < |f'(a)|/2$. Выберем $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ так, что $|f(z) - f(a)| < |f'(a)|\delta_1/2$ при $z \in G_2 := B(a, \delta_2)$. Докажем однолистность f в G_2, используя теорему Руше *в области* G_1. Фиксируем $b \in G_2$, тогда выполняется неравенство $|f(b) - f(a)| < |f'(a)|\delta_1/2$. Положим $f_1(z) = f'(a)(z-a)$, $g_1(z) = h(z)(z-a) + f(a) - f(b)$, тогда $f(z) - f(b) = f_1(z) + g_1(z)$, причем при $z \in \partial G_1$ имеет место $|f_1(z)| = |f'(a)|\delta_1$ и

$$|g_1(z)| \leq |f'(a)|\delta_1/2 + |f'(a)|\delta_1/2 < |f_1(z)| \ .$$

По теореме Руше функция $f(z) - f(b)$ имеет в G_1 столько же нулей, сколько f_1, т.е. один ноль $z = b$.

Обратно, пусть $f'(a) = 0$. Докажем неоднолистность f в . Пусть $f(z) \not\equiv f(a)$ в окрестности точки a (иначе все тривиально), тогда найдутся $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{Z}$) и $g \in A(a)$ такие, что $f(z) - f(a) = (z-a)^n g(z)$, причем $g(a) \neq 0$. Выберем голоморфную ветвь $V(w)$ многозначной функции $\sqrt[n]{w}$ в $B(g(a), |g(a)|)$ и определим $h(z) = V(g(z)) \in A(a)$. Тогда $f(z) - f(a) = ((z-a)h(z))^n$ есть композиция *однолистной* в точке a функции $w_1(z) = (z-a)h(z)$ и функции $w_2(w_1) = w_1^n$, "склеивающей"точки в любой окрестности точки $w_1 = 0$. □

11.12. Определение. Пусть $f \in A(a)$, $a \in \mathbb{C}$. Говорят, что f *локально обратима* в точке , если существуют окрестность G точки , окрестность Ω точки $f(a)$ и функция $g \in A(\Omega)$ такие, что $g(f(z)) = z$ для всех $z \in G$.

11.13. Теорема. Функция $f \in A(a)$ локально обратима в точке $a \in \mathbb{C}$ если и только если $f'(a) \neq 0$.

Доказательство. Если $f'(a) = 0$, то локальной обратимости в точке a нет (см. конец доказательства предыдущей теоремы). Пусть теперь $f'(a) \neq 0$, тогда по Теореме 11.11 существует (круговая) окрестность G точки a, где f однолистна (и голоморфна). По Теореме 11.5 (принцип сохранения области) функция f *гомеоморфно* отображает G на *область* $\Omega = f(G)$ (прообраз всякого открытого множества при отображении $\varphi = f^{-1}|_\Omega$ открыт). По Теореме 2.18 (об обратной функции), $\varphi \in A(\Omega)$. □

11.14. Теорема (Гурвица). Пусть D – область в $\mathbb{C}$ и последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset A(D)$ равномерно сходится к f внутри D при $n \to \infty$. Если f не постоянна в D и $f(a) = 0$ в некоторой точке $a \in D$, то для любого $\delta > 0$ найдется $N \geq 1$ такое, что при всех $n > N$ у функции f_n есть хотя бы один ноль в $B(a, \delta)$.

Доказательство. Поскольку $f(z) \not\equiv 0$ в D, то по Теореме 6.14 (единственности) найдется $\delta_1 \in (0, \min\{\delta, \operatorname{dist}(a, \partial D)\})$ такое, что при $G := B(a, \delta_1)$ имеем:

$$\min_{z \in \partial G} |f(z)| = \mu > 0\,.$$

Из равномерной сходимости $\{f_n\}$ к f на ∂G найдется натуральное N такое, что для всех $n > N$ имеет место $|f_n(z) - f(z)| < \mu$ при $z \in \partial G$. По теореме Руше в G, примененной к функциям f

и $g = f_n - f$ находим, что функция $f_n = f + g$ имеет в G хотя бы один ноль. $\square$

11.15. Теорема (о сходящейся последовательности однолистных функций). Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность (голоморфных) функций, однолистных в D. Если $\{f_n\}$ равномерно сходится к f внутри D при $n \to \infty$, то f либо однолистна в D, либо постоянна.

Доказательство. По Теореме 6.12 (Вейерштрасса) $f \in A(D)$. Пусть, от противного, $f \not\equiv const$, но f не однолистна, т.е. найдутся $z_1 \neq z_2$ в D с условием $f(z_1) = f(z_2)$. Рассмотрим последовательность функций $g_n = f_n - f_n(z_1)$, равномерно внутри D сходящуюся к функции $g = f - f(z_1)$ при $n \to \infty$. Так как $g(z_2) = 0$, то по предыдущей теореме (при $\delta = |z_1 - z_2|$) для всех достаточно больших n найдутся точки $z_n \in D \cap B(z_2, \delta)$ (т.е. $z_n \neq z_1$) с условием $g_n(z_n) = 0$. Равенство $f_n(z_n) = f_n(z_1)$ противоречит однолистности f_n в D. $\square$

11.16. Найти число корней многочлена $p(z) = z^3+2z^2+3z+8$: (a) в левой полуплоскости; (b) в верхней полуплоскости; (c) в полукруге $\{|z| < 4, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

11.17. Доказать, что уравнение $\sin(z) = z$ имеет в $\mathbb{C}$ бесконечно много решений.

11.18. Доказать, что функция ze^{-z} однолистна в круге $\{|z| < 1\}$ и ни в каком большем круге с центром в нуле.

11.19. Исследовать на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения $y'''+py''+qy'+12y = 0$ при различных значениях параметров $p > 0$ и $q > 0$.

11.20. Доказать, что уравнение $\operatorname{tg}(z) = z$ имеет только вещественные корни.

11.21. Доказать, что всякое голоморфное отображение замкнутого круга в себя имеет неподвижную точку.

11.22. Останется ли верным обратный принцип соответствия границ, если соответствующие области – жордановы в $\overline{\mathbb{C}}$, а функция – непрерывна в топологии $\overline{\mathbb{C}}$?

Лекция №12
Принцип симметрии. Теорема Римана.

Принцип симметрии Римана-Шварца

12.1. Определение. Пусть $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, $f_0 : E \to \mathbb{C}$, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область, содержащая E. Если существует $f \in A(D)$ с условием $f|_E = f_0$, то f называется *аналитическим (голомофным) продолжением* f_0 с на D.

