Глава 1

Лекции и семинары, 1 семестр

1. Арифметика и топология поля $\mathbb{C}$. Предел и непрерывность. Экспонента и логарифм.

1.1. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.

Определение 1.1. *Полем комплексных чисел* называется множество

$$\mathbb{C} = \left\{ x + i\,y \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R},\, i \text{ - символ} \right\}$$

с операциями

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

где $z_{1,2} = x_{1,2} + i\,y_{1,2}$.

Выражение $z = x + i\,y$ называется *алгебраической формой* комплексного числа z; $\operatorname{Re} z = x$ и $\operatorname{Im} z = y$ – его *действительной* и *мнимой частями* соответственно.

Упражнение 1.1. Проверить, что $\mathbb{C}$ – поле (9 аксиом), нулем и единицей в котором являются $0 = 0 + i \cdot 0$ и $1 = 1 + i \cdot 0$ соответственно. Подполе $\{ x + i \cdot 0 \,|\, x \in \mathbb{R} \}$ изоморфно $\mathbb{R}$ (далее они отождествляются), $i^2 = -1$.

Указание: ассоциативность умножения удобнее проверять в тригонометрической форме, которая будет определена ниже.

Важно понимать, что

$$z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Определение 1.2. Если $z = x + i\,y$, то его *комплексно сопряженным* называется число $\overline{z} = x - i\,y$, а его *модулем* – число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

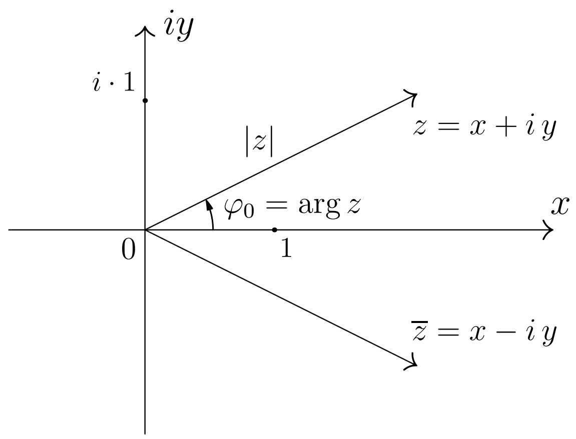

Рис. 1.1.

При $z \neq 0$ обратный элемент к z вычисляется по формуле
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Множество комплексных чисел интерпретируется как совокупность точек (или их радиус-векторов) декартовой плоскости Oxy (см. рис. 1.1). При этом отображение $z \mapsto \overline{z}$ – это симметрия относительно оси Ox.

Упражнение 1.2. Каков геометрический смысл отображения $z \mapsto iz$?

1.2. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Определение 1.3. *Полярным радиусом* числа $z = x + iy$ называется его модуль: $r = |z|$.

Если $z \neq 0$, то существует единственное $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$ с условиями $x = r\cos(\varphi_0)$, $y = r\sin(\varphi_0)$. Это φ_0 называется *главным значением (полярного) аргумента* z и обозначается $\varphi_0 = \arg(z)$. Отметим, что углы у нас всегда измеряются в *радианах. Совокупным (полярным) аргументом числа* z называется множество
$$\operatorname{Arg}(z) = \{\, \varphi_0 + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\,\}.$$
Если $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Последнее выражение называется *тригонометрической формой числа* z (при $\varphi = \varphi_0$ – *основной* тригонометрической формой).

Элементарно проверяется, что при $\varphi_{1,2} \in \operatorname{Arg}(z_{1,2})$, $r_{1,2} = |z_{1,2}|$ справедливо равенство
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$
Отсюда следует *формула Муавра*: если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, то
$$z^n = r^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$
Пример 1.1. Вычислим $(1 - i)^{15}$.
$$(1-i)^{15} = \big(\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))\big)^{15} = 2^{\frac{15}{2}}\big(\cos(-\frac{15\pi}{4}) + i\sin(-\frac{15\pi}{4})\big) = 2^7(1+i).$$

1.3. Извлечение корней из комплексных чисел.

Пусть $n \in \{2, 3, \dots\}$. По определению, $w \in \sqrt[n]{z} \iff w^n = z$.

Ясно, что $\sqrt[n]{0} = \{0\}$. Из (1.1) следует, что при $z \neq 0$ совокупность $\sqrt[n]{z}$ состоит из n элементов $\{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$, находящихся по формуле
$$w_k = \underset{(k)}{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$
Элемент w_0 называется *главным (основным) значением* $\sqrt[n]{z}$.

Упражнение 1.3. Доказать, что в последних обозначениях
$$w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = 0.$$

Следующие теоремы известны из курса алгебры.

Теорема 1.1. *(Основная теорема алгебры). Поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, т.е. всякий многочлен* $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, *имеет корень в* $\mathbb{C}$.

Теорема 1.2. *(Частный случай теоремы Фробениуса). Пусть* $\mathbb{P}$ *– поле, содержащее* $\mathbb{C}$, *причем* $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P} < \infty$. *Тогда* $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

Упражнение 1.4. Доказать предыдущую теорему и привести пример какого-либо бесконечномерного поля $\mathbb{P}$ над $\mathbb{C}$.

1.4. Топология (метрика) в $\mathbb{C}$.

В $\mathbb{C}$ вводится метрика $\mathrm{d}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ (как в $\mathbb{R}^2$). Через $B(a, r)$ обозначается *открытый* круг $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$.

Для непустых множеств E_1 и E_2 в $\mathbb{C}$ определим *расстояние* между этими множествами:

$$\mathrm{d}(E_1, E_2) = \inf_{z_1 \in E_1, z_2 \in E_2} \mathrm{d}(z_1, z_2).$$

Предполагаются известными определения *открытых, замкнутых, ограниченных, компактных, связных* множеств в произвольном метрическом пространстве (в частности, в $\mathbb{R}^2$). Тем не менее, ряд основных понятий мы напомним.

1.5. Предел последовательности в $\mathbb{C}$. Экспонента.

Пусть $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$.

Определение 1.4. Говорят, что *число a является пределом последовательности $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ при $n \to +\infty$*, и пишут

$$a = \lim_{n \to +\infty} z_n,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N_\varepsilon$ имеем $\mathrm{d}(z_n, a) < \varepsilon$.

Упражнение 1.5. Пусть $z_n = x_n + i\,y_n$. Тогда

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \operatorname{Re} a \\ \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \operatorname{Im} a \end{cases}$$

Упражнение 1.6. (1) $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0.$

(2) При $a \neq 0$

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = |a|\,, \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{Arg}(z_n) = \operatorname{Arg}(a) \pmod{2\pi}\,. \end{cases}$$

Последнее равенство понимается так. Найдутся $\varphi_n \in Arg(z_n)$ и $\varphi_0 \in Arg(a)$ такие, что $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n = \varphi_0$.

Рассмотрим пример. *Фиксируем* произвольное $z \in \mathbb{C}$. Определим

$$e^z = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

т.е. докажем, что данный предел существует, и обозначим его через e^z. Считаем стандартные свойства функции e^x, $x \in \mathbb{R}$, известными.

Пусть, как всегда, $z = x + i\,y$. Тогда

$$\left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left|\,(1 + \frac{x}{n}) + i\frac{y}{n}\,\right|^n = \left(\,(1 + \frac{x}{n})^2 + (\frac{y}{n})^2\,\right)^{\frac{n}{2}} = \exp\left(\,\frac{n}{2}\ln(1 + \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{2x}{n})\,\right),$$

откуда, ввиду известного соотношения $\ln(1 + t) \sim t$ при $t \to 0$ $(t \in \mathbb{R})$, находим

$$\lim_{n \to +\infty} \left|(1 + \frac{z}{n})^n\right| = e^x\,.$$

Найдем теперь предел (полярного) аргумента последовательности $w_n = (1 + z/n)^n$ (по $\pmod{2\pi}$). Если $n \gg 1$, то $|z/n| < 1$, поэтому $(1 + z/n)$ находится в правой полуплоскости и справедливо равенство

$$\arg(1 + \frac{z}{n}) = \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \sim \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}},\; n \to +\infty.$$

Из формулы Муавра получаем, что предел последовательности $\mathrm{Arg}(w_n) \sim y/(1+x/n)$ (по $\pmod{2\pi}$) существует и

$$y \in \mathrm{Arg}(\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{z}{n})^n).$$

Итак, существует

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{z}{n})^n = e^x(\cos y + i\sin y) =: e^z.$$

В частности, если $x=0$, то $e^z = e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Например,

$$e^{2\pi i} = 1. \tag{1.2}$$

Кроме того, из тригонометрической формы комплексных чисел, $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, получаем *показательную форму* записи комплексных чисел: $z = re^{i\varphi}$.

Пусть теперь $z_j = x_j + i\,y_j$, $j \in \{1,2\}$. Тогда, по доказанному,

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\big) = e^{x_1+x_2}\big((\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2)+$$

$$+\,i\,(\sin y_1\cos y_2 + \sin y_2\cos y_1)\big) = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2}. \tag{1.3}$$

Из (1.2) и (1.3) имеем:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Число $2\pi i$ называется *основным периодом экспоненты.*

1.6. Предел функции. Непрерывность. Классы $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$.

В дальнейшем через $B'(z_0,r)$ обозначается проколотая r-окрестность точки z_0, т.е. $B'(z_0,r) = B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$.

Пусть $E\subset\mathbb{C}$, $E\neq\varnothing$, z_0 – предельная точка E (т.е. в любой проколотой окрестности точки z_0 есть точка из E) и пусть $f: E\to\mathbb{C}$ – некоторая функция. Говорят, что f имеет предел $A\in\mathbb{C}$ при z стремящемся к z_0 (по E), и пишут

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z) = A, \tag{1.4}$$

если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех $z\in B'(z_0,\delta)\cap E$ имеем $f(z)\in B(A,\varepsilon)$.

Если E содержит некоторую проколотую окрестность точки z_0, то строка $z\in E$ в записи (1.4) опускается.

Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0\in E$ (по E), если $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z) = f(z_0)$ (когда z_0 – предельная точка E), либо z_0 – изолированная точка в E.

Функция f называется *непрерывной на множестве* $E_1\subset E$ (по E), если она непрерывна в каждой точке этого множества (по E).

Напомним, что через $o(1)$ (при $z\to z_0$) обозначается класс всех функций h, определенных в (каждая h в своей) проколотой окрестности точки z_0 и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{z\to z_0} h(z) = 0$.

Если функция g определена в некоторой проколотой окрестности точки z_0, то через $o(g(z))$ (или $o(g)$ при $z\to z_0$) обозначается класс функций $g(z)o(1)$ (при $z\to z_0$).

Есть надежда, что читатели сами легко вспомнят определения классов $O(1)$ и $O(g)$ (при $z\to z_0$).

В качестве примера работы с классами $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$ покажем, что

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1.$$

Пусть, как всегда, $z = x + i\,y$. Тогда $z \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$, откуда

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \big(1 + x + o(x)\big) \cdot \big(1 + i\,y + o(y)\big) = 1 + z + o(z),\ z \to 0. \qquad (1.5)$$

Следовательно, $(e^z - 1)/z \to 1$ при $z \to 0$, что и требовалось.

Отметим, что в предыдущем примере через $o(g)$ обозначались *конкретные* подходящие функции из соответствующих *классов* $o(g)$.

Упражнение 1.7. Доказать:

$$(1)\ o(x) \subsetneq o(z),\ o(y) \subsetneq o(z),\ z \to 0\,; \quad (2)\ o(z) = o(\overline{z}) = o(|z|),\ z \to 0\,.$$

1.7. Экспонента и логарифм.

Как обычно, полагаем $z = x + i\,y$ и $w = u + i\,v$.

Пусть $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $-\infty < \alpha < \beta \le \alpha + 2\pi < +\infty$. Определим, куда переходит горизонтальная полоса $\Pi_{(\alpha,\beta)} = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \alpha < \operatorname{Im} z < \beta \,\}$ под действием отображения $w = e^{\,z}$.

Сначала посмотрим куда перейдет горизонтальная прямая $z_1(t) = t + i\,y_0$ ($t \in \mathbb{R}$, $y_0 \in (\alpha, \beta)$ фиксировано):

$$w_1(t) = e^{\,z_1(t)} = e^{\,t + i\,y_0} = e^{\,t} \cdot e^{\,i\,y_0}\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

– (открытый) луч на плоскости w, выходящий из точки 0 под углом y_0 (в радианах) к оси Ox.

А если $z_2(t) = x_0 + i\,t\,,\ t \in (\alpha, \beta)$, – вертикальный интервал полосы $\Pi_{(\alpha,\beta)}$, то

$$w_2(t) = e^{\,z_2(t)} = e^{\,x_0} \cdot e^{\,i\,t}\,,\ \ t \in (\alpha, \beta)$$

– дуга окружности радиуса $e^{\,x_0}$ с центром в точке 0 на плоскости w, проходящая между лучами $\{w \in \mathbb{C} \,:\, \alpha \in \operatorname{Arg} w\}$ и $\{w \in \mathbb{C} \,:\, \beta \in \operatorname{Arg} w\}$.

Таким образом, $\Pi_{(\alpha,\beta)}$ под действием экспоненты переходит в угол $V_{(\alpha,\beta)} = \{\, w \in \mathbb{C} \,|\, \alpha < \underset{(\alpha,\beta)}{\arg} w < \beta \,\}$ (здесь берутся конкретные значения $\underset{(\alpha,\beta)}{\arg} w \in \operatorname{Arg} w$, удовлетворяющие указанным условиям).

Нетрудно видеть, что экспонента является гомеоморфизмом $\Pi_{(\alpha,\beta)}$ на $V_{(\alpha,\beta)}$. Обратное к этому отображение обозначается так: $z = \underset{(\alpha,\beta)}{\ln}\, w$.

Определим теперь *многозначную* функцию $\operatorname{Ln}(z)$.

Определение 1.5. $w \in \operatorname{Ln} z \Leftrightarrow z = e^{\,w}$ (ясно, что $z \ne 0$).

Представим z в *основной показательной* форме: $z = re^{i\varphi_0}$. Поскольку $z = e^{\,w} = e^{\,u} \cdot e^{\,i\,v}$, получаем, что $u = \ln r$, $v = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (проверить!). Таким образом,

$$\operatorname{Ln}(z) = \big\{\ \ln|z| + i\,(\arg z + 2\pi k) \,\big|\, k \in \mathbb{Z}\,\big\}\,,\ z \ne 0\,.$$

Основной ветвью логарифма называется функция $\ln(z) = \ln|z| + i \arg z$, $z \ne 0$. Слева в последнем равенстве ln обозначает определяемую здесь функцию *комплексной переменной* z, справа – уже известную логарифмическую функцию положительного аргумента. Нетрудно видеть, что $\ln(z) = \underset{(-\pi,\pi)}{\ln}(z)$ на $V_{(-\pi,\pi)}$.

Упражнение 1.8. Доказать, что при $-\infty < \alpha < \beta \le \alpha + 2\pi/n < +\infty$ отображение $w = z^{\,n}$ является гомеоморфизмом угла $V_{(\alpha,\beta)}$ на угол $V_{(n\alpha,n\beta)}$. Обратное к нему отображение обозначается следующим образом:

$$z = \underset{(n\alpha,n\beta)}{\sqrt[n]{w}} = \exp\Big(\frac{1}{n} \underset{(n\alpha,n\beta)}{\ln}(w)\Big)\,.$$

В частности, $\underset{(-\pi,\pi)}{\sqrt[n]{w}} = \underset{(0)}{\sqrt[n]{w}}$ на $V_{(-\pi,\pi)}$. Каково множество точек разрыва функции $\underset{(0)}{\sqrt[n]{z}}$ в $\mathbb{C}$?

2. Связность. Теорема Жордана. Стереографическая проекция. Односвязная область. Оболочка компакта.

2.1. Связные множества.

Пусть (T, τ) – топологическое пространство (τ – система всех открытых подмножеств в T с известным набором свойств).

Определение 2.1. Пусть $X \subset T$ и существуют $U_1, U_2 \in \tau$ со следующими свойствами:

$$(1): U_1 \cap X \neq \varnothing\,;\ (2): U_2 \cap X \neq \varnothing\,;\ (3): U_1 \cap U_2 = \varnothing\,;\ (4): X \subset U_1 \cup U_2\,.$$

Тогда множества U_1 и U_2 называются *разделяющими* (*для* X), а множество X называется *несвязным* в (T, τ). Если для $X \neq \emptyset$ *не существует* разделяющих множеств, то X называется *связным* в (T, τ).

Определение 2.2. Пусть $X \subset T$. Подмножество $X_1 \subset X$ называется *связной компонентой* множества X, если X_1 связно и не существует связного множества X_2 со свойством $X_1 \subsetneq X_2 \subseteq X$.

Определение 2.3. *Областью* в $\mathbb{C}$ называется всякое (непустое) открытое связное множество в $\mathbb{C}$.

При $E \subset \mathbb{C}$ через ∂E обозначается *граница* множества E в $\mathbb{C}$, а через $\overline{E}$ – *замыкание* множества E в $\mathbb{C}$.

2.2. Пути и кривые в $\mathbb{C}$. Теорема Жордана.

Пусть (T, τ) – топологическое пространство.

Определение 2.4. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, и пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to T$ – непрерывное отображение. Тогда γ называется *путем в* (T, τ), а множество $[\gamma] = \gamma([\alpha, \beta])$ – его *носителем.*

Определение 2.5. Множество $X \subset T$, $X \neq \varnothing$, называется *линейно связным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ существует путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to T$, $[\gamma] \subset X$, с условием $\gamma(\alpha) = x_1$, $\gamma(\beta) = x_2$.

Упражнение 2.1. Доказать эквивалентность понятий связности и линейной связности для *открытых* множеств в $\mathbb{C}$.

Определение 2.6. Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется *жордановым*, если он взаимно однозначен на $[\alpha, \beta]$ (т.е. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$).

Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется *замкнутым жордановым*, если $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при всех $\alpha \leqslant t_1 < t_2 < \beta$, но $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Теорема 2.1. *(Жордана). Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – путь в $\mathbb{C}$ с носителем $S = \gamma([\alpha, \beta])$. Обозначим $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$.*

1. *Если γ – жорданов путь, то Ω связно и $\partial\,\Omega = S$.*
2. *Если γ – замкнутый жорданов путь, то Ω состоит ровно из двух непересекающихся компонент (областей): ограниченной (D_γ) и неограниченной (Ω_γ), причем $\partial D_\gamma = \partial \Omega_\gamma = S$.*

В программу экзамена включается доказательство этой теоремы для случая произвольной замкнутой жордановой ломаной (см. Ч. 2, Гл. 1, р. 2).

Упражнение 2.2. Привести пример двух непересекающихся ограниченных областей D_1 и D_2 в $\mathbb{C}$ с условием $\partial D_1 = \partial D_2$.

Определение 2.7. Пусть (T, τ) – хаусдорфово *локально-компактное* топологическое пространство (у каждой точки в T есть открытая окрестность, замыкание которой – компакт), *не являющееся* компактным. Его *одноточечной компактификацией* (по Александрову) называется топологическое пространство (T_1, τ_1), где $T_1 = T \sqcup \{\infty\}$ (∞ – символ, не являющийся элементом из T),

$$\tau_1 = \tau \sqcup \{T_1 \setminus K\}_{K \in \mathcal{K}},$$

и $\mathcal{K}$ – совокупность всех компактных подмножеств в (T, τ).

При этом (T_1, τ_1) *компактно и хаусдорфово*, а вложение (T, τ) в (T_1, τ_1) *непрерывно.*

Одноточечная компактификация комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (с её стандартной топологией) называется *расширенной комплексной плоскостью* (часто обозначаемой $\overline{\mathbb{C}}$, но мы придерживаемся обозначения $\mathbb{C}^\bullet$).

2.3. Сферическая метрика на $\mathbb{C}^\bullet$. Стереографическая проекция.

Ранее на комплексной плоскости была введена евклидова метрика:

$$\mathrm{d}\,(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Определим *сферическую* метрику на $\mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$:

$$\mathrm{d}^\bullet(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}},\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}},\ z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty \\ 0,\ z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

Из предложения 2.1 будет следовать, что $\mathrm{d}^\bullet(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет аксиомам метрики, причем топология, задаваемая этой метрикой, является топологией одноточечной компактификации плоскости $\mathbb{C}$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$ сферу Σ с радиусом $1/2$ и центром в точке $(0, 0, 1/2)$ и отождествим $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ с подпространством $\mathbb{R}^2_{(\xi,\eta)} \subset \mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$. Введем обозначения $O = (0, 0, 0)$, $N = (0, 0, 1)$.

Любой точке $M = (\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma \setminus N$ можно сопоставить точку $z = z_M$ комплексной плоскости $\mathbb{C}_z = \mathbb{R}^2_{(x,y)}$, продолжив луч NM до пересечения с последней.

Отображение $\sigma : \Sigma \to \mathbb{C}^\bullet$, заданное по правилу

$$\sigma(M) = \begin{cases} z_M,\ M \neq N \\ \infty,\ M = N \end{cases}$$

называется *стереографической проекцией.* Легко видеть, что оно взаимно однозначно. Будем обозначать $M_z = \sigma^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; $N = \sigma^{-1}(\infty)$.

Упражнение 2.3. Вывести формулы стереографической проекции:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}\ ;\ y = \frac{\eta}{1-\zeta}\ ; \quad \xi = \frac{x}{1+|z|^2}\ ;\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2}\ ;\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\ ,$$

пользуясь коллинеарностью векторов $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{Nz_M}$ и уравнением сферы Σ. В данном случае $M_z = (\xi, \eta, \zeta)$, где $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Предложение 2.1. *Если $\rho\,(A, B)$ – евклидово расстояние (в $\mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$) между точками A и B, то во введенных выше обозначениях имеем:*

$$\mathrm{d}^\bullet(z_1, z_2) = \rho\,(M_{z_1}, M_{z_2}).$$

Таким образом, $\sigma : \Sigma \to \mathbb{C}^\bullet$ – изометрия (Σ, ρ) и $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$. Поскольку (Σ, ρ) – компактное метрическое пространство, $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$ – тоже компактно. Поэтому $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$ (расширенную плоскость) часто называют *сферой Римана.*

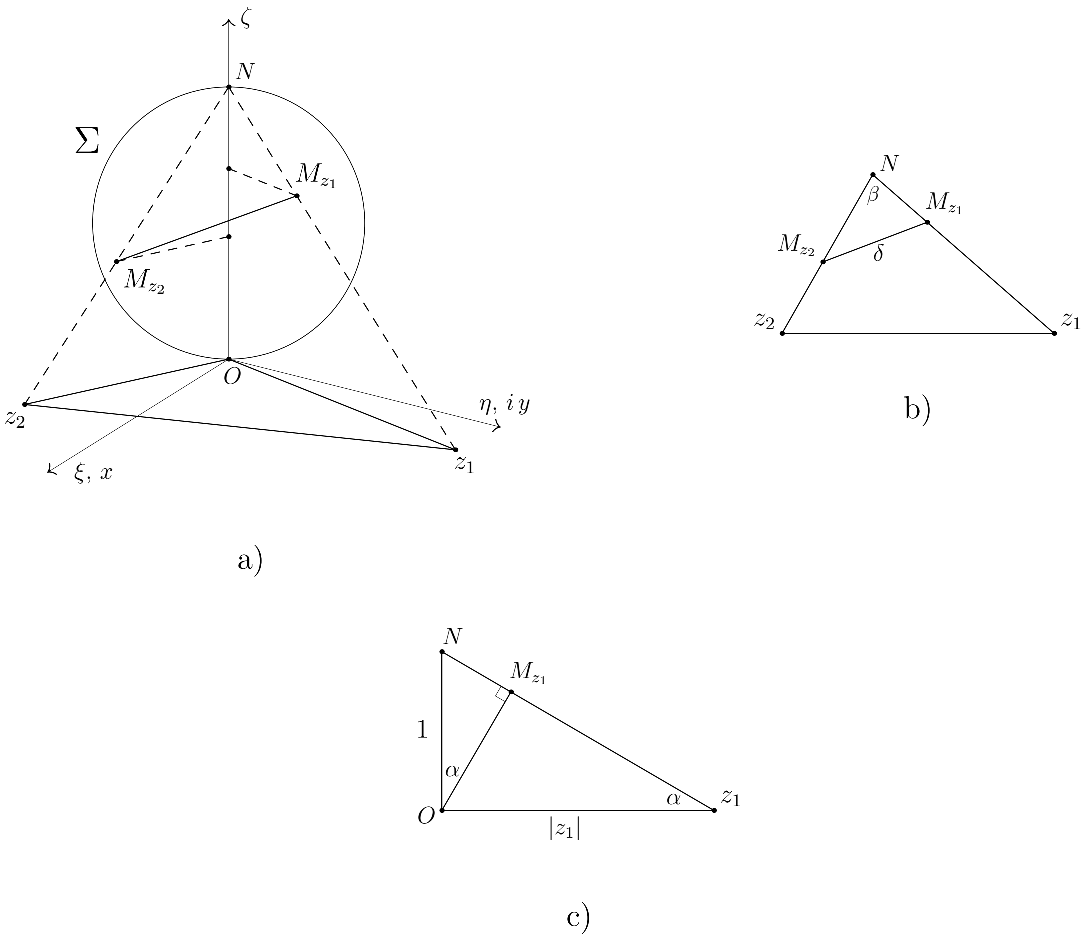

Рис. 2.1.

Доказательство. Обсудим нетривиальные случаи $0 \neq z_1 \neq z_2 \neq 0$. Рассмотрим плоскость, проходящую через точки O, N, z_1. Она пересекает Σ по окружности с диаметром $ON = 1$, причем M_{z_1} лежит на этой окружности, откуда $\angle NM_{z_1}O = \pi/2$ (см. рис. 2.1 c)). Следовательно, $\Delta M_{z_1}NO \sim \Delta ONz_1$, откуда

$$\frac{NM_{z_1}}{NO} = \frac{NO}{Nz_1} \Rightarrow NM_{z_1} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}. \tag{2.1}$$

Аналогично,

$$NM_{z_2} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}}. \tag{2.2}$$

Обозначим $\delta = \rho(M_{z_1}, M_{z_2})$ и воспользуемся теоремой косинусов в $\Delta M_{z_1}M_{z_2}N$ и в $\Delta z_1 z_2 N$ (см. рис. 2.1 b)):

$$\delta^2 = (NM_{z_1})^2 + (NM_{z_2})^2 - 2NM_{z_1} \cdot NM_{z_2} \cos\beta,$$
$$cos\beta = \frac{|z_1 - z_2|^2 - (Nz_1)^2 - (Nz_2)^2}{-2Nz_1 \cdot Nz_2}.$$

Подставив второе равенство в первое, с учетом (2.1) и (2.2) получаем $\delta^2 =$

$$= \frac{1}{1+|z_1|^2} + \frac{1}{1+|z_2|^2} + \frac{|z_1 - z_2|^2 - (1+|z_1|^2) - (1+|z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)\cdot(1+|z_2|^2)} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1+|z_1|^2)\cdot(1+|z_2|^2)}.$$

Что и требовалось. Случаи бесконечных z_1 или z_2 устанавливаются предельным переходом. $\square$

Замечание. Метрики d и $\mathrm{d}^\bullet$ мажорируют друг друга на любом круге конечного радиуса в $\mathbb{C}$. Отсюда следует, что все понятия, определяемые в терминах окрестностей (например, открытые множества, пределы последовательностей и функций), совпадают в $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$ и в $(\mathbb{C}, \mathrm{d}^\bullet)$.

Действительно, для z_1 и z_2 из некоторого круга $B(0, R)$, $R \in (0, +\infty)$, значения $\sqrt{1+|z_1|^2}$ и $\sqrt{1+|z_2|^2}$ принадлежат $[1, \sqrt{1+R^2})$, откуда

$$(\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2})^{-1} \in \left[1/(1+R^2), 1\right].$$

Следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}\,(z_1, z_2)}{1+R^2} \leqslant \mathrm{d}^\bullet(z_1, z_2) \leqslant \mathrm{d}\,(z_1, z_2).$$

Упражнение 2.4. Доказать, что при стереографической проекции окружности на сфере Римана, не содержащие точку N, переходят в окружности в $\mathbb{C}$ (круговое свойство стереографической проекции).

Упражнение 2.5. Доказать свойство сохранения (абсолютных величин) углов между окружностями при стереографической проекции.

2.4. Односвязные области в $\mathbb{C}$.

Для $E \subset \mathbb{C}$ обозначим через $E_c = \mathbb{C} \setminus E$ – дополнение (complement) множества E в $\mathbb{C}$, а через ∂E – границу E в $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$.

Аналогично, для $E \subset \mathbb{C}^\bullet$ пусть $E_c^\bullet = \mathbb{C}^\bullet \setminus E$ – дополнение множества E в $\mathbb{C}^\bullet$ и $\partial^\bullet E$ – граница E в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$.

Так, при $E \subset \mathbb{C}$, если E ограничено, то $\partial^\bullet E = \partial E$; если E не ограничено, то $\partial^\bullet E = \partial E \sqcup \{\infty\}$.

Определение 2.8. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется *односвязной*, если $D_c^\bullet$ связно в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$.

Рассмотрим несколько примеров.

(1) Пусть D – произвольная звездная область в $\mathbb{C}$ (т.е. найдется точка $z_0 \in D$ такая, что для любой точки $z \in D$ отрезок $[z_0, z]$ целиком лежит в D. Тогда $D_c^\bullet$ является линейно связным множеством (а, значит, и связным) в $\mathbb{C}^\bullet$. Следовательно, D – односвязная область.

(2) В частности, пусть $D = \Pi_{(\alpha,\beta)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \alpha < \operatorname{Im} z < \beta \right\}$ – полоса (звездна относительно любой своей точки, как и любая выпуклая область в $\mathbb{C}$). По предыдущему примеру, она односвязна. В то же время D_c не связно в $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$.

(3) Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $D_c^\bullet = \{0\} \sqcup \{\infty\}$ – не связное множество в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, значит D не односвязна. (Заметим, однако, что $D_c = \{0\}$ связно в $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$.)

Упражнение 2.6. Если D область в $\mathbb{C}$ и $\partial^\bullet D$ связно в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, то и $D_c^\bullet$ связно в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, т.е. D – односвязная область.

Обратное тоже верно, но доказывается гораздо сложнее. Мы установим этот факт в следующем семестре, пока он нам не потребуется. Мы также установим, что область D в $\mathbb{C}$ односвязна, если и только если она гомеоморфна кругу.

2.5. Оболочка компакта.

Пусть K – компакт в $\mathbb{C}$ (т.е. замкнутое ограниченное множество).

Упражнение 2.7. Множество $\mathbb{C} \setminus K$ распадается на не более чем счетное множество непересекающихся областей (связных компонент), причем среди них есть ровно одна неограниченная.

Пусть $D_1, D_2, ...$ – ограниченные компоненты $\mathbb{C} \setminus K$ (если такие есть), Ω – неограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus K$.

Упражнение 2.8. $\partial D_j \subset K$, $\partial\Omega \subset K$.