Задача аналитического продолжения состоит в отыскании условий на , f_0 и D, необходимых и достаточных для существования f. Требуется также указать процедуру нахождения f.

12.2. Пример. Пусть $E = \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^x,\ \cos x,\ \sin x$. Тогда можно взять $D = \mathbb{C}$, $f(z) = e^z,\ \cos z,\ \sin z$ соответственно.

Непосредственным следствием теоремы единственности является

12.3. Принцип аналитического продолжения. Если имеет предельную точку в D, то у f_0 может существовать не более одного аналитического продолжения f в D.

Следующая теорема весьма важна в приложениях. Встречающиеся в литературе “укороченные"формулировки на деле приводят к неточностям или даже ошибкам.

12.4. Теорема (принцип симметрии Римана-Шварца). Пусть D_1 и Ω_1 – области в $\overline{\mathbb{C}}$, границы которых содержат дуги γ_1 и Γ_1 обобщенных окружностей γ и Γ соответственно (γ_1 и Γ_1 – непусты, открыты и связны в γ и Γ соответственно). Предполагается, что D_1 и Ω_1 расположены *по одну сторону* от γ и Γ соответственно. Пусть D_1^* и Ω_1^* - области, симметричные D_1 и Ω_1 относительно γ и Γ соответственно, причем $D = D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$ и $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma_1 \cup \Omega_1^*$ – *являются областями.* Если $f_1 : D_1 \to \Omega_1$ – конформный изоморфизм, причем f_1 определена и непрерывна на $D_1 \cup \gamma_1$ и f_1 *гомеоморфно* отображает γ_1 *на* Γ_1, то f_1 единственным образом продолжается до конформного изоморфизма D на Ω. При этом симметричные относительно γ точки переходят в точки, симметричные относительно Γ (в частности, $f(D_1^*) = \Omega_1^*$).

Доказательство. Разберем случай, когда $\gamma_1 \neq \gamma$ (и, следовательно, $\Gamma_1 \neq \Gamma$). При этом мы предполагаем, что γ и Γ – *замкнутые кривые в* $\overline{\mathbb{C}}$. Оставшийся случай $\gamma_1 = \gamma$ доверяем читателю.

Существует дробно-линейное отображение φ с условиями $\varphi(\gamma_1) =: \tilde{\gamma}_1 \subset \mathbb{R}$ и $\varphi(D_1) =: \tilde{D}_1 \subset \Pi_+$ (полагаем $\varphi(D) = \tilde{D}$). Аналогично, существует дробно-линейное отображение ψ с условиями: $\psi(\Gamma_1) =: \tilde{\Gamma}_1 \subset \mathbb{R}$ и $\psi(\Omega_1) =: \tilde{\Omega}_1 \subset \Pi_+$ (полагаем $\psi(\Omega) =: \tilde{\Omega}$).

Определим $\tilde{f}_1 = \psi \circ f_1 \circ \varphi^{-1} : \tilde{D}_1 \to \tilde{\Omega}_1$. Если мы найдем соответствующее продолжение $\tilde{f} : \tilde{D} \to \tilde{\Omega}$ для $\tilde{f}_1$, то искомое f равно $\psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi$. Итак, задача сведена к случаю $\gamma = \Gamma = \overline{\mathbb{R}}$, который мы и будем рассматривать, отождествляя обозначения с “тильдой"и без. Положим $f(z) = f_1(z)$ при $z \in D_1 \cup \gamma_1$ и $f(z) = \overline{f_1(\overline{z})}$ при $z \in D_1^*$. Используя разложения f_1 в ряды Тейлора в кругах из D_1, легко показать, что $f \in A(D_1^*)$. Кроме того, f непрерывна в D. Из Теоремы 6.8 (Мореры) получаем, что $f \in A(D)$. Конформность f в D вытекает из ее однолистности. $\square$

12.5. Теорема (принцип симметрии для мероморфных функций). Пусть $\gamma, \gamma_1, D_1, D_1^*, D$ – такие же, как и в предыдущей теореме. Пусть f_1 *мероморфна* в D_1 (т.е. f_1 голоморфна в D_1, за исключением дискретного множества полюсов). Пусть $f \in C(D_1 \cup \gamma_1)$ (в смысле топологии $\overline{\mathbb{C}}$ в прообразе и образе). Пусть Γ – обобщенная окружность и $f(\gamma_1) \subset \Gamma$. Тогда f_1 продолжается единственным образом до мероморфной функции в D, при этом симметричные относительно γ точки переходят в точки, симметричные относительно Γ.

Доказательство. Аналогично предыдущему.

Пространства функций и функционалы

Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\{f\}$ – некоторое семейство функций из D в $\mathbb{C}$.

12.6. Определение. Семейство $\{f\}$ называется *равномерно ограниченным внутри* D, если для любого компакта $K \subset D$ найдется $M \in (0, +\infty)$ такое, что $\|f\|_K \leq M$ для всех $f \in \{f\}$.

12.7. Определение. Семейство $\{f\}$ называется *равностепенно непрерывным внутри* D, если для любого компакта $K \subset D$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $z_1, z_2 \in K$ из условий $|z_1 - z_2| < \delta$ и $f \in \{f\}$ следует, что $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

12.8. Теорема. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $\{f\} \subset A(D)$. Если $\{f\}$ равномерно ограничено внутри D, то оно равностепенно непрерывно внутри D.

Доказательство. Фиксируем произвольный компакт K в D и положим
$$d = \min\{\operatorname{dist}(K, \partial D), 1\}\ ,\ d > 0.$$
При $\rho \in (0, d)$ определим множество $K_\rho = \overline{\cup_{z\in K} B(z,\rho)}$ (называемое ρ-раздутием K). Ясно, что K_ρ – компакт в D. Из условия равномерной ограниченности $\{f\}$ внутри D следует, что найдется $M \in (0, +\infty)$ такое, что $\|f\|_{K_{d/2}} \le M$ для всех $f \in \{f\}$. Оценим $|f'(z)|$ при $z \in K_{d/4}$. Для таких z имеем $\overline{B(z, d/4)} \subset K_{d/2}$, так что можно воспользоваться формулой Коши для производной $f'(z)\ ,\ z \in K_{d/4}$:
$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z,d/4)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi d/4}{(d/4)^2} = \frac{4M}{d}\ ,$$
таким образом, семейство $\{f'\}$ *также* равномерно ограничено внутри D. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\{d/4\ ,\ \varepsilon d/(4M)\}$. Для любых z_1 и z_2 из K с условием $|z_1 - z_2| < \delta$ выполняется $[z_1, z_2] \subset K_{d/4}$, откуда по формуле Ньютона – Лейбница получаем:
$$|f(z_1) - f(z_2)| = |\int_{[z_1,z_2]} f'(z)dz| < 4M\delta/d \le \varepsilon\ .\ \square$$

12.9. Определение. Семейство $\{f\}$ называется *предкомпактным внутри* D (в топологии равномерной сходимости внутри D), если для любой последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \{f\}$ (т.е. каждая $f_n \in \{f\}$) существует *подпоследовательность* $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ в $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, которая равномерно сходится внутри D (не обязательно к элементу из $\{f\}$).

12.10. Определение. Если в предыдущем определении *любая* последовательность $\{f_n\}$ из $\{f\}$ имеет подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ равномерно внутри D сходящуюся *к элементу из* $\{f\}$, то семейство $\{f\}$ называется *компактным внутри* D.

12.11. Теорема (Монтеля). Если $\{f\} \subset A(D)$ равномерно ограничено внутри D, то оно предкомпактно внутри D.

Доказательство. Пусть $\{f\} \subset A(D)$ равномерно ограничено внутри D. Занумеруем последовательностью $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ все точки из D, имеющие (обе) рациональные координаты. Фиксируем произвольную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $\{f\}$. Каждая точка z_m – компакт, поэтому последовательность $\{f_n(z_1)\}$ равномерно ограничена и, следовательно, у нее найдется сходящаяся *подпоследовательность* $\{f_{n_k^1}(z_1)\}$. Аналогично, в точке z_2, из последовательности $\{f_{n_k^1}(z_2)\}$ выделяем сходящуюся *подпоследовательность* $\{f_{n_k^2}(z_2)\}$ и так далее. Соответствующая *диагональная* последовательность $\{f_{n_k^k}\}$ удовлетворяет условию, что $\{f_{n_k^k}(z_m)\}$ сходится к конечному пределу для любого номера m. Не нарушая общности, мы будем считать, что $\{f_{n_k^k}\} = \{f_n\}$. Пусть K – произвольный компакт в D. Надо доказать, что $\{f_n\}$ сходится равномерно на K. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно и $d = \min\{\mathrm{dist}(K, \partial D), 1\}$. На $K_{d/2}$ семейство $\{f_n\}$ равностепенно непрерывно (см. Теорему 12.8), поэтому найдется $\delta \in (0, d/2)$ такое, что для всех z и z' из $K_{d/2}$ с условием $|z - z'| < \delta$ и для всех n выполняется $|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon/3$. Выберем *конечную* δ-сеть $\{z_{m(s)}\}_{s\in S}$ (из точек последовательности $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$) для компакта . Поскольку S конечно, найдется номер N такой, что при всех $n(1) > N$, $n(2) > N$ и $s \in S$ выполняется оценка $|f_{n(1)}(z_{m(s)}) - f_{n(2)}(z_{m(s)})| < \varepsilon/3$. Докажем, что для любых $z \in K$ и $n(1) > N$, $n(2) > N$ имеет место $|f_{n(1)}(z) - f_{n(2)}(z)| < \varepsilon$, откуда по критерию Коши получим, что $\{f_n\}$ равномерно сходится на . Фиксируем $z \in K$, тогда по определению δ-сети найдется $z_{m(s)}$, $s \in S$, с условием $|z - z_{m(s)}| < \delta$. Суммируя вышесказанное, получаем:

$$|f_{n(1)}(z) - f_{n(2)}(z)| \le |f_{n(1)}(z) - f_{n(1)}(z_{m(s)})| +$$

$$|f_{n(1)}(z_{m(s)}) - f_{n(2)}(z_{m(s)})| + |f_{n(2)}(z_{m(s)}) - f_{n(2)}(z)| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\ . \ \square$$

12.12. Определение. Пусть $\{f\}$ - семейство функций в области $D \subset \mathbb{C}$, $J : \{f\} \to \mathbb{C}$ – *функционал.* Функционал J называется *непрерывным на* $\{f\}$ (в топологии равномерной сходимости внутри D), если для любых $f_0 \in \{f\}$ и $\{f_n\} \subset \{f\}$ из условий $f_n \to f_0$ равномерно внутри D при $n \to \infty$ следует, что $\lim_{n\to\infty} J(f_n) = J(f_0)$.

12.13. Предложение. Если $\{f\}$ компактно внутри D и J – непрерывный функционал на $\{f\}$, то J *равномерно ограничен* на $\{f\}$ и *достигает* своего *максимума модуля.*

Доказательство. Пусть $S = \sup\limits_{f\in\{f\}} |J(f)|$. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset \{f\}$ такая, что $|J(f_n)| \to S$ при $n \to \infty$. Из компактности $\{f\}$ найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ в $\{f_n\}$, равномерно внутри D сходящаяся к некоторой $f_0 \in \{f\}$. Из непрерывности J получаем $|J(f_0)| = |\lim\limits_{k\to\infty} J(f_{n_k})| = S$. $\square$

Доказательство теоремы Римана

12.14. Теорема (Римана). Пусть D – *односвязная* область в $\mathbb{C}$, отличная от $\mathbb{C}$. Тогда D конформно эквивалентна единичному кругу $B_1 = B(0,1)$. Более того, для любых $a \in D$ и $\mathrm{th} \in (-\pi, \pi]$ существует и единственный конформный изоморфизм f из D на B_1 с условиями $f(a) = 0$, $\arg(f'(a)) = \mathrm{th}$.

Доказательство. Умножением на $e^{\pm i\,\mathrm{th}}$ теорема сводится к случаю $\mathrm{th} = 0$, который и рассматривается в дальнейшем.

Пусть S – семейство всех *однолистных* функций $g : D \to B_1$ с условием $g(a) = 0$. Докажем, что $S \neq \emptyset$. Фиксируем $\alpha \neq \beta$ в $\mathbb{C}\setminus D$. Из Следствия 5.4 вытекает, что в D существуют голоморфные ветви $V_1(z)$ и $V_2(z)$ многозначных функций $\sqrt{z-\alpha}$ и $\sqrt{z-\beta}$ соответственно. Пусть $g_1(z) = V_1(z)/V_2(z)$, $g_2 = -g_1$.