Определение 2.9. Множество $\widehat{K} = K \sqcup \sqcup_{\{j\geqslant 1\}} D_j = \mathbb{C} \setminus \Omega$ (если ограниченные компоненты D_j отсутствуют, то $\widehat{K} = K$) называется (топологической, полиномиальной) *оболочкой* компакта K в $\mathbb{C}$.

Теорема 2.2. *Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$, K – компакт в $\mathbb{C}$. Если $K \subset D$, то $\widehat{K} \subset D$.*

Доказательство. Если ограниченные компоненты $\mathbb{C} \setminus K$ отсутствуют, то $\widehat{K} = K \subset D$ и все доказано. В противном случае положим $U_1 = \bigcup_{\{j\geqslant 1\}} D_j$ – (ограниченное) непустое открытое множество в $\mathbb{C}$, и, значит, в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$. Множество $U_2 = \Omega \cup \{\infty\}$ – тоже непустое открытое множество в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, причем $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Ясно, что $U_1 \sqcup U_2 = \mathbb{C}^\bullet \setminus K$.

Пусть, от противного, $\widehat{K} = K \cup U_1 \not\subset D$, откуда $U_1 \not\subset D$ и, следовательно, $U_1 \cap D_c^\bullet \neq \emptyset$. С другой стороны, $\infty \in U_2 \cap D_c^\bullet \neq \emptyset$ и $D_c^\bullet \subset U_1 \sqcup U_2$. Получаем, что множество $D_c^\bullet$ – несвязно. Противоречие. □

Следствие 2.2.1. *Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$, $S = [\gamma]$ – носитель замкнутого жорданова пути γ, $S \subset D$. Пусть D_γ – ограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus S$ (см. теорему Жордана). Тогда $D_\gamma \sqcup [\gamma] = \widehat{S} \subset D$, т.е. $D_\gamma \subset D$.*

Упражнение 2.9. Пусть D – ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ и $r > 0$ таково, что $X = \{z \in D \mid \mathrm{d}(z, \partial D) \geq r\} \neq \emptyset$. Тогда $\widehat{X} = X$.

3. Комплексная производная. Производная сложной и обратной функции. $\mathbb{C}$- и $\mathbb{R}$-дифференцируемость. Теорема Коши - Римана. Свойства производных. Производная по направлению. Голоморфность в точке и области.

3.1. Комплексная производная. $\mathbb{C}$-дифференцируемость в точке. Производная сложной и обратной функции.

Определение 3.1. Пусть (комплекснозначная) функция f определена в некоторой окрестности точки z_0. Если существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, то он называется *комплексной производной функции f в точке z_0* и обозначается $f'(z_0)$. Функция f в этом случае называется $\mathbb{C}$-*дифференцируемой в точке* z_0, что эквивалентно наличию следующего представления:

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+o(\Delta z),\ \Delta z\to 0. \tag{3.1}$$

В качестве примера покажем, что для каждого $z_0\in\mathbb{C}$ имеем $(e^z)'\big|_{z_0}=e^{z_0}$. Иными словами, $(e^z)'=e^z$. Действительно:

$$(e^z)'\big|_{z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{e^{z_0+\Delta z}-e^{z_0}}{\Delta z}=e^{z_0}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{e^{\Delta z}-1}{\Delta z}=e^{z_0}.$$

Теорема 3.1. *(О комплексной производной сложной функции). Пусть функция g имеет комплексную производную в точке z_0, f имеет комплексную производную в точке $w_0=g(z_0)$. Тогда*

$$f\big(g(z)\big)'\big|_{z_0}=f'(w_0)g'(z_0). \tag{3.2}$$

Доказательство. В силу $\mathbb{C}$-дифференцируемости функций g и f в точках z_0 и w_0 соответственно, в некоторой окрестности точки 0 переменных $\Delta z=z-z_0$ и $\Delta w=w-w_0$ имеем:

$$\Delta g|_{z_0}(\Delta z):=g(z_0+\Delta z)-g(z_0)=g'(z_0)\Delta z+o(\Delta z)\,,\ \Delta z\to 0\,,$$
$$\Delta f|_{w_0}(\Delta w):=f(w_0+\Delta w)-f(w_0)=f'(w_0)\Delta w+o(\Delta w)\,,\ \Delta w\to 0\,.$$

Подставляя $\Delta w=\Delta g|_{z_0}(\Delta z)$ в последнее равенство, получаем:

$$\Delta f(g)|_{z_0}(\Delta z)=f(g(z_0+\Delta z))-f(g(z_0))=f'(w_0)(g'(z_0)\Delta z+o(\Delta z))+o(\Delta g|_{z_0}(\Delta z))=$$
$$=f'(w_0)\,g'(z_0)\,\Delta z+o(\Delta z)\,,\ \Delta z\to 0\,,$$

что и означает справедливость (3.2). □

Теорема 3.2. *(О производной обратной функции). Пусть функция f гомеоморфно отображает некоторую окрестность $U(z_0)$ точки z_0 на некоторую окрестность $V(w_0)$ точки w_0 в $\mathbb{C}$, $f(z_0)=w_0$, и пусть $g:V(w_0)\to U(z_0)$ – обратная к f функция.*

Если существует $f'(z_0)\neq 0$, то существует $g'(w_0)=1/f'(z_0)$.

Доказательство. Для $\Delta w\neq 0$ такого, что $w_0+\Delta w\in V(w_0)$, положим $\Delta z=g(w_0+\Delta w)-g(w_0)$. Тогда $\Delta z\neq 0$, $z_0+\Delta z\in U(z_0)$, причем Δw и Δz стремятся к 0 одновременно. Следовательно (провести детальное доказательство центрального равенства!),

$$g'(w_0)=\lim_{\Delta w\to 0}\frac{g(w_0+\Delta w)-g(w_0)}{\Delta w}=\lim_{\Delta z\to 0}\ \frac{\Delta z}{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}=\frac{1}{f'(z_0)}.$$

□

Пример 3.1. (Использование теоремы о производной обратной функции). В указанных выше обозначениях (при $-\infty<\alpha<\beta\le\alpha+2\pi<+\infty$), пусть $z_0\in\Pi_{(\alpha,\beta)}$, $w_0=e^{z_0}\in V_{(\alpha,\beta)}$. Тогда

$$\big(\ln_{(\alpha,\beta)} w\big)'\big|_{w_0}=\frac{1}{(e^z)'|_{z_0}}=\frac{1}{e^{z_0}}=\frac{1}{w_0}\,.$$

Иными словами, $\big(\ln\limits_{(\alpha,\beta)} z\big)' = 1/z\,,\ \ z\in V_{(\alpha,\beta)}$.

Упражнение 3.1. Доказать, что при $n\in\{2,3,\dots\}$ для каждого $z_0\in\mathbb{C}$ выполнено равенство $(z^n)'\big|_{z=z_0} = nz_0^{n-1}$.

Упражнение 3.2. Доказать, что при $n\in\{2,3,\dots\}$ и $-\infty<\alpha<\beta\le\alpha+2\pi/n<+\infty$ имеем:

$$\Big(\sqrt[n]{w}_{(n\alpha,n\beta)}\Big)' = \frac{1}{nw}\sqrt[n]{w}_{(n\alpha,n\beta)}\,,\quad w\in V_{(n\alpha,n\beta)}.$$

3.2. $\mathbb{R}$-дифференцируемость.

Определение 3.2. Функция f, определенная в некоторой окрестности точки $z_0\in\mathbb{C}$, называется $\mathbb{R}$-*дифферецируемой* в точке z_0, если найдутся комплексные постоянные A и B такие, что

$$\Delta f\big|_{z_0}(\Delta z) := f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = A\Delta z + B\overline{\Delta z} + o(\Delta z),\quad \Delta z\to 0\,.$$

В этих условиях A и B определены однозначно (проверить), и их обозначают через $\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0}$ и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0}$ соответственно. А выражение

$$df\big|_{z_0}(\Delta z) := \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0}\overline{\Delta z}$$

называется *дифференциалом функции* f *в точке* z_0 *с приращением* Δz.

Из формулы (3.1) непосредственно следует, что всякая $\mathbb{C}$-дифференцируемая в точке z_0 функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в этой точке и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} = 0$.

Пример 3.2. Рассмотрим функцию $f(z) = \overline{z}^2$. Тогда

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = (\overline{z_0}+\overline{\Delta z})^2 - \overline{z_0}^2 = 2\,\overline{z_0}\,\overline{\Delta z} + o(\Delta z),\quad \Delta z\to 0.$$

Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial z}\big|_{z_0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big|_{z_0} = 2\overline{z_0}$ для любого $z_0\in\mathbb{C}$.

Определение 3.3. Функция $L:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-*линейной*, если для всех z_1,z_2 и λ_1,λ_2 в $\mathbb{C}$ имеем

$$L(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2) = \lambda_1 L(z_1)+\lambda_2 L(z_2)\,.$$

Предложение 3.1. *Функция L является $\mathbb{C}$-линейной $\Leftrightarrow$ $L(z)=\lambda z$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{C}$.*

Доказательство. Свойство $(\Leftarrow)$ очевидно. Докажем $(\Rightarrow)$. Положим $\lambda = L(1)$. Тогда в силу $\mathbb{C}$-линейности имеем $L(z) = L(z\cdot 1) = z\cdot L(1) = \lambda z,\ z\in\mathbb{C}$. □

Определение 3.4. Функция $L_1:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ называется $\mathbb{R}$-*линейной*, если для всех $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ и для всех $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$L_1(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2) = \lambda_1 L_1(z_1)+\lambda_2 L_1(z_2)\,.$$

Предложение 3.2. *Функция L_1 является $\mathbb{R}$-линейной $\Leftrightarrow$ найдутся постоянные $a,b\in\mathbb{C}$ с условием $L_1(z) = az+b\overline{z}$ для всех $z\in\mathbb{C}$.*

Доказательство. Утверждение $\Leftarrow$ очевидно.
Докажем $\Rightarrow$. Положим $p = L_1(1)$, $q = L_1(i)$. Тогда для всех $z\in\mathbb{C}$ имеем:

$$L_1(z) = L_1(x+i\,y) = px+qy = p\frac{z+\overline{z}}{2}+q\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{p-q\,i}{2}z+\frac{p+q\,i}{2}\,\overline{z}.$$

□

Фактически установлено следующее предложение.

Предложение 3.3. *Справедливы утверждения:*
(1) две $\mathbb{R}$-линейные функции $L_j(z) = a_j z + b_j \overline{z}$, $j \in \{1,2\}$, совпадают как функции от $z \Leftrightarrow a_1 = a_2$ и одновременно $b_1 = b_2$ (т.е. по $\mathbb{R}$-линейной функции её коэффициенты a и b находятся однозначно);
(2) $\mathbb{R}$-линейная функция $L_1(z) = az + b\overline{z}$ является $\mathbb{C}$-линейной $\Leftrightarrow b = 0$;
(3) всякая $\mathbb{R}$-линейная функция $az + b\overline{z}$ представима в виде $px + qy$ $(z = x + i\,y)$, где постоянные $p, q \in \mathbb{C}$ определены по a и b однозначно.

Упражнение 3.3. При каких a и b отображение $w = az + b\overline{z}$ всякий (открытый) круг переводит в круг?

В частности, если f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0, то (при $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$) справедливо равенство $\Delta f\big|_{z_0}(\Delta z) = P\Delta x + Q\Delta y + o(\Delta z)$, $\Delta z \to 0$. Естественно обозначить $P = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{z_0}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{z_0}$.

Найдем выражение A и B (т.е. $\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0}$ и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0}$) через P и Q и обратно:

$$P\Delta x + Q\Delta y = A\Delta z + B\Delta\overline{z} = A(\Delta x + i\Delta y) + B(\Delta x - i\Delta y) = (A+B)\Delta x + i(A-B)\Delta y,$$

откуда $P = A + B$, $Q = i(A - B)$, т.е. $A = \frac{P-iQ}{2}$, $B = \frac{P+iQ}{2}$. Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i\Big(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\,, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,, \tag{3.4}$$

в точке z_0.

Далее, пусть $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ $(u = Re(f),\ v = Im(f))$. Ясно, что f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$ если и только если функции u и v являются дифференцируемыми в точке (x_0, y_0) как функции двух переменных. При этом (полагая $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$) имеем:

$$df|_{z_0}(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{z_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{z_0}\Delta y = (u'_x + iv'_x)|_{z_0}\Delta x + (u'_y + iv'_y)|_{z_0}\Delta y\,,$$

так что $\partial f/(\partial x) = u'_x + iv'_x$, $\partial f/(\partial y) = u'_y + iv'_y$,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(u'_x + iv'_x + iu'_y - v'_y) = \frac{1}{2}(u'_x - v'_y) + \frac{i}{2}(v'_x + u'_y) \tag{3.5}$$

в точке z_0.

Теорема 3.3. *(Коши – Римана). Пусть функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0. Тогда f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0 если и только если выполнены следующие эквивалентные условия Коши – Римана:*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u'_x|_{z_0} = v'_y|_{z_0} \\ u'_y|_{z_0} = -v'_x|_{z_0} \end{cases} \tag{3.6}$$

Доказательство. При условии $\mathbb{R}$-дифференцируемости в точке z_0 функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке если и только если

$$df\big|_{z_0}(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0}\overline{\Delta z}$$

является $\mathbb{C}$-линейной функцией, что эквивалентно первому из условий в (3.6). Оно, в свою очередь, эквивалентно второму из условий в (3.6), ввиду равенства (3.5). $\square$

Заметим, что если функция f является $\mathbb{R}$-линейной в $\mathbb{C}$, то для каждой точки z_0 полное приращение $\Delta f\big|_{z_0}(\Delta z)$ функции f в точке z_0 совпадает с ее дифференциалом $df\big|_{z_0}(\Delta z)$ в этой точке. Так что $\Delta z = dz$, $\Delta\bar{z} = d\bar{z} = \overline{dz}$ и $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ для каждой точки z_0.

Предложение 3.4. *Пусть функции f и g являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми в точке z_0. Тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (при $g(z_0) \neq 0$) являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми в точке z_0 и справедливы следующие соотношения:*

$$\frac{\partial(f \pm g)}{\partial z}\Big|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0} \pm \frac{\partial g}{\partial z}\Big|_{z_0}; \quad \frac{\partial(f \pm g)}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} \pm \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0};$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial z}\Big|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0} g(z_0) + f(z_0)\frac{\partial g}{\partial z}\Big|_{z_0}; \quad \frac{\partial(fg)}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} g(z_0) + f(z_0)\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0}.$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial z}\Big|_{z_0} = \frac{(\partial f/\partial z)|_{z_0} g(z_0) - f(z_0)(\partial g/\partial z)|_{z_0}}{g^2(z_0)};$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} = \frac{(\partial f/\partial \overline{z})|_{z_0} g(z_0) - f(z_0)(\partial g/\partial \overline{z})|_{z_0}}{g^2(z_0)}.$$

В частности, если f и g являются $\mathbb{C}$-дифференцируемыми в точке z_0, то $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (при $g(z_0) \neq 0$) являются $\mathbb{C}$-дифференцируемыми в точке z_0 и верны стандартные формулы для (комплексных) производных суммы, произведения и частного, например $(f \cdot g)'\big|_{z_0} = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$ и $(f/g)'\big|_{z_0} = (f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0))/g^2(z_0)$.

Предложение 3.5. *Пусть функция $g(z)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0, а функция $f(w)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $w_0 = g(z_0)$. Тогда сложная функция $f \circ g(z) = f(g(z))$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0 и выполнены соотношения:*

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial z}\Big|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial w}\Big|_{w_0} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}\Big|_{z_0} + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\Big|_{w_0} \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial z}\Big|_{z_0},$$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial w}\Big|_{w_0} \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\Big|_{w_0} \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0}.$$

В частности, если g является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0 и f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке w_0, то функция $f \circ g$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0 и $(f \circ g)'\big|_{z_0} = f'(w_0) \cdot g'(z_0)$, что было установлено в начале лекции.

Доказательства этих двух предложений остается в качестве упражнений.

3.3. Производная по направлению.

Определение 3.5. Пусть функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0, $\theta \in (-\pi, \pi]$. *Производной функции f в точке z_0 по направлению θ* (точнее, по направлению $e^{i\theta}$) называется величина

$$\frac{\partial f}{\partial z_\theta}\Big|_{z_0} = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \arg(\Delta z) = \theta}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Нетрудно найти формулу для указанной производной:

$$\frac{\partial f}{\partial z_\theta}\Big|_{z_0} = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \arg(\Delta z) = \theta}} \frac{\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0}\overline{\Delta z} + o(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0} e^{-2i\theta}$$

поскольку $\Delta z = |\Delta z| e^{i\theta}$, $\overline{\Delta z} = |\Delta z| e^{-i\theta} = \Delta z e^{-2i\theta}$ при $\arg(\Delta z) = \theta$.

При $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} \neq 0$ множество всех производных по направлению $\left\{ \left.\dfrac{\partial f}{\partial z_\theta}\right|_{z_0} \right\}_{\theta\in(-\pi,\pi]}$ дважды пробегает окружность с радиусом $\left|\left.\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0}\right|$ и центром в точке $\left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}$. Поэтому очевидно, что $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке z_0 функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке, если и только если для всех $\theta \in (-\pi, \pi]$ имеем $\left.\dfrac{\partial f}{\partial z_\theta}\right|_{z_0} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}$, т.е. все производные по направлению совпадают.

3.4. Ассоциированное отображение.

Пусть $z = x + i\,y$ и функция $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Тогда в окрестности точки $(x_0, y_0)^t \in \mathbb{R}^2$ определено так называемое *ассоциированное отображение* $F : (x, y)^t \mapsto \big(u(x, y), v(x, y)\big)^t$. Если вдруг f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0, то по теореме 3.3 в точке z_0 выполняются равенства $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, поэтому якобиан ассоциированного отображения в этой точке равен

$$\left.\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right|_{z_0} = (u_x v_y - v_x u_y)\big|_{z_0} = (u_x^2 + v_x^2)\big|_{z_0} = \left|\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{z_0}\right|^2 = \big|f'(z_0)\big|^2 .$$

Таким образом, квадрат модуля комплексной производной равен якобиану ассоциированного отображения в соответствующей точке. В частности, если якобиан ассоциированного отображения $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции f в точке z_0 отрицателен, то функция f не может быть $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке.

3.5. Голоморфность в точке и области.

Определение 3.6. Пусть функция f определена и $\mathbb{C}$-дифференцируема *в некоторой окрестности точки* $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда f называется *голоморфной в точке* z_0 (это свойство кратко записывается так: $f \in \mathcal{A}(z_0)$).

Если f определена и голоморфна в каждой точке некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ (т.е. функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в каждой точке области D), то f называется *голоморфной в области* D. Пространство всех функций, голоморфных в области D, обозначается через $\mathcal{A}(D)$.

Функции класса $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ называются *целыми*. Примеры: z^{10}, e^{z^2}.

Пример 3.3. Функция $f(z) = \overline{z}^2$ всюду $\mathbb{R}$-дифференцируема. Но $\mathbb{C}$-дифференцируема она только в точке $z_0 = 0$, поэтому f нигде не голоморфна.

4. Конформные отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства.

4.1. Конформные отображения.

Определение 4.1. $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке z_0 функция f называется *конформной в точке* z_0, если ее дифференциал в этой точке является композицией гомотетии (с положительным коэффициентом, с центром в нуле) и поворота (с центром в нуле), т.е.

$$df\big|_{z_0}(\Delta z) = ke^{i\alpha}\Delta z, \quad k > 0,\ \alpha \in (-\pi, \pi]\,,$$

что эквивалентно условию наличия $f'(z_0) = ke^{i\alpha} \neq 0$.

Коэффициент гомотетии $k = |f'(z_0)|$ и угол поворота $\alpha = \arg\big(f'(z_0)\big)$ – составляют *геометрический смысл* производной конформного отображения в точке z_0.

Определение 4.2. Пусть D – область в $\mathbb{C}$ и функция f конформна в каждой точке $z_0 \in D$. В этом случае говорят, что f *локально конформна в области* D.

Функция f называется *конформной в области* D, если f локально конформна в D и взаимно-однозначна в D.

Пример 4.1.
(1) функция $f(z) = e^z$ локально конформна в $\mathbb{C}$, поскольку в любой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ существует отличная от 0 производная $f'(z_0) = e^{z_0} \neq 0$; эта функция конформна, например, в любой полосе $\Pi_{(\alpha,\beta)}$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi < +\infty$; полоса $\Pi_{(-\pi,\pi)}$ называется *стандартной областью конформности* экспоненты;
(2) функция $f(z) = z^n$, $n \in \{2, 3, \dots\}$, локально конформна в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, конформна в любом угле $V_{(\alpha,\beta)}$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + \dfrac{2\pi}{n} < +\infty$; угол $V_{(-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n})}$ называется *стандартной областью конформности* указанной функции.

4.2. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства.

Определение 4.3. *Дробно-линейное отображение* – это функция вида
$w = \Lambda(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Доопределим ДЛО до отображения $\mathbb{C}^{\bullet} \to \mathbb{C}^{\bullet}$. При $c = 0$ положим $\Lambda(\infty) = \infty$. При $c \neq 0$ положим $\Lambda(\infty) = \dfrac{a}{c}$, $\Lambda(-\dfrac{d}{c}) = \infty$.

Предложение 4.1. *Всякое ДЛО является гомеоморфизмом $\mathbb{C}^{\bullet} \to \mathbb{C}^{\bullet}$, причем обратное отображение – тоже ДЛО.*

Доказательство. Непрерывность ДЛО во всех точках, кроме $-d/c$ (при $c \neq 0$) и ∞, очевидна. Непрерывность в последних точках легко следует из определения метрики в $\mathbb{C}^{\bullet}$. Кроме того, непосредственно проверяется, что ДЛО, заданное формулой $z = \dfrac{dw-b}{-cw+a}$ обратно к ДЛО $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$. □

Предложение 4.2. *Совокупность всех ДЛО образует группу относительно композиции $\Lambda_2 \circ \Lambda_1(z) = \Lambda_2\big(\Lambda_1(z)\big)$.*

Доказательство. Поскольку существование обратного элемента установлено в предыдущем предложении, а единичным элементом, очевидно, является ДЛО $\Lambda(z) = z = \dfrac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$, нужно лишь установить, что композиция двух ДЛО – снова ДЛО. Этот факт проверяется непосредственно. □

Рассмотрим отображение Φ из группы $GL(2,\mathbb{C})$ всех невырожденных 2×2 - матриц с коэффициентами из $\mathbb{C}$ в группу всех ДЛО $\{\Lambda\}$ по формуле

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Легко проверяется, что Φ – гомоморфизм, т.е. $\Phi(M_2M_1)(z) = \Phi(M_2)(\Phi(M_1)(z))$ для всех M_1 и M_2 из $GL(2,\mathbb{C})$.

Упражнение 4.1. Какой факторгруппе группы $SL(2,\mathbb{C})$ изоморфна группа $\{\Lambda\}$ всех ДЛО? Коммутативна ли группа $\{\Lambda\}$?

4.2.1. *Конформность ДЛО на* $\mathbb{C}^\bullet$*.*

Определение 4.4. Пусть функция f отображает некоторую окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ в некоторую окрестность точки ∞ (из $\mathbb{C}^\bullet$), причем $f(z_0) = \infty$. Говорят, что функция f *конформна в точке* z_0, если отображение $\tilde{w} = g(z) = 1/f(z)$ (полагаем $g(z) = 0$ при $f(z) = \infty$) конформно в точке z_0.

Пусть задана функция f , отображающая некоторую окрестность точки ∞ (из $\mathbb{C}^\bullet$) в некоторую окрестность точки ∞ (в $\mathbb{C}^\bullet$), причем $f(\infty) = \infty$. Говорят, что f *конформна в точке* ∞, если отображение $\tilde{w} = g(\tilde{z}) = 1/f(1/\tilde{z})$ (полагаем $g(\tilde{z}) = 0$ при $f(1/\tilde{z}) = \infty$, $1/0 = \infty$) конформно в точке $\tilde{z} = 0$.

Упражнение 4.2. Дать определение конформности функции f в точке ∞ при $f(\infty) = w_0 \neq \infty$.

Предложение 4.3. *Всякое ДЛО есть конформный изоморфизм* $\mathbb{C}^\bullet$ *на* $\mathbb{C}^\bullet$*.*

Доказательство. Пусть сначала $c = 0$, тогда $\Lambda(z) = az+b$, где $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Отсюда для каждого $z_0 \in \mathbb{C}$ имеем $\Lambda'(z_0) = a \neq 0$, т.е. Λ – конформный изоморфизм $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ (с обратным $\Lambda^{-1}(w) = (w-b)/a$). Остается проверить конформность Λ в точке ∞, что эквивалентно конформности в точке $\tilde{z} = 0$ отображения

$$\tilde{w} = \frac{1}{\Lambda\left(1/\tilde{z}\right)} = \frac{\tilde{z}}{b\tilde{z}+a} = \tilde{\Lambda}(\tilde{z})\,.$$

Проверяем: $\tilde{\Lambda}'(0) = \dfrac{1}{a} \neq 0$.

Пусть теперь $c \neq 0$. Следует рассмотреть три случая:

(1) при $z_0 \neq -\dfrac{d}{c}$ и $z_0 \neq \infty$ имеем: $\Lambda'(z_0) = \dfrac{ad-bc}{(cz_0+d)^2} \neq 0$, что и требовалось;

(2) при $z_0 = -\dfrac{d}{c}$ получаем $\Lambda(z_0) = \infty$; рассмотреть самостоятельно;

(3) случай $z_0 = \infty$ также оставляем читателю.

□

4.2.2. *Сохранение углов между путями.*

Прежде чем формулировать следующее свойство ДЛО, докажем одно вспомогательное утверждение.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – путь, дифференцируемый в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Если $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$, то

$$\frac{d}{dt}\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t_0} = \dot{\gamma}(t_0) = \dot{x}(t_0) + i\,\dot{y}(t_0)\,.$$

Определение 4.5. Если $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$, то $\dot{\gamma}(t_0)$ называется *касательным вектором к пути* γ в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ (соответствующим параметру t_0).

Определение 4.6. Пусть $\gamma_j : [\alpha_j, \beta_j] \to \mathbb{C}$ ($j \in \{1, 2\}$) – пути, $t_j \in (\alpha_j, \beta_j)$, $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. Пусть существуют $\dot{\gamma}_j(t_j) \neq 0$, $j \in \{1, 2\}$. *Углом между путями* γ_1 *и* γ_2 *в точке* z_0 (соответствующим параметрам t_1 и t_2) называется *направленный* угол между касательными векторами $\dot{\gamma}_1(t_1)$ и $\dot{\gamma}_2(t_2)$ (вращаем $\dot{\gamma}_1(t_1)$ в ближайшую сторону до совпадения с $\dot{\gamma}_2(t_2)$, учитываем направление вращения, значение угла лежит в пределах $(-\pi, \pi]$).

Лемма 4.1. *Пусть* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *– путь,* $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *и существует* $\dot{\gamma}(t_0)$. *Если функция* f *непрерывна в окрестности точки* $z_0 = \gamma(t_0)$ *и* $\mathbb{C}$*-дифференцируема в точке* z_0*, то в некоторой окрестности точки* t_0 *определен путь* $\sigma(t) = f(\gamma(t))$*, причем*

$$\dot{\sigma}(t_0) = \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t_0} = f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0)\,. \tag{4.1}$$

В частности, если $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ *и* $f'(z_0) \neq 0$*, то* $\dot{\sigma}(t_0) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку γ - путь, а функция f непрерывна в окрестности $z_0 = \gamma(t_0)$, композиция $f \circ \gamma$ является путем (непрерывна) в окрестности точки t_0. Поскольку путь γ дифференцируем в точке t_0, имеем $\Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t) = \dot{\gamma}(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$. Наконец, в силу $\mathbb{C}$-дифференцируемости функции f в точке z_0 справедливо представление:

$$\Delta(f \circ \gamma)\big|_{t_0}(\Delta t) = f \circ \gamma(t_0 + \Delta t) - f \circ \gamma(t_0) = f\big(\gamma(t_0) + \Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t)\big) - f\big(\gamma(t_0)\big) =$$

$$= f'(z_0)\Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t) + o(\Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t)) = f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0)\Delta t + o(\Delta t)\,,\ \Delta t \to 0\,,$$

что и означает справедливость (4.1). □

Следствие 4.1.1. *Пусть* γ_1 *и* γ_2 *– пути, дифференцируемые в точках* t_1 *и* t_2 *соответственно, причем* $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, $\dot{\gamma}_1(t_1) \neq 0$, $\dot{\gamma}_2(t_2) \neq 0$. *Пусть функция* f *непрерывна в окрестности точки* z_0 *и существует* $f'(z_0) \neq 0$. *Тогда угол между путями* $f \circ \gamma_1$ *и* $f \circ \gamma_2$ *в точке* $f(z_0)$ *равен углу между путями* γ_1 *и* γ_2 *в точке* z_0 *(соответственно параметрам* t_1 *и* t_2*).*

Доказательство. По лемме 4.1, $(f \circ \gamma_j)^{\cdot}(t_j) = f'(z_0)\dot{\gamma}_j(t_j)$, $j \in \{1, 2\}$, т.е. оба касательных вектора умножаются на одно и то же ненулевое комплексное число $f'(z_0)$. Поскольку это равносильно композиции растяжения и поворота, угол между касательными векторами сохраняется с учетом направления. □

4.2.3. *Круговое свойство.*

Определение 4.7. *Обобщенной окружностью* в $\mathbb{C}^\bullet$ называется обычная окружность в $\mathbb{C}$ либо прямая в $\mathbb{C}$, дополненная точкой ∞.

Лемма 4.2. *Всякая обобщенная окружность в* $\mathbb{C}^\bullet$ *(её часть в* $\mathbb{C}$*) задается уравнением*

$$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0, \quad A, C \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{C},\ |B|^2 > AC. \tag{4.2}$$

Обратно, всякое такое уравнение с указанными условиями на постоянные параметры задает обобщенную окружность в $\mathbb{C}^\bullet$ *(точнее – ее часть в* $\mathbb{C}$*), т.е. окружность или прямую.*

Доказательство. Всякая окружность в $\mathbb{C}$ задается уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0, \quad a, b \in \mathbb{R},\ R > 0\,.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, выразив x и y через z и $\overline{z}$ ($x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 =$$

$$= |z|^2 - 2a\frac{z+\overline{z}}{2} - 2b\frac{z-\overline{z}}{2i} + C = z\overline{z} + (-a+bi)z + (-a-bi)\overline{z} + C =$$

$$= z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C,$$

где $A = 1$, $C = a^2 + b^2 - R^2$, $B = -a - bi$. Таким образом, уравнение окружности имеет нужный вид (очевидно, что что $|B|^2 > AC$).

Случай прямой в $\mathbb{C}$ оставляем читателю.