Докажем, что g_1 и g_2 однолистны в D. Если $g_1(z) = g_1(z')$, то, возводя в квадрат последнее равенство, получим: $(z-\alpha)/(z-\beta) = (z'-\alpha)/(z'-\beta)$, откуда $z = z'$ из биективности ДЛО.

Теперь докажем, что $g_1(D) \cap g_2(D) = \emptyset$. Если $g_1(z) = g_2(z')$, z и z' из D, то $(z-\alpha)/(z-\beta) = (z'-\alpha)/(z'-\beta)$ и снова $z = z'$. Но $g_1(z) = -g_2(z) \neq 0$, противоречие.

Так как $g_2(D)$ – область, то найдется $B(w_0, r) \subset g_2(D)$, $r \in (0,\infty)$. Следовательно

$$g_0(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{g_1(z) - w_0} - \frac{r}{g_1(a) - w_0}\right) \in S$$

(g_0 однолистна как композиция g_1 и ДЛО, причем $|r/(g_1(z) - w_0)| \leq 1$ для всех $z \in D$), т.е. $S \neq \emptyset$.

Введем $S_0 = \{f \in S \mid f'(a) \geq |g_0'(a)|\}$. Ясно, что при некотором $\mathrm{th} \in (-\pi, \pi]$ имеем $e^{i\,\mathrm{th}} g_0 \in S_0 \neq \emptyset$.

12.15. Лемма. Семейство S_0 компактно внутри D.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – произвольная последовательность в S_0. Поскольку S_0 равномерно ограничено, оно предкомпактно (внутри D), поэтому найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ в $\{f_n\}$, равномерно сходящаяся к некоторой f_* внутри D. По Теореме 6.12 (Вейерштрасса) $f_* \in A(D)$, причем

$$f_*'(a) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}'(a) \geq |g_0'(a)| \neq 0 \ ,$$

так что f_* не постоянна. По Теореме 11.15 f_* однолистна в D. Очевидно, что $|f_*(z)| \leq 1$ $(z \in D)$, причем по принципу максимума на самом деле $|f_*(z)| < 1$ $(z \in D)$ и значит $f_* \in S_0$. $\square$

Определим функционал J на S_0, полагая $J(f) = f'(a)$. По Теореме 6.12 (Вейерштрасса) J непрерывен на S_0, а из компактности S_0 получаем, что найдется $f_0 \in S_0$, для которой $J(f_0) = \max_{f\in S_0} J(f)$. Утверждается, что f_0 - искомое отображение. Для этого достаточно показать, что $f_0(D) = B_1$. Допустим противное: найдется $b \in B_1 \setminus f_0(D)$, $b \neq 0$. Рассмотрим ДЛО $\Lambda(w) = (w-b)/(1-\overline{b}w)$, конформно отображающее B_1 на B_1. Функция $\Lambda(f_0(z))$ конформно отображает D на некоторую *область* $\Omega \subset B_1$ (см. Теорему 11.5), причем Ω – односвязна. Последний факт вытекает из Определения 4.14 односвязной области в $\mathbb{C}$ и Теоремы 11.7 (или, чуть сложнее, из Следствия 11.6). Наконец, $0 \notin \Omega$. Согласно Следствию 5.4, найдется голоморфная (и, очевидно, однолистная) в Ω ветвь $V(\zeta)$ многозначной функции $\sqrt{\zeta}$. Определим $h_1(z) = V(\Lambda(f_0(z)))$ – однолистную в D, причем (см. Следствие 5.4) $h_1(D) \subset B_1$, $h_1(a) = V(-b)$, $(|h_1(a)| = \sqrt{|b|})$,

$$h_1'(a) = \frac{f_0'(a)(1-|b|^2)}{2V(-b)} \ .$$

Наконец, положим

$$h_2(z) = \frac{h_1(z) - h_1(a)}{1 - \overline{h_1(a)}h_1(z)} \ .$$

Функция h_2 однолистна, как композиция однолистной функции h_1 и ДЛО, причем последнее (как и ранее) отображает B_1 на B_1. Таким образом $h_2 : D \to B_1$ и $h_2(a) = 0$. Имеем :

$$h_2'(a) = \lim_{z\to a} \frac{h_2(z) - h_2(a)}{z-a} = \frac{h_1'(a)}{1-|h_1(a)|^2} \ ,$$

откуда

$$|h_2'(a)| = \frac{|f_0'(a)|(1-|b|^2)}{2\sqrt{|b|}(1-|b|)} = \frac{|f_0'(a)|(1+|b|)}{2\sqrt{|b|}} > |f_0'(a)|\,.$$

В результате,

$$h = h_2\frac{|h_2'(a)|}{h_2'(a)} \in S_0\ ,\ |h'(a)| > |f_0'(a)|$$

– противоречие с определением S_0 и f_0. $\square$

12.16. Упражнение. Доказать, что для любых односвязных областей D_1 и D_2 в $\mathbb{C}$, отличных от $\mathbb{C}$, для любых $a_1 \in D_1$, $a_2 \in D_2$ и $\mathrm{th} \in (-\pi,\pi]$ существует и единственный конформный изоморфизм $f\,:\,D_1$ на D_2 с условиями $f(a_1) = a_2$, $\arg(f'(a_1)) = \theta$.

Указание: Используя ДЛО, свести к случаю, когда $D_2 = B_1$, $a_2 = 0$.

12.17. Доказать следующий вариант теоремы Рунге: если область D односвязна в $\mathbb{C}$ и $f \in A(D)$, то найдется последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к f внутри D.

12.18. Пусть f – конформное отображение круга B на некоторую жорданову область. Доказать, что найдется последовательность полиномов, однолистных в B, равномерно на B сходящаяся к f.

12.19. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная *односвязная* область, $a \in D$. Если f голоморфна в D, $f(D) \subset D$, $f(a) = a$, $f'(a) = 1$, то f – тождественное отображение. Остается ли указанное утверждение верным *без требования односвязности* D ?

Лекция №13

Принцип соответствия границ (теорема Каратеодори).

Доказательство (частного случая) теоремы Каратеодори

Здесь мы докажем некоторый *упрощенный* вариант *принципа соответствия границ* (теоремы Каратеодори), который, тем не менее, вполне достаточен в ряде важных приложений, например при доказательстве малой теоремы Пикара и разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в жордановых областях (см. далее).

13.1. Теорема (Каратеодори). Пусть D и Ω – жордановы области в $\mathbb{C}$. Пусть $f : D \to \Omega$ – какой-либо их конформный изоморфизм (существующий по теореме Римана). Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{\Omega}$.

13.2. Замечание. Не ограничивая общности, мы будем рассматривать случай $\Omega = B_1 := B(0,1)$. Кроме того, мы *будем опираться* на хорошо известный, но не тривиальный (даже по модулю теоремы Жордана) факт, что $\overline{D}$ *гомеоморфно* $\overline{B_1}$ для любой жордановой области D (если угодно, то мы *доказываем* теорему только для *таких* D).

Доказательство разобьем на несколько лемм, представляющих самостоятельный интерес.

13.3. Лемма (Кебе). Пусть $f \in A(B_1)$, $\|f\|_{B_1} = M < \infty$. Пусть в B_1 проведены два радиуса I_0 и I_1 под углом π/p (p – натурально), а жорданов путь $\gamma : [0,1] \to B_1$ *соединяет* эти радиусы (т.е. $\gamma(0) \in I_0$, $\gamma(1) \in I_1$). Тогда при $\varepsilon = \|f\|_{[\gamma]}$ справедлива оценка $|f(0)| \leq \sqrt[2p]{\varepsilon M^{2p-1}}$.

Доказательство. Если $0 \in [\gamma]$, то $|f(0)| \leq \varepsilon$ и все доказано ввиду $\varepsilon \leq M$. Далее предполагается, что $0 \notin [\gamma]$.

Без ограничения общности мы будем считать, что I_0 совпадает с $[0,1)$, I_1 – с полуинтервалом $[0, e^{i\pi/p})$, а $[\gamma]$ не имеет других общих точек с I_0 и I_1, кроме концевых, причем $[\gamma]$ целиком лежит в том секторе между I_0 и I_1, который принадлежит (замкнутой) верхней полуплоскости.

Положим $g(z) = f(z)\overline{f(\overline{z})}$ и $\gamma^*(t) = \overline{\gamma(t)}$, $t \in [0,1]$. Тогда

$$g \in A(B_1)\ , \|g\|_{B_1} \le M^2\ , \|g\|_{[\gamma]\cup[\gamma^*]} \le M\varepsilon\ .$$

Рассмотрим

$$h(z) = g(z)g(ze^{2\pi i/p})\cdots g(ze^{2\pi i(p-1)/p})$$

и (жорданову) область D, ограниченную множеством $[\gamma] \cup [\gamma^*]$ и результатами поворотов этого множества на углы $2\pi/p\,, \cdots,$ $2\pi(p-1)/p$. Имеем:

$$h \in A(D) \cap C(\overline{D})\ ,\ \|h\|_{\partial D} \le \varepsilon M(M^2)^{p-1}\ ,$$

откуда по принципу максимума модуля (в D) окончательно получаем: $|h(0)| = |f(0)|^{2p} \le \varepsilon M^{2p-1}$. □

13.4. Следствие. Пусть $f \in A(B_1)$, $\|f\|_{B_1} < \infty$, p – натурально, $\delta \in (0,1)$. Пусть существует последовательность жордановых путей $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что (при каждом n) $[\gamma_n] \subset B_1 \setminus \overline{B(0,\delta)}$ и γ_n соединяет некоторую пару радиусов (не обязательно одну и ту же для разных n), образующую угол π/p. Если $\|f\|_{[\gamma_n]} \to 0$ при $n \to \infty$, то $f \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_n = \|f\|_{[\gamma_n]}$, $M = \|f\|_{B_1}$. По предыдущей лемме, $|f(0)| \le \sqrt[2p]{\varepsilon_n M^{2p-1}} \to 0$ при $n \to \infty$, так что $f(0) = 0$. Пусть, от противного, $f \not\equiv 0$ в B_1 и $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$ – разложение Тейлора функции f в B_1, где k натурально и $c_k \ne 0$. Рассмотрим $f_1(z) = f(z)/(z^k)$ при $z \in B_1 \setminus \{0\}$, $f_1(0) = c_k$. Тогда f_1 удовлетворяет условиям настоящего следствия и, по доказанному, должно быть $f_1(0) = 0$. Противоречие. □

13.5. Лемма (Линделефа). Пусть D – произвольная область в $\mathbb{C}$, $f \in A(D)$ и имеют место следующие условия:

(1) $M = \|f\|_D < \infty\,;$

(2) $a \in D$ и $r \in (0, +\infty)$ таковы, что окружность $\{|z-a| = r\}$ имеет (связную) дугу длины $2\pi r/p$ (p – натурально), лежащую вне $D\,;$

(3) при приближении z из $D \cap B(a,r)$ к ∂D *все* предельные значения функции $|f(z)|$ не превосходят $\varepsilon \ge 0$.

Тогда $|f(a)| \le \sqrt[p]{\varepsilon M^{p-1}}$.

Доказательство. Будем считать, что $a = 0$. Пусть Ω – связная компонента (содержащая точку 0) открытого множества $\cap_{k=0}^{p-1} D_k$, где D_k – результат поворота области D вокруг начала координат на угол $2\pi k/p$). Очевидно, что $\{|z| = r\} \cap \Omega = \emptyset$, так что $\Omega \subset B(0,r)$. Нетрудно показать, что все предельные значения функции

$$h(z) = f(z) f(z e^{2\pi i/p}) \cdots f(z e^{2\pi i(p-1)/p})$$

на $\partial\Omega$ (изнутри Ω) не превышают εM^{p-1}. По принципу максимума модуля (см. Упражнение 6.4), $|h(0)| = |f(0)|^p \le \varepsilon M^{p-1}$. $\Box$

13.6. Лемма (граничная теорема единственности в жордановых областях). Пусть D – жорданова область, $f \in A(D)$ и $\|f\|_D < \infty$. Пусть найдутся $z_0 \in \partial D$ и $\delta > 0$ такие, что при стремлении z из $D \cap B(z_0, \delta)$ к ∂D все предельные значения функции $f(z)$ равны компексному числу c. Тогда $f \equiv c$ в D.

Доказательство. При $a \in D \cap B(z_0, \delta/2)$ и $r = \delta/2$ окружность $\{|z-a| = r\}$ имеет дугу, лежащую вне D (по теореме Жордана точка z_0 является граничной также для *области* $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$). Применяя предыдущую Лемму для области D, функции $(f - c)$ и значения $\varepsilon = 0$, получим $f(a) - c = 0$. По теореме единственности $f \equiv c$ в D. $\Box$

Доказательство Теоремы 13.1 Пусть D – жорданова область и $f : D \to B_1$ – конформный изоморфизм. *Считаем известным,* что $\overline{D}$ *гомеоморфна* $\overline{\mathbb{1}}$.