Чтобы доказать, что любое уравнение вида (4.2) задает обобщенную окружность (её часть в $\mathbb{C}$), достаточно подставить в (4.2) выражения z и $\overline{z}$ через x и y (проверить!). $\square$

Предложение 4.4. *Всякое ДЛО отображает обобщенную окружность на обобщенную окружность.*

Доказательство. Рассмотрим два случая. Пусть сначала $c = 0$; тогда $a \neq 0$ и $d \neq 0$ (без ограничения общности, положим $d = 1$). Пусть $k = |a|, \alpha = arg(a)$, тогда $\Lambda(z) = ke^{i\alpha}(z + b/a)$ есть последовательная композиция сдвига (параллельного переноса на вектор b/a), поворота на угол α и гомотетии с коэффициентом $k > 0$. Каждое их этих отображений, очевидно, окружности переводит в окружности и прямые в прямые. Точка ∞ неподвижна.

Пусть теперь $c \neq 0$, $z_0 = -d/c$. Тогда

$$\Lambda(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(z-z_0)+\tilde{b}}{c(z-z_0)} = A + \frac{B}{z-z_0}\,,$$

где $\tilde{b}, A, B$ – постоянные в $\mathbb{C}$, $B = |B|e^{i\alpha} \neq 0$. Поскольку гомотетия, поворот и сдвиги сохраняют обобщенные окружности, остается доказать, что отображение $z \mapsto 1/z$ переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности.

Напомним, что всякая обобщенная окружность задается уравнением (4.2). Подставим в него $z = 1/w$; получим

$$Cw\overline{w} + Bw + \overline{B}\overline{w} + A = 0,$$

т.е. снова уравнение вида (4.2) при $A' = C, B' = \overline{B}, C' = A$ с условиями $|B'|^2 > A'C'$. Для завершения доказательства кругового свойства остается еще отдельно рассмотреть случаи, когда точки $z = 0$ и $z = \infty$ лежат на исходной обобщенной окружности. $\square$

4.2.4. *Сохранение симметрии относительно обобщенной окружности.*

Определение 4.8. Пусть S – окружность в $\mathbb{C}$ с центром a, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$. Точка z^* на луче az называется *симметричной точке z относительно S*, если $|z-a| \cdot |z^* - a| = r^2$. Кроме того, считается, что $a^* = \infty$, $\infty^* = a$.

Точки, симметричные относительно прямой, определяются как обычно.

Пример 4.2. Пусть $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$ – единичная окружность с центром в нуле, $z \neq 0$. Тогда $z^* = \dfrac{1}{\overline{z}}$. Действительно, $\arg\dfrac{1}{\overline{z}} = \arg z$, $|z| \cdot |\dfrac{1}{\overline{z}}| = 1$.

Лемма 4.3. *Точки z и $z^* \neq z$ (т.е. не лежащие на S) симметричны относительно обобщенной окружности S если и только если всякая обобщенная окружность Γ, проходящая через z и z^*, перпендикулярна S.*

Упражнение 4.3. Доказать лемму 4.3, используя школьную теорему о секущей и касательной.

Предложение 4.5. *Пусть* z *и* z^* *– точки, симметричные относительно обобщенной окружности* S, Λ *– произвольное ДЛО. Тогда* $\Lambda(z)$ *и* $\Lambda(z^*)$ *симметричны относительно* $\Lambda(S)$.

Доказательство. Если $z = z^*$, то утверждение справедливо. Далее считаем, что $z \neq z^*$. Пусть Γ – произвольная обобщенная окружность, проходящая через $\Lambda(z)$ и $\Lambda(z^*)$. Согласно предложению 4.4, $\Lambda^{-1}(\Gamma)$ – обобщенная окружность, проходящая через точки z и z^*. Согласно лемме 4.3, $\Lambda^{-1}(\Gamma) \perp S$. По следствию 4.1.1, $\Gamma \perp \Lambda(S)$. Таким образом, мы получили, что всякая обобщенная окружность, проходящая через $\Lambda(z)$ и $\Lambda(z^*)$, ортогональна $\Lambda(S)$. Остается снова применить лемму 4.3. □

4.2.5. *Свойство трех точек. Сохранение сложного отношения.*

Предложение 4.6. *Пусть дана тройка попарно различных точек* z_1, z_2, z_3 *в* $\mathbb{C}^\bullet$ *и ещё тройка попарно различных точек* w_1, w_2, w_3 *в* $\mathbb{C}^\bullet$. *Тогда существует единственное ДЛО* Λ *такое, что* $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. Пусть $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \infty$, $\zeta_3 = 1$, а точки z_1, z_2, z_3 лежат в $\mathbb{C}$. Определим

$$\Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} .$$

В случае, когда одна из точек z_1, z_2, z_3 равна ∞, определение модифицируется естественным образом; например, если $z_1 = \infty$, то $\Lambda_{\infty,z_2,z_3} = \dfrac{z_3 - z_2}{z - z_2}$. Ясно, что $\Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_j) = \zeta_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Искомое ДЛО $\Lambda = \Lambda^{w_1,w_2,w_3}_{z_1,z_2,z_3} = \left(\Lambda_{w_1,w_2,w_3}\right)^{-1} \circ \Lambda_{z_1,z_2,z_3}$ обладает нужными свойствами: $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Отметим, что на практике ответ удобнее сначала записывать в неявной форме: $\Lambda_{w_1,w_2,w_3}(w) = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z)$, а потом уже выражать w через z. □

Упражнение 4.4. Доказать, что $\Lambda = \Lambda^{w_1,w_2,w_3}_{z_1,z_2,z_3}$ – единственное ДЛО со свойствами $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Определение 4.9. *Сложным (ангармоническим) отношением четырех различных точек* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^\bullet$ называется величина

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_4) .$$

Предложение 4.7. *Всякое ДЛО сохраняет сложное отношение любых четырех (различных) точек.*

Доказательство. Пусть Λ – произвольное ДЛО, z_1, z_2, z_3, z_4 – произвольные различные точки в $\mathbb{C}^\bullet$. Пусть $w_j = \Lambda(z_j)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. В обозначениях предыдущего предложения, нужно доказать, что $\Lambda_{w_1,w_2,w_3}(w_4) = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_4)$.

По предыдущему предложению, единственное ДЛО, переводящее тройку (z_1, z_2, z_3) в тройку (w_1, w_2, w_3) имеет вид $\left(\Lambda_{w_1,w_2,w_3}\right)^{-1} \circ \Lambda_{z_1,z_2,z_3}$. Но ДЛО Λ тоже переводит тройку (z_1, z_2, z_3) в тройку (w_1, w_2, w_3). Следовательно, $\Lambda = \left(\Lambda_{w_1,w_2,w_3}\right)^{-1} \circ \Lambda_{z_1,z_2,z_3} \Leftrightarrow \Lambda_{w_1,w_2,w_3} \circ \Lambda = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}$. В частности, $\Lambda_{w_1,w_2,w_3} \circ \Lambda(z_4) = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_4)$, т.е. $\Lambda_{w_1,w_2,w_3}(w_4) = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_4)$, что и требовалось. □

Упражнение 4.5. Доказать, что четыре различные точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^\bullet$ лежат на одной обобщенной окружности если и только если $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

5. ДЛО-автоморфизмы B_1, Π_+, $\mathbb{C}$. Функция Жуковского. Тригонометрические функции. Многозначные функции и их однозначные ветви.

5.1. Группы ДЛО-автоморфизмов B_1, Π_+, $\mathbb{C}$.

Обозначим через B_1 открытый круг с радиусом 1 и центром в нуле.

Предложение 5.1. *Группа ДЛО-автоморфизмов B_1 – это совокупность всех ДЛО вида*

$$\Lambda(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{\overline{a}z-1}, \quad \theta \in (-\pi, \pi],\ a \in B_1. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть ДЛО Λ является автоморфизмом B_1 на себя и точка $a \in B_1$ такова, что $\Lambda(a) = 0$. По предложению 4.5 точка a^*, симметричная точке a относительно ∂B_1, перейдет в точку ∞, симметричную точке 0 относительно $\Lambda(\partial B_1) = \partial B_1$. Если $a = 0$, то $\Lambda(z) = k_1 z = -k_1 \dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}$ для некоторого k_1, $|k_1| = 1$. Если $a \neq 0$, то $\Lambda(z) = k\dfrac{z-a}{z-1/\overline{a}} = k\overline{a}\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}$, где $k \neq 0$ – постоянная. Поскольку $|\Lambda(1)| = 1$ и $|1-a| = |1-\overline{a}|$, имеем $1 = |k||a|\left|\dfrac{1-a}{\overline{a}-1}\right| = |k||a|$, откуда $k\overline{a} = e^{i\theta}$ для некоторого $\theta \in (-\pi, \pi]$. Таким образом, любой ДЛО-автоморфизм B_1 имеет вид (5.1).

Покажем, что любое ДЛО вида (5.1) является автоморфизмом B_1 на себя. Поскольку точки $0 = \Lambda(a)$ и $\infty = \Lambda\big(\dfrac{1}{\overline{a}}\big)$ должны быть симметричны относительно $\Lambda(\partial B_1)$, то $\Lambda(\partial B_1)$ является окружностью с центром в нуле. Так как $|\Lambda(1)| = 1$, то $\Lambda(\partial B_1) = \partial B_1$. Теперь, поскольку $\Lambda(a) = 0$ и всякое ДЛО есть гомеоморфизм $\mathbb{C}^\bullet$ на $\mathbb{C}^\bullet$, нетрудно показать, что B_1 отображается на B_1. □

Пусть $\Pi_+ = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \,\}$ – верхняя полуплоскость.

Предложение 5.2. *Группа ДЛО-автоморфизмов Π_+ – это совокупность всех ДЛО вида*

$$\Lambda(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0\,. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть Λ – ДЛО-автоморфизм Π_+ на Π_+. Тогда вещественная прямая $\mathbb{R}$ переходит в себя. Очевидно, что найдутся три различные точки $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, такие, что $u_1 = \Lambda(x_1), u_2 = \Lambda(x_2), u_3 = \Lambda(x_3) \in \mathbb{R}$. Согласно предложению 4.6, отображение $w = \Lambda(z)$ определяется равенством

$$\frac{z-x_1}{z-x_2} : \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} = \frac{w-u_1}{w-u_2} : \frac{u_3-u_1}{u_3-u_2},$$

откуда легко следует, что

$$\Lambda(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Далее, поскольку $\Lambda(i) \in \Pi_+$, имеем:

$$\operatorname{Im} \Lambda(i) = \operatorname{Im} \frac{ai+b}{ci+d} = \operatorname{Im} \frac{(ai+b)(d-ci)}{(d+ci)(d-ci)} = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} > 0\,,$$

откуда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$.

Обратно: любое ДЛО вида (5.2) переводит $\mathbb{R}$ на себя, а точку i в Π_+. Остается воспользоваться тем, что всякое ДЛО – гомеоморфизм $\mathbb{C}^\bullet$ на себя. □

Упражнение 5.1. Доказать, что группа ДЛО-автоморфизмов $\mathbb{C}$ – это совокупность всех ДЛО вида $\Lambda(z) = az + b$, где $a, b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$.

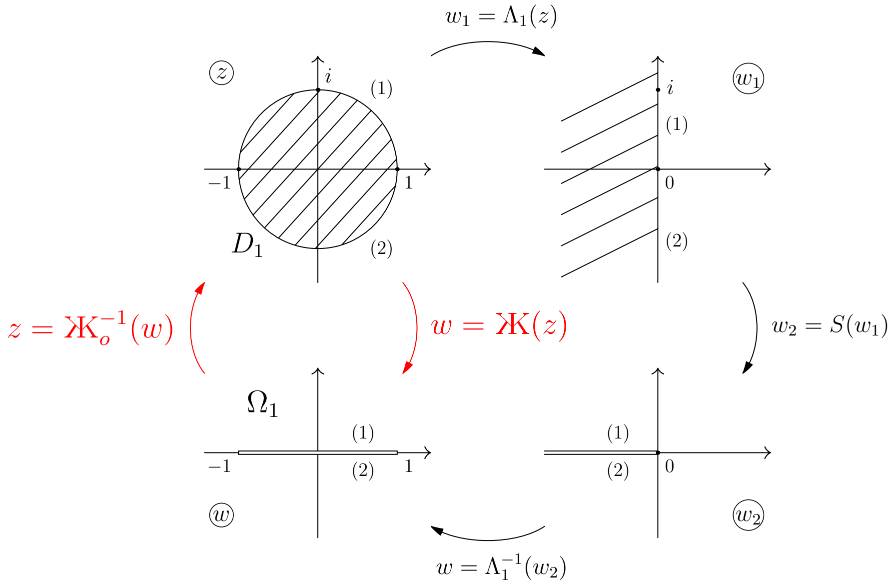

Рис. 5.1.

5.2. Функция Жуковского.

Определим *функцию Жуковского*:

$$Ж(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = Ж\left(\frac{1}{z}\right).$$

Так как её производная имеет вид

$$Ж'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right),$$

то функция Ж является локально конформной в $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$. На самом деле функция Ж конформна и в точках $z = 0$ и $z = \infty$ (проверить по определению).

Определим функции $\Lambda_1(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ и $S(z) = z^2$. Непосредственно проверяется, что $\Lambda_1^{-1}(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$ и $Ж = \Lambda_1^{-1} \circ S \circ \Lambda_1$ (композиция всегда действует справа налево).

Найдем некоторые *максимальные области конформности* функции Ж, т.е. такие области конформности, которые не содержатся ни в каких бóльших областях конформности (для функции Ж).

Пусть $D_1 = \mathbb{C}^\bullet \setminus \overline{B}_1$. На рисунке 5.1 показано: как преобразуется эта область при последовательном применении отображений Λ_1, S, Λ_1^{-1}. Ясно, что D_1 является областью конформности. Ее нельзя увеличить, поскольку $Ж(z) = Ж\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Положим $\Omega_1 = Ж(D_1)$. Обратное к Ж отображение, переводящее Ω_1 в D_1, обозначается $Ж_o^{-1}$.

Замечание. Открытый круг B_1 тоже является максимальной областью конформности Ж. Аналогично можно определить обратное к функции Ж отображение $Ж_i^{-1}$, переводящее область Ω_1 в B_1.

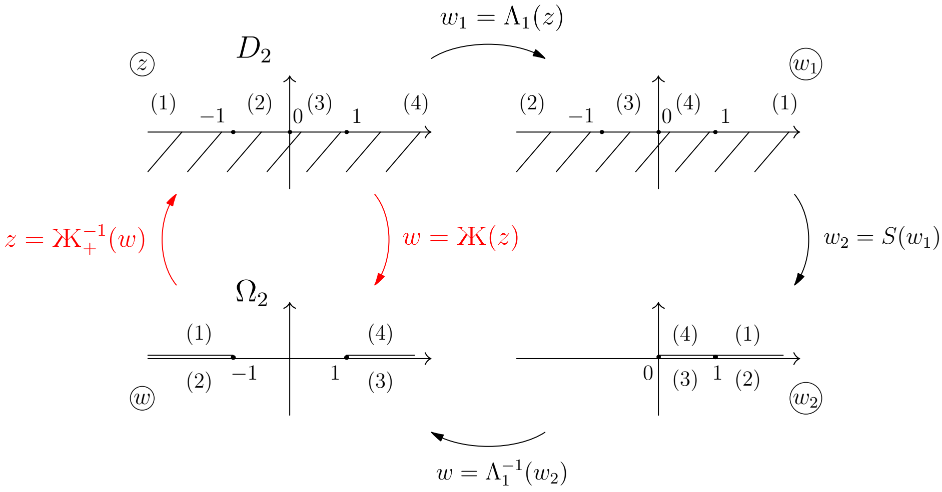

Рис. 5.2.

Две другие *основные* максимальные области конформности функции Жуковского – верхняя и нижняя полуплоскости. На рисунке 5.2 представлено преобразование области $D_2 = \Pi_+$ под последовательным действием функций Λ_1, S, Λ_1^{-1}. В частности, $\Omega_2 = Ж(D_2) = \mathbb{C} \setminus \big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\big)$.

Обратное отображение из Ω_2 в D_2 обозначается $Ж_+^{-1}$. Аналогично определяется функция $Ж_-^{-1}$, конформно отображающая Ω_2 на полуплоскость Π_-.

5.3. Тригонометрические функции.

Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного определяются через экспоненту:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ ;\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\ ;\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}\ ;\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}\ ;$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\ ;\ \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\ ;\ \tanh z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\ ;\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\ .$$

Упражнение 5.2. Найти точки $z \in \mathbb{C}$, для которых $\sin z = 0$ или $\cos z = 0$.

Упражнение 5.3. Доказать, что для всех $z \in \mathbb{C}$ верны тождества $\sin z = \cos(\pi/2 - z)$ и $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

При $0 < \alpha < \beta < +\infty$ через $\Pi'_{(\alpha,\beta)}$ обозначим вертикальную полосу $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$. Найдем одну из *максимальных областей конформности* отображения $w = \cos z$. В силу равенства $\cos z = Ж(e^{iz})$ и четности функции $\cos z$ одна из возможных таких областей – полоса $\Pi'_{(0,\pi)}$. Здесь конформность функции $\cos z$ действительно имеет место, поскольку функция $w_1 = e^{z_1}$ конформна в полосе $\Pi_{(0,\pi)}$, а функция $w = Ж(w_1)$ конформна в Π_+. Образ Ω_2 области $\Pi'_{(0,\pi)}$ при отображении $w = \cos z$ и определение функции $z = \arccos w$ приведены на рисунке 5.3.

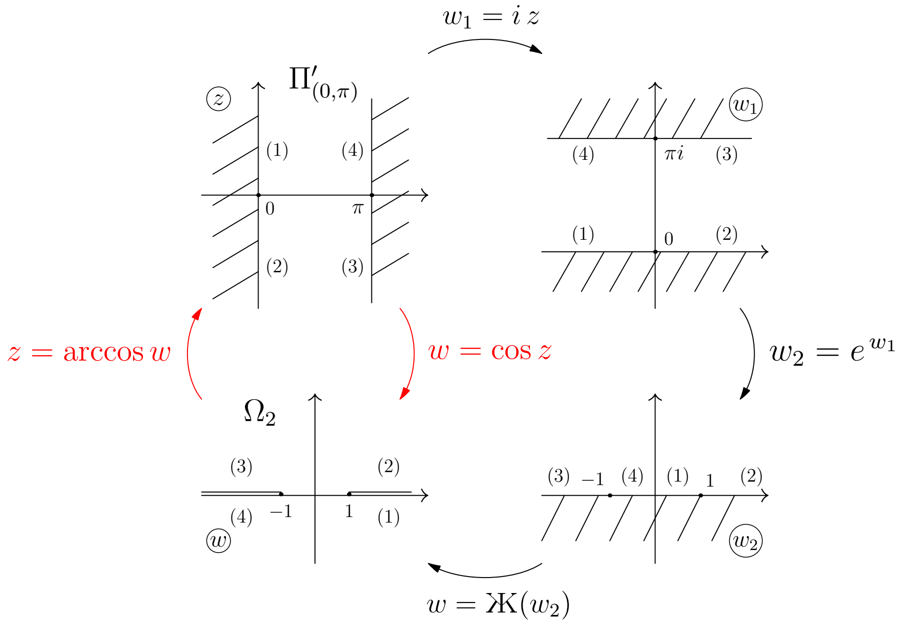

Рис. 5.3.

Упражнение 5.4. Пользуясь формулой $\sin z = \cos(\pi/2 - z)$, найти образ (он равен Ω_2) области $\Pi'_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ при конформном отображении $w = \sin z$. Возникающая обратная функция $(\Omega_2 \to \Pi'_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})$ обозначается $\arcsin(w)$.

Определение 5.1. Определим многозначные функции, обратные к функциям $\cos z$ и $\sin z$ соответственно:

$$z \in \mathrm{Arccos}\, w \Leftrightarrow w = \cos z\,; \quad z \in \mathrm{Arcsin}\, w \Leftrightarrow w = \sin z\,.$$

Чтобы найти максимальную область конформности функции $w = \operatorname{tg} z$, преобразуем эту функцию:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = -i\,\Lambda_1\big(e^{2iz}\big),$$

где $\Lambda_1(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.

Одна из максимальных областей конформности функции $\operatorname{tg}(z)$ – полоса $\Pi'_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Ее образ Ω_3 при отображении $w = \operatorname{tg} z$ и определение функции $z = \operatorname{arctg} w$ приведены на рисунке 5.4.

Определение 5.2. Определим многозначные функции, обратные к функциям $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ соответственно:

$$z \in \mathrm{Arctg}\, w \Leftrightarrow w = \operatorname{tg} z\,; \quad z \in \mathrm{Arcctg}\, w \Leftrightarrow w = \operatorname{ctg} z\,.$$

Упражнение 5.5. Доказать, что вертикальная полоса $\Pi'_{(0,\pi)}$ является максимальной областью конформности функции $\operatorname{ctg} z$. Определить функцию $\operatorname{arcctg} w$.

Упражнение 5.6. Найти образ полосы $\Pi'_{(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$.

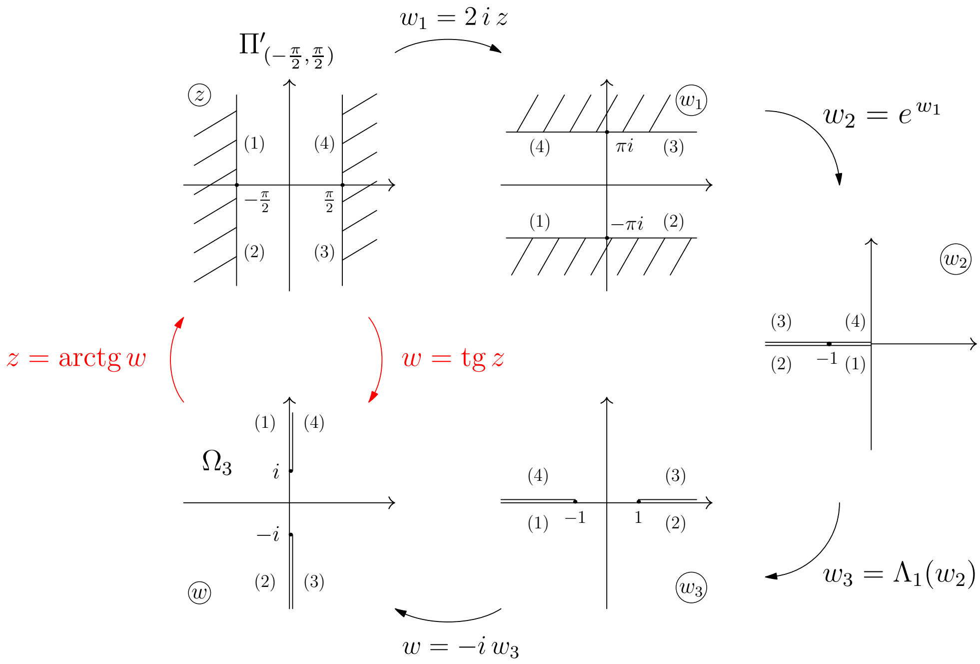

Рис. 5.4.

Упражнение 5.7. Доказать, что $(\operatorname{arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$ на Ω_3.

5.4. Многозначные функции и их однозначные ветви.

Определение 5.3. Пусть $E \subseteq \mathbb{C}^\bullet$, $E \neq \varnothing$. Пусть $\mathcal{F}$ сопоставляет каждой точке $z \in E$ непустое множество $\mathcal{F}(z) \subseteq \mathbb{C}^\bullet$. Тогда говорят, что *на E задана многозначная функция (м-функция) $\mathcal{F}$.*

Определение 5.4. Пусть $\mathcal{F}$ – м-функция на E, $E_1 \subset E$, $E_1 \neq \varnothing$. Пусть $f_1 : E_1 \to \mathbb{C}^\bullet$ – функция, такая, что $f_1(z) \in \mathcal{F}(z)$ для всех $z \in E_1$. Тогда f_1 называется *однозначной ветвью* м-функции $\mathcal{F}$ на E_1.

Замечание. Если функция f_1 из определения 5.4 непрерывна на E_1 (или голоморфна, или конформна в *области* E_1), то f_1 называется *непрерывной (или голоморфной, или конформной) ветвью* м-функции $\mathcal{F}$ на E_1 (без добавления слова "однозначной", что здесь всегда подразумевается).

Пример 5.1. (1) $\operatorname{Ln}(z)$ – м-функция на множестве $E = \mathbb{C}_\flat := \mathbb{C} \setminus \{0\}$; для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\ln_{(\alpha,\alpha+2\pi)}(z)$ является её конформной (и голоморфной) ветвью на $V_{(\alpha,\alpha+2\pi)}$.

(2) $\sqrt[n]{z}$ – м-функция на множестве $E = \mathbb{C}^\bullet$ (полагаем $\sqrt[n]{\infty} := \infty$). При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\sqrt[n]{z}_{(\alpha,\alpha+2\pi)}$ на $V_{(\alpha,\alpha+2\pi)}$ – ее конформная (и голоморфная) ветвь (см. конец Лекции 1, примеры 3.1 и 4.1, упражнение 3.2).

Упражнение 5.8. М-функция $\operatorname{Arctg}(z)$ определена на множестве $\mathbb{C}^\bullet \setminus \{\pm i\}$. Напомним, что функция $\operatorname{tg}(z)$ принимает все значения из $\mathbb{C}^\bullet \setminus \{\pm i\}$ (в точках $z_k = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, доопределяем её по непрерывности: $\operatorname{tg} z_k = \infty$). Функция $f_1(z) = \operatorname{arctg} z$ – голоморфная ветвь м-функции $\operatorname{Arctg}(z)$ на множестве $E_1 = \Omega_3$ (см. рис. 5.4).

Пример 5.2. М-функция $\operatorname{Arg}(z)$ определена на множестве $E = \mathbb{C}_\flat$. Функция $f_1(z) = \arg z$ – непрерывная ветвь м-функции $\operatorname{Arg}(z)$ на множестве $E_1 = \mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Однако очевидно, что f_1 не является голоморфной ветвью м-функции $\operatorname{Arg}(z)$ на $\mathbb{C}_-$.

5.5. Функции z^p и a^z.

Зафиксируем $p \in \mathbb{C}$ и определим м-функцию

$$z^p = e^{p \operatorname{Ln} z} = \{\, e^{p\, w_k} \mid w_k \in \operatorname{Ln} z \,\}\,, \quad z \in \mathbb{C}_\flat.$$

Тогда функция $f_1(z) = z^p_{(o)} = e^{p \ln z}$ – голоморфная ветвь z^p в $\mathbb{C}_-$. При этом $(z^p_{(o)})' = p z^{p-1}_{(o)}$ в $\mathbb{C}_-$.

Упражнение 5.9. Найти i^i.

Упражнение 5.10. Найти какую-либо максимальную область конформности функции $z^i_{(o)}$.

Пусть теперь фиксировано $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. По определению положим

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = \{\, e^{z\, w_k} \mid w_k \in \operatorname{Ln} a \,\}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Тогда $a^z_{(o)} = e^{z \ln a} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ – *целая* ветвь м-функции a^z. При этом

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z\left(\ln|a| + i\cdot(\arg a + 2\pi k)\right)} = e^{z \ln a} e^{2\pi k i z} = a^z_{(o)} e^{2\pi k i z}.$$

Таким образом, м-функция a^z "распадается"на счетное число целых ветвей.

6. Непрерывная ветвь м-функции $\mathrm{Arg}(z)$ вдоль пути. Индекс пути относительно точки. Эквивалентные пути. Действия с кривыми. Спрямляемые пути и кривые. Интеграл вдоль кривой по комплексной переменной

6.1. Непрерывная ветвь м-функции $\mathrm{Arg}(z)$ вдоль пути.

Теорема 6.1. *Пусть $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}_\flat = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – путь. Тогда м-функция $\mathcal{F}(t) = \mathrm{Arg}(\gamma(t))$ имеет непрерывную ветвь $\varphi_0(t)$ на всем $[\alpha,\beta]$.*

Все непрерывные на $[\alpha,\beta]$ ветви м-функции $\mathcal{F}$ имеют вид $\varphi_k(t) = \varphi_0(t)+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Положим $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus [0,+\infty)$. Докажем существование хотя бы одной непрерывной ветви м-функции $\mathcal{F}$ на всем $[\alpha,\beta]$.

Пусть сначала $[\gamma] = \gamma([\alpha,\beta]) \subset \mathbb{C}_-$. Тогда можно положить $\varphi_0(t) = \arg\gamma(t)$ на $[\alpha,\beta]$. Аналогично, если $[\gamma] \subset \mathbb{C}_+$, то можно положить $\varphi_0(t) = \underset{(0,2\pi)}{\arg}\gamma(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$.

В общем случае разобьем отрезок $I = [\alpha,\beta]$ на N ($N \in \mathbb{N}$) равных последовательных отрезков $I_n = [\alpha_{n-1},\alpha_n]$ (где $\alpha = \alpha_0 < \cdots < \alpha_N = \beta$) так, чтобы $[\gamma|_{I_n}]$ целиком содержался в $\mathbb{C}_+$ или в $\mathbb{C}_-$ для каждого $n \in \{1,\ldots,N\}$. Поясним, почему такое разбиение существует. Поскольку $[\gamma]$ – компакт в $\mathbb{C}$, не содержащий точку 0, имеем $\mathrm{d}(0,[\gamma]) = \rho > 0$. В силу равномерной непрерывности γ на I, существует такое $\varepsilon > 0$, что $|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)| < \rho$ для любых t_1, t_2 из I с условием $|t_1 - t_2| < \varepsilon$. Остается для этого ε найти натуральное N с условием $(\beta-\alpha)/N < \varepsilon$.

Пусть $\psi_n(t) = \arg\gamma(t)|_{I_n}$ при $[\gamma(t)|_{I_n}] \subset \mathbb{C}_-$, и $\psi_n(t) = \arg_{(0,2\pi)}\gamma(t)|_{I_n}$ в противном случае (тогда $[\gamma(t)|_{I_n}] \subset \mathbb{C}_+$), $n \in \{1,\ldots,N\}$.

Положим $\varphi_0(t) = \psi_1(t)$ на I_1. Тогда $\psi_2(\alpha_1) = \varphi_0(\alpha_1) + 2\pi k_1$ для некоторого $k_1 \in \mathbb{Z}$. Положим $\varphi_0(t) = \psi_2(t) - 2\pi k_1$ на I_2. Тогда $\psi_3(\alpha_2) = \varphi_0(\alpha_2)+2\pi k_2$ для некоторого $k_2 \in \mathbb{Z}$. Положим $\varphi_0(t) = \psi_3(t) - 2\pi k_2$ на I_3 и т.д. По построению, функция $\varphi_0(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ и для всех $t \in [\alpha,\beta]$ имеем $\varphi_0(t) \in \mathrm{Arg}(\gamma(t))$, т.е. φ_0 – непрерывная ветвь м-функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на $[\alpha,\beta]$.

Пусть теперь φ – еще одна непрерывная ветвь м-функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на $[\alpha,\beta]$. Тогда $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)-\varphi_0(t)}{2\pi}$ – непрерывная на $[\alpha,\beta]$ функция, принимающая во всех точках целочисленные значения, и, следовательно, $\psi(t) \equiv k$ на $[\alpha,\beta]$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем $\varphi(t) \equiv \varphi_0(t) + 2\pi k$. С другой стороны, очевидно, что все функции вида $\varphi_k(t) = \varphi_0(t) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются непрерывными ветвями м-функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на $[\alpha,\beta]$. $\square$

6.2. Индекс пути относительно точки.