1^o. Докажем, что f непрерывно продолжается на ∂D. Если, от противного, это не так, то найдутся $z_0 \in \partial D$ и последовательности $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$ в D, сходящиеся к z_0, такие, что $f(z_n') \to w_0'$, $f(z_n'') \to w_0''$ при $n \to \infty$, причем $w_0' \ne w_0''$ (проверить !). Существование таких последовательностей следует из *ограниченности* f. Поскольку $f : D \to B_1$ – *гомеоморфизм*, то легко показать, что w_0', $w_0'' \in \partial B_1$. Используя гомеоморфизм $\overline{D}$ на $\overline{\mathbb{1}}$, можно найти жордановы пути γ_n в D, соединяющие z_n' и z_n'', причем $\mathrm{diam}([\gamma_n]) \to 0$ (т.е. $[\gamma_n] \to z_0$ при $n \to \infty$). Пусть $\gamma_n^* = f \circ \gamma_n$. Применяя Следствие 13.4 для $g(w) = f^{-1}(w) - z_0$ и $\{\gamma_n^*\}$ в B_1 (ясно, что $\|g\|_{[\gamma_n^*]} \to 0$ при $n \to \infty$), получаем $f^{-1}(w) \equiv z_0$ – противоречие.

2^o. Продолжим f по непрерывности (единственным образом) из D на $\overline{D}$ согласно 1^o. Как нетрудно видеть, $f(\partial D) \subset \partial B_1$. Поскольку $f : D \to B_1$ – гомеоморфизм, то остается установить взаимную-однозначность функции f на ∂D.

От противного, пусть найдутся $z_1 \neq z_2 \in \partial D$, для которых $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Тогда существуют жордановы *пути* γ_1 , γ_2 : $[0,1] \to \overline{D}$ (причем γ_1 , γ_2 : $[0,1) \to D$), $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = z_1$, $\gamma_2(1) = z_2$, при этом $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$ имеют только одну общую точку $\gamma_1(0)$ (здесь можно воспользоваться гомеоморфизмом $\overline{D}$ и $\overline{}_1$, а в B_1 взять два соответствующих радиуса). При этом $f(\gamma_1(t)) \to w_0$ и $f(\gamma_2(t)) \to w_0$ при $t \to 1-$.

Положим $\gamma_1^* = f \circ \gamma_1$, $\gamma_2^* = f \circ \gamma_2$. Пусть Ω_1 – жорданова область (в B_1), ограниченная кривой $\{\gamma_1^*\} \cup \{\gamma_2^*\}^-$, и пусть $D_1 = f^{-1}(\Omega_1)$ (область D_1 тоже *жорданова*!). Пусть $z_0 \in \partial D_1 \setminus ([\gamma_1] \cup [\gamma_2])$. При некотором $\delta > 0$ круг $B(z_0, \delta)$ не пересекает $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$, так что к функции $f(z) - w_0$ в D_1 можно применить Лемму 13.6, по которой $f \equiv w_0$ в D_1. Противоречие. $\square$

13.7. Найти все кольца с центром в 0, конформно эквивалентные кольцу $\{r < |z| < R\}$, где $0 \le r < R < \infty$.

13.8. Найти группу конформных автоморфизмов кольца $\{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$ и ее групповую операцию.

13.9. Доказать, что любой конформный изоморфизм одного прямоугольника на другой прямоугольник, переводящий все четыре вершины в вершины, линеен. Следовательно, указанный изоморфизм существует только для подобных прямоугольников.

13.10. Установить теоремы единственности для конформных отображений жордановых областей в $\overline{\mathbb{C}}$.

Лекция №14

Гомотопия и односвязность. Другие приложения теории конформных отображений.

Топологические следствия из теоремы Римана: гомотопия и односвязность.

Для начала введем одно базовое топологическое понятие.

14.1. Определение. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, γ_0 и $\gamma_1 : [0,1] \to D$ – пути в D с *одинаковыми концами*, т.е. $a := \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ и $b := \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Эти пути называются *гомотопными в D как пути с одинаковыми концами*, если существует *непрерывная* функция (гомотопия) $\gamma : [0,1]_t \times [0,1]_s \to D$ со следующими свойствами: $\gamma(t,0) = \gamma_0(t)$ и $\gamma(t,1) = \gamma_1(t)$ при всех $t \in [0,1]$, $\gamma(0,s) = a$ и $\gamma(1,s) = b$ при всех $s \in [0,1]$.

Такую гомотопию назовем *гомотопией первого рода ((1)-гомотопией)* и примем обозначение $\gamma_0 \simeq_{(1),D} \gamma_1$.

14.2. Определение. Пусть γ_0 и $\gamma_1 : [0,1] \to D$ – *замкнутые пути* в области D. Эти пути называются *гомотопными в D как замкнутые пути*, если существует *непрерывная* функция (гомотопия) $\gamma : [0,1]_t \times [0,1]_s \to D$ со следующими свойствами: $\gamma(t,0) = \gamma_0(t)$ и $\gamma(t,1) = \gamma_1(t)$ при всех $t \in [0,1]$, $\gamma(0,s) = \gamma(1,s)$ при всех $s \in [0,1]$.

Это – гомотопия *второго рода ((2)-гомотопия)*, с обозначением $\gamma_0 \simeq_{(2),D} \gamma_1$).

При этом говорят, что семейство путей $\{\gamma_s(\cdot) := \gamma(\cdot,s)\}_{s\in[0,1]}$ *осуществляет* соответствующую гомотопию.

14.3. Упражнение. Гомотопность (в D) каждого рода есть отношение эквивалентности на множестве всех путей в D.

14.4. Упражнение. Если пути γ_0 и $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ *эквивалентны*, то для всякой области D, содержащей их носители, имеем $\gamma_0 \simeq_{(1),D} \gamma_1$. Если эти пути еще и замкнуты, то $\gamma_0 \simeq_{(2),D} \gamma_1$. При этом соответствующую гомотопию γ можно выбрать так, что $\gamma : [0,1]_t \times [0,1]_s \to [\gamma_0] = [\gamma_1]$.