Определение 6.1. Пусть $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}_\flat$ – путь и φ – какая-либо непрерывная на $[\alpha,\beta]$ ветвь м-функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$. Величина

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z) = \varphi(\beta) - \varphi(a)$$

называется *приращением (полярного) аргумента* вдоль пути γ.

Замечание. Из теоремы 6.1 следует, что $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z)$ определено корректно, т.е. не зависит от выбора непрерывной ветви φ м-функции $\mathrm{Arg}\,\gamma(t)$.

Определение 6.2. Пусть $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ – путь, и пусть $a \notin [\gamma]$. Тогда путь $\gamma_{-a}(t) = \gamma(t) - a$, $t \in [\alpha,\beta]$, не проходит через точку 0 и определен *индекс пути γ относительно точки a*:

$$\mathrm{ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_{\gamma_{-a}}\mathrm{Arg}(z).$$

Замечание. Функция $f(z) = \mathrm{ind}_\gamma(z)$ непрерывна в $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$. Для доказательства этого факта достаточно разбить путь γ на "маленькие" пути (как это сделано в доказательстве теоремы 6.1) и установить нужный факт для каждого из этих путей.

В случае замкнутого пути γ функция $f(z)$ постоянна (и целочисленна) в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

Следующая теорема будет доказана в Ч. 2, Гл. 1, п.2 после доказательства теоремы Жордана.

Теорема 6.2. *Пусть γ – замкнутый жорданов путь в $\mathbb{C}$. По теореме Жордана, $\mathbb{C} \setminus [\gamma] = D \sqcup \Omega$, где D – ограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, Ω – неограниченная. Тогда утверждается, что* $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ *для всех $z \in \Omega$,* $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ *(или* $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv -1$*) для всех $z \in D$.*

В случае, когда $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ для всех $z \in D$, путь γ называется *положительно ориентированным относительно области D*. Если же $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv -1$ для всех $z \in D$, то γ *отрицательно ориентирован относительно D*.

Замечание. Приведем подробный план доказательства предыдущей теоремы для случая произвольной замкнутой жордановой ломаной (для неё у нас есть простое доказательство теоремы Жордана). Пусть Σ^+ – замкнутая ориентированная жорданова ломаная с первым ребром $[v_1, v_2]^+$, и пусть $a = (v_1+v_2)/2$. Обозначим через Γ^+ – жорданову ломаную $\Sigma^+ \setminus (v_1, v_2)$. Если точка $z^+ \to a$ (соответственно, $z^- \to a$) по нормали к ребру $[v_1, v_2]^+$ *из неограниченной* (соответственно, *из ограниченной*) компоненты дополнения к $[\Sigma]$, то $\mathrm{ind}_{\Gamma^+}(z^+) - \mathrm{ind}_{\Gamma^+}(z^-) \to 0$. Нетрудно установить также, что $\mathrm{ind}_{\Sigma^+}(z^+) = 0$. Остается заметить, что

$$\left|\mathrm{ind}_{[v_1,v_2]^+}(z^+) - \mathrm{ind}_{[v_1,v_2]^+}(z^-)\right| \to 1\,.$$

6.3. Эквивалентные пути. Действия с кривыми.

Определение 6.3. Пусть $\gamma_{1,2} : [\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}] \to \mathbb{C}$ – два пути. Они называются *эквивалентными* (обозначение: $\gamma_1 \simeq \gamma_2$), если существует возрастающий гомеоморфизм $h : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha_2, \beta_2]$ с условием $\gamma_2(h(t)) = \gamma_1(t)$ при всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$.

Упражнение 6.1. Доказать, что $\simeq$ – отношение эквивалентности.

Класс эквивалентных путей (с представителем γ) называется *кривой*, которая обозначается Γ (или $\{\gamma\}$). Корректно определен *носитель* $[\Gamma] = [\gamma]$ кривой Γ.

Упражнение 6.2. Если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, то $\mathrm{ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{ind}_{\gamma_2}(a)$ для всех $a \in \mathbb{C} \setminus [\gamma_1] = \mathbb{C} \setminus [\gamma_2]$. Следовательно, корректно определен $\mathrm{ind}_\Gamma(a)$ – *индекс* кривой Γ относительно точки $a \notin [\Gamma]$.

Пусть $\gamma_{1,2} : [\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}] \to \mathbb{C}$ – два пути, причем $\beta_1 = \alpha_2$ и $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\alpha_2)$. Тогда определен путь $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 : [\alpha_1, \beta_2] \to \mathbb{C}$ по формуле

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [\alpha_1, \beta_1]\,, \\ \gamma_2(t), & t \in [\alpha_2, \beta_2]\,. \end{cases}$$

Пусть Γ_1 и Γ_2 – кривые, причем конец Γ_1 совпадает с началом Γ_2. Тогда можно определить кривую $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Для этого нужно взять какие-либо представители γ_1 и γ_2 кривых Γ_1 и Γ_2 соответственно (т.е. $\Gamma_1 = \{\gamma_1\}$ и $\Gamma_2 = \{\gamma_2\}$), определенных (запараметризованных) на отрезках $[0, 1]$ и $[1, 2]$ соответственно, а затем рассмотреть кривую $\Gamma = \{\gamma_1 \cup \gamma_2\}$. Нетрудно доказать корректность этого определения. Порядок путей и кривых в указанной операции *объединения путей и кривых*, очевидно, важен. Вопрос о коммутативности смысла не имеет.

Определение 6.4. Пусть $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ – путь. Тогда путь $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha+\beta-t) : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ называется *противоположным* к γ. Очевидным образом корректно определяется кривая Γ^-, противоположная кривой Γ.

Упражнение 6.3. Если $a \notin [\Gamma_1] \cup [\Gamma_2]$ и определена кривая $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то $\operatorname{ind}_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}(a) = \operatorname{ind}_{\Gamma_1}(a) + \operatorname{ind}_{\Gamma_2}(a)$.

Упражнение 6.4. Если $a \notin [\Gamma]$, то $\operatorname{ind}_{\Gamma^-}(a) = -\operatorname{ind}_{\Gamma}(a)$.

6.4. Спрямляемые пути и кривые.

Пусть $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ – путь, $T = \{\alpha = t_0, \ldots, t_N = \beta\}$ – *разбиение* отрезка $[\alpha,\beta]$ порядка N ($N \in \mathbb{N}$); $\Delta t_n = t_n - t_{n-1} > 0$ ($n \in \{1,\ldots,N\}$). Число $\lambda(T) = \max\limits_{1\leqslant n\leqslant N} \Delta t_n$ называется *диаметром разбиения* T.

Сопоставим каждому разбиению T величину $l_T(\gamma) = \sum\limits_{n=1}^{N} |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})|$ – длину вписанной в γ ломаной, соответствующей T.

Определение 6.5. *Длиной пути* γ называется (конечная или бесконечная) величина

$$l(\gamma) = \sup_T l_T(\gamma).$$

Если $l(\gamma) < +\infty$, то путь γ называется *спрямляемым*.

Упражнение 6.5. Доказать, что путь γ спрямляем, если и только если существует и конечен $\lim_{\lambda(T)\to 0} l_T(\gamma)$, причем он равен $l(\gamma)$.

Замечание. Легко видеть, что если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, то $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$; в частности, γ_1 и γ_2 одновременно спрямляемые или нет. Поэтому корректно определены понятия *спрямляемой кривой* и ее *длины* $l(\Gamma) := l(\gamma)$, где $\Gamma = \{\gamma\}$.

Упражнение 6.6. Пусть $K(t)$ – канторова лестница на $[0,1]$. Определим путь $\gamma(t) = t + i\,K(t)$ на $[0,1]$ («график» K на плоскости Oxy, $z = x+iy$). Доказать, что $l(\gamma) = 2$.

Пусть $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ – спрямляемый путь, не постоянный ни на каком интервале $(\alpha_1,\beta_1) \subset [\alpha,\beta]$. Тогда функция $s(t) = l(\gamma\big|_{[\alpha,t]})$ непрерывна и строго возрастает, и, следовательно, является гомеоморфизмом $[\alpha,\beta]$ на $[0, l(\gamma)]$. Поэтому определены обратное отображение $t = t(s)$ и путь $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) : [0,l(\gamma)] \to \mathbb{C}$, $\widetilde{\gamma} \simeq \gamma$. Параметр s называется *натуральным параметром* для кривой $\Gamma = \{\gamma\}$, а путь $\widetilde{\gamma}$ её *натуральной параметризацией.*

Определение 6.6. Путь $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ на $[\alpha,\beta]$ называется *гладким*, если $x(t)$ и $y(t)$ являются функциями класса $C^1([\alpha,\beta])$, причем $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t) \neq 0$ на $[\alpha,\beta]$.

Определение 6.7. Два гладких пути $\gamma_{1,2} : [\alpha_{1,2},\beta_{1,2}] \to \mathbb{C}$ называются *эквивалентными как гладкие пути*, если существует возрастающий диффеоморфизм (класса C^1 в обе стороны) $h : [\alpha_1,\beta_1] \to [\alpha_2,\beta_2]$ такой, что $\gamma_2(h(t)) = \gamma_1(t)$, $t \in [\alpha_1,\beta_1]$.

Упражнение 6.7. Эквивалентность гладких путей – отношение эквивалентности.

Класс эквивалентности гладких путей называется *гладкой кривой.*

Упражнение 6.8. Если γ_1 и γ_2 – гладкие пути, эквивалентные как обычные пути, то они эквивалентны и как гладкие пути.

Упражнение 6.9. Если γ – непрерывно дифференцируемый путь на $[\alpha,\beta]$, то он спрямляем и $l(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)|\,dt$.

Упражнение 6.10. Дать определения кусочно-гладкого пути, эквивалентности кусочно-гладких путей, кусочно-гладкой кривой.

6.5. Интеграл вдоль пути и кривой по комплексной переменной.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – путь, $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ – некоторая функция, $T = \{\alpha = t_0, \ldots, t_N = \beta\}$ – разбиение $[\alpha, \beta]$. Пусть $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$ – *выборка, подчиненная разбиению* T, т.е. $\tau_n \in [t_{n-1}, t_n]$ для каждого $n \in \{1, \ldots, N\}$. Определим *интегральную сумму*:

$$\Sigma_\gamma(T, \tau, f) = \sum_{n=1}^{N} f\big(\gamma(\tau_n)\big)\big(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\big).$$

Определение 6.8. Если существует конечный предел

$$I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \Sigma_\gamma(T, \tau, f)$$

(т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения T с условием $\lambda(T) < \delta$ и для всякой выборки τ, подчиненной T, имеем $\big|I - \Sigma_\gamma(T, \tau, f)\big| < \varepsilon$), то он называется *интегралом от функции* f *вдоль пути* γ и обозначается

$$\int\limits_\gamma f(z)\, dz\,.$$

Функция f в этом случае называется *интегрируемой вдоль пути* γ *по комплексной переменной* z.

Упражнение 6.11. Пусть γ_1, γ_2 – два произвольные пути. Если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ и функция f определена на $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, то $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\, dz$ и $\int\limits_{\gamma_2} f(z)\, dz$ существуют либо не существуют одновременно, и в первом случае они равны между собой. Следовательно, корректно определен *интеграл вдоль кривой* Γ *от функции* f.

Упражнение 6.12. Пусть для кривой Γ существуют интегралы $\int\limits_\Gamma f_1(z)\, dz$ и $\int\limits_\Gamma f_2(z)\, dz$. Тогда для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ существует интеграл

$$\int\limits_\Gamma \big(\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)\big)\, dz = \lambda_1 \int\limits_\Gamma f_1(z)\, dz + \lambda_2 \int\limits_\Gamma f_2(z)\, dz\,.$$

Упражнение 6.13. Пусть для кривых Γ_1 и Γ_2 определена кривая $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, и $f : [\Gamma] \to \mathbb{C}$. Если существуют интегралы $\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\, dz$ и $\int\limits_{\Gamma_2} f(z)\, dz$, то существует интеграл

$$\int\limits_\Gamma f(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\, dz.$$

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $E \neq \varnothing$. Через $C(E)$ обозначается пространство функций, *непрерывных* (по E) в каждой точке $a \in E$ и *ограниченных* на E. В $C(E)$ определяется *равномерная норма*:

$$||f||_E = \sup_{z\in E} |f(z)|.$$

Теорема 6.3. *Пусть* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – *спрямляемый путь, функция* f *непрерывна на* $[\gamma]$. *Тогда* $\int\limits_\gamma f(z)\, dz$ *существует и выполняется неравенство*

$$\Big|\int\limits_\gamma f(z)\, dz\Big| \leqslant ||f||_{[\gamma]} \cdot l(\gamma)\,. \tag{6.1}$$

Доказательство. Полагая $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ и $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, по определению интегралов через соответствующие интегральные суммы получаем:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\gamma(t)\big)\,d\gamma(t)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} u\big(x(t),y(t)\big)\,dx(t)-\int\limits_{\alpha}^{\beta} v\big(x(t),y(t)\big)\,dy(t)+$$
$$+i\cdot\Big(\int\limits_{\alpha}^{\beta} u\big(x(t),y(t)\big)\,dy(t)+\int\limits_{\alpha}^{\beta} v\big(x(t),y(t)\big)\,dx(t)\Big),$$

где $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\gamma(t)\big)\,d\gamma(t)$ и другие интегралы в последней серии равенств являются интегралами Римана-Стилтьеса.

Докажем, например, существование интеграла $\int\limits_{\gamma} u\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} u\big(x(t),y(t)\big)\,dx(t)$.

Функция $u\big(x(t),y(t)\big)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ как композиция непрерывных. Функция $x(t)$ имеет на $[\alpha,\beta]$ ограниченную вариацию, поскольку $\mathrm{Var}_{[\alpha,\beta]}\big(x(t)\big)\leqslant l(\gamma)$ (проверить!). Из курса действительного анализа известно, что этих двух условий достаточно для существования интеграла Римана-Стилтьеса $\int\limits_{\alpha}^{\beta} u\big(x(t),y(t)\big)\,dx(t)$.

Существование интегралов $\int\limits_{\gamma} v\,dy$, $\int\limits_{\gamma} u\,dy$, $\int\limits_{\gamma} v\,dx$ доказывается аналогично.

Наконец, для каждой интегральной суммы $\Sigma_{\gamma}(T,\tau,f)$ справедлива оценка

$$\big|\Sigma_{\gamma}(T,\tau,f)\big|\leqslant ||f||_{[\gamma]}\cdot l_T(\gamma)\leqslant ||f||_{[\gamma]}\cdot l(\gamma).$$

Переходя к пределу при $\lambda(T)\to 0$, получаем требуемое неравенство (6.1). $\square$

7. Интеграл вдоль непрерывно-дифференцируемого пути. Лемма Гурса. Лемма о приближении.

7.1. Интеграл вдоль непрерывно-дифференцируемого пути.

Теорема 7.1. *Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – непрерывно дифференцируемый путь, а функция f непрерывна на $[\gamma]$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)\,dt.$$

Мы несколько отложим доказательство этой теоремы. Сначала приведем один важный пример её использования, затем нам понадобится одно новое полезное понятие и некоторые предварительные результаты.

Пример 7.1. Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}$; по определению положим $z^0 = 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Найдем значение $\int\limits_{\gamma_R} z^n\,dz$, где $\gamma_R(t) = Re^{it}|_{[0,2\pi]}$ – окружность радиуса R с центром в нуле:

$$\int\limits_{\gamma_R} z^n\,dz = \int\limits_0^{2\pi} (Re^{it})^n Rie^{it}\,dt = iR^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt =$$

$$= iR^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} \cos\big((n+1)\,t\big)\,dt - R^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} \sin\big((n+1)\,t\big)\,dt =$$

$$= iR^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} \cos\big((n+1)\,t\big)\,dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Этот простой результат именуется как "свойство ортогональности степеней" (пока без комментариев):

$$\int\limits_{\gamma_R} z^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \tag{7.1}$$

Определение 7.1. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $E \neq \varnothing$, $f : E \to \mathbb{C}$ – ограниченная функция. *Модуль непрерывности функции f на множестве E* определяется по формуле:

$$\omega_E(f, \delta) = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in E \\ |z_1 - z_2| \leqslant \delta}} \big|f(z_1) - f(z_2)\big|.$$

Замечание. Ясно, что функция f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \omega_E(f,\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$.

Лемма 7.1. *Пусть $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ – путь на $[\alpha, \beta]$ класса C^1. Положим $\mu(\delta) = \omega_{[\alpha,\beta]}(\dot{x}, \delta) + \omega_{[\alpha,\beta]}(\dot{y}, \delta)$. Тогда для всех $t \in [\alpha, \beta)$, $\Delta t > 0$ с условием $[t, t + \Delta t] \subset [\alpha, \beta]$ и $\theta \in [t, t + \Delta t]$ выполняется оценка:*

$$\big|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t) - \dot{\gamma}(\theta)\Delta t\big| \leqslant \mu(\Delta t)\Delta t\,.$$

Доказательство. Пусть t, Δt, θ удовлетворяют условиям леммы. По теореме Лагранжа (для функций $x(t)$ и $y(t)$) при некоторых $\theta_x, \theta_y \in [t, t+\Delta t]$ справедливы равенства:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \dot{x}(\theta_x)\Delta t,$$
$$y(t + \Delta t) - y(t) = \dot{y}(\theta_y)\Delta t.$$

Следовательно,
$$\begin{gathered}\bigl|\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)-\dot\gamma(\theta)\Delta t\bigr| = \bigl|\bigl(x(t+\Delta t)-x(t)-\dot x(\theta)\Delta t\bigr)+\\ +i\cdot\bigl(y(t+\Delta t)-y(t)-\dot y(\theta)\Delta t\bigr)\bigr| \leqslant \bigl(\bigl|\dot x(\theta_x)-\dot x(\theta)\bigr|+\bigl|\dot y(\theta_y)-\dot y(\theta)\bigr|\bigr)\Delta t \leqslant\\ \leqslant \bigl(\omega_{[\alpha,\beta]}(\dot x,\Delta t)+\omega_{[\alpha,\beta]}(\dot y,\Delta t)\bigr)\Delta t = \mu(\Delta t)\Delta t,\end{gathered}$$
что и требовалось доказать. □

Эта лемма является как бы заменой цитируемой в её доказательстве теоремы Лагранжа, которая не верна для путей на плоскости. Приведем пример: $\gamma(t) = e^{it}|_{[0,2\pi]}$. Здесь $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=0$, однако $\dot\gamma(t) = ie^{it}\neq 0$ при всех $t\in[0,2\pi]$.

Доказательство теоремы 7.1. Воспользуемся обозначениями последней леммы. В силу равномерной непрерывности функций $\dot x$ и $\dot y$ на $[\alpha,\beta]$, имеем: $\mu(\delta)\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Заметим, что интегралы, равенство которых требуется установить, существуют: левый – в силу спрямляемости C^1-пути и непрерывности f на его носителе (по теореме 6.3); правый – в силу непрерывности подынтегральной функции.

Пусть $T=\{t_0,\ldots,t_N\}$ – разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$, $\tau=\{\tau_1,\ldots,\tau_N\}$ – выборка, подчиненная T. Оценим разность интегральных сумм для $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$ и $\int\limits_\alpha^\beta f\bigl(\gamma(t)\bigr)\dot\gamma(t)\,dt$, соответствующих паре (T,τ):
$$\begin{gathered}\Bigl|\sum_{n=1}^N f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)\bigl(\gamma(t_n)-\gamma(t_{n-1})\bigr)-\sum_{n=1}^N f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)\dot\gamma(\tau_n)\Delta t_n\Bigr| \leqslant\\ \leqslant \sum_{n=1}^N \bigl|f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)\bigr|\cdot\bigl|\gamma(t_n)-\gamma(t_{n-1})-\dot\gamma(\tau_n)\Delta t_n\bigr| \leqslant \sum_{n=1}^N \bigl|f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)\bigr|\cdot\mu(\Delta t_n)\Delta t_n \leqslant\\ \leqslant ||f||_{[\gamma]}(\beta-\alpha)\cdot\mu\bigl(\lambda(T)\bigr)\to 0\end{gathered}$$
при $\lambda(T)\to 0$. Далее ясно. □

7.2. Лемма Гурса (теорема Коши для треугольников).

Упражнение 7.1. Для произвольного отрезка $[a,b]$ в $\mathbb{C}$ доказать равенства:
$$\int\limits_{[a,b]} z^n\,dz = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1},\quad n\in\{0,1,\ldots\}.$$

Из этих равенств следует, что для всякого многочлена $p(z)$ и всякого треугольника Δ с положительно ориентированной границей $\partial^+\Delta$ справедливо равенство
$$\int\limits_{\partial^+\Delta} p(z)\,dz = 0.$$
Здесь и далее в этой лекции через Δ обозначается *замкнутый* (вместе с внутренней областью) треугольник.

Лемма 7.2. *(Гурса). Пусть Δ – треугольник с (положительно) ориентированной границей $\partial^+\Delta$. Пусть функция f определена в некоторой окрестности Δ и является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в каждой точке $z\in\Delta$. Тогда*
$$\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

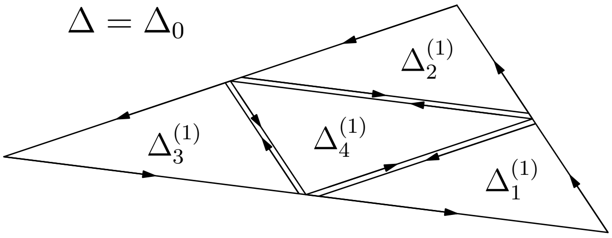

Рис. 7.1.

Доказательство. Предположим противное:

$$\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz = I \neq 0.$$

Средними линиями разобьем треугольник $\Delta = \Delta_0$ на 4 треугольника $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_2^{(1)}$, $\Delta_3^{(1)}$, $\Delta_4^{(1)}$ (как показано на рис. 7.1). Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\partial^+\Delta_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{\partial^+\Delta_j^{(1)}} f(z)\,dz.$$

Следовательно, можно выбрать $j_1 \in \{1,2,3,4\}$ с условием $\Big|\int\limits_{\partial^+\Delta_1} f(z)\,dz\Big| \geqslant \dfrac{|I|}{4}$, где $\Delta_1 = \Delta_{j_1}^{(1)}$.

Аналогично, разбивая средними линиями треугольник Δ_1 на четыре треугольника $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_2^{(2)}$, $\Delta_3^{(2)}$, $\Delta_4^{(2)}$, выберем $j_2 \in \{1,2,3,4\}$ с условием

$$\Big|\int\limits_{\partial^+\Delta_2} f(z)\,dz\Big| \geqslant \frac{|I|}{4^2}\,,$$

где $\Delta_2 = \Delta_{j_2}^{(2)}$.

Продолжая построение по индукции, получаем систему вложенных замкнутых треугольников Δ_k, $k = 1, 2, \ldots$, со следующими свойствами (через $P(\Delta_k)$ обозначается периметр треугольника Δ_k):

$$P(\Delta_k) = \frac{P(\Delta)}{2^k}\;\;,\quad \Big|\int\limits_{\partial^+\Delta_k} f(z)\,dz\Big| \geqslant \frac{|I|}{4^k}\,. \tag{7.2}$$

По теореме о вложенных компактах, существует точка $z_0 = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \Delta_k \subset \Delta$.

Поскольку функция $f(z)$ по условию является $\mathbb{C}$-дифференцируемой всюду в Δ (в частности, в точке z_0), для нее справедливо представление:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mu(z)(z - z_0), \quad \mu(z) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

Выражая отсюда $\mu(z)$, имеем:

$$\mu(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), \quad z \neq z_0.$$

Функция $\mu(z)$, доопределенная нулем в точке z_0, определена и непрерывна на Δ. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что $|\mu(z)| < \varepsilon$ при $z \in B(z_0, \delta) \cap \Delta$.

Определим $n \in \mathbb{N}$ из условия: $P_n = P(\Delta_n) < \delta$. Ясно, что тогда $\Delta_n \subset B(z_0, \delta) \cap \Delta$. Теперь, пользуясь свойствами (7.2) и упражнением 7.1, получаем:

$$\frac{|I|}{4^n} \leq \Big| \int\limits_{\partial^+\Delta_n} f(z)\,dz \Big| = \Big| \int\limits_{\partial^+\Delta_n} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mu(z)(z - z_0)\big)\,dz \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{\partial^+\Delta_n} \mu(z)(z - z_0)\,dz \Big| \leqslant \varepsilon P_n \cdot P_n = \varepsilon \frac{P(\Delta)^2}{4^n},$$

откуда $|I| \leqslant \varepsilon P(\Delta)^2$. При $\varepsilon < \dfrac{|I|}{P(\Delta)^2}$ получаем противоречие.

$\square$

Определение 7.2. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, функция f *непрерывна* в D. Говорят, что f *удовлетворяет в D условию треугольника*, если для всякого замкнутого треугольника $\Delta \subset D$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Замечание. Если f голоморфна в D, то по лемме Гурса f удовлетворяет в D условию треугольника.

7.3. Лемма о приближении.

Лемма 7.3. *(О приближении). Пусть D – область в $\mathbb{C}$, функция f непрерывна в D, $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ – спрямляемый путь. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого разбиения T отрезка $[\alpha, \beta]$ с условием $\lambda(T) < \delta$ выполнены следующие утверждения:*

(1) $\quad ||\gamma - \Lambda_\gamma^T||_{[\alpha,\beta]} < \varepsilon \;\;,\;\; [\Lambda_\gamma^T] \subset D\,,$

(2) $\quad \Big| \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - \int\limits_{\Lambda_\gamma^T} f(z)\,dz \Big| < \varepsilon\,,$

где Λ_γ^T – ломаная, вписанная в γ, соответствующая разбиению T.

Доказательство. Будем считать, что путь γ нетривиален (неодноточечный), иначе всё просто. Положим $d = \operatorname{dist}([\gamma], \partial D)$ при $\partial D \neq \varnothing$ ($D \neq \mathbb{C}$), $d = 1$ при $D = \mathbb{C}$. Определим множество $K = \{z \in D \,|\, \operatorname{dist}(z, [\gamma]) \leqslant \frac{d}{2}\}$ – компакт в D, содержащий $[\gamma]$.

Напомним определение модуля непрерывности функции g на множестве E:

$$\omega_E(g, r) = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in E \\ |z_1 - z_2| \leq r}} |g(z_1) - g(z_2)|.$$

По условию, функция f непрерывна в D, а значит f равномерно непрерывна на K. Следовательно,

$$\mu(r) := \omega_K(f, r) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{7.3}$$

В силу равномерной непрерывности γ на $[\alpha, \beta]$, имеем:

$$\omega(r) := \omega_{[\alpha,\beta]}(\gamma, r) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{7.4}$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \frac{d}{2})$. Из (7.3) и (7.4), а также ввиду интегрируемости функции f вдоль γ (γ спрямляема и f непрерывна на $[\gamma]$), найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\omega(\delta) < \varepsilon \quad , \quad \mu(\omega(\delta)) < \frac{\varepsilon}{2l(\gamma)}\,, \tag{7.5}$$

и для любого разбиения T отрезка $[\alpha, \beta]$ с условием $\lambda(T) < \delta$, а также любой выборки τ, подчиненной разбиению T, имеем:

$$\Big|\Sigma_\gamma(T, \tau, f) - \int\limits_\gamma f(z)\, dz\Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.6}$$

Покажем, что указанное δ удовлетворяет условиям доказываемой леммы.

Пусть теперь $T = \{t_0, \dots, t_N\}$ – произвольное разбиение $[\alpha, \beta]$ (порядка N) с условием $\lambda(T) < \delta$ и Λ_γ^T – соответствующая вписанная в γ ломаная. При $n \in \{1, \dots, N\}$ положим $\gamma_n = \gamma\big|_{[t_{n-1}, t_n]}$. Тогда для всех $t \in [t_{n-1}, t_n]$ справедлива оценка:

$$\big|\Lambda_\gamma^T(t) - \gamma_n(t)\big| \leqslant \max(|\gamma_n(t) - \gamma_n(t_{n-1})|,\, |\gamma_n(t) - \gamma_n(t_n)|) \leqslant \omega\big(\lambda(T)\big) < \varepsilon\,.$$

Следовательно, $||\Lambda_\gamma^T - \gamma||_{[\alpha,\beta]} < \varepsilon$, и (1) доказано. Заметим также, что $[\Lambda_\gamma^T] \subset K$, поскольку для всех $t \in [\alpha, \beta]$ имеем $\Lambda_\gamma^T(t) \in U_{d/2}\big(\gamma(t)\big)$.

Докажем теперь, что

$$\Big|\int\limits_{\Lambda_\gamma^T} f(z)\, dz - \Sigma_\gamma(T, \tau, f)\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для любой выборки $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$, подчиненной T. Тогда в силу (7.6) и неравенства треугольника будет доказано (2).

Пользуясь аддитивностью интеграла и определениями $\Sigma_\gamma(T, \tau, f)$ и $l(\gamma)$, имеем (для финальной оценки рассмотреть треугольник $\Delta\gamma(t_{n-1})\gamma(t_n)\gamma(\tau_n)$ и $z \in [\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]$):

$$\Big|\int\limits_{\Lambda_\gamma^T} f(z)\, dz - \Sigma_\gamma(T, \tau, f)\Big| \leqslant \sum_{n=1}^N \Big|\int\limits_{[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]} f(z)\, dz - f\big(\gamma(\tau_n)\big)\big(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\big)\Big| =$$

$$= \sum_{n=1}^N \Big|\int\limits_{[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]} \Big(f(z) - f\big(\gamma(\tau_n)\big)\Big)\, dz\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(\omega\big(\lambda(T)\big)\right) \sum_{n=1}^N \big|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\big| \leq \mu\left(\omega\big(\delta\big)\right) \cdot l(\Lambda_\gamma^T) < \frac{\varepsilon}{2l(\gamma)} \cdot l(\gamma) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\square$

8. Теорема Коши для односвязной области. Существование первообразной в односвязной области. Формула Ньютона – Лейбница. Интегральная теорема Коши для допустимых областей.

8.1. Теорема Коши для односвязной области.

Теорема 8.1. *Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$ и пусть функция f удовлетворяет в D условию треугольника. Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ с условием $[\Gamma] \subset D$ выполняется равенство:*

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство. 1. По условию, утверждение теоремы верно, если Γ – ориентированная граница некоторого треугольника $\Delta \subset D$ (из односвязности D и теоремы 2.2 следует, что и внутренность треугольника Δ лежит в D).

2. Если Γ – граница выпуклого многоугольника $G \subset D$, то этот многоугольник можно разбить его диагоналями на треугольники, и свести нужное утверждение к случаю треугольника.

3. Теперь проверим нужное утверждение для произвольной (ориентированной) замкнутой *жордановой* ломаной Γ в D. Поскольку область D односвязна, жорданов (открытый) многоугольник G, ограниченный ломаной $[\Gamma]$, целиком лежит в D (см. теорему 2.2 и доказательство теоремы Жордана для многоугольников в Ч. 2, Гл. 1, п. 2). Поэтому, по аналогии со случаем 2., достаточно установить следующее утверждение и затем воспользоваться методом индукции.

Лемма 8.1. *В указанных обозначениях, существует диагональ многоугольника G (открытый интервал, соединяющий несоседние вершины в Γ), целиком лежащая в G.*

Доказательство. По индукции. Пусть лемма доказана для всех жордановых ломаных с числом вершин меньшим, чем N. Пусть $A_1, \ldots, A_N$ — последовательные вершины ломаной Γ ($N \geqslant 4$), причем никакие соседние ребра этой ломаной не являются продолжениями друг друга (т. е. все внутренние углы многоугольника G отличны от π радиан), иначе мы можем считать, что число вершин ломаной на самом деле равно $N-1$, и все доказано. Делая при необходимости параллельный перенос и перенумерацию вершин, мы можем предположить, что $A_2 = 0$ — это вершина ломаной Γ с минимальной ординатой (т. е. $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ для всех $z \in [\Gamma]$), так что *внутренний* угол $\angle A_1A_2A_3$ многоугольника G (с вершиной A_2) имеет величину, меньшую π (обосновать!). Если интервал (A_1, A_3) целиком лежит в G, то все доказано. Пусть это не так. Тогда на интервале (A_1, A_3), или внутри треугольника $\triangle A_1A_2A_3$ (случай $(*)$) должна находится хотя бы одна точка множества $[\Gamma]' = [\Gamma] \setminus ([A_1, A_2] \cup [A_2A_3])$. Следовательно, из соображений непрерывности (они нужны только в случае $(*)$) найдутся точки a_1 и a_3 на полуинтервалах $(A_2, A_1]$ и $(A_2, A_3]$ соответственно такие, что интервалы (a_1, a_3) и (A_1, A_3) параллельны (совпадают, если $(*)$ не имеет места), внутри треугольника $\triangle a_1A_2a_3$ *нет* точек из $[\Gamma]'$ (так что внутренность $\triangle a_1A_2a_3$ лежит в G), а на (a_1, a_3) *есть* точки из $[\Gamma]'$ (хотя бы одна точка a). Если a — одна из вершин A_n, $n > 3$, то (A_2, A_n) — искомая диагональ. Если точка a не является вершиной ломаной Γ, то она лежит внутри некоторого ребра $[A_n, A_{n+1}]$, которое должно строго содержаться в отрезке $[a_1, a_3]$, откуда хотя бы одна из вершин A_n или A_{n+1} лежит в (a_1, a_3). Тогда искомой диагональю является (A_2, A_n) или (A_2, A_{n+1}). □

4. Пусть, наконец, Γ – произвольная замкнутая нежорданова ломаная в D. У неё есть представитель – замкнутый кусочно-линейный путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, для которого найдется натуральное $N > 1$ и разбиение $T = \{\alpha = t_0, \ldots, t_N = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ порядка N такое, что при каждом $n \in \{1, \ldots, N\}$ имеем $\gamma(t) = c_nt + d_n$ на $[t_{n-1}, t_n]$ (c_n и d_n – комплексные постоянные).

Лемма 8.2. *Справедливо хотя бы одно из следующих утверждений:*

(1) для любой функции $f \in C([\Gamma])$ выполняется равенство $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ (случай, когда Γ не имеет замкнутых жордановых "частей");

(2) существуют замкнутые жордановы ломаные $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ ($J \ge 1$) такие, что $[\Gamma_j] \subset [\Gamma]$ для всех $j \in \{1, \ldots, J\}$ и для любой функции $f \in C([\Gamma])$ имеем

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{\Gamma_j} f(z)\,dz\,.$$

Доказательство. *Доказательство этой леммы* легко свести к случаю, когда все указанные выше коэффициенты $c_n \ne 0$, и N – минимально возможное в таком представлении ломаной Γ. Тогда будем говорить, что Γ имеет порядок N.

Применим индукцию по N. Пусть лемма доказана для всех указанных ломаных порядка не выше $N-1$, и Γ – ломаная порядка N с представителем γ (и введенными выше обозначениями). Можем считать $N \ge 4$. Пусть $A_n = \gamma(t_n)$ ($n \in \{1, \ldots, N\}$) – последовательные вершины ломаной Γ. Если какие-нибудь *соседние* ребра этой ломаной лежат на одной прямой, то шаг индукции сделать совсем легко. Далее полагаем, что таких соседних ребер нет. Пусть E – совокупность тех $t' \in (\alpha, \beta]$, для которых путь $\gamma|_{[\alpha,t']}$ является жордановым (незамкнутым). Тогда $E = (\alpha, \beta_1)$ – открытый интервал и $\beta_1 \in (\alpha, \beta)$ (проверить!). При этом найдется единственная точка $\alpha_1 \in [\alpha, \beta_1)$ условием $\gamma(\alpha_1) = \gamma(\beta_1)$. Ломаная Γ_1 с представителем $\gamma|_{[\alpha_1,\beta_1]}$ – замкнутая жорданова (проверить!). Наконец, замкнутая ломаная $\Gamma' = \{\gamma|_{[\alpha,\alpha_1]}\} \cup \{\gamma|_{[\beta_1,\beta]}\}$ имеет порядок меньший, чем N, $[\Gamma_1] \subset [\Gamma]$, $[\Gamma'] \subset [\Gamma]$, и для всех $f \in C([\Gamma])$ выполнено

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\Gamma'} f(z)\,dz\,.$$

Далее ясно. □

Таким образом, для произвольной замкнутой ломаной утверждение теоремы 8.1 также справедливо.

5. В общем случае остается воспользоваться леммой 7.3 о приближении. □

Следствие 8.1. *Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$ и пусть функция f удовлетворяет в D условию треугольника. Тогда для любых спрямляемых кривых Γ_1 и Γ_2 в D с одинаковыми началами и концами выполняется равенство:*

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Доказательство. Согласно теореме 8.1,

$$0 = \int\limits_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2^-} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\Gamma_2^-} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

□

8.2. Существование первообразной в односвязной области. Формула Ньютона – Лейбница (Н-Л).

Определение 8.1. Пусть D – произвольная область в $\mathbb{C}$, $F \in \mathcal{A}(D)$ и $F'(z) = f(z)$ в D. Тогда F называется *комплексной первообразной* (п/о) для функции f в D.

Упражнение 8.1. Если F_1 и F_2 – две п/о для функции f в D, то $F_1 - F_2 \equiv const$ в D.

Теорема 8.2. *(О существовании п/о в односвязной области). Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$, и пусть f удовлетворяет в D условию треугольника. Для любого фиксированного $a \in D$ определим функцию*

$$F_a(z) = \int\limits_{\Gamma_{az}} f(\zeta)\, d\zeta\,,$$

где Γ_{az} – любая спрямляемая кривая в D с началом в точке a и концом в точке z (по следствию 8.1 значения $F_a(z)$ не зависят от выбора кривой Γ_{az}).

Тогда функция $F_a(z)$ является п/о для функции f в D.

Доказательство. Фиксируем произвольное $z_0 \in D$ и $\delta_0 > 0$ с условием $B(z_0, \delta_0) \subset D$. Докажем, что $F_a'(z_0) = f(z_0)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу непрерывности f в D найдется $\delta = \delta(\varepsilon) \leqslant \delta_0$ такое, что $\big|f(z) - f(z_0)\big| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$. Для $z \in B(z_0, \delta)$ проведем оценку:

$$\Big|\frac{F_a(z) - F_a(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\Big| = \Big|\frac{1}{z - z_0}\Big(\int\limits_{\Gamma_{az}} f(\zeta)\, d\zeta - \int\limits_{\Gamma_{az_0}} f(\zeta)\, d\zeta\Big) - f(z_0)\Big| =$$

$$= \Big|\frac{1}{z - z_0}\int\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{z - z_0}\int\limits_{[z_0,z]} f(z_0)\, d\zeta\Big| = \Big|\frac{1}{z - z_0}\int\limits_{[z_0,z]} \big(f(\zeta) - f(z_0)\big)\, d\zeta\Big| \leq$$

$$\leqslant ||f - f(z_0)||_{[z_0,z]} < \varepsilon.$$

Из этой оценки следует, что

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F_a(z) - F_a(z_0)}{z - z_0} = f(z_0),$$

т.е. $F_a'(z_0) = f(z_0)$. □

Теорема 8.3. *(Формула Н-Л). Пусть D – произвольная область в $\mathbb{C}$, функция f непрерывна в D и для нее существует п/о F в D. Тогда для любой спрямляемой кривой Γ_{ab} в D с началом a и концом b справедлива формула (Ньютона – Лейбница):*

$$\int\limits_{\Gamma_{ab}} f(z)\, dz = F(b) - F(a). \tag{8.1}$$

Доказательство. Из леммы 7.3 о приближении следует, что достаточно установить равенство (8.1) для ломаных в D. Кроме того, очевидно, что равенство (8.1) для ломаной следует из аналогичного равенства для каждого из её последовательных отрезков. Т.е. остается установить (8.1) для случая, когда $\Gamma_{ab} = [a, b]$ – отрезок в D с параметризацией $\gamma_{ab}(t) = \gamma(t) = a + t \cdot (b - a)$, $t \in [0, 1]$. По теореме 7.1 получаем:

$$\int\limits_{[a,b]} f(z)\, dz = \int\limits_0^1 f\big(\gamma(t)\big)\dot\gamma(t)\, dt = \int\limits_0^1 \big(F(\gamma(t))\big)_t'\, dt = F\big(\gamma(1)\big) - F\big(\gamma(0)\big) = F(b) - F(a)\,.$$

В этой серии равенств применена теорема о производной сложной функции (см. лемму 4.1) и формула Н-Л на отрезке (проверить!). □

Упражнение 8.2. Пусть D – произвольная область в $\mathbb{C}$ и функция f непрерывна в D. Тогда f имеет п/о в D если и только если для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ в D справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Пример 8.1. Функция $f(z) = \dfrac{1}{z}$ не имеет п/о в $\mathbb{C}_\flat$, поскольку

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0\,,\ \gamma_1(t) = e^{it}|_{[0,2\pi]}\,.$$

8.3. Интегральная теорема Коши (ИТК) для допустимых областей.

Пусть замкнутый жорданов путь γ_c (с началом в точке c), ограничивающий жорданову область G, является положительно ориентированным относительно G. Если γ – произвольный путь с такими же условиями, то пути γ и γ_c эквивалентны. Пусть $\partial_c^+ G = \{\gamma_c\}$ – кривая, определяемая путем γ_c.

Если теперь b – произвольная точка на ∂G и $\gamma_b \in \partial_b^+ G$, то для любой (ограниченной) функции f на ∂D имеем $\int_{\gamma_b} f(z)\,dz = \int_{\gamma_c} f(z)\,dz$ (интегралы существуют или нет одновременно).

Определение 8.2. *Положительно ориентированной границей* $\partial^+ G$ жордановой области G в $\mathbb{C}$ называется совокупность всех кривых $\{\partial_c^+ G \;:\; c \in \partial G\}$. Таким образом, корректно определен $\int_{\partial^+ G} f(z)\,dz$.

Смысл обозначения $\partial^- G$ очевиден без дополнительного пояснения.

Определение 8.3. Пусть $D_1, \ldots, D_S$ – жордановы области в $\mathbb{C}$ ($S \in \mathbb{N}$) со *спрямляемыми* положительно ориентированными границами $\partial^+ D_1, \ldots, \partial^+ D_S$ соответственно. При $S = 1$ положим $D = D_1$, а при $S \geqslant 2$ предположим, что *замыкания* областей $D_2, \ldots, D_S$ попарно не пересекаются и целиком содержатся внутри D_1. При $S \geqslant 2$ кроме того потребуем, чтобы множество $D = D_1 \setminus (\bigcup\limits_{s=2}^{S} \overline{D}_s)$ было связно, т.е. являлось *областью* (то, что это верно всегда, мы докажем позже, как следствие из теоремы Римана о конформном отображении).

Такие множества D будем называть *допустимыми областями (ДО) ранга* S.

Определение 8.4. *Положительно ориентированной границей* допустимой области D ранга $S \geqslant 2$ называется совокупность (цепь) границ:

$$\partial^+ D = \{\partial^+ D_1, \partial^- D_2, \ldots, \partial^- D_S\}\,.$$

Для $f : \partial D \to \mathbb{C}$ интеграл от f по $\partial^+ D$ определяется по формуле:

$$\int\limits_{\partial^+ D} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial^+ D_1} f(z)\,dz - \sum_{s=2}^{S} \int\limits_{\partial^+ D_s} f(z)\,dz\,,$$

если указанные справа интегралы существуют.

Справедлива следующая *интегральная теорема Коши.*

Теорема 8.4. *(ИТК для ДО). Пусть D – допустимая область в $\mathbb{C}$ и $f \in C(\overline{D})$ удовлетворяет в D условию Δ. Тогда*

$$\int\limits_{\partial^+ D} f(z)\,dz = 0\,. \tag{8.2}$$

Докажем сначала ослабленный вариант этой теоремы для т.н. *простых областей.*

Определение 8.5. Жорданова область G называется *простейшей*, если её положительно ориентированная граница задается следующей параметризацией (см. рис. 8.1):

$$\gamma(t) = a + r(t)e^{it}\,,\ t \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$$

(т.е. $\{\gamma\} \in \partial^+ G$). Здесь $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [-\pi, \pi)$ и $r : [\alpha, \alpha + 2\pi] \to (0, +\infty)$ – непрерывная функция с ограниченной вариацией и условием $r(\alpha) = r(\alpha + 2\pi)$.

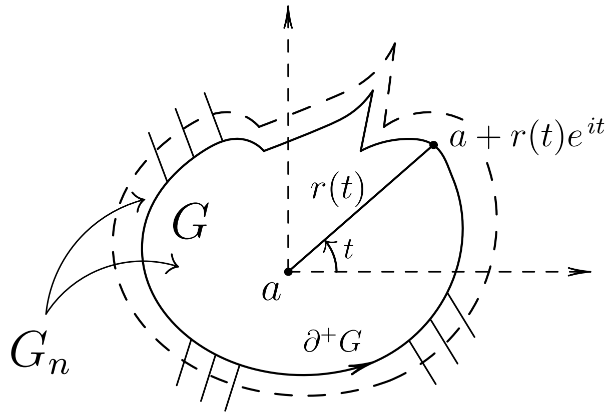

Рис. 8.1.

Важно, что в указанном случае понятие $\partial^+ G$ определяется напрямую (без использования теоремы Жордана в общем виде). Кроме того, обычно берется $\alpha = -\pi$ или $\alpha = 0$.

Предложение 8.1. *В условиях предыдущего определения:*
(1) для γ выполняется теорема Жордана;
(2) путь γ спрямляем;

$$(3) \qquad \operatorname{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ G} \frac{dz}{z - z_0} = 1\,,\ \forall\, z_0 \in G\,;$$

$$(4) \quad \operatorname{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ G} \frac{dz}{z - z_0} = 0\,,\ \forall\, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}\,;$$

Доказательство. Свойства (1) и (2) достаточно просты (проверить!). Свойства индекса в (3) и (4) уже обсуждены (пользуемся его локальной постоянностью и целочисленностью, и вычисляем указанный индекс по определению в точке a). Как мы независимо покажем ниже (в более общем контексте), для функции

$$h(z_0) = \int_{\partial^+ G} (z - z_0)^{-1}\, dz$$

имеем $h'(z_0) = \int_{\partial^+ G} (z - z_0)^{-2}\, dz = 0$ вне $[\gamma]$. Последнее равенство нулю вытекает из формулы Ньютона-Лейбница (при переменной z) для функции $(z - z_0)^{-2}$ с п/о $-(z - z_0)^{-1}$. Остается доказать, что $(2\pi i)^{-1} \int_{\partial^+ G} (z - a)^{-1}\, dz = 1$. Последнее доказывается с применением формулы Н-Л в области $\mathbb{C}$ с разрезом $\{a + t \mid t \in (-\infty, 0]\}$ для функции $(z - a)^{-1}$ с п/о $\ln(z - a)$, пути $\gamma_\varepsilon = \gamma|_{[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]}$ (случай $\alpha = -\pi$), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z - z_0} = \ln(r(\pi - \varepsilon)e^{i(\pi-\varepsilon)}) - \ln(r(-\pi + \varepsilon)e^{i(-\pi+\varepsilon)}) = \ln\frac{r(\pi - \varepsilon)}{r(-\pi + \varepsilon)} + i(2\pi - 2\varepsilon)$$

и последующим устремлением ε к нулю. □

9. Доказательство ИТК для простых областей. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Формула Коши для производных. Теорема Морера.

9.1. Доказательство ИТК для простых областей.

Предложение 9.1. *Утверждение ИТК верно для простейших областей.*

Доказательство. Пусть в условиях теоремы 8.4 и определения 8.5 $D = G$ – простейшая область. При $n \in \mathbb{N}$ пусть G_n – область, гомотетичная области G относительно точки a с коэффициентом $(n+1)/n$, и пусть

$$f_n(z) = f\left(a + \frac{n(z-a)}{n+1}\right)$$

(см. рис. 8.1).

Очевидно, что G_n односвязна и f_n удовлетворяет в G_n условию треугольника (по определению, сравнить соответствующие интегральные суммы). Так как $\overline{G} \subset G_n$, по теореме Коши для односвязной области G_n, функции f_n и замкнутой кривой $\partial^+ G$ имеем:

$$\int_{\partial^+ G} f_n(z)\, dz = 0\,.$$

Теперь, поскольку

$$\Big| \int_{\partial^+ G} f_n(z)\, dz - \int_{\partial^+ G} f(z)\, dz \Big| \le ||f_n - f||_{\partial G}\, l(\partial G)\,,$$

остается установить, что $f_n \rightrightarrows f$ на ∂G при $n \to +\infty$. В самом деле, при любом $z \in \partial G$ имеем:

$$\left| z - \left(a + \frac{n(z-a)}{n+1}\right)\right| = \frac{|z-a|}{n+1} \le \frac{\operatorname{diam}(G)}{n+1}\,,$$

откуда

$$|f(z) - f_n(z)| = |f(z) - f\left(a + \frac{n(z-a)}{n+1}\right)| \le \omega_{\overline{G}}\left(f\,, \frac{\operatorname{diam}(G)}{n+1}\right) \to 0$$

при $n \to +\infty$. □

Определение 9.1. Область D в $\mathbb{C}$ называется *простой*, если

(1) она является допустимой и все D_s из определения 8.3 для D являются простейшими областями;

(2) существует конечное число простейших областей $G'_1, \ldots, G'_N$ со следующими свойствами:

(a) все $G'_n \subset D$ и различные G'_n попарно не пересекаются (см. рис. 9.1);

(b) для всякой функции $f \in C(\overline{D})$ имеем:

$$\int\limits_{\partial^+ D} f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\partial^+ G'_n} f(z)\, dz\,.$$

Упражнение 9.1. Всякое открытое (концентрическое) кольцо $V(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C}\,|\, r < |z-a| < R\}$ $(0 < r < R < +\infty)$ является простой областью.

Следствие 9.1. *ИТК справедлива для любой простой области.*

Упражнение 9.2. В условиях определения 9.1 всегда $\overline{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{N} \overline{G}'_n$. Кроме того, D всегда связно (без дополнительного требования в определении 8.3).

Упражнение 9.3. Найти простейшую область G с "центром" $a = 0$ такую, что при всех достаточно малых $r > 0$ область $G \setminus \overline{B(a,r)}$ не является простой.

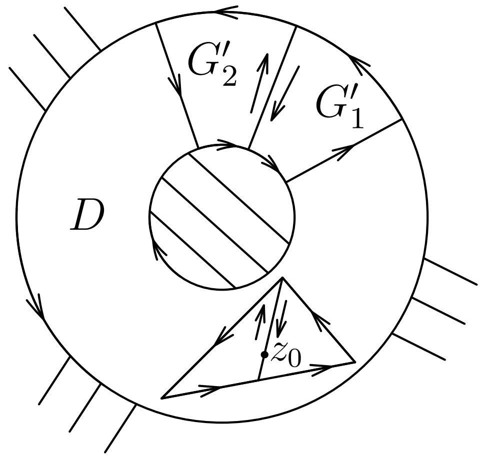

Рис. 9.1.

9.2. Интегральная формула Коши (ИФК).

Теорема 9.1. *(ИФК). Пусть D – допустимая область, $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда для любого $z_0 \in D$ справедлива формула:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ D} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}\,.$$

Доказательство. (*Для простых областей*). Фиксируем $z_0 \in D$ и пусть

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \in \overline{D} \setminus \{z_0\}\,, \\ f'(z_0), & z = z_0\,. \end{cases}$$

Тогда $g \in C(\overline{D})$ и g удовлетворяет в D условию треугольника (при $z_0 \in \Delta$ рассматриваемый треугольник Δ разбивается на два треугольника, к каждому из которых применяется предложение 9.1; см. рис. 9.1).

По ИТК в D имеем:

$$\int\limits_{\partial^+ D} g(z)\,dz = 0\,,$$

откуда

$$\int\limits_{\partial^+ D} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = f(z_0) \int\limits_{\partial^+ D} \frac{dz}{z - z_0}\,.$$

Остается доказать, что

$$h(z_0) = \int\limits_{\partial^+ D} \frac{dz}{z - z_0} \equiv 2\pi i\,,\ z_0 \in D\,.$$

Пусть D – простая область с обозначениями определения 9.1. Поскольку функция $h(z)$ непрерывна в D, достаточно (пользуясь определением 9.1 и упражнением 9.2) установить последнее равенство для $z_0 \in G_n'$ при любом фиксированном n, а это вытекает из предложения 8.1 (свойств (3) и (4)). □

Нам потребуются определение и свойства интеграла (1 рода) $\int_\gamma f(z)|dz|$.

Определение 9.2. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – путь, $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ – некоторая функция, $T = \{\alpha = t_0, \ldots, t_N = \beta\}$ – разбиение $[\alpha, \beta]$. Пусть $\tau = \{\,\tau_1, \ldots, \tau_N\}$ – *выборка, подчиненная разбиению* T, т.е. $\tau_n \in [t_{n-1}, t_n]$ для каждого $n \in \{1, \ldots, N\}$. Определим *интегральную сумму*:

$$\Sigma_\gamma^+(T, \tau, f) = \sum_{n=1}^{N} f\big(\gamma(\tau_n)\big)|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})|\,.$$

Если существует конечный предел

$$I^+ = \lim_{\lambda(T)\to 0} \Sigma^+_\gamma(T,\tau,f)$$

(т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения T с условием $\lambda(T) < \delta$ и для всякой выборки τ, подчиненной T, имеем $\left|I^+ - \Sigma^+_\gamma(T,\tau,f)\right| < \varepsilon$), то он называется *интегралом 1 рода от функции* f по (длине пути) γ и обозначается

$$\int\limits_\gamma f(z)\,|dz|\,.$$

Следующие свойства этого интеграла доказываются почти также, как аналогичные (доказанные выше) свойства интеграла $\int_\gamma f(z)\,dz$.

Предложение 9.2. *В условиях предыдущего определения:*
(1) если путь γ спрямляем и $f \in C([\gamma])$, то $\int_\gamma f(z)|dz|$ существует и

$$\Big|\int_\gamma f(z)|dz|\Big| \le ||f||_{[\gamma]} l(\gamma)\,;$$

(2) если путь γ – непрерывно дифференцируемый и $f \in C([\gamma])$, то

$$\int\limits_\gamma f(z)\,|dz| = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\gamma(t)\big)|\dot\gamma(t)|\,dt.$$

Важно еще отметить, что в указанных обозначениях всегда $\int_{\gamma^-} f(z)|dz| = \int_\gamma f(z)|dz|$ (оба интеграла существуют или нет одновременно) и, следовательно, корректно определен $\int_{\partial D} f(z)|dz|$ для любой допустимой области D.

Теорема 9.2. *(О среднем). Пусть $R \in (0,+\infty)$ и $f \in \mathcal{A}(B(z_0,R)) \cap C(\overline{B(z_0,R)})$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{it})dt = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(z_0,R)} f(z)\,|dz|\,. \tag{9.1}$$

Доказательство. По ИФК:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^+ B(z_0,R)} \frac{f(z)dz}{z-z_0}\,.$$

Остается вычислить последний интеграл (и последний интеграл в формуле 9.1) с помощью стандартной параметризации $\{z = z_0 + Re^{it}\,|\,t \in [-\pi,\pi]\}$. □

Теорема 9.3. *(Основная теорема алгебры). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ – произвольный многочлен степени n комплексного переменного z ($a_n \ne 0$). Тогда p имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.*

Доказательство. Пусть, от противного, $p(z) \ne 0$ при всех z. Тогда $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ – целая функция. Поскольку $|p(z)| \to +\infty$ при $z \to \infty$, мы получаем, что $|f(z)| \to 0$ при $z \to \infty$. Применяя теорему о среднем для f в кругах $B(0,R)$ и стандартную оценку интеграла, получаем, что

$$|f(0)| = \lim_{R\to+\infty}\Big|\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)} f(z)\,|dz|\Big| \le \lim_{R\to+\infty} ||f||_{\partial B(0,R)} = 0\,.$$

Противоречие. □

Теорема 9.4. *(Принцип максимума модуля). Пусть D – произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}$. Если $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, то для любого $z_0 \in D$ имеем*

$$|f(z_0)| \le \max_{z\in\partial D}|f(z)| = ||f||_{\partial D}. \tag{9.2}$$

При этом, если для некоторого $z_0 \in D$ неравенство (9.2) *обращается в равенство, то f постоянна в D.*

Доказательство. Напомним, что максимум модуля всякой непрерывной на компакте функции достигается. Нам достаточно доказать, что если найдется $z_0 \in D$ с условием $|f(z_0)| \geq ||f||_{\partial D}$, то f – постоянна. Пусть такое z_0 существует. Без ограничения общности мы можем предположить, что $M = |f(z_0)| = ||f||_{\overline{D}}$. Положим $E = \{z \in D \,\big|\, |f(z)| = M\}$. Ясно, что $E \neq \varnothing$ и E замкнуто в D (последнее вытекает из непрерывности f). Открытость E следует из теоремы о среднем (провести доказательство!). Из связности D получаем, что $E = D$. Итак, $|f(z)| \equiv M$ на $\overline{D}$. Остается доказать, что $f'(z) = 0$ всюду в D. Если, от противного, существует $z_1 \in D$ с условием $f'(z_1) \neq 0$, то из определения $\mathbb{C}$-дифференцируемости получаем, что $f(z) = f(z_1) + f'(z_1)(z - z_1) + o(z - z_1)$, $z - z_1 \to 0$, так что $|f(z)|$ не может быть постоянным ни в какой окрестности точки z_1. Противоречие. $\square$

9.3. ИФК для производных. Интеграл типа Коши. Теорема Морера.

Теорема 9.5. *(ИФК для производных). Пусть D – допустимая область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда при каждом $k \in \mathbb{N}$ функция $f^{(k)} \in \mathcal{A}(D)$, причем для любого $z_0 \in D$ справедлива формула:*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ D} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{k+1}} .$$

Эта теорема сразу вытекает из ИФК и следующего утверждения, имеющего и другие важные следствия (например, в частном случае $k = 1$ и $f(z) \equiv 1$ оно уже использовалось в доказательстве предложения 8.1).

Предложение 9.3. *Пусть Γ – спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, $f \in C([\Gamma])$. При фиксированном $k \in \mathbb{N}$ определим функцию*

$$F_k(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^k} , \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma] .$$

Тогда F_k голоморфна вне $[\Gamma]$ и верна формула: $F_k'(z) = kF_{k+1}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$.

Замечание. Функция $F_k(z)$ в этом предложении называется *интегралом типа Коши* порядка k от функции f по кривой Γ.

Доказательство. Фиксируем $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ и положим $d = \mathrm{d}(z_0, [\Gamma])$. Пусть всюду далее $\Delta z \in B(0, d/2)$, $\Delta z \neq 0$. Имеем:

$$\frac{F_k(z_0 + \Delta z) - F_k(z_0)}{\Delta z} = \int_\Gamma f(z) g_{\Delta z}(z)\,dz ,$$

где

$$g_{\Delta z}(z) = \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)^k} - \frac{1}{(z - z_0)^k} \right) .$$

Докажем, что $g_{\Delta z} \rightrightarrows k(z - z_0)^{-k-1}$ на $[\Gamma]$ при $\Delta z \to 0$. Для этого сначала напомним, что (по элементарной формуле $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + b^{k-1})$)

$$g_{\Delta z}(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(z - z_0)^j (z - z_0 - \Delta z)^{k+1-j}} ,$$

причем при $z \in [\Gamma]$ и $|\Delta z| < d/2$ имеем:

$$\Big| \frac{1}{(z - z_0)^j (z - z_0 - \Delta z)^{k+1-j}} - \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \Big| \leq \frac{1}{d^j} \Big| \frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)^{k+1-j}} - \frac{1}{(z - z_0)^{k+1-j}} \Big|$$

$$\leq \frac{|\Delta z|}{d^j} \Big| \sum_{l=1}^{k+1-j} \frac{1}{(z - z_0)^l (z - z_0 - \Delta z)^{k+2-j-l}} \Big| \leq \frac{2^{k+1-j}(k + 1 - j)|\Delta z|}{d^{k+2}} \to 0$$

при $\Delta z \to 0$. Остается воспользоваться оценкой (6.1) для функции $f(z) g_{\Delta z}(z) - kf(z)/(z - z_0)^{k+1}$ вместо $f(z)$. $\square$

Следствие 9.5.1. *Если f имеет в D (комплексную) п/о, то $f \in \mathcal{A}(D)$.*

Теорема 9.6. *(Морера). Пусть* D *– произвольная область в* $\mathbb{C}$ *и* f *удовлетворяет в* D *условию* Δ*. Тогда* $f \in \mathcal{A}(D)$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 8.2 о первообразной в односвязной области (для кругов из D) и следствием 9.5.1. □

Упражнение 9.4. Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$, функция f голоморфна в D (в частности, f удовлетворяет условию треугольника в D), и пусть f не обращается в ноль всюду в D. Тогда существует голоморфная ветвь $g(z)$ многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$ в D (т.е. существует $g \in \mathcal{A}(D)$ с условиями $g(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ для всех $z \in D$, или же $f(z) = \exp(g(z))$).

Следствие 9.6.1. *Пусть* $n \in \{2, 3, \dots\}$*. В условиях предыдущего упражнения функция* $h_n(z) = \exp(g(z)/n)$ *является голоморфной ветвью многозначной функции* $\sqrt[n]{f(z)}$ *в* D *(т.е.* $h_n \in \mathcal{A}(D)$*, причем* $h_n(z) \in \sqrt[n]{f(z)}$ *для всех* $z \in D$*, т.е.* $f(z) = (h_n(z))^n$*).*

10. Теорема Вейерштрасса. Степенные ряды. Теорема Коши – Тейлора и её следствия.

10.1. Теорема Вейерштрасса.

Определение 10.1. Пусть D – область в $\mathbb{C}$. Последовательность $\{f_n\} = \{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ функций $f_n : D \to \mathbb{C}$ сходится *равномерно внутри* D к функции f при $n \to +\infty$ (коротко: $f_n \rightrightarrows f$ вн. D при $n \to +\infty$), если эта последовательность сходится к f равномерно на всяком компакте K из D (т.е. $\|f - f_n\|_K \to 0$ при $n \to +\infty$).

Пример 10.1. Последовательность функций $z^n \rightrightarrows 0$ *внутри* B_1, но не сходится равномерно *на* B_1 при $n \to +\infty$.

Определение 10.2. Пусть D – область в $\mathbb{C}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ функций $f_n : D \to \mathbb{C}$ сходится *равномерно внутри* D к своей сумме S, если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ частичных сумм этого ряда сходится к S равномерно внутри D при $n \to +\infty$.

Теорема 10.1. *(Вейерштрасса). Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ функций из $\mathcal{A}(D)$ равномерно внутри D сходится к функции f при $n \to +\infty$. Тогда $f \in \mathcal{A}(D)$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к $f^{(k)}$ равномерно внутри D при $n \to +\infty$.*

Доказательство. Свойство $f \in \mathcal{A}(D)$ следует из леммы Гурса, свойства сохранения условия Δ при равномерной сходимости внутри D и теоремы 9.6 (Морера). Из соображений индукции и компактности нам достаточно установить, что $\|f_n' - f'\|_K \to 0$ при $n \to +\infty$, где K – произвольный *замкнутый круг* в D. Пусть $K = \overline{B(a,r)}$ и $d > 0$ таково, что $\overline{B(a, r+d)} \subset D$. Положим $\Gamma^+ = \partial^+ B(a, r+d)$ $(\Gamma = \partial B(a, r+d)$ – компакт в $D)$ и воспользуемся теоремой 9.5 для f_n и f в области $B(a, r+d)$ при $k = 1$. Если $z_0 \in K$, то

$$|f_n'(z_0) - f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f_n - f\|_\Gamma \cdot d^{-2} \cdot 2\pi(r+d) \;\to\; 0$$

при $n \to +\infty$, поскольку $f_n \rightrightarrows f$ на Γ. □

10.2. Степенные ряды. Лемма Абеля. Формула Коши – Адамара.

Определение 10.3. *Степенным рядом* называется функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots \qquad (10.1)$$

Постоянные $c_n \in \mathbb{C}$ называются *коэффициентами*, а точка $z_0 \in \mathbb{C}$ – *центром* степенного ряда (10.1). Для всякого $N \in \mathbb{N}$ полином

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n (z - z_0)^n$$

называется *частичной суммой порядка* N ряда (10.1).

Множество точек сходимости ряда (10.1) обозначим через E; $z_0 \in E \neq \varnothing$.

Лемма 10.1. *(Абеля). Если ряд* (10.1) *сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится равномерно внутри круга $B(z_0, |z_1 - z_0|)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что имеет место равномерная сходимость на любом замкнутом круге $\overline{B(z_0, r)}$, где $r < |z_1 - z_0|$.

Положим $q = r/|z_1 - z_0|$. Поскольку $q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ сходится. Напомним, что необходимым условием сходимости (числового) ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$$

является условие $c_n(z_1 - z_0)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, из которого для всех n следует оценка $\left|c_n(z_1 - z_0)^n\right| < M$ при некотором $M > 0$.

Покажем, что сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} Mq^n$ является равномерной мажорантой для ряда (10.1) при $z \in \overline{B(z_0, r)}$:

$$|c_n(z - z_0)^n| = |c_n(z_1 - z_0)^n| \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n \leqslant Mq^n .$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд (10.1) сходится равномерно на $B(z_0, r)$, что и требовалось. □

Следствие 10.1.1. *Если ряд* (10.1) *расходится в некоторой точке $z_2 \neq z_0$, то он расходится всюду вне замкнутого круга* $\overline{B(z_0, |z_2 - z_0|)}$.

Следствие 10.1.2. *Для любого ряда вида* (10.1) *определено число $R \in [0, +\infty]$ и (при $R > 0$) круг $B = B(z_0, R)$ со следующим свойством: ряд* (10.1) *сходится равномерно внутри B и расходится вне $\overline{B}$.*

Определение 10.4. Число R называется *радиусом сходимости*, а круг $B = B(z_0, R) = E^\circ$ – *областью (кругом) сходимости* ряда (10.1).

Следствие 10.1.3. *Пусть $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ – сумма ряда* (10.1) *и $R > 0$. Тогда функция $S(z)$ голоморфна в круге сходимости $B(z_0, R)$.*

Доказательство. Пользуясь леммой Абеля, применяем теорему Вейерштрасса к последовательности $\{S_N\}$ частичных сумм ряда (10.1). □

Упражнение 10.1. Доказать *формулу Коши – Адамара* для радиуса сходимости ряда (10.1):

$$R = \frac{1}{l}, \text{ где } l = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, +\infty].$$

По ряду (10.1) определим еще один степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(n+1)(z - z_0)^n.$$

Он называется *почленно продифференцированным рядом* для ряда (10.1).

Обозначим его радиус сходимости через R'.

Теорема 10.2. *Пусть $R > 0$ – радиус сходимости ряда* (10.1)*, $S(z)$ – его сумма. Тогда $R' = R$ и для всех $z \in B = B(z_0, R)$ выполнено равенство*

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(n+1)(z - z_0)^n. \tag{10.2}$$

Доказательство. Равенство (10.2) для $z \in B$ следует из теоремы Вейерштрасса, примененной к последовательности $\{S_N\}$ частичных сумм. Отсюда же следует оценка $R' \geqslant R$. Равенство $R = R'$ можно получить из формулы Коши – Адамара. □

Следствие 10.2.1. *Ряд* (10.1) *можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.*

Рассмотрим теперь *почленно проинтегрированный ряд* для ряда (10.1):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(z-z_0)^n. \tag{10.3}$$

Обозначим через $R_\int$ его радиус сходимости. Следующее утверждение легко вытекает из теоремы 10.2 и доказанной ранее теоремы Ньютона – Лейбница.

Следствие 10.2.2. *Пусть $R > 0$ – радиус сходимости ряда* (10.1). *Тогда $R_\int = R$ и для всех $z \in B = B(z_0, R)$ выполняется равенство*

$$\int\limits_{\Gamma_{z_0 z}} S(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(z-z_0)^n\,,$$

где последний интеграл (первообразная функции $S(z)$) берется по любой спрямляемой кривой $\Gamma_{z_0 z}$ в B с началом z_0 и концом z.

10.3. Теорема Коши – Тейлора (ТКТ) и ее следствия.

Теорема 10.3. *(ТКТ, о разложении в ряд Тейлора). Пусть $r \in (0, +\infty]$, $B = B(z_0, r)$, и пусть $f \in \mathcal{A}(B)$. Тогда при всех $z \in B$ выполняется равенство*

$$f(z) = T^f_{z_0}(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\,, \tag{10.4}$$

где последний ряд называется рядом Тейлора функции f с центром в точке z_0. В частности, для радиуса сходимости R_T ряда $T^f_{z_0}$ справедлива оценка $R_T \geqslant r$.

Доказательство. Установим равенство (10.4) в произвольной точке $z \in B$. Положим $\delta = |z - z_0| < r$ и зафиксируем $\rho \in (\delta, r)$.
Воспользуемся интегральной формулой Коши в круге $B_\rho = B(z_0, \rho)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Заметим, что для каждого $\zeta \in \partial B_\rho$ верно $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| = q$, где $q = \dfrac{\delta}{\rho} < 1$, поэтому

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,.$$

Последний ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{\zeta \in \partial B_\rho\}$, поскольку он мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\rho} \cdot \left(\dfrac{\delta}{\rho}\right)^k$.
Нам понадобится следующее простое утверждение.

Упражнение 10.2. Пусть Γ – спрямляемая кривая, $\{F_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – последовательность функций, непрерывных на $[\Gamma]$, с условием $F_n \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} F$ на $[\Gamma]$, и пусть $g \in C([\Gamma])$. Тогда

$$\int\limits_\Gamma g(\zeta) F_n(\zeta)\, d\zeta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int\limits_\Gamma g(\zeta) F(\zeta)\, d\zeta\,. \tag{10.5}$$

Воспользуемся этим утверждением при $\Gamma = \partial^+ B_\rho$, $F_n(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ и $g(\zeta) = f(\zeta)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B_\rho} f(\zeta) \sum_{k=0}^{n} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta \overset{(10.5)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (z-z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k,$$

где в последнем равенстве мы воспользовались ИФК для производных.

□

Следствие 10.3.1. *(Единственность разложения в степенной ряд). Пусть $r > 0$, $B = B(z_0, r)$ и для всех $z \in B$ справедливо равенство $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$. Тогда $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.*

Доказательство. Заметим, что указанный здесь ряд автоматически имеет радиус сходимости не менее r. Остается воспользоваться теоремой 10.2 о почленном дифференцировании степенного ряда. □

Следствие 10.3.2. *(Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора). В условиях теоремы 10.3, при $\rho \in (0, r)$ положим $M_\rho = \max\limits_{\zeta \in \partial B_\rho} |f(\zeta)|$. Тогда для коэффициентов Тейлора $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ справедлива оценка:*

$$|c_n| \leqslant \frac{M_\rho}{\rho^n}\,. \tag{10.6}$$

Доказательство. Нужная оценка следует из ИФК для производных:

$$|c_n| = \Bigl|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\Bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_\rho}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

□

Теорема 10.4. *(Теорема Лиувилля). Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ – целая функция, и пусть найдется $p \in [0, +\infty)$ с условием $f(z) = O(|z|^p)$ при $|z| \to +\infty$. Тогда f является многочленом степени не выше $[p]$.*

В частности, если целая функция f ограничена, то $f \equiv const$.

Доказательство. Поскольку $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, по теореме 10.3 всюду в $\mathbb{C}$ функция f представляется своим рядом Тейлора с центром в нуле, т.е. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Положим $M_\rho = \max\limits_{|\zeta|=\rho} \bigl|f(\zeta)\bigr|$. По условию, найдется константа $C > 0$ такая, что $M_\rho \leqslant C(\rho^p + 1)$.

По предыдущему следствию имеем оценку: $|c_n| \leqslant \dfrac{C(\rho^p+1)}{\rho^n}$, справедливую для всех $\rho > 0$. Если в этой оценке фиксировать любое $n > p$ и устремить ρ к бесконечности, то получим $c_n = 0$, что и требовалось доказать. □

10.4. Табличные разложения в ряд Тейлора ($z_0 = 0$). .

Из теоремы 10.3, формулы Коши – Адамара и следствия 10.2.2 (для доказательства (7)) вытекают следующие (табличные) разложения в ряд Тейлора:

$$(1) \quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\,,\ |z| < +\infty\,;$$

$$(2) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}\,,\ |z| < +\infty\,;$$

$$(3) \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}\,,\ |z| < +\infty\,;$$

$$(4) \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n\,,\ |z| < 1\,;$$

$$(5) \quad \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}\,,\ |z| < 1\,;$$

$$(6)\ (1+z)^p_{(o)} = 1 + pz + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} z^n + \ldots,\ |z| < 1\,,\ p \notin \{0,1,2,\ldots\}\,;$$

$$(7) \quad \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{2m+1}\,,\ |z| < 1\,.$$

11. Теорема о нулях и теорема единственности для ГФ. Пространства Бергмана $\mathcal{A}^p(D)$ и пространство $\mathcal{A}(D)$. Обобщенные степенные ряды. Теорема Лорана. Связь рядов Лорана и Фурье.

11.1. Теорема о нулях и теорема единственности для ГФ.

Определение 11.1. Пусть даны точка $a \in \mathbb{C}$ и функция $f \in \mathcal{A}(a)$. Если $f(a) = 0$, то точка a называется *нулем голоморфной функции* f.

Если $\exists\, p \in \mathbb{N}$ с условием $0 = f(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) \neq f^{(p)}(a)$, то говорят, что a – *нуль порядка* p *для функции* f.

При $p = 1$ точка a называется *простым нулем функции* f.

Если $f(a) \neq 0$, то (для общности) точка a называется *нулем функции* f *порядка* 0.

Если не оговорено противного, порядок нуля далее считается натуральным.

Определение 11.2. Пусть $a \in \mathbb{C}$ – нуль функции f. Говорят, что он *изолированный*, если $\exists\, \delta > 0$ такое, что $f(z) \neq 0$ в $B'(a,\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\}$.

Теорема 11.1. *(О нулях ГФ). Пусть a – нуль голоморфной функции f. Следующие условия эквивалентны:*

1. *a – изолированный нуль функции f ;*
2. *a имеет некоторый конечный порядок $p \in \mathbb{N}$;*
3. *$\exists\, g \in \mathcal{A}(a)$ с условиями $g(a) \neq 0$ и в некоторой окрестности точки a имеет место равенство $f(z) = (z-a)^p g(z)$.*

Доказательство. По условию, $f \in \mathcal{A}(a)$, т.е. существуют $\delta > 0$ и круг $B = B(a,\delta)$ такой, что $f \in \mathcal{A}(B)$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2) от противного. Если a – нуль бесконечного порядка, то $f^{(n)}(a) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому $T_a^f \equiv 0$. Но $f(z) = T_a^f(z)$ в B, следовательно, $f \equiv 0$ в B и точка a не является изолированным нулем. Противоречие.

Установим (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $p \in \mathbb{N}$ – порядок нуля a для ГФ f. Тогда $f(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0$, но $f^{(p)}(a) \neq 0$. Следовательно, для коэффициентов $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ ряда T_a^f верно $c_0 = \dots = c_{p-1} = 0$, но $c_p \neq 0$. В круге B справедливо равенство

$$f(z) = T_a^f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n = c_p(z-a)^p + c_{p+1}(z-a)^{p+1} + \dots =$$
$$= (z-a)^p(c_p + c_{p+1}(z-a) + \dots) = (z-a)^p g(z),$$

где функция $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_{p+n}(z-a)^n$ голоморфна в круге B и $g(a) = c_p \neq 0$.

Осталось доказать (3) $\Rightarrow$ (1). Поскольку $g \in \mathcal{A}(B)$ и $g(a) \neq 0$, функция $g(z) \neq 0$ в некотором (возможно, меньшем, чем B) круге $B_1 = B(a,\delta_1)$, $\delta_1 > 0$. Функция $(z-a)^p$ не обращается в ноль в проколотой окрестности точки a. Следовательно, $f(z) = (z-a)^p g(z) \neq 0$ в B_1', т.е. a – изолированный нуль функции f. □

Теорема 11.2. *(Единственности). Пусть D – область в $\mathbb{C}$ и функция $f \in \mathcal{A}(D)$. Пусть $Z_f = \{\, z \in D \,|\, f(z) = 0 \,\}$ – множество нулей f в D. Если Z_f имеет в D хотя бы одну предельную точку, то $Z_f = D$, т.е. $f \equiv 0$ в D.*

Доказательство. Пусть $a \in D$ – предельная точка Z_f. В силу непрерывности функции f, $a \in Z_f$. Следовательно, a – неизолированный нуль ГФ f. Обозначим через $\widetilde{Z}_f$ множество всех неизолированных нулей функции f в D, $\widetilde{Z}_f \subseteq Z_f \subseteq D$. Мы установили, что $\widetilde{Z}_f \neq \varnothing$. Докажем, что $\widetilde{Z}_f$ одновременно открыто и замкнуто в D. Тогда в силу связности D будем иметь $\widetilde{Z}_f = D$, откуда следует утверждение теоремы.

Пусть $z_0 \in \widetilde{Z}_f$. Тогда по теореме 11.1 точка z_0 – нуль бесконечного порядка для f. Следовательно, $f(z) = T_{z_0}^f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности $U(z_0) \subseteq D$ точки z_0. Ясно, что $U(z_0) \subseteq \widetilde{Z}_f$, т.е. любая точка входит в $\widetilde{Z}_f$ вместе с некоторой окрестностью. Замкнутость множества $\widetilde{Z}_f$ в D следует из непрерывности f. □

Пример 11.1. Отметим, что прямого аналога теоремы 11.2 для функций действительного переменного нет даже в классе $C^\infty(\mathbb{R})$. В качестве примера можно взять функцию

$$f(x) = e^{-1/x^2}\sin(1/x), \quad x \neq 0,$$

$f(0) = 0$. Здесь точка $x = 0$ – не изолированный нуль для f.

11.2. Теорема об особой точке на границе круга сходимости степенного ряда. Рассмотрим степенной ряд с центром в точке z_0:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\,. \tag{11.1}$$

Пусть радиус сходимости этого ряда равен $R \in (0, +\infty)$, $B = B(z_0, R)$ – соответствующий круг сходимости, и $S \in \mathcal{A}(B)$ – его сумма.

Определение 11.3. Назовем точку $a \in \partial B$ *неособой для* S, если $\exists\,\delta_a > 0$ и функция $f_a \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta_a)\big)$ такая, что $f_a(z) = S(z)$ для всех $z \in B \cap B(a,\delta_a)$.

В противном случае точка $a \in \partial B$ называется *особой* для S.

Теорема 11.3. *В этих условиях на ∂B существует хотя бы одна особая точка для S.*

Доказательство. Предположим противное – все точки ∂B неособые. Покроем каждую точку a компакта ∂B кругом $B_a = B(a, \delta_a)$ из определения неособой точки и выберем конечное подпокрытие: $\partial B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} B_{a_n}$.

Пусть $B_{a_n} \cap B_{a_m} \neq \varnothing$. Тогда из определения B_a и f_a следует, что $f_{a_n} \equiv f_{a_m} \equiv S$ на множестве $B_{a_n} \cap B_{a_m} \cap B$. Но тогда из теоремы 11.2 следует, что $f_{a_n} \equiv f_{a_m}$ всюду на $B_{a_n} \cap B_{a_m}$.

Это рассуждение показывает, что функцию S можно продолжить до голоморфной в области $D = B \cup \big(\bigcup\limits_{n=1}^{N} B_{a_n}\big)$ функции $\widetilde{S}$. По построению, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B(z_0, R+\varepsilon) \subset D$. Но тогда, разлагая функцию $\widetilde{S}$ в ряд Тейлора с центром z_0 и пользуясь его единственностью, мы получаем, что радиус сходимости ряда (11.1) не меньше, чем $R + \varepsilon$. Противоречие. $\square$

11.3. Пространства Бергмана $\mathcal{A}^p(D)$ и пространство $\mathcal{A}(D)$.

Определение 11.4. Для произвольной области D в $\mathbb{C}$ и $p \in [1, +\infty]$ определим следующие p-пространства *Бергмана* голоморфных функций в D:

(1) при $p = +\infty$ полагаем $\mathcal{A}^\infty(D) = \mathcal{A}(D) \cap L^\infty(D)$ с нормой

$$||f||_{\infty,D} = \sup_{z\in D}|f(z)|\,;$$

эти пространства являются банаховыми по теореме Вейерштрасса;

(2) при $p \in [1, +\infty)$ определим $\mathcal{A}^p(D) = \mathcal{A}(D) \cap L^p(D)$ с нормой

$$||f||_{p,D} = \Big(\int\!\!\int_D |f(z)|^p\,dxdy\Big)^{1/p};$$

эти пространства являются банаховыми по теореме Вейерштрасса с дополнительным применением теоремы о среднем по кругам и неравенства Гельдера (проверить); пространства $\mathcal{A}^2(D)$ являются гильбертовыми с эрмитовым произведением

$$(f,g) = \int\!\!\int_D f(z)\overline{g(z)}\,dxdy\,.$$

Определение 11.5. Для произвольной области D в $\mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, при $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$K_n = \{z \in D \,|\, |z| \le n\,,\ \mathrm{d}(z, \partial D) \ge 1/n\}$$

и n_1 – первый номер n, для которого $K_n \neq \emptyset$. Тогда $\{K_n\}_{n=n_1}^{+\infty}$ называется *стандартным исчерпанием* области D (указанной возрастающей последовательностью компактов). При $D = \mathbb{C}$ полагаем $K_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \le n\}$.

В пространстве $\mathcal{A}(D)$ введем следующую (бинарную) величину:

$$\rho_{\mathcal{A}}(f,g)=\sum_{n=n_1}^{+\infty} 2^{-n}\frac{||f-g||_{K_n}}{1+||f-g||_{K_n}}\,.$$

Упражнение 11.1. (а) пользуясь возрастанием функции $\varphi(t)=t/(1+t)$ на $[0,+\infty)$ и её свойством $\varphi(t_1+t_2)\le\varphi(t_1)+\varphi(t_2)$ при $t_1\ge 0$ и $t_2\ge 0$, доказать, что $\rho_{\mathcal{A}}(f,g)$ является метрикой;

(б) установить, что сходимость последовательностей в этой метрике эквивалентна равномерной сходимости внутри D, откуда сразу вытекает *полнота* метрики $\rho_{\mathcal{A}}(f,g)$;

(в)* доказать, что эта метрика ненормируема (теорема П.С. Урысона).

11.4. Обобщенные степенные ряды. Теорема Лорана.

Определение 11.6. *Обобщенным степенным рядом* называется (формальный) ряд вида

$$\underset{(*)}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n=\underset{(a)}{\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}+\underset{(b)}{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n}. \tag{11.2}$$

Как и в случае степенных рядов, точка $z_0\in\mathbb{C}$ называется *центром*, а постоянные $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – *коэффициентами* обобщенного степенного ряда (11.2).

Говорят, что ряд (11.2) *сходится в точке* $z_1\in\mathbb{C}$, если в этой точке одновременно сходятся ряды (a) и (b).

Для ряда (b) пусть $R_2\in[0,+\infty]$ – его радиус сходимости, т.е. ряд (b) сходится абсолютно и равномерно внутри $B_2=B(z_0,R_2)$ и расходится в $\mathbb{C}\setminus\overline{B_2}$.

Сопоставив с помощью замены $w=1/(z-z_0)$ ряду (a) степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}w^n$, легко показать, что существует $R_1\in[0,+\infty]$ такое, что ряд (a) расходится в $B_1=B(z_0,R_1)$ и сходится абсолютно и равномерно внутри $\mathbb{C}\setminus\overline{B_1}$.

Упражнение 11.2. По формуле Коши – Адамара найти R_1 и R_2 через $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Определение 11.7. При $R_1<R_2$ множество $V_*=\left\{\,z\in\mathbb{C}\,\middle|\,R_1<|z-z_0|<R_2\,\right\}$ называется *кольцом сходимости ряда* (11.2). По доказанному, ряд (11.2) сходится *абсолютно и равномерно внутри* V_*. (При $R_1\geqslant R_2$ имеем $V_*=\varnothing$.)

Теорема 11.4. *(Лорана). Пусть* $V=\left\{\,z\in\mathbb{C}\,\middle|\,r<|z-z_0|<R\,\right\}$ *– кольцо с центром* $z_0\in\mathbb{C}$ $(0\leqslant r<R\leqslant+\infty)$ *и функция* $f\in\mathcal{A}(V)$.

Тогда всюду в V *функция* f *разлагается в обобщенный степенной ряд*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{11.3}$$

с коэффициентами c_n, $n\in\mathbb{Z}$, *однозначно определяющимися по формулам:*

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^+B(z_0,\rho)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,, \tag{11.4}$$

где $\rho\in(r,R)$ *– произвольно фиксированное.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $z\in V$ и выберем r_0 и R_0 с условиями $r<r_0<|z-z_0|<R_0<R$. Обозначим $\Gamma_0^+=\partial^+B(z_0,R_0)$ и $\gamma_0^+=\partial^+B(z_0,r_0)$. В кольце $V_0=\left\{\,\zeta\in\mathbb{C}\,\middle|\,r_0<|\zeta-z_0|<R_0\,\right\}$ воспользуемся интегральной формулой Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0^+}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0^+}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=F_0(z)+f_0(z),$$

где

$$F_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0^+}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\quad,\quad f_0(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0^+}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\,.$$

Представление для F_0 получается как в доказательстве теоремы Коши – Тейлора:

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \ , \ \ c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \ , \ \ n \in \{0, 1, \dots\}\,. \tag{11.5}$$

Рассмотрим подробнее $f_0(z)$. В силу выбора r_0, для точек $\zeta \in [\gamma_0]$ выполнено неравенство $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$, поэтому

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,,$$

причем последний ряд сходится абсолютно и равномерно (по ζ) на $[\gamma_0]$. Сделав замену $m = -n-1$, можно записать предыдущую цепочку равенств в виде

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}}.$$

Повторяя обоснование смены порядка суммирования и интегрирования в доказательстве теоремы Коши – Тейлора, получаем равенство:

$$f_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m (z-z_0)^m \ , \ \ c_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \ , \ \ m \in \{-1, -2, \dots\}\,. \tag{11.6}$$

Теперь важно отметить, что при каждом фиксированном n интегралы в (11.4) для всех $\rho \in (r, R)$ совпадают: достаточно при любых $\rho_1 < \rho_2$ из (r, R) применить интегральную теорему Коши для кольца $\{\rho_1 < |\zeta - z_0| < \rho_2\}$ и функции $f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{n+1}$.

Объединяя (11.5) и (11.6), получаем представление для $f(z)$, имеющее вид (11.3) с коэффициентами (11.4). При этом ряд (11.3) сходится равномерно внутри V.

Докажем единственность. Пусть для f в V справедливо какое-то представление вида (11.3). Тогда ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n$ сходится равномерно внутри V. Поэтому при фиксированных $p \in \mathbb{Z}$ и $\rho \in (r, R)$ получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{p+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B(z_0,\rho)} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (\zeta - z_0)^{n-p-1} \Big)\, d\zeta = c_p$$

по свойству ортогональности степеней. □

Следствие 11.4.1. *(Неравенства Коши для коэффициентов Лорана). В условиях и обозначениях теоремы Лорана, при $\rho \in (r, R)$ определим $M_\rho = ||f||_{\partial B(z_0,\rho)}$. Тогда справедливы оценки*

$$|c_n| \leqslant \frac{M_\rho}{\rho^n}\ , \ \ n \in \mathbb{Z}\,. \tag{11.7}$$

Доказательство. Как в доказательстве неравенств Коши для коэффициентов Тейлора. □

11.5. Связь рядов Лорана с рядами Фурье.

Пусть $V = \{r < |z| < R\}$ – кольцо при $0 \le r < 1 < R \le +\infty$. В частности, окружность $\Gamma_1 = \{|z| = 1\} \subset V$. При $f \in \mathcal{A}(V)$ функция $g(t) = f(e^{it})$ является 2π-периодической бесконечно-дифференцируемой функцией на $\mathbb{R}$. Тогда, если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ – разложение функции f в ряд Лорана в V, то $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$– разложение функции g в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ (в комплексной форме).

Упражнение 11.3. Разложить функцию $g(t) = 1/(2 - \cos(t))$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.

Указание. Пусть $z = e^{it}$, тогда $\cos(t) = (z + 1/z)/2$ и в качестве f следует взять функцию $f(z) = (2 - (z+1/z)/2)^{-1} = -2z/(z^2 - 4z + 1)$, голоморфную в кольце $\{2 - \sqrt{3} < |z| < 2 + \sqrt{3}\}$.

Ответ: $g(t) = 1/\sqrt{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2/\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n \cos(nt)\,.$

12. Классификация изолированных особых точек (ИОТ) ГФ. Теорема Сохоцкого. Лемма Шварца и её следствие. ИОТ ∞. Вычеты в ИОТ.

12.1. Классификация изолированных особых точек ГФ.

Определение 12.1. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ и функция $f \in \mathcal{A}(B'(a,\delta))$, но $f \notin \mathcal{A}(a)$ или $f(a)$ не определена. Тогда точка a называется *изолированной особой точкой (ИОТ) функции f*.

Определение 12.2. ИОТ a для функции f называется

— *устранимой*, если существует $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;

— *полюсом*, если существует $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;

— *существенно особой точкой*, если не существует $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Теорема 12.1. *(Об устранимой особой точке). Для ИОТ a функции f следующие условия эквивалентны:*

(1) *точка a устранима;*

(2) *функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности $B'(a,\delta_1)$, $\delta_1 < \delta$;*

(3) *ряд Лорана функции f в кольце $B'(a,\delta)$ не содержит отрицательных степеней (т.е. $c_n = 0$ при $n < 0$). В этом случае говорят, что главная часть ряда Лорана отсутствует.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Из существования $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$ следует ограниченность f в некоторой проколотой окрестности $B'(a,\delta_1)$ точки a ($\delta_1 < \delta$), т.е.

$$\sup\{|f(z)| \,:\, z \in B'(a,\delta_1)\} = M < +\infty\,.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Воспользуемся неравенствами Коши (11.7). Поскольку $M_\rho = \max\limits_{|z-a|=\rho} |f(z)| \le M$ при $\rho \in (0,\delta_1)$, при $n < 0$ имеем:

$$|c_n| \leqslant M_\rho \rho^{-n} \le M\rho^{-n} \to 0 \text{ при } \rho \to 0\,,$$

откуда $c_n = 0$ при $n < 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Очевидно, что $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$. □

Следствие 12.1.1. *Если a – устранимая особая точка, то, определяя $f(a) = \lim\limits_{z\to a} f(z)$, получаем $f \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta)\big)$.*

Пример 12.1. Положим $f(z) = (\sin z)/z$ при $z \neq 0$ и $f(0) = 1$. Тогда f – целая функция.

Теорема 12.2. *(О полюсах). Пусть $a \in \mathbb{C}$ – ИОТ для функции $f \in \mathcal{A}\big(B'(a,\delta)\big)$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *a – полюс;*

(2) *ряд Лорана функции f в $B'(a,\delta)$ содержит конечное (ненулевое) число отрицательных степеней (его главная часть конечна), т.е. $\exists\, p \in \mathbb{N}$:*

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_{-p} \neq 0.$$

В этом случае говорят, что a – полюс функции f порядка p. При $p = 1$ полюс называют простым.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). По условию, $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, поэтому $\exists\, \delta_1 \in (0,\delta)$ такое, что $f(z) \neq 0$ при $z \in B'(a,\delta_1)$. Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, голоморфную в $B'(a,\delta_1)$. Ясно, что существует $\lim\limits_{z\to a} g(z) = 0$, поэтому, положив $g(a) = 0$, получим функцию $g \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta_1)\big)$ (по следствию 12.1.1). Точка a – изолированный нуль функции g некоторого (конечного) порядка $p \in \mathbb{N}$. По теореме о нулях ГФ, существует $h \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta_1)\big)$ такая, что $g(z) = (z-a)^p h(z)$, причем $h(a) \neq 0$, откуда $h(z) \neq 0$ при $z \in B(a,\delta_1)$. Следовательно, определена функция $\widetilde{h}(z) = \dfrac{1}{h(z)} \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta_1)\big)$.

Разложим функцию $\widetilde{h}$ в $B(a,\delta_1)$ в ряд Тейлора: $\widetilde{h}(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$, где $a_0\neq 0$. Тогда для функции f в $B'(a,\delta_1)$ имеем:

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-a)^p}\widetilde{h}(z)=\frac{a_0}{(z-a)^p}+\frac{a_1}{(z-a)^{p-1}}+\dots.$$

В силу единственности ряда Лорана, это же разложение верно и в $B'(a,\delta)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Очевидно. □

Упражнение 12.1. Для $f(z)=\sin(z)/z^2$ точка $z=0$ – простой полюс.

Замечание. В обозначениях доказательства теоремы 12.2 справедливо следующее утверждение: ИОТ a – полюс порядка $p\geqslant 1$ для функции f, если и только если a – нуль порядка p для функции $g(z)=1/f(z)$ при $z\in B'(a,\delta_1)$, $g(a)=0$.

Напомним, что при $f\in\mathcal{A}(a)$ и $f(a)\neq 0$ точка a называется нулем функции f порядка 0.

Предложение 12.1. *Пусть даны функции f_1, $f_2\in\mathcal{A}\big(B(a,\delta)\big)$ и пусть точка a – нуль порядка $p_j\in\mathbb{Z}_+$ для функции f_j, $j\in\{1,2\}$.*

Положим $f=f_1/f_2$. Тогда при $p_1\geqslant p_2$ точка a – устранимая особая точка для f (при $p_2=0$ в этой точке нет особенности), а при $p_2>p_1$ точка a – полюс порядка (p_2-p_1) для f.

Доказательство. По теореме о нулях ГФ, существует число $\delta'\in(0,\delta)$ такое, что в окрестности $B(a,\delta')$ справедливы представления $f_1(z)=(z-a)^{p_1}h_1(z)$, $f_2(z)=(z-a)^{p_2}h_2(z)$, причем функции h_1 и h_2 голоморфны и не обращаются в ноль в $B(a,\delta')$, т.е. функция $h(z)=\dfrac{h_1(z)}{h_2(z)}$ тоже голоморфна в $B(a,\delta')$.

При $p_1\geqslant p_2$ функция f имеет вид $f(z)=(z-a)^{p_1-p_2}h(z)$, поэтому существует конечный $\lim\limits_{z\to a}f(z)$, так что точка a – устранима для f.

При $p_1<p_2$ функция f имеет вид $f(z)=\dfrac{h(z)}{(z-a)^{p_2-p_1}}$, откуда точка a – полюс порядка (p_2-p_1) для f по доказанному в теореме 12.2. □

Следствие 12.1. *ИОТ a функции $f\in\mathcal{A}\big(B'(a,\delta)\big)$ является существенно особой, если и только если ряд Лорана функции f в $B'(a,\delta)$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых в главной части (т.е. существует бесконечно много $n<0$ таких, что $c_n\neq 0$).*

Упражнение 12.2. Для $f(z)=e^{1/z}$ точка $z=0$ – существенно особая.

Теорема 12.3. *(Сохоцкого). Пусть $a\in\mathbb{C}$ – существенно особая точка для функции $f\in\mathcal{A}\big(B'(a,\delta)\big)$. Тогда для любого $b\in\mathbb{C}^\bullet$ найдется последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset B'(a,\delta)$ с условиями $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=b$.*

Доказательство. По теореме 12.1, функция f не может быть ограниченной ни в какой проколотой окрестности $B'(a,r)$, $r\in(0,\delta)$ (иначе a была бы устранимой для f). Так что в условиях нашей теоремы случай $b=\infty$ очевиден.

Зафиксируем теперь произвольное $b\in\mathbb{C}$. Если для каждого $r\in(0,\delta)$ найдется такое $z_r\in B'(a,r)$, что $f(z_r)=b$, то всё доказано.

Пусть теперь $\exists\, r_0\in(0,\delta)$ такое, что $f(z)\neq b$ в $B'(a,r_0)$. Рассмотрим функцию $g(z)=1/(f(z)-b)\in\mathcal{A}\big(B'(a,r_0)\big)$, для которой точка a – существенно особая (проверить!). По доказанному, найдется $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset B'(a,r_0)\subset B'(a,\delta)$ с условиями $a_n\to a$ и $g(a_n)\to\infty$ при $n\to+\infty$. Откуда $f(a_n)\to b$ при $n\to+\infty$. □

12.2. Лемма Шварца. Конформные изоморфизмы круговых областей.

Теорема 12.4. *(Лемма Шварца). Пусть $B_1=\big\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z|<1\big\}$ – единичный круг и $f\in\mathcal{A}(B_1)$. Пусть $f(0)=0$ и $|f(z)|\leqslant 1$ при всех $z\in B_1$. Тогда $|f(z)|\leqslant|z|$ для всех $z\in B_1$ и, следовательно, $|f'(0)|\leq 1$.*

Если найдется $z_1\in B_1$ такое, что $z_1\neq 0$ и $|f(z_1)|=|z_1|$, то найдется $\theta\in(-\pi,\pi]$ с условием $f(z)=e^{i\theta}z$ для всех $z\in B_1$.

Доказательство. Определим функцию $g(z) = f(z)/z$, имеющую устранимую особую точку $z = 0$. Полагая $g(0) = f'(0)$, получаем $g \in \mathcal{A}(B_1)$.

Фиксируем $\varepsilon \in (0,1)$, и в круге $B(0, 1-\varepsilon)$ к функции g применим принцип максимума модуля:

$$|g(z)| \leqslant ||g||_{\partial B(0,1-\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad z \in B(0, 1-\varepsilon).$$

Фиксируя $z \in B_1$ и устремляя ε к нулю, получаем, что $|g(z)| \leqslant 1$ для всех $z \in B_1$. Следовательно, $|f(z)| \leqslant |z|$ при всех $z \in B_1$.

Если же найдется $z_1 \in B_1 \setminus \{0\}$ с условием $|f(z_1)| = |z_1|$, то $|g(z_1)| = 1$. Вновь применяя принцип максимума модуля в кругах $B(0, 1-\varepsilon)$ и устремляя ε к нулю, получаем, что $g(z) \equiv g(z_1) = e^{i\theta}$ в B_1 (для некоторого $\theta \in (-\pi, \pi]$). Отсюда $f(z) = e^{i\theta} z$ при всех $z \in B_1$. $\square$

Следствие 12.4.1. *Пусть D_1 и D_2 – круговые области в $\mathbb{C}^\bullet$ (т.е. открытые круги или полуплоскости, или внешности замкнутых кругов в $\mathbb{C}^\bullet$). Если функция f является конформным изоморфизмом D_1 на D_2, то f – ДЛО.*

Доказательство. Пусть $a_j \in D_j$, $j \in \{1, 2\}$, причем $a_2 = f(a_1)$. Существуют ДЛО $\Lambda_j : B_1 \xrightarrow{\text{на}} D_j$ со свойством $\Lambda_j(0) = a_j$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим голоморфную функцию $g = \Lambda_2^{-1} \circ f \circ \Lambda_1 : B_1 \xrightarrow{\text{на}} B_1$ (воспользоваться её непрерывностью и теоремой об устранимой особой точке). Она удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому $|g(z)| \leqslant |z|$ для всех $z \in B_1$. Аналогично, g^{-1} голоморфна и удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому $|g^{-1}(z)| \leqslant |z|$ при всех $z \in B_1$, что эквивалентно условиям $|z| \leqslant |g(z)|$ при всех $z \in B_1$. Следовательно, $|g(z)| = |z|$, и тогда $g(z) = e^{i\theta} z$ для некоторого $\theta \in (-\pi, \pi)$. В частности, g – ДЛО. Но тогда $f = \Lambda_2 \circ g \circ \Lambda_1^{-1}$ – тоже ДЛО, что и требовалось. $\square$

12.3. Изолированная особая точка $z = \infty$.

Назовем область $B_{z_0}(\infty, \delta) = \{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - z_0| > 1/\delta \,\} \cup \{\infty\}$ (соответственно, $B'_{z_0}(\infty, \delta) = \{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - z_0| > 1/\delta \,\}$) – *$\delta$-окрестностью* точки ∞ в $\mathbb{C}^\bullet$ (соответственно, *проколотой δ-окрестностью* точки ∞) с антицентром z_0.

Определение 12.3. Пусть функция f определена в окрестности $B_{z_0}(\infty, \delta)$ точки ∞ и при этом существует конечный $\lim\limits_{z \to \infty} z\big(f(z) - f(\infty)\big) =: f'(\infty)$. Тогда этот предел называется *комплексной производной функции f в точке ∞*.

Определение 12.4. Если $f \in \mathcal{A}\big(B'_{z_0}(\infty, \delta)\big)$, то точка ∞ *всегда по определению является* ИОТ для f (даже если существует $f'(\infty)$). ИОТ ∞ для функции f называется

— *устранимой*, если $\exists \lim\limits_{z \to \infty} f(z) \in \mathbb{C}$;
— *полюсом*, если $\exists \lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$;
— *существенно особой точкой*, если $\nexists \lim\limits_{z \to \infty} f(z)$.

Предложение 12.2. *Теоремы 12.1, 12.2, 12.3 с естественными изменениями остаются справедливыми и для случая $a = \infty$: надо только называть главной частью ряда Лорана $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ для f в $B'_{z_0}(\infty, \delta)$ сумму его натуральных степеней.*

Упражнение 12.3. Дать определение *порядка полюса* в точке ∞ и доказать его независимость от антицентра z_0.

12.4. Вычет в ИОТ.

Определение 12.5. Пусть $a \in \mathbb{C}$ – ИОТ функции $f \in \mathcal{A}\big(B'(a, R)\big)$, $R > 0$. При $\rho \in (0, R)$ положим $\Gamma_\rho^+ = \{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - a| = \rho \,\}^+ = \partial^+ B(a, \rho)$. Тогда *вычетом функции f в точке a* называется величина

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} f(z)\, dz.$$

Предложение 12.3. *Пусть* $(*) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$ *– ряд Лорана функции* f *в* $B'(a,R)$. *Тогда* $\operatorname*{res}\limits_a f = c_{-1}$.

Доказательство. Ряд $(*)$ сходится равномерно внутри $B'(a,R)$, в частности, на $\partial B(a,\rho)$ для всякого $\rho\in(0,R)$. Интегрируя почленно и пользуясь свойством ортогональности степеней, получаем требуемое. $\square$

Замечание. Из этого предложения, в частности, следует корректность определения вычета функции в точке.

Следствие 12.3.1. *Если* $a\in\mathbb{C}$ *– устранимая для* f, *то* $\operatorname*{res}\limits_a f = 0$.

Следствие 12.3.2. *Пусть* $a\in\mathbb{C}$ *– полюс порядка* p *для функции* $f\in\mathcal{A}\big(B'(a,R)\big)$. *Тогда*

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\big((z-a)^p f(z)\big)^{(p-1)}.$$

Доказательство. Если $\sum\limits_{n=-p}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ – ряд Лорана функции f в $B'(a,R)$, то

$$\sum_{n=-p}^{+\infty} c_n(z-a)^{n+p} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-p}(z-a)^n$$

– ряд Тейлора для функции $g(z)=(z-a)^p f(z)\in\mathcal{A}\big(B(a,R)\big)$ (доопределенной $g(a)=c_{-p}$). Дифференцируя почленно последний ряд, получаем:

$$\big((z-a)^p f(z)\big)^{(p-1)} = (p-1)!\,c_{-1} + (z-a)\cdot h(z),\quad h(z)\in\mathcal{A}\big(B(a,R)\big).$$

Переходя к пределу при $z\to a$, деля на $(p-1)!$ и пользуясь предложением 12.3, получаем требуемое. $\square$

Следствие 12.3.3. *Пусть* $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, *где* $f_1,f_2\in\mathcal{A}\big(B(a,R)\big)$. *Пусть* $f_1(a)\neq 0$, *т.е. порядок нуля функции* f_1 *в точке* a *равен* 0. *Пусть* $f_2(a)=0$, *но* $f_2'(a)\neq 0$, *т.е. порядок нуля функции* f_2 *в точке* a *равен* 1. *Тогда*

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

Доказательство. Из условий вытекает, что функция f имеет в точке a полюс порядка $p=1$. Пользуясь следствием 12.3.2, имеем:

$$\operatorname*{res}_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = f_1(a)\lim_{z\to a}\frac{z-a}{f_2(z)-f_2(a)} = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

$\square$

Замечание. Если $a\in\mathbb{C}$ – существенно особая точка для $f\in\mathcal{A}\big(B'(a,R)\big)$, то какой-то специальной формулы для вычисления вычета в этой точке нет, однако справедливо следующее утверждение.

Упражнение 12.4. Если функция f – *четная* относительно ИОТ $a\in\mathbb{C}$, т.е. $f(a+z)=f(a-z)$ при всех $z\in B'(0,R)$, то коэффициенты ряда Лорана f в $B'(a,R)$ с нечетными номерами равны 0. В частности, $\operatorname*{res}\limits_a f = c_{-1}=0$.

Определение 12.6. Пусть точка ∞ является ИОТ для функции $f\in\mathcal{A}(V)$, где $V=\{r<|z-z_0|<\infty\}$ – проколотая окрестность точки ∞ ($z_0\in\mathbb{C}$, $r\geq 0$). Пусть $\Gamma_\rho^+ = \{|z-z_0|=\rho\}^+$ при $\rho\in(r,+\infty)$. Тогда *вычет функции* f *в точке* ∞ определяется по формуле

$$\operatorname*{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho^+} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho^-} f(z)\,dz.$$

Предложение 12.4. *Пусть* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ *– ряд Лорана функции* f *в кольце* $V = \{r < |z-z_0| < \infty\}$. *Тогда* $\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 12.3. □

Упражнение 12.5. Найти формулы (аналогичные следствию 12.3.2) для вычисления $\operatorname*{res}_{\infty} f$ в случае, когда функция f имеет в точке ∞ полюс порядка $p \in \mathbb{N}$.

Замечание. Функция $f(z) = \dfrac{1}{z}$ имеет в точке ∞ устранимую особую точку, но $\operatorname*{res}_{\infty} f = -1 \neq 0$, поэтому утверждение следствия 12.3.1 неверно при $a = \infty$.

13. Теорема Коши о вычетах. Примеры вычисления интегралов. Лемма Жордана и преобразование Фурье рациональных функций. Специальные области и функция Шварца.

13.1. Теорема Коши о вычетах.

Теорема 13.1. *(Теорема Коши о вычетах). Пусть D – допустимая область в $\mathbb{C}$, $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_J\} \subset D$, $J \in \mathbb{N}$. Пусть функция f непрерывна на $\overline{D} \setminus \mathfrak{A}$ и $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{A})$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial^+ D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{J} \operatorname*{res}_{a_j} f.$$

Замечание. Мы докажем эту теорему для простых областей, поскольку в доказательстве будет использоваться интегральная теорема Коши, которая была доказана нами только для простых областей.

Доказательство. Для $j \in \{1, \dots, J\}$ пусть $V_j = \{0 < |z - a_j| < R_j\}$ – кольцо, лежащее в $D \setminus \mathfrak{A}$. Пусть $\Sigma_j = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n^j (z-a_j)^n$ – ряд Лорана функции f в V_j и пусть $f_j(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n^j (z-a_j)^n$ – сумма главной части Σ_j^- ряда Лорана Σ_j функции f в V_j. Из определения области сходимости обобщенного степенного ряда Σ_j вытекает, что $f_j \in \mathcal{A}\big(\mathbb{C} \setminus \{a_j\}\big)$.

Положим $f_0(z) = f(z) - \sum\limits_{j=1}^{J} f_j(z)$. Функция f_0, очевидно, непрерывна в $\overline{D} \setminus \mathfrak{A}$ и голоморфна в $D \setminus \mathfrak{A}$. При этом в точках a_j, $j = 1, \dots, J$, функция f_0 имеет устранимые особые точки. Следовательно, f_0 непрерывна в $\overline{D}$ и $f_0 \in \mathcal{A}(D)$ (после "стирания"особенностей). Поэтому $\int\limits_{\partial^+ D} f_0(z)\, dz = 0$ по интегральной теореме Коши. В силу аддитивности интеграла,

$$\int\limits_{\partial^+ D} f(z)\, dz = \int\limits_{\partial^+ D} f_0(z)\, dz + \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{\partial^+ D} f_j(z)\, dz = \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{\partial^+ D} f_j(z)\, dz,$$

поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\int\limits_{\partial^+ D} f_j(z)\, dz = 2\pi i\, c_{-1}^j = 2\pi i \operatorname*{res}_{a_j} f\, .$$

Поскольку ряд Σ_j^- сходится равномерно внутри $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$, его можно почленно интегрировать на ∂D. Пользуясь формулой (Н-Л), имеем:

$$\int\limits_{\partial^+ D} f_j(z)\, dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\partial^+ D} c_{-n}^j (z - a_j)^{-n}\, dz = \int\limits_{\partial^+ D} \frac{c_{-1}^j}{z - a_j}\, dz = 2\pi i\, c_{-1}^j.$$

Последнее равенство для простых областей вытекает из предложения 8.1. □

Теорема 13.2. *(Теорема Коши о полной сумме вычетов). Пусть $J \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_J\} \subset \mathbb{C}$, и функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \mathfrak{A})$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{J} \operatorname*{res}_{a_j} f + \operatorname*{res}_{\infty} f = 0.$$

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему в области $B(0, R)$, где $R \in (\max\limits_{1\leqslant j\leqslant J} |a_j|, +\infty)$, и воспользоваться определением $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f$. □

13.2. Примеры вычисления интегралов.

Пример 13.1. Вычислим интеграл $I = \displaystyle\int_{\{|z|=4\}^+} \operatorname{ctg} z\, dz$. Все ИОТ Функции $f(z) = \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ – полюса первого порядка в точках $a_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пользуясь следствием 12.3.3, находим $\operatorname*{res}\limits_{a_k} f = 1$ для всех k. В области $\{|z| < 4\}$ лежат ИОТ a_{-1}, a_0, a_1, поэтому $I = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$.

Пример 13.2. Пусть $I = \displaystyle\int_{\{|z|=1\}^+} \frac{dz}{\sin(1/z)}$. В области $\{|z| < 1\}$ функция $f(z) = 1/\sin(1/z)$ имеет счетное число полюсов $z_k = 1/(\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому в ней теорема Коши о вычетах неприменима. Но так как $f \in \mathcal{A}(\{1/\pi < |z| < +\infty\})$, то I можно вычислить по формуле $I = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f$. Здесь ∞ – простой полюс для f (провести оставшееся вычисление самостоятельно).

Пример 13.3. Пусть R – рациональная функция двух переменных, такая, что функция $f(t) = R(\cos t, \sin t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Требуется найти $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$.

Пусть $z = e^{it}$. Тогда $\cos(nt) = \dfrac{1}{2}(z^n + \dfrac{1}{z^n})$, $\sin(nt) = \dfrac{1}{2i}(z^n - \dfrac{1}{z^n})$. Подставляя эти выражения в $R(\cos t, \sin t)$, получаем рациональную функцию переменной z, которую обозначим через $\widetilde{R}$. Легко видеть, что $dt = \dfrac{dz}{iz}$, поэтому

$$I = \int\limits_{\{|z|=1\}^+} \widetilde{R}(z)\frac{dz}{iz}.$$

Подынтегральная функция не имеет особых точек на $\{|z| = 1\}$, а в области $\{|z| < 1\}$ у неё конечное число полюсов, поэтому этот интеграл можно вычислить, используя теорему Коши о вычетах.

Пример 13.4. Пусть P_n и Q_m – многочлены (от комплексной переменной) степени n и m соответственно, причем $m \geqslant n + 2$ и $Q_m(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$. Пусть $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ и требуется вычислить $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Пусть $a_1, \dots, a_J$ – все *различные* нули Q_m в $\Pi_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$. Тогда $I = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{J} \operatorname*{res}_{a_j} f$.

Действительно, пусть $R > \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant J} |a_j|$. Пусть $D_R = B(0, R) \cap \Pi_+$ – верхний полукруг, $\Gamma_R = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ – верхняя полуокружность. Тогда

$$I_0 = \int\limits_{\partial + D_R} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma_R^+} f(z)\,dz = I_1 + I_2.$$

По теореме Коши о вычетах, интеграл I_0 равен $2\pi i \sum\limits_{j=1}^{J} \operatorname*{res}_{a_j} f$. При этом интеграл I_1 при $R \to +\infty$ стремится к I, а интеграл I_2 – к нулю в силу тривиальной оценки

$$\Big|\int\limits_{\Gamma_R^+} f(z)\,dz\Big| = O(1/R^2) \cdot \pi R = O(1/R)\,.$$

13.3. Лемма Жордана.

Лемма 13.1. *(Жордана). Пусть* $R \in (0, +\infty)$*, функция* f *непрерывна в* $\overline{\Pi_+} \setminus B(0, R)$*, причем* $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in \overline{\Pi_+}}} f(z) = 0$*. Тогда для любого* $\lambda > 0$ *имеем:*

$$\lim_{r \to +\infty} \int\limits_{C_r^+} f(z)\, e^{i\lambda z}\,dz = 0,$$

где $C_r^+ = \big\{ z = re^{it} \,\big|\, t \in [0, \pi] \big\}$ *– верхняя полуокружность.*

Доказательство. Пусть $\omega(r) = ||f||_{[C_r^+]}$, тогда по условию $\omega(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Фиксируем $r > R$. Если $z = z(t) = re^{it} = r(\cos t + i\sin t)$, то $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda r\sin t}$. На отрезке $[0, \pi/2]$ функция $h(t) = \sin t$ выпукла вверх, поэтому выполняется неравенство $\sin t \geqslant 2t/\pi$. Следовательно, на отрезке $[0, \pi/2]$ справедлива оценка

$$e^{-\lambda r\sin t} \leqslant e^{-\lambda r 2t/\pi}\,. \tag{13.1}$$

Оценим теперь интересующий нас интеграл:

$$\Big|\int\limits_{C_r^+} f(z)e^{i\lambda z}\,dz\Big| = \Big|\int\limits_0^\pi f\big(z(t)\big)e^{i\lambda z(t)}\,i\,re^{it}\,dt\Big| \leqslant \omega(r)\int\limits_0^\pi e^{-\lambda r\sin t}\,r\,dt =$$

$$= 2r\,\omega(r)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\lambda r\sin t}\,dt \overset{(13.1)}{\leqslant} 2r\,\omega(r)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\lambda r\frac{2}{\pi}t}\,dt = \frac{\pi}{\lambda}\,\omega(r)\big(1 - e^{-\lambda r}\big).$$

Так как $\lambda > 0$, окончательно имеем:

$$\Big|\int\limits_{C_r^+} f(z)e^{i\lambda z}\,dz\Big| \leqslant \frac{\pi}{\lambda}\omega(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и требовалось доказать. $\square$

13.4. Преобразование Фурье рациональных функций.

Определение 13.1. Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда ее *преобразование Фурье* определяется следующим образом:

$$\widetilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Если функция f – четная (нечетная), то функция $\widetilde{f}$ – тоже четная (соответственно, нечетная).

Предложение 13.1. *Пусть P_n и Q_m – многочлены от z степени n и m соответственно, причем $m \geqslant n + 2$ и $Q_m(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{R}$. Пусть $a_1, \dots, a_J$ – различные нули Q_m в Π_+. Определим $F(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, а ее сужение на $\mathbb{R}$ обозначим через f. Тогда для любого фиксированного $\lambda < 0$ имеем:*

$$\widetilde{f}(\lambda) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^J \operatorname*{res}_{a_j}\big(f(z)e^{-i\lambda z}\big) =: I\,.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $R > \max\limits_{1\leqslant j\leqslant J}|a_j|$. Для $r > R$ определим область $D_r = B(0, r) \cap \Pi_+$. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{\partial^+ D_r} f(z)e^{-i\lambda z}\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^J \operatorname*{res}_{a_j}\big(f(z)e^{-i\lambda z}\big) = \sqrt{2\pi}\,I\,.$$

Положим $C_r = \big\{\, z = re^{it}\,\big|\, t \in [0, \pi]\,\big\}$. Поскольку $\partial D = [-r, r] \cup C_r$, имеем:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-r}^{r} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \\
&= \lim_{r\to+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial^+ D_r} f(z) e^{-i\lambda z}\, dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{C_r^+} f(z) e^{-i\lambda z}\, dz \Big) = \\
&= I - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{C_r^+} f(z) e^{-i\lambda z}\, dz = I\,,
\end{aligned}
$$

где последнее равенство справедливо в силу леммы Жордана. $\square$

Пример 13.5. Пусть $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$. Тогда при $\lambda < 0$ находим:

$$
\widetilde{f}(\lambda) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{res}_{3i} \big(\frac{1}{z^2+9}\, e^{-i\lambda z} \big) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{3\lambda}}{6i} = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} e^{3\lambda}.
$$

Чтобы найти $\widetilde{f}(\lambda)$ при $\lambda > 0$, достаточно заметить, что f четная. Окончательно, $\widetilde{f}(\lambda) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{6}\, e^{-3|\lambda|}$.

13.5. "Специальные" области. Функция Шварца.

Вводимое ниже понятие специальной области позволяет значительно расширить возможности теоремы Коши о вычетах.

Определение 13.2. Жорданова область D в $\mathbb{C}$ называется *специальной*, если найдется конечное множество $\Sigma \subset D$ и функция $S \in \mathcal{A}(D \setminus \Sigma)$, непрерывная на $\overline{D} \setminus \Sigma$, для которой $S(z) = \overline{z}$ при всех $z \in \partial D$. Такая функция S единственна и называется *функцией Шварца* области D.

Замечание. Единственность функции Шварца мы докажем в следующем семестре, например, с помощью теоремы Римана.

Простейшим примером специальной области служит любой круг $B(a, r)$, для которого $(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = r^2$, откуда $S(z) = r^2/(z-a) + \overline{a}$, $\Sigma = \{a\}$.

Упражнение 13.1. Доказать, что всякая жорданова область, содержащая отрезок прямой на своей границе, не может быть специальной.

Покажем, как используется функция Шварца при вычислении интегралов.

Пример 13.6. Функция $S(z) = \dfrac{4}{z}$ является функцией Шварца области $B(0, 2)$, поэтому

$$
\int\limits_{\{|z|=2\}^+} \overline{z}^2 \operatorname{tg} z\, dz = \int\limits_{\{|z|=2\}^+} \frac{16}{z^2} \operatorname{tg} z\, dz,
$$

где интеграл справа легко считается с помощью теоремы Коши о вычетах, в то время как слева под интегралом стоит всюду неголоморфная функция.

Упражнение 13.2. Вычислить интегралы:

$$
\int\limits_{|z-i|=3} \cos(\overline{z})\, dz\,, \qquad \int\limits_{|z+i|=1} |z|^2 \ln(iz)\, dz\,.
$$

Упражнение 13.3. Пусть D – произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$. Если $f(\partial D) \subset \mathbb{R}$, то $f \equiv const$ в $\overline{D}$.

Указание: использовать ДЛО, принцип максимума модуля и теорему Коши-Римана.

Из упражнения 13.3 вытекают два важных факта про специальные области.

Предложение 13.2. *Пусть D – специальная область, и пусть функция Шварца S этой области имеет в D одну особую точку a – полюс первого порядка. Тогда D – круг с центром в точке a.*

Доказательство. Пусть $S(z) = h(z) + \dfrac{\lambda}{z-a}$, где $h \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда при $z \in \partial D$ имеем:

$$0 < |z-a|^2 = (\overline{z} - \overline{a})(z-a) = \big(h(z) + \frac{\lambda}{z-a} - \overline{a}\big)(z-a) = (h(z) - \overline{a})(z-a) + \lambda\,.$$

Поскольку функция $H(z) = (h(z) - \overline{a})(z-a) + \lambda \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ принимает на ∂D вещественные значения, имеем $H(z) \equiv C > 0$ в $\overline{D}$, откуда $|z-a| = \sqrt{H(z)} \equiv \sqrt{C}$ на ∂D и, следовательно, D – круг радиуса $\sqrt{C}$ с центром в точке a. □

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Предложение 13.3. *В указанных выше обозначениях для всякой специальной области D множество Σ не пусто.*

Определение 13.3. Специальная область D называется *неванлинновской*, если её функция Шварца не имеет в D других особых точек, кроме полюсов.

Пример 13.7. Пусть $B = B(a, r)$ – круг, где $a \in (0, +\infty)$ и $0 < r \le a$. Пусть D – образ круга B при отображении $w = z^2$. Отметим, что при $r = a$ область D (кардиоида!) имеет негладкую границу – точку возврата в 0. Докажем, что D – неванлинновская область. Действительно, если $z \in \partial B$ и $w = z^2$, то $z = s(w), \bar{z} = s(\bar{w})$ (через $s(w)$ мы обозначаем главное значение $\sqrt{w}$, являющееся функцией класса $\mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$). Отсюда при $w \in \partial D$ имеем:

$$(s(\bar{w}) - a)(s(w) - a) = r^2 \;\Leftrightarrow\; \bar{w} = \big(a + \frac{r^2}{s(w) - a}\big)^2 \;\Leftrightarrow\; \bar{w} = \big(a + \frac{r^2(s(w) + a)}{w - a^2}\big)^2,$$

где последняя функция Шварца (для D) имеет в D только одну особую точку $w = a^2$ – полюс второго порядка. Аналогично (для любого $p \in \{3, 4, \dots\}$) строится неванлинновская область D с одним полюсом порядка p у её функции Шварца.

Упражнение 13.4. Привести пример специальной области D, у которой функция Шварца имеет в D только одну особую точку – существенно особую.

Упражнение 13.5. * Привести пример неванлинновской области D, у которой функция Шварца имеет в D два полюса первого порядка.

Упражнение 13.6. Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей и $f \in \mathcal{A}(D) \cap C^1(\overline{D})$. Доказать, что $2i \int\int_D f(z)\,dxdy = \int_{\partial^+ D} f(z)\bar{z}\,dz$. Для неванлинновских областей D такие интегралы всегда можно вычислять с помощью вычетов.

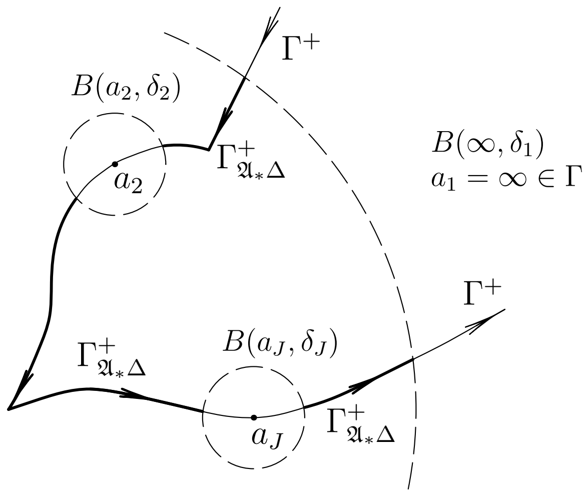

Рис. 14.1.

14. Интеграл в смысле главного значения. Вычет функции в точке относительно области. Теорема о вычетах для $(vp)\int$. Примеры вычисления $(vp)\int$.

14.1. Определение $(vp)\int$.

Пусть Γ^+ – кусочно гладкая жорданова или замкнутая жорданова (ориентированная) кривая в $\mathbb{C}$. Такие кривые мы будем для краткости называть *КГ-допустимыми в* $\mathbb{C}$. "Образ" произвольной КГ-допустимой в $\mathbb{C}$ кривой под действием какого-либо ДЛО будем называть *КГ-допустимой кривой в* $\mathbb{C}^\bullet$. Наиболее частый пример – положительно ориентированная компактифицированная (точкой $\infty\in\mathbb{C}^\bullet$) вещественная ось $\mathbb{R}^\bullet$, полученная, например, из стандартно ориентированной окружности $\{|z|=1\}^+$ под действием ДЛО $\dfrac{1}{z-i}-\dfrac{i}{2}$ (проверить!). С другой стороны, ориентированная граница какой-либо полосы, дополненная точкой ∞, не является КГ-допустимой кривой в $\mathbb{C}^\bullet$.

Напомним, что через $B(a,\delta)$ (соответственно, $B'(a,\delta)$) обозначается открытый круг (соответственно, проколотый круг) с центром $a\in\mathbb{C}$ и радиусом $\delta>0$. При $a=\infty$ полагаем $B(a,\delta)=\{z\in\mathbb{C}^\bullet\colon |z|>\dfrac{1}{\delta}\}$ (соответственно, $B'(a,\delta)=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|>\dfrac{1}{\delta}\}$).

Пусть далее Γ^+ является КГ-допустимой кривой в $\mathbb{C}^\bullet$ и $\mathfrak{A}_*=\{a_1,\dots,a_J\}$ – конечное (возможно пустое) подмножество в $[\Gamma]$ (здесь $[\Gamma]$ – носитель Γ^+, причем, если $\infty\in[\Gamma]$, то $\infty\in\mathfrak{A}_*\neq\varnothing$ по определению). При $\Delta=\{\delta_1,\dots,\delta_J\}$ (где все $\delta_j\in(0,+\infty)$) положим $|\Delta|=\max\{\delta_1,\dots,\delta_J\}$. При всех Δ с достаточно малым $|\Delta|$ выражение

$$\Gamma^+_{\mathfrak{A}_*\Delta}=\Gamma^+\setminus\left(\bigsqcup_{j=1}^{J}B(a_j,\delta_j)\right) \tag{14.1}$$

естественно интерпретируется как цепь (формальное конечное объединение) КГ-допустимых кривых в $\mathbb{C}$ (см. рис. 14.1).

В указанных обозначениях пусть $f:[\Gamma]\setminus\mathfrak{A}_*\to\mathbb{C}$ непрерывна. Величина

$$(vp)\int\limits_{\Gamma^+}f(z)\,dz=\lim_{|\Delta|\to0}\int\limits_{\Gamma^+_{\mathfrak{A}_*\Delta}}f(z)\,dz$$

(если указанный предел существует и конечен) называется *главным значением (value principal) интеграла* от функции f вдоль кривой Γ^+.

Это определение естественно распространяется на цепи КГ-допустимых кривых в $\mathbb{C}^\bullet$ (дать определение самостоятельно).

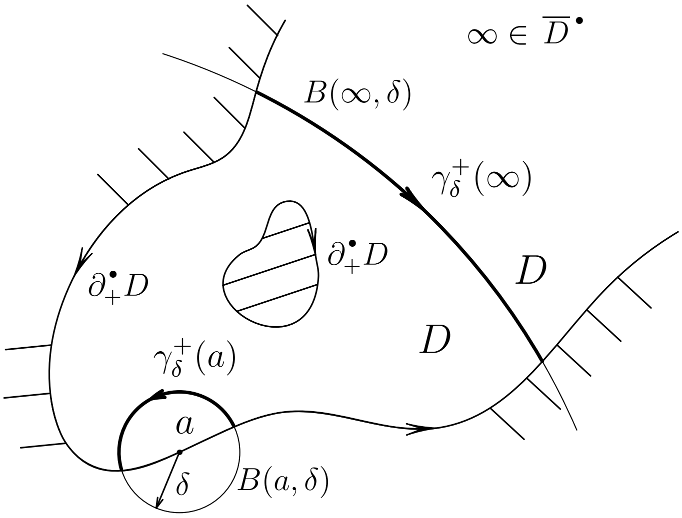

Рис. 14.2.

Так, непосредственно по определению проверяется, что $(vp)\int_{\mathbb{R}^\bullet}(1/z)\,dz = 0$ (здесь $\mathfrak{A}_* = \{0,\infty\}$).

Нашей целью будет доказательство аналога теоремы Коши о вычетах для (vp)-интегралов и, в частности, доказательство теоремы существования для (vp)-интегралов. Сначала мы введем некоторое обобщение понятия вычета и установим ряд его свойств.

14.2. Вычет функции в точке относительно области.

Пусть D – область в $\mathbb{C}$, ограниченная конечным числом попарно непересекающихся замкнутых КГ-допустимых (в $\mathbb{C}$) кривых. Такие области мы будем называть КГ- допустимыми в $\mathbb{C}$. Образ произвольной КГ-допустимой в $\mathbb{C}$ области под действием какого-либо ДЛО будем называть *КГ-допустимой областью в* $\mathbb{C}^\bullet$. Как и ранее, через $\partial_+^\bullet D$ (соответственно, $\partial^\bullet D$) обозначается ориентированная (соответственно, топологическая) граница в $\mathbb{C}^\bullet$ КГ-допустимой области D в $\mathbb{C}^\bullet$. Через $\overline{D}^\bullet$ обозначается *замыкание в* $\mathbb{C}^\bullet$ области D.

Примером КГ-допустимой области в $\mathbb{C}^\bullet$ является открытая верхняя полуплоскость.

Фиксируем произвольную КГ-допустимую область D в $\mathbb{C}^\bullet$ и точку $a \in \overline{D}^\bullet$. При всех достаточно малых $\delta > 0$ кривая $\gamma_\delta^+(a) = \partial^+ B(a,\delta) \cap \overline{D}^\bullet$ представляет собой связную (ориентированную) дугу окружности (см. рис. 14.2). Пусть при некотором $\delta_0 > 0$ задана функция $f\colon B'(a,\delta_0) \cap \overline{D}^\bullet \to \mathbb{C}$, непрерывная на указанной области определения. В этих обозначениях, выражение

$$\operatorname*{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\gamma_\delta^+(a)} f(z)\,dz$$

(если последний предел существует и конечен) называется *вычетом функции f в точке a относительно области D*.

Приведем ряд утверждений о вычислении таких вычетов.

Лемма 14.1. *Если $a \in D$ и функция f голоморфна в проколотой окрестности точки a, то $\operatorname*{res}_{(a,D)} f = \operatorname*{res}_a f$ – обычный вычет функции f в точке a.*

Лемма 14.2. *Пусть $a \neq \infty$ и $f(z) = o\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ при $z \to a$ $(z \in \overline{D}^\bullet)$, или $a = \infty$ и $f(z) = o\left(\dfrac{1}{z}\right)$ при $z \to \infty$ $(z \in \overline{D}^\bullet)$. Тогда $\operatorname*{res}_{(a,D)} f = 0$.*

Доказательства этих двух лемм очевидны.

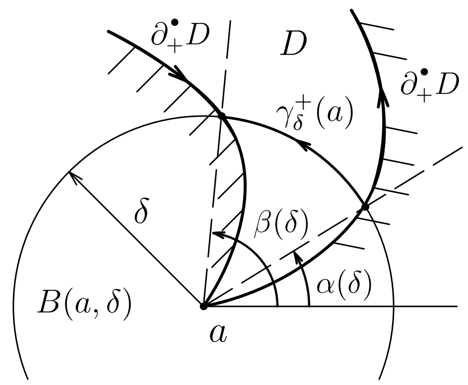

Рис. 14.3.

Лемма 14.3. *Пусть $a \in \partial^\bullet D \cap \mathbb{C}$ является* полюсом первого порядка *функции f, и пусть θ_a – абсолютная величина* внутреннего угла *области D в точке a. Тогда* $\operatorname*{res}\limits_{(a,D)} f = \dfrac{\theta_a}{2\pi} \operatorname*{res}\limits_{a} f$.

Доказательство. В указанных условиях, при малых $\delta > 0$ кривую $\gamma^+_\delta(a)$ можно параметризовать следующим образом: $\left\{ z(t) = a + \delta e^{it} \,\middle|\, t \in [\alpha(\delta), \beta(\delta)] \right\}$, где $\alpha(\delta) < \beta(\delta) < \alpha(\delta) + 2\pi$, причем $\beta(\delta) - \alpha(\delta) \to \theta_a$ при $\delta \to 0$ (по определению, см. рис. 14.3).

Разложим функцию f в ряд Лорана в $B'(a, \delta_0)$ при некотором $\delta_0 > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

где $c_{-1} = \operatorname*{res}\limits_a f$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\alpha(\delta)}^{\beta(\delta)} \left(\frac{c_{-1}}{\delta e^{it}} + O(1) \right) \delta e^{it}\, i\, dt = \frac{\theta_a c_{-1}}{2\pi},$$

что и требовалось. □

Для полюсов более высокого порядка полезно следующее утверждение, которое доказывается аналогично предыдущей лемме.

Упражнение 14.1. Пусть $D = \Pi_+$ и точка $a \in \mathbb{R}$ является *полюсом порядка $p > 1$* функции f. Тогда $\operatorname*{res}\limits_{(a,D)} f$ существует если и только если главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности точки a содержит только нечетные степени $z - a$. В указанном случае всегда

$$\operatorname*{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2} \operatorname*{res}_a f\,.$$

Следующее утверждение является переформулировкой леммы 13.1 (Жордана).

Лемма 14.4. *Пусть $R \in (0, +\infty)$, функция f непрерывна на $\overline{\Pi_+} \setminus B(0,R))$, причем $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in \overline{\Pi_+}}} f(z) = 0$. Тогда для любого фиксированного $\lambda > 0$ имеем*

$$\operatorname*{res}_{(\infty, \Pi_+)} \left(f(z) e^{i\lambda z} \right) = 0\,.$$

Упражнение 14.2. Для области $D = (B(2,2) \setminus \overline{B(1,1)}) \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ и функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ вычислить (по определению) $\operatorname*{res}\limits_{(0,D)} f$. Как следствие найти $(vp) \int_{\partial + D} f(z)\, dz$.

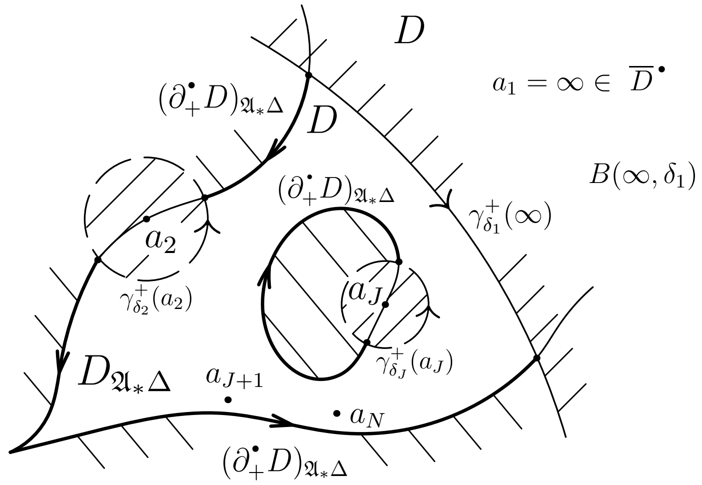

Рис. 14.4.

14.3. Теорема о вычетах для $(vp)\int$.

Теорема 14.1. *Пусть D – КГ-допустимая область в $\mathbb{C}^\bullet$ и $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ – конечное (возможно, пустое) подмножество в $\overline{D}^\bullet$ (если $\infty \in \overline{D}^\bullet$, то $\infty \in \mathfrak{A} \neq \varnothing$ по определению). Пусть $f\colon \overline{D}^\bullet \setminus \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{A})$ и f непрерывна на $\overline{D}^\bullet \setminus \mathfrak{A}$. Тогда справедлива формула:*

$$(vp) \int\limits_{\partial^\bullet_+ D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname*{res}_{(a_n, D)} f,$$

где имеется в виду, что $(vp)\int$ слева существует, если и только если каждый вычет справа существует, и в этом случае выполняется равенство.

Доказательство. Положим $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{A} \cap \partial^\bullet D$. Если $\mathfrak{A}_* = \varnothing$ (откуда, в частности, $\infty \notin \partial^\bullet D$), то утверждение теоремы непосредственно вытекает из стандартной теоремы Коши о вычетах (возможный здесь случай $\infty \in D$ рассмотреть отдельно, самостоятельно!). Пусть далее $\mathfrak{A}_* \neq \varnothing$ (если $\infty \in \partial^\bullet D$, то $\infty \in \mathfrak{A}_*$). Без ограничения общности будем считать, что $\mathfrak{A}_* = \{a_1, \dots, a_J\}$, где $J \leqslant N$. Пусть, как и ранее, $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_J\}$. Для любого Δ с достаточно малым $|\Delta|$ определим область $D_{\mathfrak{A}_*\Delta} = D \setminus \bigsqcup\limits_{j=1}^{J} \overline{B(a_j, \delta_j)}$ (см. рис. 14.4). Напомним, что обозначение $\big(\partial^\bullet_+ D\big)_{\mathfrak{A}_*\Delta}$ определено выше в формуле 14.1.

Для функции f в области $D_{\mathfrak{A}_*\Delta}$ применима стандартная теорема Коши о вычетах:

$$\int\limits_{\partial^\bullet_+ \left(D_{\mathfrak{A}_*\Delta}\right)} f(z)\, dz = \int\limits_{\left(\partial^\bullet_+ D\right)_{\mathfrak{A}_*\Delta}} f(z)\, dz - \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{\gamma^+_{\delta_j}(a_j)} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{n=J+1}^{N} \operatorname*{res}_{a_n} f\,,$$

где последняя сумма считается равной 0 в случае $J = N$. Остается $|\Delta|$ устремить к 0. $\square$

14.4. Примеры вычисления $(vp)\int$.

Пример 14.1. Вычислить $I = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos(2x))\, dx}{x^2(x^2+1)}$.

Положим $D = \Pi_+$, $f(z) = (1 - e^{2iz})/(z^2(z^2+1))$. Тогда (абсолютно сходящийся) интеграл I является вещественной частью (vp)-интеграла $I_1 = (vp)\int_{\partial^\bullet_+ D} f(z)\, dz$. В обозначениях теоремы 14.1 имеем $\mathfrak{A} = \{a_1 = 0, a_2 = i, a_3 = \infty\}$. Применяя леммы 14.2 - 14.4 (a_1 и a_2 – полюса первого порядка функции f), находим $I_1 = 2\pi i \left(2^{-1} \operatorname*{res}_{a_1} f + \operatorname*{res}_{a_2} f\right) = \pi(1 + e^{-2})$. Откуда $I = \pi(1 + e^{-2})$.

Пример 14.2. Вычислить $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x - \sin(x))\,dx}{x^3}$.

Пусть $D = \Pi_+$, $f(z) = (iz - e^{iz})/z^3$. Тогда исходный (абсолютно сходящийся) интеграл является мнимой частью (vp)-интеграла $I_1 = (vp)\int_{\partial_+^\bullet D} f(z)\,dz$. По теореме 14.1 (при $\mathfrak{A} = \{a_1 = 0, a_2 = \infty\}$), с применением леммы 14.2, леммы 14.4 и упражнения 14.1 (a_1 – полюс порядка 3 функции f), получаем $I_1 = 2\pi i\, 2^{-1} \operatorname*{res}_{a_1} f = \pi i/2$. Откуда $I = \pi/2$.

Пример 14.3. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\ln(x)\,dx}{x^2 - 1}$.

Пусть $f(z) = \dfrac{\ln_*(z)}{z^2 - 1}$, где ветвь логарифма $\ln_*(z) = \ln|z| + i\arg_*(z)$ выбрана с условием $\arg_*(z) \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2})$ (т.е. с разрезом по отрицательной мнимой полуоси). Пусть D – верхняя полуплоскость. При $\mathfrak{A} = \{-1, 0, 1, \infty\}$, применяя теорему 14.1 и леммы 14.2 и 14.3, находим:

$$(vp)\int\limits_{\partial_+^\bullet D} f(z)\,dz = 2\pi i\,\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{-1} f = \frac{\pi^2}{2}.$$

Учитывая, что $\operatorname{Re}\Big[(vp)\int\limits_{-\infty}^{0} f(z)\,dz\Big] = I$, получаем $I = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Упражнение 14.3. Вычислить $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\ln(x)\,dx}{(x-1)(x^2+4)}$.

Указание. Для функции $f_1(z) = \dfrac{\big(\ln_*(z)\big)^2}{(z-1)(z^2+4)}$ в верхней полуплоскости D_1 (функция $\ln_*(z)$ определяется как в предыдущем примере) и функции $f_2(z) = \dfrac{\big(\ln^*(z)\big)^2}{(z-1)(z^2+4)}$ в нижней полуплоскости D_2 (здесь $\ln^*(z) = ln|z| + i\arg^*(z)$, где $\arg^*(z) \in (\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2})$, т.е. с разрезом по положительной мнимой полуоси) применяем теорему 14.1 и леммы 14.2 и 14.3). Далее складываем полученные ответы для $\int_{\partial_+^\bullet D_1} f_1(z)\,dz$ и $\int_{\partial_+^\bullet D_2} f_2(z)\,dz$ и учитываем, что $f_1(z) = f_2(z)$ в левой полуплоскости (в частности, на $(-\infty, 0)$). Остается воспользоваться равенством $\operatorname{Im}\big(f_1(x) - f_2(x)\big) = -4\pi\,\dfrac{\ln(x)}{(x-1)(x^2+4)}$ на $(0, +\infty)$.

Упражнение 14.4. Доказать, что преобразование Гильберта

$$f \mapsto H[f](x) = \frac{1}{\pi}\,(vp)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - x}\,dt$$

удовлетворяет условию $H\big[H[f]\big](x) = -f(x)$ для всякой правильной рациональной функции f без вещественных полюсов.

Замечание. Формально в последнем интеграле следовало интегрировать по $\mathbb{R}^\bullet$, а не по $\mathbb{R}$, поскольку $\mathbb{R}$ не является КГ-допустимой кривой в $\mathbb{C}^\bullet$.

15. Гармонические функции двух переменных. Базовые свойства. Задача Дирихле. Разложение в ряд по однородным гармоническим полиномам.

15.1. Базовые свойства гармонических функций (ГрФ) двух переменных.

В этой лекции $\mathbb{C}$ метрически отождествляется с $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ $(z = x + i\,y)$.

Определение 15.1. Пусть D – область в $\mathbb{R}^2$, $h : D \to \mathbb{R}$ – функция класса $C^2(D)$ (т.е. $h = h(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в D до второго порядка включительно); если при этом

$$\Delta h \equiv h_{xx} + h_{yy} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \equiv 0 \text{ в } D\,,$$

то h называется *гармонической функцией (ГрФ) в D.*

Класс всех таких функций обозначается $\mathcal{H}(D)$.

Замечание. Пусть $a \in \mathbb{C}$. Говорят, что функция h *является гармонической в точке a*, если найдется $\delta > 0$ такое, что $h \in \mathcal{H}(B(a, \delta))$. Очевидно, что $h \in \mathcal{H}(D)$ если и только если для всех $a \in D$ функция h является гармонической в точке a.

Предложение 15.1. *Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$. Тогда функции $u(z) = Re\, f(z)$ и $v(z) = Im\, f(z)$ являются гармоническими в D.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы Коши – Римана и из равенства смешанных частных производных $u_{xy} = u_{yx}$ в D. □

Следующий пример показывает существенность требования $h \in C^2(D)$ в определении 15.1. Рассмотрим функцию

$$h_*(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} = Im\big(-\frac{1}{2z^2}\big) \ \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_\flat)\,,\ \ \mathbb{C}_\flat = \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,$$

доопределенную $h_*(0, 0) = 0$. Поскольку $h_* \equiv 0$ на осях координат, имеем $\Delta h_*|_{(0,0)} = 0$. Следовательно, $\Delta h_* = 0$ во всем $\mathbb{C}$. Однако h_* не является гармонической в точке $(0, 0)$, поскольку она разрывна в этой точке.

Теорема 15.1. *(Связь гармоничности и голоморфности). Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$, $h \in \mathcal{H}(D)$. Тогда найдется $f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $Re\, f = h$. Функция f определяется единственным образом с точностью до аддитивной чисто мнимой постоянной.*

Доказательство. Положим $g(z) = 2\frac{\partial}{\partial z}h = h_x - ih_y \in C^1(D)$. Тогда

$$2\frac{\partial}{\partial \bar z}g = \big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big)(h_x - ih_y) = \Delta h \equiv 0 \text{ в } D.$$

По теореме Коши-Римана, $g \in \mathcal{A}(D)$.

Поскольку D – односвязна, существует п/о $f_0(z)$ функции $g(z)$ в D. Пусть $f_0(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда

$$h_x - ih_y = g(z) = f_0'(z) = \frac{\partial f_0}{\partial x}\Big|_z = (u_x + iv_x).$$

Следовательно, $h_x = u_x$ и $h_y = -v_x = u_y$, т.е. $\vec{\nabla} u(x, y) \equiv \vec{\nabla} h(x, y)$ (в частности, $h \in C^\infty$, поскольку $u \in C^\infty$). Отсюда следует, что $u(x, y) \equiv h(x, y) + C_0$, где C_0 – вещественная константа. В качестве $f(z)$ можно взять функцию $f_0(z) - C_0$. Утверждение о единственности тривиально.

Замечание 1. Функция $g(z)$ называется *сопряженным градиентом* функции h, поскольку $g(z) = h_x \cdot 1 + (-h_y) \cdot i$, а вектор $(h_x, -h_y)$ на комплексной плоскости сопряжен вектору градиента (h_x, h_y).

Замечание 2. Попутно доказали, что для произвольной вещественной функции $h \in C^2(D)$ имеем $4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}h \equiv \Delta h$ в D. □

Следствие 15.1.1. *Для любой (не обязательно односвязной) области D в $\mathbb{C}$ выполнено включение $\mathcal{H}(D) \subset C^\infty(D)$.*

Доказательство. Имеем: $h_x - ih_y = 2\frac{\partial}{\partial z}h = g \in \mathcal{A}(D) \subset C^\infty(D)$. $\square$

Упражнение 15.1. Рассмотрим $h(z) = \ln|z| \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_\flat)$ (проверить!). Доказать, что не существует функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_\flat)$ такой, что $Re\, f = h$.

Упражнение 15.2. Для $h \in \mathcal{H}(D)$ в односвязной области D доказать потенциальность поля $\vec{a}(x,y) = (-h_y, h_x)$ и найти его потенциал v. Тогда функция $f(z) = h(x,y) + i\,v(x,y)$ подходит в качестве искомой в теореме 15.1.

Следствие 15.1.2. *(Внутренняя теорема единственности для ГрФ). Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $h \in \mathcal{H}(D)$. Пусть $K_h = \{a \in D \big| \vec{\nabla} h(a) = \vec{0}\}$ – совокупность критических точек функции h в D. Если K_h имеет в D хоть одну предельную точку, то $h \equiv const$ в D.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g = 2\frac{\partial}{\partial z}h$ – сопряженный градиент функции h. Тогда

$$g(a) = h_x(a) - ih_y(a) = 0\,,\ \forall a \in K_h.$$

По теореме единственности (примененной к голоморфной функции g), если K_h имеет предельную точку в D, то $g(z) \equiv 0$ в D. Но тогда $h_x \equiv 0$, $h_y \equiv 0$ в D, и, значит, $h(z) \equiv const$ в D. $\square$

Теорема 15.2. *(Теорема о среднем для ГрФ). Пусть $D = B(a,R)$ – открытый круг ($a \in \mathbb{C}$, $0 < R < +\infty$), $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда при любом $r \in (0,R]$ справедливо равенство:*

$$h(a) = \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\partial B(a,r)} h(z)\,|dz| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(a+re^{it})\,dt. \tag{15.1}$$

Доказательство. Пусть сначала $r \in (0,R)$. Найдем $f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $Re\, f = h$. По теореме о среднем для голоморфных функций имеем:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\partial B(a,r)} f(z)\,|dz|\,.$$

Остается взять вещественную часть от обеих частей последнего равенства.

Для случая $r = R$ нужно перейти к пределу в равенстве (15.1) при $r \to R-$, используя равномерную непрерывность h на $\overline{D}$. $\square$

Теорема 15.3. *(Принцип минимума-максимума для ГрФ). Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда $\forall\, z_0 \in D$ справедливы оценки:*

$$\min_{z\in\partial D} h(z) \leqslant h(z_0) \leqslant \max_{z\in\partial D} h(z)\,.$$

Если найдется $z_0 \in D$ с условием $h(z_0) = \min\limits_{z\in\partial D} h(z)$ $\big($или $h(z_0) = \max\limits_{z\in\partial D} h(z)\big)$, то $h \equiv const$ в D.

Доказательство. Пусть найдется $z_0 \in D$ такая, что $h(z_0) \geqslant \max\limits_{z\in\partial D} h(z)$. Пользуясь компактностью $\overline{D}$ и непрерывностью h на $\overline{D}$, мы можем без ограничения общности дополнительно считать, что $h(z_0) = \max\limits_{z\in\overline{D}} h(z)$. Пусть $R = \mathrm{d}(z_0, \partial D)$, тогда $B = B(z_0,R) \subset D$, $\overline{B} \subset \overline{D}$. Применяя теорему о среднем для h в B, нетрудно показать, что $h(z) \equiv h(z_0)$ в $\overline{B}$. Поскольку $\vec{\nabla} h = \vec{0}$ в B, по следствию 15.1.2 получаем, что $h(z) \equiv const$ в D (и по непрерывности, $h(z) \equiv const = h(z_0)$ в $\overline{D}$). Поэтому $h(z_0)$ не может быть строго больше, чем $\max\limits_{z\in\partial D} h(z)$, а в случае их равенства имеем $h(z) \equiv const$ в $\overline{D}$, что и требовалось доказать.

Ситуация, в которой найдется $z_0 \in D$ с условием $h(z_0) \leqslant \min\limits_{z\in\partial D} h(z)$, сводится к рассмотренной выше заменой $h(z)$ на $-h(z)$. $\square$

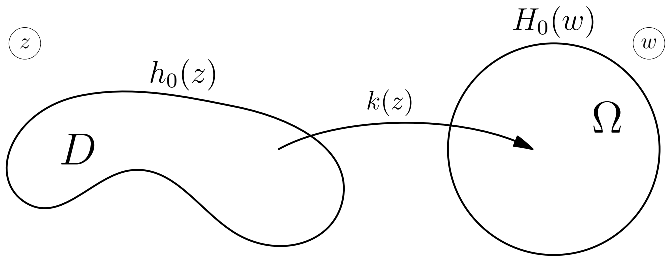

Рис. 15.1.

Следствие 15.3.1. *(Граничная теорема единственности для ГрФ). Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, а функции h_1 и h_2 принадлежат $\mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$. Если $h_1 \equiv h_2$ на ∂D, то $h_1 \equiv h_2$ в $\overline{D}$.*

Доказательство. Применяем теорему 15.3 к функции $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$. □

Теорема 15.4. *(Инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных). Пусть D и Ω – области в $\mathbb{C}$, $k : D \to \Omega$, $k \in \mathcal{A}(D)$. Пусть $H = H(w) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Тогда $h(z) = H(k(z)) \in \mathcal{H}(D)$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in D$, $w_0 = k(z_0) \in \Omega$. Выберем $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $B = B(z_0, \delta) \subset D$, $k(B) \subset B(w_0, \varepsilon) \subset \Omega$. По теореме 15.1 найдется функция $F(w) \in \mathcal{A}(B(w_0, \varepsilon))$ с условием $Re\, F = H$ в $B(w_0, \varepsilon)$. Тогда $f(z) = F(k(z)) \in \mathcal{A}(B)$ как композиция голоморфных функций. Отсюда $h = Re\, f \in \mathcal{H}(B)$. В силу произвольности $z_0 \in D$ получаем, что $h(z) = H\big(k(z)\big) \in \mathcal{H}(D)$. □

15.2. Задача Дирихле для ГрФ.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, $h_0 \in C(\partial D)$ – вещественнозначная функция. Требуется найти функцию $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ такую, что $h|_{\partial D} = h_0$.

Замечание. Сформулированная задача называется *задачей Дирихле (ЗД)* для ГрФ. По следствию 15.3.1, если ЗД разрешима для *граничной функции* $h_0 \in C(\partial D)$, то её решение единственно.

15.3. Решение ЗД методом конформных отображений.

Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$, $h_0 \in C(\partial D)$. Требуется решить ЗД.

Пусть Ω – другая жорданова область, k – конформный изоморфизм D на Ω, существующий по теореме Римана, который по теореме Каратеодори (обе теоремы будут доказаны в следующем семестре, а в конкретных задачах проверяются непосредственно) можно продолжить до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{\Omega}$. Определим $H_0(w) = h_0\big(k^{-1}(w)\big) \in C(\partial\Omega)$. Предположим, что мы умеем решать ЗД в области Ω для граничной функции H_0. Пусть $H(w)$ – это решение. Тогда из теоремы 15.4 следует, что функция $h(z) = H\big(k(z)\big)$ является решением исходной ЗД в D (см. рис. 15.1). Указанный метод применим, например, если Ω является кругом: для кругов в следующем семестре будет обоснован метод Фурье, а также установлена формула Пуассона решения ЗД при любой граничной функции.

15.4. Разложение ГрФ в ряд по однородным гармоническим полиномам.

Введем обозначение $B_r = B(0, r)$, $r > 0$.

Теорема 15.5. *(О разложении ГрФ в круге в ряд по однородным гармоническим полиномам). При фиксированных $R > 0$, $\varepsilon > 0$ пусть $h \in \mathcal{H}(B_{R+\varepsilon})$. Тогда в $\overline{B}_R$ функция h представляется в следующем виде:*

$$h(re^{i\varphi}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \big(A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)\big)\,,\ 0 \le r \le R\,, \tag{15.2}$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta)\, d\theta\ , \quad n \in \{0, 1, \dots\}\,; \tag{15.3}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta)\, d\theta\ , \quad n \in \{1, 2, \dots\}\,. \tag{15.4}$$

Доказательство. По теореме 15.1 существует единственная функция $f \in \mathcal{A}(B_{R+\varepsilon})$ с условием $Re\, f = h$, $f(0) = h(0)$.

Разложим f в ряд Тейлора с центром $z_0 = 0$:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = a_n + ib_n$, $c_0 = a_0$ (все a_n и b_n вещественны). При любом $r \in (0, R+\varepsilon)$, подставляя в последнее разложение $z = re^{i\varphi}$, находим:

$$f(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + ib_n) r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))\,.$$

Теперь приравняем в последнем разложении вещественные части:

$$h(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi))\,.$$

Все указанные разложения сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{B}_R$. Таким образом, установили (15.2) при $A_0 = 2a_0$, $A_n = a_n$, $B_n = -b_n$.

Возьмем теперь $z = Re^{i\varphi}$:

$$h(Re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} R^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi))\,.$$

Слева здесь стоит 2π-периодическая функция (от φ) класса C^∞, а справа – тригонометрический ряд, который должен совпадать с рядом Фурье этой функции: $a_0 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta})\, d\theta$,

$$a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta)\, d\theta\ \ , \quad -b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta)\, d\theta\ , \quad n \in \{1, 2, \dots\}\,,$$

откуда получаем (15.3) и (15.4). □

Замечание. Всякая вещественная линейная комбинация гармонических функций $Re\big((x+iy)^n\big) = Re\,(z^n) = r^n \cos(n\varphi)$ и $Im\big((x+iy)^n\big) = Im\,(z^n) = r^n \sin(n\varphi)$ называется *однородным гармоническим полиномом порядка* n (по переменным x, y).

Упражнение 15.3. Найти размерность пространства всех гармонических полиномов (по x, y) степени не выше $N, N \in \mathbb{N}$.