Таким образом, корректно говорить о *гомотопиях кривых* (соответствующего рода) при этом *все представители* кривых считаются определенными на $[0,1]$. Обозначения для гомотопии кривых такие же, как и для путей.

14.5. Упражнение. Гомотопия $\Gamma_0 \simeq_{(1),D} \Gamma_1$ кривых Γ_0 и Γ_1 (с одинаковыми концами) имеет место если и только если $(\Gamma_0 \cup \Gamma_1^-) \simeq_{(2),D} \{0\}$ (т.е. $\Gamma_0 \cup \Gamma_1^-$ (2)-гомотопна тривиальным *одноточечным* кривым в D или, как говорят, *гомотопна нулю* в D).

Как и ранее, полагаем $B_1 = B(0,1)$. Мы готовы доказать следующий важный топологический факт.

14.6. Теорема (характеристика односвязных областей в $\mathbb{C}$). Для произвольной области D в $\mathbb{C}$ следующие условия эквивалентны:

(1) D *односвязна в смысле Жордана*, т.е. всякая замкнутая жорданова кривая Γ, $[\Gamma] \subset D$, ограничивает область $D(\Gamma)$, целиком лежащую в D ;

(2) D гомеоморфна B_1 ;

(3) $D = \bigcup\limits_{\ell=1}^{\infty} D_\ell$ – исчерпывается строго возрастающей ($\overline{D_\ell} \subset D_{\ell+1}$) последовательностью жордановых областей D_ℓ ;

(4) $\partial_{\overline{\mathbb{C}}} D$ (граница области D, взятая в топологии $\overline{\mathbb{C}}$) связна в $\overline{\mathbb{C}}$;

(5) любые две кривые в D с одинаковыми концами (1)-гомотопны в D ;

(6) любая замкнутая кривая в D гомотопна нулю в D ;

(7) любые две замкнутые кривые в D (2)-гомотопны в D .

Доказательство. Если $D = \mathbb{C}$, то для нее, очевидно, выполняются все условия (1) – (7) (гомотопии 1 и 2 рода при естественных условиях на *пути* γ_0 и γ_1 задаются по единой формуле $\gamma(t,s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$). Следовательно *далее* мы можем считать, что $D \neq \mathbb{C}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) непосредственно вытекает из Теоремы 12.14 (Римана).

(2) $\Rightarrow$ (5). Гомеоморфно переносим пути из D в B_1, там осуществляем гомотопию, используя выпуклость B_1, затем "возвращаемся назад". Провести простые выкладки предлагаем читателю.

(5) $\Rightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) – очевидно.

Установим (6) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\gamma_0 : [0,1] \to D$ – произвольный замкнутый жорданов путь. Предположим от противного, что найдется $a \in D(\gamma_0) \setminus D$. Согласно (6), $\gamma_0 \simeq_{(2),D} \gamma_1$, где γ_1 – путь (на $[0,1]$) с носителем в некоторой *точке* b, $a \neq b \in D$. По Теореме 4.3 $|\operatorname{ind}_a(\gamma_0)| = 1$. Пусть $\{\gamma_s\}, s \in [0,1]$, – семейство путей, осуществляющих гомотопию γ_0 и γ_1 в D. Из Леммы 1.22 следует, что (целочисленная) функция $\operatorname{ind}_a(\gamma_s)$ непрерывна на $[0,1]_s$, а значит постоянна. Последнее противоречит очевидному равенству $\operatorname{ind}_a(\gamma_1) = 0$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (4). Пусть, от противного, $f : B_1 \to D$ – гомеоморфизм, но ∂D не связна (до конца доказательства сей теоремы *все* топологические понятия определяются относительно топологии $\overline{\mathbb{C}}$). Найдем открытые Ω_1 и Ω_2 с условиями $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\partial D \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\partial D \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ и $\partial D \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Введем $K = \partial\Omega_1 \cap D$ – компакт в D. Тогда $K_1 = f^{-1}(K)$ – компакт в B_1, так что найдется $r \in (0,1)$ с условием $K_1 \subset \overline{B_r}$, где $B_r = B(0,r)$. Так как $f(\overline{B_r})$ – компакт в D, то найдутся $z_1 \in \Omega_1 \setminus f(\overline{B_r})$ и $z_2 \in \Omega_2 \setminus f(\overline{B_r})$. Положим $w_1 = f^{-1}(z_1)$, $w_2 = f^{-1}(z_2)$ и соединим их путем (ломаной) γ в $B_1 \setminus \overline{B_r}$. Но тогда $f \circ \gamma$ – путь, соединяющий z_1 и z_2 в D, не пересекающий $f(\overline{B_r})$ и, следовательно, содержащееся в нем множество $\partial\Omega_1 \cap D$. Таким образом, $f \circ \gamma$ не пересекает всю $\partial\Omega_1$. Поскольку $z_1 \in \Omega_1$, а $z_2 \notin \Omega_1$, мы приходим к противоречию (достаточно воспользоваться принципом вложенных отрезков).

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть ∂D связна (в $\overline{\mathbb{C}}$), γ – замкнутый жорданов путь в D, но, от противного, $D(\gamma) \setminus D \neq \emptyset$. Так как $D(\gamma) \cap D \neq \emptyset$ (используется Теорема 1.16 (Жордана)), то легко показать, что $D(\gamma) \cap \partial D \neq \emptyset$. Пусть $\Omega(\gamma) = \overline{\mathbb{C}} \setminus D(\gamma)$. Снова по Теореме 1.16 имеем $\Omega(\gamma) \cap D \neq \emptyset$, причем $\infty \in \Omega(\gamma) \setminus D \neq \emptyset$. Как и ранее отсюда получаем $\Omega(\gamma) \cap \partial D \neq \emptyset$, что противоречит связности ∂D.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $f : B_1 \to D$ – гомеоморфизм. Искомое исчерпание имеет вид $\{f(\overline{B(0, 1 - 1/\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ (доказать).

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть γ –жорданов путь в D. Из (3) найдется жорданова область G с условиями $[\gamma] \subset G \subset \overline{G} \subset D$. По доказанному ранее ((4) $\Rightarrow$ (1)), G односвязна по Жордану, так что $D(\gamma) \subset G \subset D$. $\square$

В Лекции 5 мы оставили без доказательства следующий важный факт.

14.7. Теорема (о допустимых областях). Пусть $D_1, \ldots,$ D_S – жордановы области в $\mathbb{C}$ ($S \geq 2$ – натурально). Предположим, что *замыкания* областей $D_2, \ldots, D_S$ попарно не пересекаются и целиком содержатся внутри D_1. Тогда множество $D = D_1 \setminus (\cup_{s=2}^{s=S} \overline{D_s})$ является областью.

Доказательство. Мы приведем доказательство для случая $S = 2$, в котором уже содержатся все необходимые ингредиенты для дальнейшей индукции.

Пусть $a \in D_2$. ДЛО $w = 1/(z-a)$ переводит *область* $\Omega_2 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_2}$ в некоторую жорданову область G в $\mathbb{C}$. По предыдущей теореме мы можем *исчерпать* G жордановыми областями: $G = \bigcup\limits_{\ell=1}^{\infty} G_\ell$. Пусть G'_ℓ есть образ области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G_\ell}$ под действием ДЛО $z = a + 1/w$. Последовательность областей $\{G'_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ является строго убывающей и пересечение ее элементов есть $\overline{D}$ (доказать !). Последнее означает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое ℓ, что область G'_ℓ принадлежит δ-окрестности области D.

Завершим доказательство теоремы. Пусть a_0 и a_1 – произвольные точки из D. Поскольку D_1 *линейно* связна, найдется путь $\gamma : [0,1] \to D_1$ с условиями $\gamma(0) = a_0$ и $\gamma(1) = a_1$. Теперь найдем ℓ такое, что $\overline{G'_\ell} \subset D \setminus \{a_0, a_1\}$, и пусть $\Gamma^+ = \partial^+ G'_\ell$. Пусть t_0 и t_1 – минимальное и максимальное (соответственно) значения $t \in [0,1]$, для которых $\gamma(t) \in [\Gamma^+]$. Если таковых нет, то γ соединяет a_0 и a_1 в D и все доказано. В противном случае искомый путь, соединяющий a_0 и a_1 в D, совпадает с γ на $[0, t_0] \cup [t_1, 1]$, а на $[t_0, t_1]$ он “идет"по Γ^+ в направлении от $\gamma(t_0)$ до $\gamma(t_1)$. $\square$

14.8. Доказать, что всякий замкнутый путь γ в $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\mathrm{ind}_0(\gamma) = n \in \mathbf{Z}$) гомотопен в $\mathbb{C}_*$ равномерному n-кратному обходу единичной окружности.

14.9. Сформулировать и доказать теорему об инвариантности индекса при гомотопии замкнутых кривых.

Другие приложения теории конформных отображений

Добравшийся до этого места читатель почти наверное знаком с азами теории *гармонических функций*, в частности, с постановкой соответствующей *задачи Дирихле* в ограниченных областях $\mathbb{R}^2$. *Формула Пуассона* дает решение задачи Дирихле в круге при любых непрерывных *граничных данных*. Элементарно доказывается свойство *инвариантности* гармоничности при *конформной* замене переменных (см. книгу Б.В. Шабата: Добавление, пп. 1 и 2). Пользуясь указанными утверждениями, теоремой Римана и теоремой Каратеодори, мы получаем следующий весьма тонкий факт.

14.10. Теорема. Во *всякой жордановой области* задача Дирихле разрешима при любых непрерывных граничных данных.

Приведенное выше доказательство теоремы Каратеодори на самом деле покрывает только случай, когда *дано*, что $\overline{D}$ гомеоморфно $\overline{B_1}$.

Отметим одно важное приложение Теоремы 11.7 (обратного принципа соответствия границ) к задаче конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольник. Эта задача решается с помощью *интеграла Кристоффеля-Шварца*, причем на конечном этапе Теорема 11.7 используется в *полном объеме*, поскольку соответствующее конформное отображение имеет особые точки (ветвления) на вещественной оси и всего лишь *непрерывно* на замыкании верхней полуплоскости.

В заключение приведем формулировку и вкратце обсудим доказательство так называемой *малой теоремы Пикара.*

14.11. Теорема (Пикара). Всякая *целая* непостоянная функция принимает (в $\mathbb{C}$) все значения (из $\mathbb{C}$), кроме, быть может, одного.

Всякая *мероморфная* в $\mathbb{C}$ непостоянная функция принимает (в $\mathbb{C}$) все значения (из $\overline{\mathbb{C}}$), кроме, быть может, двух.

Доказательство этой теоремы основано на использовании свойств так называемой *модулярной функции.* При ее построении применяются теорема Римана, теорема Каратеодори (приведенное выше доказательство *срабатывает* в возникающей конкретной ситуации) и принцип симметрии. На самом деле, возникает потребность в использовании функции *обратной* к модулярной, которая многозначна и, таким образом, вступает в силу аналитическое продолжение вдоль путей и теорема о *монодромии*, “полноправное"использование которой гарантируется Теоремой 14.6. Подробности читатель найдет в книге Б.В. Шабата: гл. IV, п. 42.

14.12. Найти *ограниченную* гармоническую функцию в полукруге $D = B(0,1) \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$, у которой все предельные значения на верхней полуокружности (границы) равны 1, а на диаметре полукруга равны -1 (в точках ± 1 пределов нет). Найти множество нулей этой функции.

14.13. Доказать однолистность функции $F(z) = \int\limits_{[0,z]} t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-3/4}dt$ на верхней полуплоскости Π_+ и найти $F(\Pi_+)$ (ветвь подинтегральной функции положительна на $(0,1)$ со стороны Π_+). Используя эту функцию, построить какое-либо конформное отображение круга на квадрат.

14.14. Доказать, что модулярная функция определена и голоморфна в единичном круге, причем не продолжается голоморфно за его пределы.

14.15. Найти все целые функции, удовлетворяющие уравнению $e^{f(z)} + e^{g(z)} \equiv 1$.

14.16. Доказать, что целая функция $f(z) = ze^z$ не имеет исключительных пикаровских значений.

14.17. Сколько исключительных пикаровских значений имеют функции $tg(z)$ и $z + tg(z)$?

14.18. Пусть $n \geq 2$ – натуральное число. Найти все целые функции f и g такие, что $f^n(z) + g^n(z) \equiv 1$

Парамонов Петр Владимирович

Избранные главы комплексного анализа

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен П.В. Парамоновым
с использованием издательской системы LaTeX2ε
на механико-математическом факультете МГУ.

Подписано в печать 01.11.2000 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 6,0 п.л.
Заказ Тираж 100 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом
факультете МГУ, г. Москва, Воробьевы горы
Лицензия на издательскую деятельность ЛР №040746
от 12.03.1996 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова