

ГЛАВА 1

Лекции и семинары, 2 семестр

§ 1.1. Решение задачи Дирихле для гармонических функций в круге

1.1.1. Разложение гармонических функций (ГрФ) в ряд по однородным гармоническим полиномам.

Введем обозначение $B_r = B(0, r)$, $r > 0$.

1.1.1. ТЕОРЕМА (О разложении ГрФ в круге в ряд по однородным гармоническим полиномам). *При фиксированных $R > 0$, $\varepsilon > 0$ пусть $h \in \mathcal{H}(B_{R+\varepsilon})$. Тогда в $\overline{B}_R$ функция h представляется в следующем виде (ряд (1.1.1) сходится абсолютно и равномерно на $\overline{B}_R$):*

$$h(re^{i\varphi}) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (1.1.1)$$

где коэффициенты ряда (1.1.1) находятся единственным образом:

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \{0, 1, \dots\}; \quad (1.1.2)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\}. \quad (1.1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме ?? существует единственная функция $f \in \mathcal{A}(B_{R+\varepsilon})$ с условиями $\operatorname{Re} f = h$, $f(0) = h(0)$. Разложим f в ряд Тейлора с центром $z_0 = 0$ (он сходится внутри $B_{R+\varepsilon}$ абсолютно и равномерно):

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = a_n + ib_n$, $c_0 = a_0$, и все a_n и b_n вещественны. При любом $r \in (0, R + \varepsilon)$, подставляя в последнее разложение $z = re^{i\varphi}$, находим

$$f(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + ib_n) r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Теперь приравняем в последнем разложении вещественные части:

$$h(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi)).$$

Все указанные разложения сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{B_R}$. Таким образом, установили (1.1.1) при $A_0 = 2a_0$, $A_n = a_n$, $B_n = -b_n$.

Пусть теперь есть *какое-то* разложение (1.1.1). При $z = Re^{i\varphi}$ имеем

$$h(Re^{i\varphi}) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} R^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)).$$

Слева здесь стоит 2π -периодическая функция (от φ) класса C^∞ , а справа — тригонометрический ряд, который должен совпадать с рядом Фурье этой функции:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) d\theta, \\ A_n R^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \\ B_n R^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\}, \end{aligned}$$

откуда получаем (1.1.2) и (1.1.3). □

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякая вещественная линейная комбинация гармонических функций $\operatorname{Re}((x + iy)^n) = \operatorname{Re}(z^n) = r^n \cos n\varphi$ и $\operatorname{Im}((x + iy)^n) = \operatorname{Im}(z^n) = r^n \sin n\varphi$ называется *однородным гармоническим полиномом порядка (степени) n* (по переменным x, y).

1.1.2. СЛЕДСТВИЕ. В обозначениях предыдущей теоремы и ее доказательства при $r \in (0, R)$ справедлива оценка

$$\|f\|_{\overline{B_r}} \leq \frac{R + 2r}{R - r} \|h\|_{\overline{B_R}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $M = \|h\|_{\overline{B_R}} = \|h\|_{\partial B_R}$ (по принципу максимума). Из формул (1.1.2) и (1.1.3) имеем

$$|a_0| = \frac{|A_0|}{2} \leq M, \quad |a_n| \leq \frac{2M}{R^n}, \quad |b_n| \leq \frac{2M}{R^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда

$$|c_n| = |a_n + ib_n| \leq \frac{2\sqrt{2}M}{R^n} < \frac{3M}{R^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при всех $r < R$ получаем

$$|f(re^{i\theta})| \leq M \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 3 \frac{r^n}{R^n} \right) \leq M \left(1 + 3 \frac{r}{R - r} \right) = M \frac{R + 2r}{R - r},$$

что и требовалось. $\square$

1.1.3. СЛЕДСТВИЕ (Аналог теоремы Вейерштрасса для ГрФ). Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\{h_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{H}(D)$, $h_n \rightrightarrows h$ в D при $n \rightarrow +\infty$. Тогда $h \in \mathcal{H}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем такие произвольные точку $a \in D$ и число $R > 0$, что $\overline{B(a, R)} \subset D$. Пусть $r \in (0, R)$. Достаточно установить, что $h \in \mathcal{H}(B(a, r))$.

По условию, $h_n \rightrightarrows h$ на $\overline{B(a, R)}$ при $n \rightarrow +\infty$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдем функции $f_n \in \mathcal{A}(B(a, R))$ с условиями $\operatorname{Re}(f_n) = h_n$ и $f_n(a) = h_n(a)$. По следствию 1.1.2, для всех n и n' из $\mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|f_n - f_{n'}\|_{\overline{B(a, r)}} \leq \frac{R + 2r}{R - r} \|h_n - h_{n'}\|_{\overline{B(a, R)}}.$$

Последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна по равномерной норме на компакте $\overline{B(a, r)}$, откуда следует, что $f_n \rightrightarrows f$ на $B(a, r)$ при $n \rightarrow +\infty$ для некоторой функции $f \in \mathcal{A}(B(a, r))$ (по теореме Вейерштрасса для голоморфных функций). Откуда $h = \operatorname{Re} f \in \mathcal{H}(D)$. $\square$

1.1.2. Метод Фурье и формула Пуассона для решения задачи Дирихле (ЗД) в круге.

1.1.4. ТЕОРЕМА (Метод Фурье для решения ЗД в круге). В круге $B_R = B(0, R)$ всякая задача Дирихле разрешима, т. е. для любой функции $h_0 \in C(\partial B_R)$ найдется $h \in \mathcal{H}(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$ с условием $h|_{\partial B_R} = h_0$. Функция h при $z = re^{i\varphi}$ задается по формулам

$$h(z) = \begin{cases} h_0(Re^{i\varphi}), & \text{если } r = R, \\ A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), & \text{если } r < R, \end{cases} \quad (1.1.4)$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \{0, 1, \dots\}, \quad (1.1.5)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\}. \quad (1.1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H_0(\varphi) = h_0(Re^{i\varphi})$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Тогда $H_0 \in C([-\pi, \pi])$ и $H_0(-\pi) = H_0(\pi)$. Рассмотрим сначала случай, когда $H_0 \in C^2([-\pi, \pi])$ и $H_0(-\pi) = H_0(\pi)$, $H'_0(-\pi) = H'_0(\pi)$. В этих условиях, дважды интегрируя по частям, при $n \geq 1$ получаем

$$|A_n| = \frac{1}{\pi R^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\theta) \cos(n\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\pi n^2 R^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} H''_0(\theta) \cos(n\theta) d\theta \right|,$$

$$|B_n| = \frac{1}{\pi R^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\theta) \sin(n\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\pi n^2 R^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} H_0''(\theta) \sin(n\theta) d\theta \right|,$$

откуда $|A_n| + |B_n| \leq M_0/(n^2 R^n)$, где

$$M_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_0''(\theta)| d\theta.$$

Таким образом, ряд

$$h(re^{i\varphi}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi))$$

сходится абсолютно и равномерно на $\bar{B}_R$ по признаку Вейерштрасса (с мажорирующим рядом $|A_0|/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} M_0/n^2$). Тот факт, что $h(Re^{i\varphi}) = H_0(\varphi) = h_0(Re^{i\varphi})$ вытекает из равенства Парсеваля (базисности тригонометрической системы в $L^2([-\pi, \pi])$). Следовательно, функция $h(z)$ является решением нужной ЗД.

1.1.5. ЛЕММА. Пусть $H_0 \in C([-\pi, \pi])$ — произвольная вещественная функция с условием $H_0(-\pi) = H_0(\pi)$. Тогда существует такая последовательность $\{H_{0m}\}_{m=1}^{+\infty}$ вещественных функций класса $C^2([-\pi, \pi])$, что $H_{0m}(-\pi) = H_{0m}(\pi)$, $H'_{0m}(-\pi) = H'_{0m}(\pi)$ и $H_{0m} \rightrightarrows H_0$ на $[-\pi, \pi]$ при $m \rightarrow +\infty$.

Приведем доказательство этой леммы. Пусть $\psi(t) = I^{-1}(1 - t^2)^3$ на $[-1, 1]$ и $\psi(t) = 0$ вне $[-1, 1]$, где $I = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^3 dt$. Легко установить, что $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1$. Положим $\psi_m(t) = m\psi(mt)$. Тогда $\psi_m \in C^2(\mathbb{R})$ и для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_m(\varphi - t) dt = \int_{\varphi-1/m}^{\varphi+1/m} \psi_m(\varphi - t) dt = 1.$$

Продолжим H_0 до 2π -периодической функции с отрезка $[-\pi, \pi]$ на $\mathbb{R}$. В качестве искомым функций H_{0m} берем

$$H_{0m}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \psi_m(\varphi - t) H_0(t) dt, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Возможность двойного дифференцирования по параметру φ в последнем интеграле очевидна. Наконец, для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$|H_{0m}(\varphi) - H_0(\varphi)| = \left| \int_{\varphi-1/m}^{\varphi+1/m} \psi_m(\varphi - t) (H_0(t) - H_0(\varphi)) dt \right| \leq \omega_{\mathbb{R}}(H_0, 1/m),$$

что стремится к 0 при $m \rightarrow +\infty$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 1.1.4. Пусть в обозначениях последней леммы $h_{0m}(Re^{i\varphi}) = H_{0m}(\varphi)$. По доказанному выше существуют

h_m — решения ЗД для h_{0m} . По принципу минимума-максимума в $\overline{B}_R$ для всех $m, m' \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|h_m - h_{m'}\|_{\overline{B}_R} \leq \|h_{0m} - h_{0m'}\|_{\partial B_R}.$$

Следовательно, $h_m \rightrightarrows h$ на $\overline{B}_R$ при $m \rightarrow +\infty$, причем h лежит в классе $C(\overline{B}_R) \cap \mathcal{H}(B_R)$ по следствию 1.1.3 и $h|_{\partial B_R} = h_0$, так что h — иско-мое решение ЗД. Остается установить, что оно задается по формулам (1.1.4)-(1.1.6) при $r < R$. Здесь надо воспользоваться теоремой 1.1.1 для найденной h в кругах $B_{R(1-1/p)}$ ($p \in \{2, 3, \dots\}$) и устремить $p \rightarrow +\infty$. $\square$

1.1.6. ТЕОРЕМА (Формула Пуассона для решения задачи Дирихле в круге $B_R = B(0, R)$). *Решение ЗД в круге B_R с граничной функцией $h_0 \in C(\partial B_R)$ имеет вид (при $z = re^{i\varphi}$)*

$$h(z) = \begin{cases} h_0(z), & \text{если } r = R, \\ \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{(R^2 - |z|^2)h_0(\zeta)}{|\zeta - z|^2} |d\zeta|, & \text{если } r < R. \end{cases}$$

При этом вторую часть предыдущей формулы можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{(R^2 - |z|^2)h_0(\zeta)}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h_0(Re^{i\theta})}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\theta,$$

где последнее равенство получено применением формулы $|d\zeta| = R d\theta$ и теоремы косинусов в треугольнике с вершинами 0 , $\zeta = Re^{i\theta}$ и $z = re^{i\varphi}$.

Функция $P(z, \zeta) = (2\pi R)^{-1}(R^2 - |z|^2)/|\zeta - z|^2$ называется *ядром Пуассона* для круга B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (1.1.5) и (1.1.6) в (1.1.4) при произвольном фиксированном $r \in (0, R)$ (см. обозначения теоремы 1.1.4; перестановка сумм и интегралов правомерна ввиду равномерной сходимости возникающих рядов):

$$\begin{aligned} h(re^{i\varphi}) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (\cos(n\theta) \cos(n\varphi) + \sin(n\theta) \sin(n\varphi)) \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \theta) \right] d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \left[\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^n \right] d\theta = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \left[\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\frac{z}{\zeta - z} \right) \right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \frac{\operatorname{Re}((\zeta + z)(\bar{\zeta} - \bar{z}))}{|\zeta - z|^2} d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} h_0(\zeta) \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} |d\zeta|
\end{aligned}$$

□

1.1.7. СЛЕДСТВИЕ. Из метода конформных отображений (а также теорем Римана и Каратеодори, излагаемых далее) и предыдущей теоремы вытекает разрешимость всякой ЗД в любой жордановой области.

Отметим, что при применении формулы Пуассона можно пользоваться функцией Шварца $S(\zeta) = R^2/\zeta$ круга B_R и методом вычетов, поскольку при $z \in B_R$, $\zeta = Re^{i\theta} \in \partial B_R$ имеем $|d\zeta| = Rd\theta = Rd\zeta/(i\zeta)$ и $|\zeta - z|^2 = (\zeta - z)(R^2/\zeta - \bar{z})$.

§ 1.2. Логарифмические вычеты. Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Однолистные функции

1.2.1. Теорема о логарифмических вычетах.

Через $\mathcal{A}(G)$ обозначается пространство всех голоморфных функций на открытом множестве G в $\mathbb{C}$.

1.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, $f \in \mathcal{A}(B'(a, \delta))$ и $f \neq 0$ в $B'(a, \delta)$. Тогда определен

$$\text{Lres}_a(f) := \text{res}_a \left(\frac{f'}{f} \right)$$

— логарифмический вычет функции f в точке a .

1.2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (1) Если $f \in \mathcal{A}(B(a, \delta))$ и a — нуль функции f порядка n ($n \in \{0, 1, \dots\}$), то

$$\text{Lres}_a(f) = n.$$

(2) Если $f \in \mathcal{A}(B'(a, \delta))$ и a — полюс функции f порядка $p \geq 1$, то

$$\text{Lres}_a(f) = -p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (1). По теореме о нулях найдутся такие число $\delta_1 \in (0, \delta)$ и функция $g \in \mathcal{A}(B(a, \delta_1))$, $g(z) \neq 0$ в $B(a, \delta_1)$, что $f(z) = (z - a)^n g(z)$ в $B(a, \delta_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Lres}_a(f) &= \text{res}_a \left(\frac{n(z - a)^{n-1} g(z) + (z - a)^n g'(z)}{(z - a)^n g(z)} \right) = \\ &= \text{res}_a \left(\frac{n}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right) = n, \end{aligned}$$

поскольку $g'/g \in \mathcal{A}(B(a, \delta_1))$. Свойство (2) доказывается аналогично. $\square$

1.2.3. ТЕОРЕМА (О логарифмических вычетах). Пусть D — допустимая область в $\mathbb{C}$, U — окрестность $\bar{D}$, $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_J\} \subset D$, $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_M\} \subset D$. Пусть $f \in \mathcal{A}(U \setminus \mathfrak{B})$, b_m — полюс функции f порядка $p_m \geq 1$ ($m \in \{1, \dots, M\}$); a_j — нуль функции f порядка $n_j \geq 1$ ($j \in \{1, \dots, J\}$), причем $f(z) \neq 0$ при $z \in U \setminus \mathfrak{A}$.

Положим

$$N_D(f) = \sum_{j=1}^J n_j, \quad P_D(f) = \sum_{m=1}^M p_m.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial+D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_D(f) - P_D(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно применить теорему Коши о вычетах к функции $f'(z)/f(z)$ в области D (формально только для простых областей), используя результат предложения 1.2.2. $\square$

1.2.2. Принцип аргумента и теорема Руше.

1.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ — путь, $[\gamma] = \gamma([\alpha, \beta])$, $f \in C([\gamma])$, $f: [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрим путь $w = \sigma(t) = f(\gamma(t))|_{[\alpha, \beta]}$. Величина $\Delta_\gamma \text{Arg}(f) := \Delta_\sigma \text{Arg}(w)$ называется *приращением (полярного) аргумента функции f вдоль пути γ* .

1.2.5. УПРАЖНЕНИЕ. В условиях предыдущего определения доказать, что если $\gamma_0 \simeq \gamma$, то $\Delta_{\gamma_0} \text{Arg}(f) = \Delta_\gamma \text{Arg}(f)$.

Следовательно, корректно определена величина $\Delta_{\{\gamma\}} \text{Arg}(f)$, где $\{\gamma\}$ — непрерывная кривая, определяемая путем γ . Если при этом $\{\gamma\} = \{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\}$ (конец γ_1 совпадает с началом γ_2), то $\Delta_{\{\gamma\}} \text{Arg}(f) = \Delta_{\{\gamma_1\}} \text{Arg}(f) + \Delta_{\{\gamma_2\}} \text{Arg}(f)$.

1.2.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если определены $\Delta_\gamma \text{Arg}(f_1)$ и $\Delta_\gamma \text{Arg}(f_2)$, то определено значение $\Delta_\gamma \text{Arg}(f_1 f_2)$, равное $\Delta_\gamma \text{Arg}(f_1) + \Delta_\gamma \text{Arg}(f_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ ветви аргументов для путей $w_1(t) = f_1(\gamma(t))$ и $w_2(t) = f_2(\gamma(t))$, то $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ — непрерывная на $[\alpha, \beta]$ ветвь аргумента для пути $w(t) = f_1(\gamma(t))f_2(\gamma(t))$. $\square$

1.2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Γ — спрямляемая замкнутая кривая в $\mathbb{C}$, U — некоторая окрестность $[\Gamma]$. Пусть $f \in \mathcal{A}(U)$, $f(z) \neq 0$ на $[\Gamma]$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \text{Arg}(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Пусть путь $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ — представитель Γ и $\sigma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Найдем натуральное N такое, что разбиение $\{\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ на N равных частей обладает следующим свойством: для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$ путь $\sigma_n := \sigma|_{[\alpha_{n-1}, \alpha_n]}$ удовлетворяет условию $[\sigma_n] \subset V_n$, где выбор $V_n = \mathbb{C}_-$ или $V_n = \mathbb{C}_+$ фиксируем (это можно сделать в силу равномерной непрерывности σ на $[\alpha, \beta]$). Далее, в силу непрерывности f в U для каждого рассматриваемого n найдется такая окрестность $U_n \subset U$ компакта $[\gamma_n]$ ($\gamma_n = \gamma|_{[\alpha_{n-1}, \alpha_n]}$, $\sigma_n = f(\gamma_n)$), что выполнено включение $f(U_n) \subset V_n$.

Положим

$$\ln_{(n)}(f(z)) = \ln|f(z)| + i \arg_{(n)}(f(z)) = \begin{cases} \ln_{(0, 2\pi)}(f(z)), & z \in U_n, V_n = \mathbb{C}_+, \\ \ln_{(-\pi, \pi)}(f(z)), & z \in U_n, V_n = \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Тогда $\ln f(z) \in \mathcal{A}(U_n)$ и мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\gamma_n} (\ln(f(z)))' dz = \ln(f(z)) \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} = \\ &= \ln |f(z)| \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} + i \arg(f(z)) \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} = \ln |f(z)| \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)} + i \Delta_{\gamma_n} \operatorname{Arg}(f). \end{aligned}$$

Суммируя по $n = 1, \dots, N$ и деля обе части на $2\pi i$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \operatorname{Arg}(f),$$

так как в силу замкнутости пути γ слагаемые $\ln |f(z)| \Big|_{\gamma(\alpha_{n-1})}^{\gamma(\alpha_n)}$ взаимно уничтожаются. $\square$

1.2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — допустимая область ранга $S \geq 1$ ($\partial^+ D = \Gamma_1^+$ при $S = 1$, $\partial^+ D = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^- \cup \dots \cup \Gamma_S^-$ при $S \geq 2$ как раньше). При $S \geq 2$ положим по определению

$$\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f) := \Delta_{\Gamma_1^+} \operatorname{Arg}(f) + \sum_{s=2}^S \Delta_{\Gamma_s^-} \operatorname{Arg}(f),$$

если все слагаемые в последней сумме определены.

1.2.9. ТЕОРЕМА (Принцип аргумента). В условиях теоремы 1.2.3 и в обозначениях определения 1.2.8 верно следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f) = N_D(f) - P_D(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из теоремы 1.2.3 и предположений 1.2.2 и 1.2.7. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как будет установлено ниже, принцип аргумента остается справедливым в более общем случае: когда D ограничена конечным числом попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых (не обязательно спрямляемых), $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{B})$ ($\mathfrak{B}$ — конечное множество полюсов функции f в D), f непрерывна в $D \setminus \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset D$ — конечное множество нулей функции f в $\bar{D}$.

1.2.10. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать принцип аргумента в предыдущей (усиленной) формулировке для простейших областей (без условия спрямляемости границы).

Указание. Воспользоваться идеей доказательства предложения ?? (и затем рассмотреть области, ограниченные вписанными ломаными).

1.2.11. ТЕОРЕМА (Руше). Пусть D — допустимая область в $\mathbb{C}$, U — некоторая окрестность $\bar{D}$ и пусть $f, g \in \mathcal{A}(U)$, причем

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \partial D. \quad (1.2.1)$$

Тогда

$$N_D(f + g) = N_D(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.2.9 имеем

$$\begin{aligned} N_D(f + g) &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f + g) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f(1 + g/f)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(1 + g/f) = \\ &= N_D(f) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(1 + g/f). \end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f)$ и $\Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(1 + g/f)$ определены, поскольку функции f и $(1 + g/f)$ не обращаются в нуль на ∂D в силу (1.2.1).

В обозначениях определения 1.2.8 остается показать, что

$$\Delta_{\Gamma_s^+} \operatorname{Arg}(1 + g/f) = 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}.$$

Пусть γ_s^+ — представитель Γ_s^+ , с параметром $t \in [\alpha_s, \beta_s]$. Положим $\sigma_s^+ = (1 + g/f) \circ \gamma_s^+$. Тогда, по определению,

$$\Delta_{\Gamma_s^+} \operatorname{Arg}(1 + g/f) = \Delta_{\sigma_s^+} \operatorname{Arg}(w).$$

Поскольку $\gamma_s^+(t) \in \partial D$, а $|g/f| < 1$ на ∂D по условию, мы видим, что $[\sigma_s^+]$ лежит в правой полуплоскости. Поэтому, в качестве непрерывной ветви (полярного) аргумента вдоль σ_s^+ можно взять $\arg(\sigma_s^+(t))$ на $[\alpha_s, \beta_s]$. Тогда $\Delta_{\sigma_s^+} \operatorname{Arg}(w) = \arg(\sigma_s^+(\beta_s)) - \arg(\sigma_s^+(\alpha_s)) = 0$ ввиду замкнутости кривой Γ_s^+ . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ниже будет доказано, что утверждение теоремы Руше верно для любой области D , ограниченной конечным числом попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых, и для любых функций $f, g \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ с условием $|g| < |f|$ на ∂D .

1.2.12. ПРИМЕР. Пусть

$$p(z) = z^7 + 5z + 1, \quad D_1 = \{|z| < 1\}, \quad D_2 = \{|z| < 2\}.$$

Найдем $N_{D_1}(p)$ и $N_{D_2}(p)$.

1) Имеем $\partial D_1 = \{|z| = 1\}$. Положим $f_1(z) = 5z$, $g_1(z) = z^7 + 1$. Тогда $|g_1(z)| \leq 2 < 5 = |f_1(z)|$ на ∂D_1 и, следовательно, $N_{D_1}(p) = N_{D_1}(f_1) = 1$.

2) Здесь $\partial D_2 = \{|z| = 2\}$. Возьмем $f_2(z) = z^7$, $g_2(z) = 5z + 1$. Тогда $|g_2(z)| \leq 11 < 2^7 = |f_2(z)|$ на ∂D_2 , поэтому $N_{D_2}(p) = N_{D_2}(f_2) = 7$.

1.2.13. УПРАЖНЕНИЕ. Дано дифференциальное уравнение

$$y''' + py'' + qy' + 12y = 0.$$

Для всех вещественных пар (p, q) исследовать решение $y(t) \equiv 0$ на асимптотическую устойчивость.

Указание 1: Если многочлен $p(z) = z^3 + pz^2 + qz + 12$ имеет (разные) корни z_1, z_2, z_3 в $\mathbb{C}$, то общее решение нашего уравнения имеет вид

$C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + C_3 e^{z_3 t}$ (случай кратных корней рассмотреть отдельно). Во всех случаях нужно искать пары (p, q) , при которых все три корня многочлена лежат в левой полуплоскости.

Указание 2: Применить принцип аргумента для многочлена p в области $D = B(0, R) \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$, $R \gg 1$.

На теорему Руше опирается следующая важная в приложениях теорема.

1.2.14. ТЕОРЕМА (Принцип сохранения области). Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, $f \neq \text{const}$. Тогда $\Omega = f(D)$ — область.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связность Ω очевидна из того факта, что любые две точки в Ω можно соединить образом кривой, соединяющей соответствующие точки в D . Докажем открытость Ω .

Зафиксируем $w_0 \in \Omega$. Тогда $f(z_0) = w_0$ для некоторой точки $z_0 \in D$. Положим $f_1(z) = f(z) - w_0$, $f_1 \neq \text{const}$ в D . Так как z_0 — изолированный нуль f_1 , найдется $\delta > 0$, для которого круг $B = B(z_0, \delta)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\overline{B} \subset D$,
- 2) $\varepsilon = \min_{z \in \partial B} |f_1(z)| > 0$.

Докажем, что $B(w_0, \varepsilon) \subset \Omega$, т. е. для каждого $w \in B(w_0, \varepsilon)$ функция

$$f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) = f_1(z) + (w_0 - w)$$

имеет хотя бы один нуль в D . Но последнее сразу следует из теоремы Руше в B , которую можно применить (проверить это) к функциям f_1 и $g_1 = (w_0 - w)$, а именно поскольку z_0 — нуль функции f_1 в B ,

$$N_B(f_1 + (w_0 - w)) = N_B(f_1) \geq 1.$$

Теорема доказана. □

1.2.3. Однолистные функции.

1.2.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, f инъективна в D . Тогда f называется *однолистной* в D .

1.2.16. ЛЕММА. Если f однолистна в области $D \subset \mathbb{C}$, то f — гомеоморфизм D на $f(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Биективность следует из определения однолистности; прообраз всякого открытого множества открыт, поскольку $f \in \mathcal{A}(D) \subset C(D)$; образ всякого открытого множества открыт по теореме 1.2.14. □

1.2.17. ЛЕММА. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq 0$ в D . Тогда многозначная функция $\operatorname{Ln}(f(z))$ имеет голоморфную в D ветвь $h(z)$, т. е. найдется $h \in \mathcal{A}(D)$ с условием $e^{h(z)} \equiv f(z)$ в D . Кроме того, для каждого натурального $n \geq 2$ существует голоморфная

в D ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$, в качестве которой можно взять функцию $e^{h(z)/n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $f'(z)/f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Согласно теореме о первообразной в односвязной области найдется такая функция $g \in \mathcal{A}(D)$, что $g'(z) = f'(z)/f(z)$ в D . Зафиксируем $a \in D$ и положим $h = g - g(a) + \ell_a$, где $\ell_a \in \text{Ln}(f(a))$ также фиксируется.

Множество E точек из D , в которых $h(z) \in \text{Ln}(f(z))$, открыто и замкнуто в D (проверить!), а также непусто (поскольку $h(a) \in \text{Ln}(f(a))$). Следовательно, E совпадает с D . $\square$

1.2.18. ЛЕММА. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(a)$ (т.е. найдется $r > 0$ такое, что $f \in \mathcal{A}(B(a, r))$). Пусть $f'(a) = 0$. Тогда f не может быть однолистной ни в какой окрестности точки a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(z) - f(a)$ имеет в точке a нуль бесконечного порядка, то $f(z) \equiv f(a)$ в некоторой окрестности точки a , и значит функция f не инъективна ни в какой окрестности.

Пусть теперь a — нуль конечного порядка p для $f(z) - f(a)$. Ясно, что $p \geq 2$. По теореме о нулях найдется $g \in \mathcal{A}(B(a, r))$ с условиями

$$f(z) - f(a) = (z - a)^p g(z), \quad g(a) = w_0 \neq 0.$$

Пусть $\delta \in (0, r)$ таково, что $g(z) \neq 0$ в $B = B(a, \delta)$. По лемме 1.2.17 существует голоморфная ветвь $g_1(z)$ многозначной функции $\sqrt[p]{g(z)}$ в B . Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = (z - a)g_1(z) \in \mathcal{A}(B), \quad f_1(a) = 0, \quad f'_1(a) = g_1(a) \neq 0.$$

Так как $f_1 \not\equiv \text{const}$ в B , к ней применима теорема 1.2.14 о сохранении области: вместе с точкой $0 = f_1(a)$ в образе $f_1(B)$ лежит некоторая окрестность нуля $B(0, \varepsilon)$ ($\varepsilon = \varepsilon(\delta)$), а в ней p различных корней p -й степени из некоторого числа $w \neq 0$ ($w_k \in B(0, \varepsilon)$, $w_k^p = w$, $k \in \{0, \dots, p-1\}$). Наконец, найдутся $z_k \in B$, для которых $f_1(z_k) = w_k$, $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Поскольку $f(z) = f(a) + (f_1(z))^p$, имеем $f(z_0) = \dots = f(z_{p-1})$. Так как $\delta > 0$ можно взять произвольно малым, f не инъективна ни в какой окрестности точки a . $\square$

1.2.19. ТЕОРЕМА (О конформности однолистных функций). Пусть функция f однолистка в области D . Тогда f конформна в D (т.е. f взаимно однозначна и $f'(z) \neq 0$ в D). Более того, f — конформный изоморфизм D на $f(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.2.16 функция f является гомеоморфизмом D на $f(D)$. По лемме 1.2.18 $f'(z) \neq 0$ во всех точках $z \in D$. По теореме об обратной функции $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ тоже голоморфна и является конформной, так как $(f^{-1})'(w_0) = 1/(f'(z_0)) \neq 0$ для всякой точки $w_0 = f(z_0) \in f(D)$. $\square$

1.2.20. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$ и $\operatorname{Re} f'(z) \geq 0$ всюду в D . Доказать, что f либо однолистка в D , либо постоянна.

1.2.21. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть D — строго выпуклая жорданова область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$ и пусть $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ в D . Тогда f однолистка в D и гомеоморфна на $\overline{D}$.

§ 1.3. Критерии локальной однолиственности и обратимости.

Обратный принцип соответствия границ. Принцип симметрии. Теорема Гурвица о нулях и теорема о сходящейся последовательности однолистных функций

1.3.1. Локальная однолиственность и локальная обратимость функции.

1.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что функция f *однолистка в точке* $a \in \mathbb{C}$, если f голоморфна и однолистка в некоторой окрестности этой точки.

1.3.2. ТЕОРЕМА. Функция $f \in \mathcal{A}(a)$ *однолистка в точке* $a \in \mathbb{C}$ *тогда и только тогда, когда* $f'(a) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $(\Rightarrow)$ следует из леммы 1.2.18 от противного.

Докажем $(\Leftarrow)$. По теореме о бесконечной дифференцируемости голоморфных функций найдется такое число $r > 0$, что $f \in \mathcal{A}(B(a, r))$ и $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|/2$ для всех $z \in B(a, r)$. Тогда для любых $z_1 \neq z_2$ из $B(a, r)$ по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{[z_1, z_2]} (f'(z) - f'(a) + f'(a)) dz,$$

откуда

$$|(f(z_2) - f(z_1)) - f'(a)(z_2 - z_1)| \leq |f'(a)(z_2 - z_1)|/2$$

и, следовательно, $f(z_2) - f(z_1) \neq 0$, что и требовалось. $\square$

1.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f называется *локально-однолистной* в области $D \subseteq \mathbb{C}$, если f однолистка в каждой точке $z \in D$ (т. е. $f \in \mathcal{A}(D)$ и $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in D$).

1.3.4. ПРИМЕР. Пусть $f(z) = z^3$, $D = \Pi_+$. Тогда функция f является локально-однолистной в D , так как $f'(z) = 3z^2 \neq 0$ в D , но f не однолистка в D , ибо она там не инъективна. Отметим, что при этом f гомеоморфно переводит ∂D на себя.

1.3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(a)$; функция f называется *локально обратимой* в точке a , если найдутся область U_a , содержащая точку a , в которой $f \in \mathcal{A}(U_a)$, и функция $g \in \mathcal{A}(f(U_a))$ такие, что $g(f(z)) = z$ для всех $z \in U_a$.

1.3.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Голоморфная в точке a функция f обратима в этой точке в точности тогда, когда f однолистка в точке a (равносильное условие: $f'(a) \neq 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $(\Leftarrow)$ непосредственно следует из теоремы 1.2.19 (f является конформным изоморфизмом некоторой связной окрестности точки a на ее образ).

Докажем ($\Rightarrow$) от противного. Пусть f не однолистна в точке a , тогда она не инъективна ни в какой ее связной окрестности U_a , т. е. в любой окрестности U_a точки a найдутся точки z_1 и z_2 с условием $z_1 \neq z_2$, но $f(z_1) = f(z_2)$. Тогда для любой функции $g \in \mathcal{A}(f(U_a))$ имеем равенство $g(f(z_1)) = g(f(z_2))$, которое противоречит условию обратимости функции f в точке a . $\square$

1.3.2. Обратный принцип соответствия границ.

1.3.7. ТЕОРЕМА (Обратный принцип соответствия границ). Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$, $\Gamma^+ = \partial^+ D$. Пусть f инъективно отображает $[\Gamma^+]$ на $f([\Gamma^+])$ ($\Sigma = f(\Gamma^+)$ — тоже замкнутая жорданова кривая). Пусть Ω — жорданова область, ограниченная кривой $[\Sigma]$ (по теореме Жордана). Тогда f конформно (однолистно) отображает D на Ω , причем $\Sigma = \partial^+ \Omega$, т. е. Σ положительно ориентирована относительно Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $b \in \mathbb{C} \setminus [\Sigma]$. Воспользуемся принципом аргумента (в усиленной форме) в $\bar{D}$ для функции $f(z) - b \neq 0$ на ∂D . Учитывая, что $P_D(f - b) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq N_D(f(z) - b) &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma^+} \operatorname{Arg}(f(z) - b) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Sigma-b} \operatorname{Arg}(w) = \\ &= \operatorname{ind}_{\Sigma}(b) = \begin{cases} \pm 1, & b \in \Omega, \\ 0, & b \notin \Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Значит, для всех $b \in \Omega$ одновременно имеем $\operatorname{ind}_{\Sigma}(b) \geq 0$ и $\operatorname{ind}_{\Sigma}(b) = \pm 1$. Следовательно, $\operatorname{ind}_{\Sigma}(b) = 1$ для всех $b \in \Omega$, т. е. $f(\Gamma^+)$ положительно ориентирована относительно Ω . Из последнего получаем, что для любого $b \in \Omega$ существует единственное $z \in D$ с условием $f(z) = b$. Кроме того, $N_D(f - b) = 0$ для всех $b \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$, откуда следует, что $f: D \rightarrow \Omega$ — биекция. Остается применить теорему 1.2.19. $\square$

1.3.3. Принцип симметрии Римана — Шварца.

1.3.8. ТЕОРЕМА (Принцип симметрии). Пусть γ и Γ — обобщенные окружности в $\mathbb{C}^\bullet$, а γ_1 и Γ_1 — связные открытые непустые дуги в γ и в Γ соответственно.

Пусть D_1 и Ω_1 — области в $\mathbb{C}^\bullet$, лежащие по одну сторону от γ и от Γ соответственно, причем $\gamma_1 \subset \partial^\bullet D_1$, $\Gamma_1 \subset \partial^\bullet \Omega_1$ (см. рис. 3.1).

Обозначим через D_1^* и Ω_1^* области, симметричные D_1 и Ω_1 относительно γ и Γ соответственно. Еще потребуем, чтобы $D = D_1 \sqcup \gamma_1 \sqcup D_1^*$ и $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Gamma_1 \sqcup \Omega_1^*$ являлись областями в $\mathbb{C}^\bullet$.

Пусть f_1 конформно отображает D_1 на Ω_1 , причем f_1 непрерывна на $D_1 \sqcup \gamma_1$ (в топологии $\mathbb{C}^\bullet$) и $f_1(\gamma_1) = \Gamma_1$.

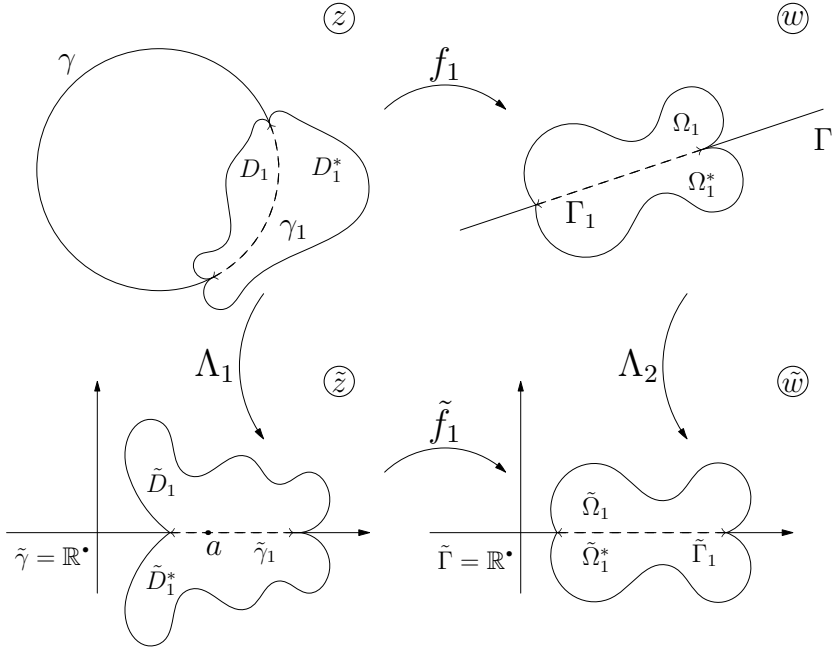


Рис. 3.1.

Тогда отображение f_1 продолжается (единственным образом) до конформного отображения f области D на область Ω по формуле

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \sqcup \gamma_1, \\ (f_1(z^*))^*, & z \in D_1^*. \end{cases}$$

В последней строчке внутренняя звездочка обозначает симметрию относительно γ , а внешняя — относительно Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем такие ДЛО Λ_1 , отображающее γ на $\mathbb{R}^\bullet$, и ДЛО Λ_2 , отображающее Γ на $\mathbb{R}^\bullet$, что $\Lambda_1(D_1)$ и $\Lambda_2(\Omega_1)$ лежат в верхней полуплоскости. Пусть каждый из объектов E в формулировке нашей теоремы при действии отображения Λ_1 (или Λ_2) переходит в объект $\tilde{E}$ (например, $\Lambda_1(D_1) = \tilde{D}_1$, $\Lambda_2(\Omega_1) = \tilde{\Omega}_1$).

Определим $\tilde{f}_1(\tilde{z}) = \Lambda_2 \circ f_1 \circ \Lambda_1^{-1}(\tilde{z})$, $\tilde{z} \in \tilde{D}_1 \cup \tilde{\gamma}_1$. Тогда для функции $\tilde{f}$ выполнены все условия нашей теоремы с заменой прежних объектов на объекты «с волной». Теперь, если $\tilde{f}$ — найденное продолжение $\tilde{f}_1$, то $f(z) = \Lambda_2^{-1} \circ \tilde{f} \circ \Lambda_1(z)$ — искомое продолжение f_1 . Поэтому достаточно

доказать теорему для случая, когда $\gamma = \Gamma = \mathbb{R}^\bullet$. Будем считать, что так было изначально, чтобы не перегружать обозначения.

Ниже мы предполагаем, что $\gamma_1 \subset \mathbb{R}$ и $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}$. Оставшийся вариант, когда $\gamma_1 = \mathbb{R}^\bullet$ или $\Gamma_1 = \mathbb{R}^\bullet$, оставляем читателю.

В рассматриваемой ситуации симметрия относительно $\gamma = \Gamma$ равносильна комплексному сопряжению. Определим

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \sqcup \gamma_1, \\ f_1(\bar{z}), & z \in D_1^*. \end{cases}$$

Если $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ в окрестности точки $z_0 \in D_1$, то $f_1(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{c}_n(z - \bar{z}_0)^n$ в окрестности точки $\bar{z}_0 \in D_1^*$ (и радиусы сходимости этих рядов равны). Поэтому отображение $f(z)$, определенное выше, голоморфно в $D_1 \sqcup D_1^*$. Кроме того, f непрерывно в D . Поэтому по теореме Морера $f \in \mathcal{A}(D)$. Наконец, f взаимно-однозначно переводит $D_1 \sqcup D_1^*$ на $\Omega_1 \sqcup \Omega_1^*$. Осталось доказать, что f взаимно-однозначна на γ_1 (тогда конформность f в D будет следовать из однолиственности). Для этого достаточно проверить, что $f'(a) \neq 0$ для всех $a \in \gamma_1$. Напомним, что $f_1|_{\gamma_1}: \gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ есть дифференцируемая функция из γ_1 в $\mathbb{R}$.

Предположим, что найдется точка $a \in \gamma_1$ с условием $f'(a) = 0$. Пусть $p \geq 2$ — порядок нуля a функции $f(z) - f(a)$, а $R > 0$ таково, что вполне включение $B(a, R) \subset D$. Тогда в $B(a, R)$ имеем $f(z) - f(a) = c_p(z - a)^p(1 + O(z - a))$, где $c_p = f^{(p)}(a)/p! \neq 0$. При каждом $r \in (0, R)$ рассмотрим три точки $z_j(r) = a + r \exp(ij2\pi/(3p))$, $j \in \{0, 1, 2\}$, лежащие в $D_1 \cup \gamma_1$. По условию для всех указанных j имеем

$$f(z_j(r)) \in f(D_1 \cup \gamma_1) = \Omega_1 \cup \Gamma_1 \subset \overline{\Pi_+}$$

. С другой стороны, точки

$$f(z_j(r)) = f(a) + c_p r^p \exp(ij2\pi/3)(1 + \varepsilon_j(r)), \quad j \in \{0, 1, 2\},$$

при достаточно малом r образуют почти правильный треугольник с центром $f(a)$ (в том смысле, что $\varepsilon_j(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$) и, следовательно, не могут все лежать в $\overline{\Pi_+}$. $\square$

1.3.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f называется *мероморфной* в области $D \subseteq \mathbb{C}^\bullet$, если f не имеет в D других особых точек, кроме полюсов. Поле всех мероморфных в области D функций обозначается через $\mathcal{M}(D)$.

Доказательство следующей теоремы дается в качестве упражнения.

1.3.10. ТЕОРЕМА (Принцип симметрии для мероморфных функций). Пусть γ , γ_1 , D_1 , D_1^* , D — такие, как в предыдущей теореме. Пусть функция $f_1 \in \mathcal{M}(D_1)$ непрерывна на $D_1 \sqcup \gamma_1$ в топологии пространства $\mathbb{C}^\bullet$. Если $f_1(\gamma_1)$ лежит на некоторой обобщенной окружности в $\mathbb{C}^\bullet$, то f_1 продолжается до функции $f \in \mathcal{M}(D)$ по той же формуле, как и в предыдущей теореме.

1.3.4. Теорема Гурвица о нулях и теорема о сходящейся последовательности однолистных функций.

1.3.11. ТЕОРЕМА (Гурвица о нулях). Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(D)$, $f_n \rightrightarrows f$ вн. D при $n \rightarrow +\infty$. Пусть $a \in D$ — нуль функции f порядка $p \in \mathbb{N}$.

Тогда существует $\delta_a > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_a)$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ с условием, что при всех $n > n_0$ имеем равенство $N_{B(a, \delta)}(f_n) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z_f = \{z \in D: f(z) = 0\}$ — множество нулей функции f в D . Тогда

$$\delta_a = \min(d(a, \partial D), d(a, Z_f \setminus \{a\})) \in (0, +\infty],$$

поскольку нуль a функции f изолированный.

Зафиксируем число $\delta \in (0, \delta_a)$. Положим $\mu = \min_{|z-a|=\delta} |f(z)|$. Очевидно, что $\mu > 0$. По условию, $f_n \rightrightarrows f$ вн. D при $n \rightarrow +\infty$, и, значит, $f_n \rightrightarrows f$ на границе $\partial B(a, \delta)$ при $n \rightarrow +\infty$, поэтому найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\|f - f_n\|_{\partial B(a, \delta)} < \mu$ при $n > n_0$. Остается применить теорему Руше в $B(a, \delta)$ для функций f и $g = f_n - f$. $\square$

1.3.12. ТЕОРЕМА (О сходящейся последовательности однолистных функций). Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность однолистных функций в D , $f_n \rightrightarrows f$ вн. D при $n \rightarrow +\infty$. Тогда либо $f \equiv \text{const}$, либо f однолистка в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Вейерштрасса $f \in \mathcal{A}(D)$. Пусть f не равна тождественно константе в D и найдутся $z_1 \neq z_2$ в D с условием $f(z_1) = f(z_2)$, т.е. функция f не однолистка в D . Рассмотрим последовательность $\{g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)\}$. Тогда $g_n \rightrightarrows g = f(z) - f(z_1)$ вн. D при $n \rightarrow +\infty$. Поскольку f — не константа, функция g не является тождественно нулевой в D , при этом $g(z_2) = 0$; пусть порядок нуля z_2 для g равен $p \in \mathbb{N}$.

По теореме 1.3.11 существует $\delta_0 \in (0, |z_2 - z_1|)$ со следующими условиями: для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ имеем $B(z_2, \delta) \subset D$ и найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_0$ выполнено равенство $N_{B(z_2, \delta)}(g_n) = p$. Последнее означает, что найдется $a_n \in B(z_2, \delta)$ с условием $g_n(a_n) = 0$, или $f_n(a_n) = f_n(z_1)$, что противоречит однолистности f_n . $\square$

1.3.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ — некоторое непустое семейство функций из D в $\mathbb{C}$. Будем говорить, что $\mathcal{F}$ *равномерно ограничено внутри D (р.о.вн. D)*, если для любого компакта $K \subset D$ семейство $\mathcal{F}$ равномерно ограничено на K , т.е. существует такая константа $M \in [0, +\infty)$, что $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| \leq M$ для всех $f \in \mathcal{F}$.

1.3.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ — некоторое непустое семейство функций из D в $\mathbb{C}$. Семейство $\mathcal{F}$ называется *равностепенно непрерывным внутри D (р.н.вн. D)*, если для любого компакта $K \subset D$ семейство $\mathcal{F}$ равномерно непрерывно на K , т.е. для любого

$\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ для всех $f \in \mathcal{F}$ и для всех $z, z' \in K$ с условиями $|z - z'| < \delta$.

1.3.15. ТЕОРЕМА. Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Если семейство функций $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ р.о.вн. D , то $\mathcal{F}$ р.н.вн. D .

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что обратное неверно, например, для последовательности функций $\mathcal{F} = \{f_n \equiv n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем непустой компакт K в D . Положим $d = \min(d(K, \partial D), 1)$, $d > 0$. Для $\rho \in (0, d)$ определим множество $K_\rho = \bigcup_{z \in K} B(z, \rho)$ (компактное ρ -раздутие K) — тоже компакт в D . Из р.о. $\mathcal{F}$ вн. D найдется $M > 0$ такое, что для всех $f \in \mathcal{F}$ верна оценка $\|f\|_{K_{d/2}} \leq M$. Установим равностепенную непрерывность $\mathcal{F}$ на K .

Сначала докажем, что семейство $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ равномерно ограничено на $K_{d/4}$. Пусть $f \in \mathcal{F}$, $z_0 \in K_{d/4}$. Воспользуемся интегральной формулой Коши (для первой производной) в $B(z_0, d/4) \subset K_{d/2}$ (в частности, $|f(\zeta)| \leq M$ при $\zeta \in \partial B(z_0, d/4)$):

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, d/4)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} M \left(\frac{4}{d}\right)^2 2\pi \frac{d}{4} = \frac{4M}{d}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\{d/4, d\varepsilon/(4M)\}$. Тогда для всех $z, z' \in K$ с условием $|z - z'| < \delta$ имеем $[z, z'] \subset K_{d/4}$, откуда по формуле Ньютона–Лейбница для всех $f \in \mathcal{F}$ получаем

$$|f(z) - f(z')| = \left| \int_{[z, z']} f'(\zeta) d\zeta \right| < \frac{4M}{d} \delta \leq \varepsilon,$$

что и доказывает равностепенную непрерывность $\mathcal{F}$ внутри области D . $\square$

§ 1.4. Теорема Монтеля о предкомпактности. Теорема Римана о конформном изоморфизме

1.4.1. Теорема Монтеля о предкомпактности.

1.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Непустое семейство функций $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ называется *предкомпактным* в (метрике пространства) $\mathcal{A}(D)$, если для любой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ найдется ее подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и функция $g \in \mathcal{A}(D)$ такие, что $f_{n_k} \rightrightarrows g$ вн. D при $k \rightarrow +\infty$.

Непустое семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ называется *компактным* в $\mathcal{A}(D)$, если для любой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ можно найти подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и функцию $g \in \mathcal{F}$ такие, что $f_{n_k} \rightrightarrows g$ вн. D при $k \rightarrow +\infty$.

1.4.2. ТЕОРЕМА (Монтеля). Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Тогда семейство функций $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ предкомпактно в $\mathcal{A}(D)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ р.о.вн. D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Пусть найдется компакт $K \subset D$, на котором семейство $\mathcal{F}$ не р.о., но при этом $\mathcal{F}$ предкомпактно. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ с условием $\|f_n\|_K > n$. Следовательно, $\|f_{n_k}\|_K \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ для любой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ из $\{f_n\}$. Но в силу предкомпактности семейства $\mathcal{F}$ существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ из $\{f_n\}$ и $g \in \mathcal{A}(D)$ такие, что $f_{n_k} \rightrightarrows g$ вн. D при $k \rightarrow +\infty$; в частности, $f_{n_k} \rightrightarrows g$ на K при $k \rightarrow +\infty$. Поэтому найдется $k_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > k_1$ имеем

$$\|f_{n_k}\|_K \leq \|f_{n_k} - g\|_K + \|g\|_K \leq 1 + \|g\|_K < +\infty$$

. Противоречие.

Обратно, пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ р.о.вн. D . Тогда по теореме 1.3.15 семейство $\mathcal{F}$ р.н.вн. D . Пусть $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ — произвольная последовательность. Пусть $\{z_m\}_{m=1}^{+\infty}$ — некоторым образом занумерованные все различные точки из D , у которых обе координаты рациональны.

Поскольку $K_1 = \{z_1\}$ — компакт в D , последовательность $\{f_n(z_1)\}$ ограничена, и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_1^k}(z_1)\}$. Аналогично предыдущему шагу выбираем из последовательности $\{f_{n_1^k}\}$ подпоследовательность $\{f_{n_2^k}\}$, сходящуюся в точке z_2 . И так далее. Диагональная подпоследовательность $\{f_{n_k^k}\}$ удовлетворяет следующему условию: для любого $m \in \mathbb{N}$ существует конечный $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k^k}(z_m)$. Без ограничения общности мы будем считать, что исходная последовательность $\{f_n\}$ совпадает с подпоследовательностью $\{f_{n_k^k}\}$. Докажем, что $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри D .

Зафиксируем произвольный компакт $K \subset D$ и любое $\varepsilon > 0$. Пусть

$$d = \min(d(K, \partial D), 1), \quad K_\rho = \overline{\bigcup_{z \in K} B(z, \rho)}, \quad \rho > 0.$$

Так как $\mathcal{F}$ р.н.вн. D , то существует $\delta \in (0, d/2)$ такое, что для всех $z, z' \in K_{d/2}$ с условием $|z - z'| < \delta$ имеем $|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon/3$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Покроем K кругами $\{B(z_m, \delta)\}_{m=1}^{+\infty}$ и выберем конечное подпокрытие $\{B(z_{m_s}, \delta)\}_{s=1}^S$. Без ограничения общности будем считать, что все точки z_{m_s} лежат в $K_{d/2}$, поскольку $\delta < d/2$ и указанные круги с центрами вне $K_{d/2}$ не пересекают K .

Поскольку $S \in \mathbb{N}$, а последовательности $\{f_n(z_{m_s})\}$ сходятся при всех $s \in \{1, \dots, S\}$, можем найти такое $N \in \mathbb{N}$, что $|f_n(z_{m_s}) - f_{n'}(z_{m_s})| < \varepsilon/3$ для всех $n > N$, $n' > N$ и всех $s \in \{1, \dots, S\}$. Тогда для всех $z \in K$, $n > N$ и $n' > N$ имеем

$$\begin{aligned} & |f_n(z) - f_{n'}(z)| \leq \\ & \leq |f_n(z) - f_n(z_{m_s})| + |f_n(z_{m_s}) - f_{n'}(z_{m_s})| + |f_{n'}(z_{m_s}) - f_{n'}(z)| < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

где z_{m_s} выбрана так, что $z \in B(z_{m_s}, \delta)$ (существует по построению).

Итак, последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна по равномерной норме на компакте K и, следовательно, эта последовательность равномерно сходится на K . В силу произвольности K , по теореме Вейерштрасса найдется $g \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $f_n \rightrightarrows g$ вн. D при $n \rightarrow +\infty$, что и требовалось. $\square$

1.4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ — непустое семейство функций в $\mathcal{A}(D)$, $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ — функционал. Функционал Φ называется *непрерывным на $\mathcal{F}$* (в метрике пространства $\mathcal{A}(D)$), если для любой $f \in \mathcal{F}$ и для всякой последовательности $\{f_n\}$ из $\mathcal{F}$ с условием $f_n \rightrightarrows f$ вн. D при $n \rightarrow +\infty$ имеем $\Phi(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(f)$.

1.4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(D)$ компактно в $\mathcal{A}(D)$ и функционал Φ непрерывен на $\mathcal{F}$. Тогда Φ ограничен на $\mathcal{F}$ и достигает своего максимума модуля на $\mathcal{F}$, т. е. найдется $f_* \in \mathcal{F}$ с условиями

$$|\Phi(f_*)| = \max_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\sup_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)|$ найдется $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ с условием $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Phi(f_n)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)|$. Из компактности $\mathcal{F}$ следует, что найдутся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ в $\{f_n\}$ и $f_* \in \mathcal{F}$, для которых $f_{n_k} \rightrightarrows f_*$ вн. D при $k \rightarrow +\infty$. Поскольку Φ непрерывен, имеем

$$|\Phi(f_*)| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\Phi(f_{n_k})| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\Phi(f_n)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} |\Phi(f)|,$$

что и завершает доказательство предложения. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что здесь мы реально говорим о компактности и непрерывности в так называемом *секвенциальном* смысле. Как известно из топологии, в *метрических* пространствах (в том числе в $\mathcal{A}(D)$) эти понятия совпадают со стандартными понятиями компактности (теорема Гейне-Бореля) и непрерывности.

1.4.2. Теорема Римана о конформном изоморфизме.

1.4.5. ТЕОРЕМА (Римана). Пусть D и Ω — односвязные области в $\mathbb{C}^\bullet$, т. е. $D^\bullet$ и $\Omega^\bullet$ связны в $\mathbb{C}^\bullet$, причем $D^\bullet$ и $\Omega^\bullet$ содержат более чем по одной точке. Зафиксируем произвольные $a \in D \cap \mathbb{C}$, $b \in \Omega \cap \mathbb{C}$ и $\theta \in (-\pi, \pi]$. Тогда существует единственный конформный изоморфизм $f: D \xrightarrow{na} \Omega$, удовлетворяющий условиям $f(a) = b$ и $\arg f'(a) = \theta$.

1.4.6. ТЕОРЕМА (Римана, упрощенная версия). Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $D \neq \mathbb{C}$. Тогда для любого $a \in D$ существует и единственно конформное (в данном случае однолистное) отображение $f: D \xrightarrow{na} B_1 = B(0, 1)$ с условиями $f(a) = 0$ и $\arg f'(a) = 0$.

1.4.7. УПРАЖНЕНИЕ. Свести теорему 1.4.5 к теореме 1.4.6. Доказать единственность, используя лемму Шварца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4.6. Зафиксируем $a \in D$. Пусть $\mathcal{F}_0$ — семейство всех однолистных функций $g: D \rightarrow B_1$ таких, что $g(a) = 0$ (сюръективность не требуется). Сначала докажем, что $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

Поскольку $D^\bullet = \mathbb{C}^\bullet \setminus D$ связно и неодноточечно (и, следовательно, континуально), мы можем выбрать две разные точки a_1 и a_2 в $\mathbb{C} \setminus D$. По лемме 1.2.17 м-функции $\sqrt{z - a_1}$ и $\sqrt{z - a_2}$ имеют в D голоморфные ветви $v_1(z)$ и $v_2(z)$. Определим функции $g_1(z) = v_1(z)/v_2(z)$, $g_2(z) = -g_1(z)$.

1.4.8. ЛЕММА. Функции g_1 и g_2 однолистны в D , причем выполнено равенство $g_1(D) \cap g_2(D) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$g_1^2(z) = g_2^2(z) = \frac{v_1^2(z)}{v_2^2(z)} = \frac{z - a_1}{z - a_2} =: L(z)$$

— ДЛЮ, которое инъективно в $\mathbb{C}^\bullet$, а, значит, и на D .

Если $g_1(z) = g_1(z')$ при $z, z' \in D$, то $L(z) = g_1^2(z) = g_1^2(z') = L(z')$, откуда $z = z'$. Следовательно g_1 и $g_2 = -g_1$ однолистны в D .

Пусть теперь $g_1(z) = g_2(z')$ для $z, z' \in D$. Тогда $L(z) = g_1^2(z) = g_2^2(z') = L(z')$ и, следовательно, $z = z'$. Таким образом, $g_1(z) = g_2(z)$; с другой стороны, по определению, $g_2 \equiv -g_1$, откуда $g_1(z) = 0$, что невозможно. Это противоречие доказывает второе утверждение леммы. $\square$

Докажем теперь, что $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Поскольку $g_2(D)$ — область в $\mathbb{C}$ (по теореме 1.2.14) и $g_1(D) \cap g_2(D) = \emptyset$, найдутся $w_0 \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ такие, что $B(w_0, r) \subset g_2(D)$, откуда $B(w_0, r) \cap g_1(D) = \emptyset$.

Положим

$$g_0(z) = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{g_1(z) - w_0} - \frac{1}{g_1(a) - w_0} \right).$$

1.4.9. ЛЕММА. Имеем $g_0 \in \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однолистность $g_0(z)$ в D следует из того, что функция $g_0(z)$ есть композиция однолистной в D функции $g_1(z)$ и некоторого ДЛЮ. Очевидно, $g_0(a) = 0$. Для того, чтобы доказать включение $g_0(D) \subset B_1$, достаточно заметить, что

$$\left| \frac{1}{g_1(z) - w_0} \right| < \frac{1}{r}, \quad \forall z \in D,$$

поскольку $|g_1(z) - w_0| > r$ при $z \in D$. В силу этого, для всех $z \in D$ имеем

$$|g_0(z)| \leq \frac{r}{2} \left(\left| \frac{1}{g_1(z) - w_0} \right| + \left| \frac{1}{g_1(a) - w_0} \right| \right) < \frac{r}{2} \cdot \frac{2}{r} = 1.$$

□

1.4.10. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{F}_0 : g'(a) \geq |g'_0(a)|\}$. Тогда семейство $\mathcal{F} \neq \emptyset$ компактно в $\mathcal{A}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу отметим, что предкомпактность $\mathcal{F}$ следует из теоремы 1.4.2 (Монтеля), поскольку $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ равномерно ограничено внутри D единицей. Кроме того, $g'_0(a) \neq 0$ ввиду однолистности функции g_0 в D .

Положим

$$g_*(z) = \frac{|g'_0(a)|}{g'_0(a)} g_0(z).$$

Ясно, что $g_* \in \mathcal{F} \neq \emptyset$. Пусть теперь $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F}$. Поскольку $\mathcal{F}$ предкомпактно, найдется $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ — подпоследовательность в $\{f_n\}$ с условием $f_{n_k} \rightrightarrows f_*$ вн. D при $k \rightarrow +\infty$, где f_* — некоторая функция. Докажем, что $f_* \in \mathcal{F}$.

По теореме Вейерштрасса $f_* \in \mathcal{A}(D)$, причем $f'_{n_k} \rightrightarrows f'_*$ внутри D при $k \rightarrow +\infty$, поэтому

$$f'_*(a) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f'_{n_k}(a) \geq |g'_0(a)|.$$

При этом f_* не константа, поскольку $g'_0(a) \neq 0$. Следовательно, функция $f_*(z)$ однолистка в D по теореме 1.3.12 о равномерном пределе однолистных функций.

Поскольку $f_{n_k} \rightrightarrows f_*$ вн. D при $k \rightarrow +\infty$, легко видеть, что $f_*(a) = 0$ и $f_*(D) \subset \overline{B}_1$. Но f_* — не константа, так что $f_*(D)$ — область, откуда сразу следует, что реально $f_*(D) \subset B_1$. Лемма доказана. □

Рассмотрим функционал $\Phi: g \mapsto g'(a)$ на $\mathcal{F}$. Он непрерывен на $\mathcal{F}$ по теореме Вейерштрасса. По предложению 1.4.4 (с учетом включения $g'(a) \in \mathbb{R}_+$ для $g \in \mathcal{F}$) найдется $f \in \mathcal{F}$ с условием $f'(a) = \max_{g \in \mathcal{F}} \{g'(a)\}$.

Докажем, что f — искомое отображение (т.е. конформное отображение области D на B_1 , удовлетворяющее условиям $f(a) = 0$, $\arg f'(a) = 0$). Поскольку $f \in \mathcal{F}$, остается установить, что $f(D) = B_1$.

Пусть, от противного, найдется $b \in B_1 \setminus f(D)$; ясно, что $b \neq 0$, поскольку $f(a) = 0 \in f(D)$. Рассмотрим ДЛО

$$\Lambda(w) = \frac{w - b}{1 - \bar{b}w}$$

— автоморфизм круга B_1 , удовлетворяющий условиям

$$\Lambda(0) = -b, \quad \Lambda(b) = 0, \quad \Lambda'(w) = \frac{1 - |b|^2}{(1 - \bar{b}w)^2}, \quad \Lambda'(0) = 1 - |b|^2.$$

Рассмотрим однолиственную в D функцию $\Lambda(f(z))$, не равную нулю в D (так как $f(z) \neq b$ в D). Поскольку область D односвязна, по лемме 1.2.17 найдется голоморфная ветвь $h_1(z)$ м-функции $\sqrt{\Lambda(f(z))}$ в D . Утверждается, что функция $h_1(z)$ однолистна в D . Действительно, если $h_1(z) = h_1(z')$ для $z, z' \in D$, то $\Lambda(f(z)) = h_1^2(z) = h_1^2(z') = \Lambda(f(z'))$ и, следовательно, $z = z'$. Ясно, что $h_1(z)$ принимает значения из B_1 , поскольку $h_1^2(z)$ принимает значения из B_1 .

Итак, $h_1^2(z) = \Lambda(f(z))$ — равенство голоморфных функций в D (в частности, $h_1(a) \in \sqrt{-b}$ и поэтому $|h_1(a)| = \sqrt{|b|}$), которое мы можем продифференцировать в точке $a \in D$:

$$2h_1(a)h_1'(a) = \Lambda'(0)f'(a) = (1 - |b|^2)f'(a).$$

Поэтому

$$|h_1'(a)| = \frac{(1 - |b|^2)|f'(a)|}{2|h_1(a)|} = \frac{f'(a)(1 - |b|^2)}{2\sqrt{|b|}}.$$

Рассмотрим

$$h_2(z) = \frac{h_1(z) - h_1(a)}{1 - \bar{h}_1(a)h_1(z)}$$

— композицию $h_1(z)$ с ДЛО-автоморфизмом круга B_1 , переводящим точку $h_1(a)$ в 0. Для h_2 имеем $h_2(a) = 0$ и h_2 однолистна и принимает значения в B_1 . Найдем по определению производную h_2 в точке a :

$$\begin{aligned} h_2'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{h_2(z) - h_2(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{h_2(z)}{z - a} = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{h_1(z) - h_1(a)}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \bar{h}_1(a)h_1(z)} \right) = \frac{h_1'(a)}{1 - |h_1(a)|^2} = \frac{h_1'(a)}{1 - |b|}. \end{aligned}$$

Тогда

$$|h_2'(a)| = \frac{f'(a)(1 - |b|^2)}{2\sqrt{|b|}(1 - |b|)} = f'(a) \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} > f'(a),$$

поскольку $\frac{1+|b|}{2} > \sqrt{|b|}$.

Наконец, пусть

$$h(z) = h_2(z) \frac{|h'_2(a)|}{h'_2(a)}.$$

Тогда h , как и h_2 , однолистка в D и принимает значения из B_1 , $h(a) = 0$ и $h'(a) = |h'_2(a)| > f'(a)$, т. е. $h \in \mathcal{F}$, но при этом $h'(a) > f'(a) = \max_{g \in \mathcal{F}} \{g'(a)\}$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.4.6. $\square$

1.4.11. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $D \neq \mathbb{C}$. Для любой фиксированной точки $a \in D$ пусть $\mathcal{A}_1(D, a)$ — класс всех голоморфных функций $g: D \rightarrow B_1$ с условием $g(a) = 0$. Доказать, что $\sup\{|g'(a)|: g \in \mathcal{A}_1(D, a)\}$ достигается (только) на конформных изоморфизмах $f: D \rightarrow B_1$ с условием $f(a) = 0$.

Напомним, что жорданова область D в $\mathbb{C}$ называется *специальной*, если существуют конечное множество $\Sigma \subset D$ и непрерывная на $\overline{D} \setminus \Sigma$ функция (Шварца) $S(z) \in \mathcal{A}(D \setminus \Sigma)$, для которой $S(z) = \bar{z}$ для всех $z \in \partial D$.

1.4.12. УПРАЖНЕНИЕ. С помощью теоремы Римана доказать, что функция Шварца специальной области определена единственным образом.

1.4.13. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$. Доказать, что пространство $\mathcal{A}(D)$ (со стандартной метрикой) сепарабельно.

§ 1.5. Принцип соответствия границ (частный случай теоремы Каратеодори)

1.5.1. Формулировка теоремы Каратеодори и предварительные леммы.

Здесь мы докажем некоторый *упрощенный* вариант *принципа соответствия границ* (теоремы Каратеодори), который, тем не менее, вполне достаточен в ряде важных приложений, например при доказательстве наиболее общих версий принципа аргумента, теоремы Руше и обратного принципа соответствия границ, малой теоремы Пикара и разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций в жордановых областях.

1.5.1. ТЕОРЕМА (Каратеодори). Пусть D и Ω — жордановы области в $\mathbb{C}^\bullet$. Пусть $f: D \rightarrow \Omega$ — какой-либо их конформный изоморфизм (существующий по теореме Римана). Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\bar{D}$ на $\bar{\Omega}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Не ограничивая общности, мы будем рассматривать случай $D \subset \mathbb{C}$, $\Omega = B_1 := B(0, 1)$. Кроме того, мы будем опираться на хорошо известный, но не тривиальный (даже по модулю теоремы Жордана) факт, что в указанных условиях существует гомеоморфизм $\bar{D}$ на $\bar{B}_1$, при котором D переходит гомеоморфно на B_1 .

Доказательство разобьем на несколько лемм, представляющих самостоятельный интерес.

1.5.2. ЛЕММА (Кёбе). Пусть $f \in \mathcal{A}(B_1)$, $\|f\|_{B_1} = M < +\infty$. Пусть в B_1 проведены два радиуса I_0 и I_1 под углом π/p , где $p \in \mathbb{N}$, а жорданов путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow B_1$ соединяет эти радиусы, т. е. $\gamma(0) \in I_0$ и $\gamma(1) \in I_1$. Тогда при $\varepsilon = \|f\|_{[\gamma]}$ справедлива оценка

$$|f(0)| \leq \sqrt[p]{\varepsilon M^{2p-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 \in [\gamma] = \gamma([0, 1])$, то $|f(0)| \leq \varepsilon$ и все доказано ввиду $\varepsilon \leq M$. Далее предполагается, что $0 \notin [\gamma]$. Напомним, что $\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|$. Без ограничения общности мы будем считать, что I_0 совпадает с $[0, 1]$, I_1 — с полуинтервалом $[0, e^{i\pi/p})$, а $[\gamma]$ не имеет других общих точек с I_0 и I_1 , кроме концевых, причем $[\gamma]$ целиком лежит в том секторе между I_0 и I_1 , который принадлежит (замкнутой) верхней полуплоскости (см. рис. 5.1).

Положим $g(z) = f(z)\overline{f(\bar{z})}$ и $\gamma_*(t) = \overline{\gamma(t)}$, $t \in [0, 1]$. Тогда

$$g \in \mathcal{A}(B_1), \quad \|g\|_{B_1} \leq M^2, \quad \|g\|_{[\gamma] \cup [\gamma_*]} \leq M\varepsilon.$$

При $p = 1$ пусть $h(z) = g(z)$, а при $p > 1$ определим

$$h(z) = g(z)g(ze^{2\pi i/p}) \dots g(ze^{2\pi i(p-1)/p}).$$

Рассмотрим (жорданову) область G , ограниченную кривой $\{\gamma_*^-\} \cup \{\gamma\}$ и (при $p > 1$) результатами ее поворотов на углы $2\pi/p, \dots, 2\pi(p-1)/p$.

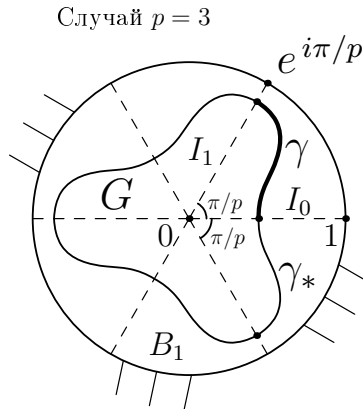


Рис. 5.1.

При этом

$$h \in \mathcal{A}(G) \cap C(\overline{G}), \quad \|h\|_{\partial G} \leq \varepsilon M(M^2)^{p-1},$$

откуда по принципу максимума модуля (в G) получаем

$$|h(0)| = |f(0)|^{2p} \leq \varepsilon M^{2p-1}.$$

Включение $0 \in G$ следует из очевидного равенства $\text{ind}_{\partial+G}(0) = 1$. $\square$

1.5.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in \mathcal{A}(B_1)$, $\|f\|_{B_1} < +\infty$, $p \in \mathbb{N}$ и $\delta \in (0, 1)$. Пусть существует такая последовательность жордановых путей $\{\gamma_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что при каждом n имеем $[\gamma_n] \subset B_1 \setminus \overline{B(0, \delta)}$, причем γ_n соединяет некоторую пару радиусов (не обязательно одну и ту же для разных n), образующую угол π/p (см. рис. 5.2). Если $\|f\|_{[\gamma_n]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, то $f \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon_n = \|f\|_{[\gamma_n]}$, $M = \|f\|_{B_1}$. По лемме 1.5.2 $|f(0)| \leq \sqrt[p]{\varepsilon_n M^{2p-1}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, так что $f(0) = 0$. Пусть, от противного, $f \not\equiv 0$ в B_1 и $f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n$ — разложение Тейлора функции f в B_1 , где $k \in \mathbb{N}$ и $c_k \neq 0$. Рассмотрим $f_1(z) = f(z)/z^k$ при $z \in B_1 \setminus \{0\}$, $f_1(0) = c_k$. Тогда f_1 удовлетворяет условиям настоящего следствия и по доказанному должно быть $f_1(0) = 0$. Противоречие. $\square$

1.5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ из области G в $\mathbb{C}$ стремится к границе $\partial^\bullet G$ этой области при $n \rightarrow +\infty$ (коротко $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \partial^\bullet G$), если для любого компакта K в G найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N$ имеем $z_n \in G \setminus K$.

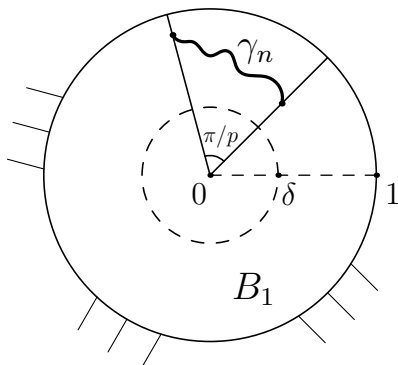


Рис. 5.2.

1.5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $E \subset G$, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ и $A \in \mathbb{C}^\bullet$. Число A называется *предельным значением* функции $f(z)$ при стремлении z к $\partial^\bullet G$ по множеству E , если найдется последовательность $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \partial^\bullet G$, все $z_n \in E$, такая, что $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ (можно даже считать, что $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится в $\mathbb{C}^\bullet$).

1.5.6. ЛЕММА (Линделёф). Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(G)$ и имеют место следующие условия:

- (1) $M = \|f\|_G < +\infty$;
- (2) найдутся такие точка $a \in G$ и число $r \in (0, +\infty)$, что окружность $\{|z - a| = r\}$ имеет дугу длины $2\pi r/p$, $p \in \mathbb{N}$, лежащую вне G (см. рис. 5.3);
- (3) при стремлении z к $\partial^\bullet G$ по множеству $G \cap B(a, r)$ все предельные значения функции $|f(z)|$ не превосходят ε (при некотором $\varepsilon \geq 0$).

Тогда $|f(a)| \leq \sqrt[p]{\varepsilon M^{p-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $a = 0$. Пусть G_* — связанная компонента (содержащая точку 0) открытого множества $\bigcap_{k=0}^{p-1} G_k$, где G_k — результат поворота области G вокруг начала координат на угол $2\pi k/p$. Очевидно, что $\{|z| = r\} \cap G_* = \emptyset$, так что $G_* \subset B(0, r)$ (см. рис. 5.4). Положим

$$h(z) = f(z)f(ze^{2\pi i/p}) \dots f(ze^{2\pi i(p-1)/p}).$$

Поскольку $\partial G_* \subset \bigcup_{k=0}^{p-1} \partial G_k \cap \overline{B(0, r)}$, то все предельные значения функции $|h(z)|$ при стремлении z к ∂G_* по множеству G_* не превосходят величины εM^{p-1} . По усиленному принципу максимума модуля для h в G_* (см. упражнение 1.5.9), $|f(0)|^p \leq \varepsilon M^{p-1}$. $\square$

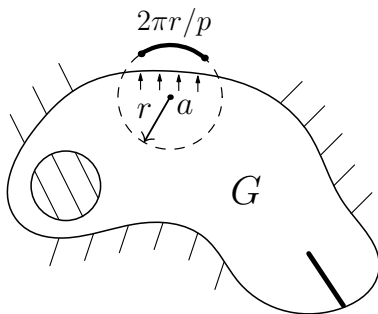


Рис. 5.3.

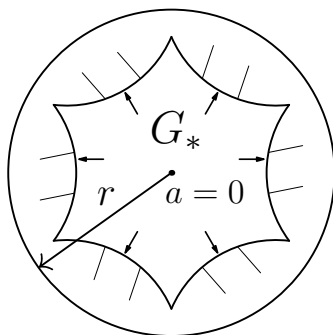


Рис. 5.4.

1.5.7. ЛЕММА (Граничная теорема единственности). Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(G)$ и $\|f\|_G < +\infty$. Пусть найдутся такие $z_0 \in \partial G$ и $\delta > 0$, что при стремлении z к $\partial^* G$ по множеству $G \cap B(z_0, \delta)$ все предельные значения функции $f(z)$ равны комплексному числу c . Тогда $f \equiv c$ в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $a \in G \cap B(z_0, \delta/2)$ и некотором $r \in (0, \delta/2)$ окружность $\{|z - a| = r\}$ имеет дугу, лежащую вне G (см. рис. 5.5). Применяя предыдущую лемму для области G , функции $(f - c)$ и значения $\varepsilon = 0$, получим $f(a) - c = 0$. По теореме единственности $f \equiv c$ в G . $\square$

Приведем без доказательства следующую известную теорему.

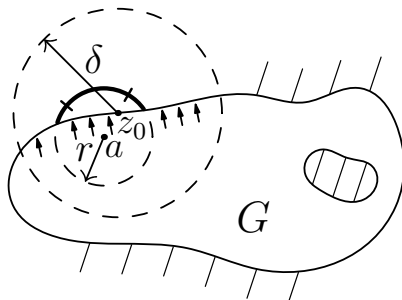


Рис. 5.5.

1.5.8. ТЕОРЕМА (Радо). Пусть G — произвольная область в $\mathbb{C}$, $g \in C(G)$ и $Z_g = \{z \in G: g(z) = 0\}$. Если g голоморфна на $G \setminus Z_g$, то $g \in \mathcal{A}(G)$.

Эта теорема вытекает из предыдущей леммы во всех случаях, кроме тех, когда $Z_g^\circ = \emptyset$ и одновременно $G \setminus Z_g$ связно (проверить!).

1.5.2. Окончание доказательства теоремы Каратеодори.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D — жорданова область и $f: D \rightarrow B_1$ — конформный изоморфизм. Считаем известным существование гомеоморфизма D на B_1 , при котором D отображается на B_1 (см. рис. 5.6).

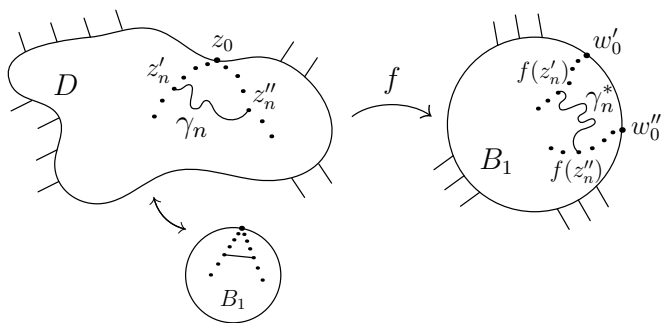


Рис. 5.6.

1°. Докажем, что f непрерывно продолжается на ∂D . Если, от противного, это не так, то найдутся $z_0 \in \partial D$ и последовательности $\{z'_n\}$,

$\{z_n''\}$ в D , сходящиеся к z_0 , такие, что $f(z_n') \rightarrow w_0'$, $f(z_n'') \rightarrow w_0''$ при $n \rightarrow +\infty$, причем $w_0' \neq w_0''$ (проверить!; существование таких последовательностей вытекает из ограниченности f). Поскольку $f: D \rightarrow B_1$ — гомеоморфизм, легко показать, что $w_0', w_0'' \in \partial B_1$. Ввиду гомеоморфности $\bar{D}$ и $\bar{B}_1$ найдутся жордановы пути γ_n в D , соединяющие z_n' и z_n'' , с условием $\text{diam}([\gamma_n]) \rightarrow 0$, т. е. $[\gamma_n] \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow +\infty$. Пусть $\gamma_n^* = f \circ \gamma_n$. Применяя следствие 1.5.3 для $g(w) = f^{-1}(w) - z_0$ и $\{\gamma_n^*\}$ в B_1 (ясно, что $\|g\|_{[\gamma_n^*]} \rightarrow 0$ и $\{\gamma_n^*\}$ отделены от точки 0 при $n \rightarrow +\infty$), получаем $f^{-1}(w) \equiv z_0$ — противоречие.

2°. Продолжим функцию f по непрерывности (единственным образом) из D на $\bar{D}$ согласно 1°. Как нетрудно видеть, $f(\partial D) \subset \partial B_1$. Поскольку $f: D \rightarrow B_1$ — гомеоморфизм, остается установить взаимную однозначность функции f на ∂D .

От противного, пусть найдутся $z_1 \neq z_2 \in \partial D$, для которых $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Тогда есть два жордановых пути $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow \bar{D}$ (причем $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1) \rightarrow D$) с $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = z_1$, $\gamma_2(1) = z_2$, при этом $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$ имеют только одну общую точку $\gamma_1(0)$ (здесь можно воспользоваться гомеоморфизмом $\bar{D}$ и $\bar{B}_1$, а в B_1 взять два соответствующих радиуса; см. рис. 5.7). При этом $f(\gamma_1(t)) \rightarrow w_0$ и $f(\gamma_2(t)) \rightarrow w_0$ при $t \rightarrow 1-$.

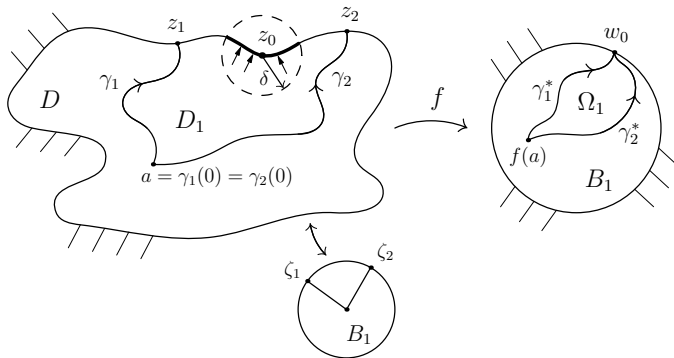


Рис. 5.7.

Положим $\gamma_1^* = f \circ \gamma_1$, $\gamma_2^* = f \circ \gamma_2$. Пусть Ω_1 — жорданова область (в B_1), ограниченная кривой $\{\gamma_1^*\} \cup \{\gamma_2^*\}$, и пусть $D_1 = f^{-1}(\Omega_1)$ (область D_1 тоже жорданова!). Пусть $z_0 \in \partial D_1 \setminus ([\gamma_1] \cup [\gamma_2])$. При некотором $\delta > 0$ круг $B(z_0, \delta)$ не пересекает $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$, так что к функции $f(z) - w_0$ в D_1 можно применить лемму 1.5.7, по которой $f \equiv w_0$ в D_1 . Противоречие. $\square$

1.5.9. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(G)$, $M \in [0, +\infty)$. Если все предельные значения функции $|f(z)|$ при стремлении z к $\partial^* G$ (по G) не превосходят M , то $|f(z)| \leq M$ всюду в G .

1.5.10. УПРАЖНЕНИЕ*. Адаптировать доказательство теоремы 1.5.1 на случай конформного изоморфизма двух концентрических колец.

**§ 1.6. Следствия из теорем Римана и Каратеодори.
Специальные области (критерий). Гомотопии кривых.
Односвязность**

1.6.1. Следствия из теорем Римана и Каратеодори.

1.6.1. ТЕОРЕМА (О разрешимости ЗД для ГрФ). Пусть D — произвольная жорданова область в $\mathbb{C}$, $h_0 \in C(\partial D)$ — вещественная функция. Тогда ЗД для ГрФ с граничными данными h_0 разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая круга эта теорема доказана. Остается воспользоваться теоремами Римана и Каратеодори и методом конформных отображений для решения ЗД. $\square$

1.6.2. ТЕОРЕМА (Принцип аргумента). Пусть D — произвольная область в $\mathbb{C}$, ограниченная носителями конечного числа попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых. Пусть функция f голоморфна в D за исключением конечного множества M своих полюсов и непрерывна в $\bar{D} \setminus M$. Если f не обращается в 0 на ∂D , то в обозначениях теоремы 1.2.3 и определения 1.2.8 верно следующее равенство

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial+D} \operatorname{Arg}(f) = N_D(f) - P_D(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обсудим доказательство для случая жордановой области D . Общий случай оставляем читателю (по аналогии). Пусть $k: B_1 \rightarrow D$ — конформный изоморфизм (теорема Римана), продолженный по теореме Каратеодори до гомеоморфизма $\bar{B}_1$ на $\bar{D}$. При $r \in (0, 1]$ положим $\gamma_r(t) = k(re^{it})|_{[-\pi, \pi]}$, так что $\{\gamma_1\} \in \partial^+ D$, а $[\gamma_r]$ ограничивает жорданову область D_r , $r \in (0, 1)$ ($\{\gamma_r\} \in \partial^+ D_r$). Из равномерной непрерывности функции $k(z)$ на $\bar{B}_1$ найдется такое $r_1 \in (0, 1)$, что функция f не имеет нулей и полюсов на $\bar{D} \setminus D_{r_1}$. Из равномерной непрерывности функции $f(k(z))$ на $\bar{B}_1 \setminus B_{r_1}$ найдется такое $r \in (r_1, 1)$, что для путей $\sigma_1(t) = f(\gamma_1(t))|_{[-\pi, \pi]}$ и $\sigma_r(t) = f(\gamma_r(t))|_{[-\pi, \pi]}$ выполняются следующие условия:

- (а) все нули и полюса функции f лежат в D_r ;
- (б) $|(\sigma_r(t) - \sigma_1(t))/\sigma_1(t)| < 1$ на $[-\pi, \pi]$.

По установленному ранее для указанного r имеем ($w = f(k(z))$)

$$\begin{aligned} \Delta_{\partial+D_r} \operatorname{Arg}(f) &= \Delta_{\sigma_1+\sigma_r-\sigma_1} \operatorname{Arg}(w) = \\ &= \Delta_{\sigma_1} \operatorname{Arg}(w) + \Delta_{1+(\sigma_r-\sigma_1)/\sigma_1} \operatorname{Arg}(w) = \Delta_{\sigma_1} \operatorname{Arg}(w) = \Delta_{\partial+D} \operatorname{Arg}(f). \end{aligned}$$

Для жордановой области D_r с гладкой границей (простая область, проверить) и функции f , голоморфной в окрестности $\bar{D}_r$, принцип аргумента установлен ранее. $\square$

В результате мы получаем полные доказательства теоремы 1.3.7 (обратного принципа соответствия границ) и следующей (усиленной) теоремы Руше.

1.6.3. ТЕОРЕМА (Руше). Пусть D — произвольная область в $\mathbb{C}$, ограниченная носителями конечного числа попарно непересекающихся замкнутых жордановых кривых. Если функции f и g принадлежат $\mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ и $|g(z)| < |f(z)|$ для всех $z \in \partial D$, то $N_D(f+g) = N_D(f)$.

1.6.4. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать следующее утверждение. Пусть даны $D_1, \dots, D_S$ — жордановы области в $\mathbb{C}$, где $S \geq 2$ — натуральное число. Предположим, что замыкания областей $D_2, \dots, D_S$ попарно не пересекаются и целиком содержатся внутри D_1 . Тогда множество $D = D_1 \setminus (\cup_{s=2}^S \overline{D_s})$ является областью.

1.6.2. Специальные области.

Теперь мы можем дать полное описание специальных областей, введенных в первой главе.

1.6.5. ТЕОРЕМА. Пусть функция f голоморфна в $\mathbb{C}^\bullet$, за исключением конечного множества точек $F \subset \mathbb{C}^\bullet \setminus \overline{B_1}$, и взаимно-однозначна на $\overline{B_1}$. Тогда $\Omega = f(B_1)$ является специальной областью. Пусть $F = \{a_1, \dots, a_N\}$, $z_n = 1/\overline{a_n}$, $w_n = f(z_n)$, $\Sigma = \{w_1, \dots, w_N\} \subset \Omega$. Тогда функция Шварца S области Ω определена по формуле

$$S(w) = \overline{f(1/\overline{f^{-1}(w)})}.$$

При этом функция S имеет в точке w_n особенность аналогичную особенности у функции f в точке a_n . В частности, область Ω является неванлиновской, если и только если указанная функция f рациональна.

Обратно, если Ω — специальная область с функцией Шварца S (голоморфной в $\Omega \setminus \Sigma$), и f — какое-либо конформное отображение из B_1 на Ω , продолженное до гомеоморфизма их замыканий, то f продолжается голоморфно из B_1 на $\mathbb{C}^\bullet \setminus F$ по формуле

$$f(z) = \overline{S(f(1/\overline{z}))}, \quad z \in (\mathbb{C}^\bullet \setminus B_1) \setminus F,$$

где F и Σ связаны как ранее (включая типы особых точек для f и S).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что формула для S получена из условия

$$\overline{z} = \overline{f^{-1}(w)} = 1/\overline{f^{-1}(w)} = 1/z \iff \overline{w} = \overline{f(1/\overline{f^{-1}(w)})}$$

при $w \in \partial\Omega$, $z \in \partial B_1$, так что имеем $\overline{w} = S(w)$ на $\partial\Omega$. Положим $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$. Как в принципе симметрии, доказывается, что функция $g(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$ голоморфна на $B_1 \setminus Z$ и непрерывна на $\overline{B_1} \setminus Z$; следовательно, функция $S(w) = g(f^{-1}(w))$ голоморфна на $\Omega \setminus \Sigma$ и непрерывна на $\overline{\Omega} \setminus \Sigma$. Легко проверяется наличие или отсутствие предела $\lim_{w \rightarrow w_n} S(w)$ (аналогично $\lim_{z \rightarrow a_n} f(z)$, т.е. соответствие типов особых точек у функций f и S). В качестве упражнения остается только вопрос о соответствии порядков полюсов у f и S . Обратное утверждение теоремы доказывается аналогично с использованием теоремы Морера. В конкретных примерах

полезно следующее замечание. Если $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ в B_1 (в частности, Ω симметрично относительно $\mathbb{R}$), то $S(w) = f(1/f^{-1}(w))$. $\square$

1.6.6. ПРИМЕР. Пусть $f(z) = z + 1/(z - a_2) = 2\mathcal{J}\mathcal{K}(z - a_2) + a_2$, где $a_2 \geq 2$. Условия предыдущей теоремы легко проверяются при $F = \{\infty, a_2\}$ и $Z = \{0, 1/a_2\}$. Откуда S имеет в Ω два полюса первого порядка $w_1 = f(0) = -1/a_2$ и $w_2 = f(1/a_2) = 1/(a_2 - a_2^3)$. Поскольку $f^{-1}(w) = \mathcal{J}\mathcal{K}_o^{-1}((w - a_2)/2) + a_2$, формула для S через функцию $\mathcal{J}\mathcal{K}_o^{-1}$ может быть выписана явно.

1.6.7. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть $w_1, \dots, w_N$ — заданные различные точки в B_1 ; $p_1, \dots, p_N$ — натуральные числа. Пользуясь предыдущей теоремой, привести алгоритм построения какой-либо неванлинновской области Ω , у которой функция Шварца имеет в Ω полюса w_n порядка p_n , $n \in \{1, \dots, N\}$ (без других особых точек в Ω).

Указание. При обозначениях предыдущей теоремы при $a_1 = \infty$ ($z_1 = 0$) рассмотреть функцию f вида

$$f(z) = z + \frac{\varepsilon z^p (z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - a_2)^{p_2} \cdots (z - a_N)^{p_N}}, \quad p = p_1 + \cdots + p_N - (N - 1),$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда $w_n = z_n$ при $n \in \{1, \dots, N\}$.

1.6.3. Гомотопии кривых. Γ -односвязность.

Для дальнейшего нам существенно понадобятся понятия гомотопии.

1.6.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow D$ — пути в D , причем $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ и $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Говорят, что γ_0 и γ_1 *гомотопны в D как пути с одинаковыми концами* (или *(1)-гомотопны в D*), если существует отображение $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) Γ непрерывно по совокупности двух переменных на $[0, 1]^2$;
- (2) для всех $s \in [0, 1]$ имеем $\begin{cases} \Gamma(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \\ \Gamma(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1); \end{cases}$
- (3) для всех $t \in [0, 1]$ имеем $\begin{cases} \Gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \\ \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t). \end{cases}$

Краткое обозначение указанного условия: $\gamma_0 \underset{(1)}{\sim} \gamma_1$.

1.6.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$; $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow D$ — пути в D , причем $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ и $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$. Говорят, что γ_0 и γ_1 *гомотопны в D как замкнутые пути* (или *(2)-гомотопны в D*), если существует отображение $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) Γ непрерывно по совокупности переменных на $[0, 1]^2$;
- (2) для всех $s \in [0, 1]$ имеем $\Gamma(0, s) = \Gamma(1, s)$;

(3) для всех $t \in [0, 1]$ имеем $\begin{cases} \Gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \\ \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t). \end{cases}$

Краткое обозначение: $\gamma_0 \stackrel{D}{\sim}_{(2)} \gamma_1$.

В обоих случаях (при фиксированном $s \in [0, 1]$) путь

$$\gamma_s(t) = \Gamma(t, s), \quad t \in [0, 1],$$

называется s -м путем гомотопии. Семейство путей $\{\gamma_s: s \in [0, 1]\}$ называется семейством, осуществляющим гомотопию Γ .

1.6.10. УПРАЖНЕНИЕ. Если $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — гомотопия (1)-го или (2)-го типа, и $a \notin \Gamma([0, 1]^2)$, то $\text{ind}_{\gamma_s}(a)$ не зависит от $s \in [0, 1]$.

1.6.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ (эквивалентные пути на отрезке $[0, 1]$), то $\gamma_0 \stackrel{D}{\sim}_{(1)} \gamma_1$ для любой области D , содержащей $[\gamma_0] = [\gamma_1]$.

Если $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ и пути γ_0 и γ_1 замкнуты, то $\gamma_0 \stackrel{D}{\sim}_{(2)} \gamma_1$ для любой области D , содержащей $[\gamma_0] = [\gamma_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Gamma(t, s) = \gamma_1((1-s)h(t) + st)$, $s, t \in [0, 1]$, где $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — существующий по определению эквивалентности путей возрастающий гомеоморфизм с условием $\gamma_1(h(t)) = \gamma_0(t)$. Тогда Γ будет искомой гомотопией путей γ_0 и γ_1 . $\square$

Таким образом, корректно говорить о *гомотопных кривых* в области (для обоих типов гомотопности).

1.6.12. УПРАЖНЕНИЕ. Если $\{\gamma_0\} \stackrel{D}{\sim}_{(1)} \{\gamma_1\}$, то $\{\gamma_0\} \cup \{\gamma_1\}^- \stackrel{D}{\sim}_{(2)} \{0\}_D$.

Обозначение $\{0\}_D$ используется для класса всех точечных путей в D (любые два точечных пути в D (2)-гомотопны в D).

1.6.13. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть $D = \{r < |z| < R\}$ — кольцо, где $0 \leq r < 1 < R \leq +\infty$, и пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ — замкнутый путь, $n = \text{ind}_\gamma(0) = (2\pi)^{-1} \Delta_\gamma \text{Arg}(z)$. Если $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t} \big|_{[0, 1]}$ — путь, равномерно проходящий n раз ∂B_1 , то $\gamma \stackrel{D}{\sim}_{(2)} \gamma_n$. При этом разные γ_n не гомотопны в D .

1.6.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область D в $\mathbb{C}$ называется $\Gamma(1)$ -односвязной (соответственно $\Gamma(2)$ -односвязной), если всякие пути $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow D$ с одинаковыми концами (соответственно замкнутые пути в D) являются (1)-гомотопными в D (соответственно (2)-гомотопными в D).

1.6.15. ТЕОРЕМА (Эквивалентные определения односвязной области в $\mathbb{C}$). Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Следующие условия эквивалентны:

(1.1) D односвязна в $\mathbb{C}$, т. е. $D_c^\bullet = \mathbb{C}^\bullet \setminus D$ связно в $\mathbb{C}^\bullet$;

(1.2) $\partial^\bullet D$ связна в $\mathbb{C}^\bullet$;

- (2.1) D гомеоморфна B_1 ;
 (2.2) D конформно эквивалентна B_1 (это условие эквивалентно остальным при $D \neq \mathbb{C}$);
 (3) существует исчерпание D жордановыми областями, т. е. найдется последовательность $\{G_n\}_{n=1}^{+\infty}$ жордановых областей с условиями $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, причем $\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n = D$;
 (4) D является $\Gamma(1)$ -односвязной;
 (5) D является $\Gamma(2)$ -односвязной ($\pi_1(D) = \{0\}$);
 (6) D односвязна по Жордану, т. е. выполнено любое из двух эквивалентных условий:
 (6.1) для любого компакта K в D его оболочка $\hat{K} \subset D$;
 (6.2) для всякой замкнутой жордановой ломаной γ в D имеем включение $\overline{D_\gamma} \subset D$.

ПЛАН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

- (1.2) $\Rightarrow$ (1.1) — от противного (учесть, что $\partial^\bullet D \subset D_\bullet^\bullet$).
 (1.1) $\Rightarrow$ (6.1) — см. теорему ??.
 (6.1) $\Rightarrow$ (6.2) — по теореме Жордана для ломаных.
 (6.2) $\Rightarrow$ (2.2) — см. лемму 1.2.17 и теоремы ??, ?? и 1.4.6 .
 (2.2) $\Rightarrow$ (2.1) — очевидно.
 (2.1) $\Rightarrow$ (3) — устраиваем исчерпание образами кругов $\{|z| < n/(n+1)\}$.
 (3) $\Rightarrow$ (4) — нужное условие выполнено в $\{G_n\}$ по теореме Римана.
 (4) $\Rightarrow$ (5) — несложное упражнение.
 (5) $\Rightarrow$ (2.2) — см. далее следствие 1.9.4 теоремы 1.8.4 о монодромии.
 (2.1) $\Rightarrow$ (1.2). Докажем от противного. Пусть функция $f: B_1 \rightarrow D$ есть гомеоморфизм, но $\partial^\bullet D$ не связна. Найдем открытые Ω_1 и Ω_2 в $\mathbb{C}^\bullet$ с условиями $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\partial^\bullet D \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\partial^\bullet D \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ и $\partial^\bullet D \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Введем $K = \partial\Omega_1 \cap D$ — непустой компакт в D (иначе $D \subset \Omega_1$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ — противоречие). Тогда $K_1 = f^{-1}(K)$ — компакт в B_1 , так что найдется $r \in (0, 1)$ с условием $K_1 \subset \overline{B_r}$, где $B_r = B(0, r)$. Так как $f(\overline{B_r})$ — компакт в D , то найдутся $w_1 \in (\Omega_1 \cap D) \setminus f(\overline{B_r})$ и $w_2 \in (\Omega_2 \cap D) \setminus f(\overline{B_r})$. Положим $z_1 = f^{-1}(w_1)$, $z_2 = f^{-1}(w_2)$ и соединим их путем (ломаной) γ в $B_1 \setminus \overline{B_r}$. Но тогда $f \circ \gamma$ — путь, соединяющий w_1 и w_2 в D , не пересекающий множество $f(\overline{B_r})$ и, следовательно, содержащееся в нем множество $\partial\Omega_1 \cap D$. Таким образом, $f \circ \gamma$ не пересекает границу $\partial\Omega_1$. Поскольку $w_1 \in \Omega_1$, а $w_2 \notin \Omega_1$, мы приходим к противоречию (воспользоваться принципом вложенных отрезков). $\square$

1.6.16. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть f — гомеоморфизм $\overline{B_1}$ на K . Тогда $f|_{B_1}$ — гомеоморфизм B_1 на K° , а $f|_{\partial B_1}$ — гомеоморфизм ∂B_1 на ∂K .

§ 1.7. Аналитическое продолжение вдоль пути и его свойства

1.7.1. Аналитическое продолжение по цепочке элементов.

1.7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{A}(G)$. Пара $\mathcal{G} = (G, g)$ называется *аналитическим элементом*.

1.7.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Аналитические элементы $\mathcal{G}_1 = (G_1, g_1)$ и $\mathcal{G}_2 = (G_2, g_2)$ называются *непосредственными аналитическими продолжениями* друг друга, если существует открытый круг B с условиями $B \subset G_1 \cap G_2$ и $g_1 \equiv g_2$ в B . В частности, $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ (см. рис. 7.1).

Краткое обозначение для указанного условия: $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$.

1.7.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Аналитические элементы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ называются *аналитическими продолжениями* друг друга *по цепочке* (аналитических) *элементов* $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$, если $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathcal{F}_N \leftrightarrow \mathcal{G}_2$.

1.7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $B = B(a, R_a)$ — открытый круг, $f \in \mathcal{A}(B)$, причем B является кругом сходимости ряда Тейлора функции f с центром a . Элемент $\mathcal{F} = \mathcal{F}_a = (B, f)$ называется *каноническим аналитическим элементом* (с функцией f , центром a , радиусом R_a). Для краткости такой элемент будет также обозначаться через $\mathcal{F}_a^f$, или $\mathcal{F}_a(f)$ для громоздких f .

В дальнейшем рассматриваются только канонические аналитические элементы, если не оговорено противного.

1.7.5. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть $f(z) = \ln z$ в $\mathbb{C}_-$. Тогда для любого $a \in \mathbb{C}_-$ определен $\mathcal{F}_a^f$.

1) Выписать все $\mathcal{F}_a^f$.

2) Для каких a и b верно, что $\mathcal{F}_a^f \leftrightarrow \mathcal{F}_b^f$?

1.7.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a) = (B(a, R_a), f_a)$ и $\mathcal{F}_b = (B_b, f_b) = (B(b, R_b), f_b)$ — канонические элементы, и пусть $\mathcal{F}_a \leftrightarrow \mathcal{F}_b$. Тогда

1) если $R_a = +\infty$, то $R_b = +\infty$ и $f_a \equiv f_b$ — целая функция;

2) если $R_a < +\infty$, то $R_b < +\infty$, $|R_a - R_b| \leq |a - b|$ и $f_a \equiv f_b$ на пересечении $B_a \cap B_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По теореме единственности.

2) Ни один из соответствующих замкнутых кругов $\overline{B_a}$ или $\overline{B_b}$ не может строго содержаться внутри второго по теореме Коши–Тейлора. Поэтому найдется точка $c \in \partial B_a \cap \partial B_b$ (см. рис. 7.2). Тогда $|R_a - R_b| \leq |a - b|$ по неравенству треугольника для трех точек a, b, c , а $f_a \equiv f_b$ на $B_a \cap B_b$ по теореме единственности. $\square$

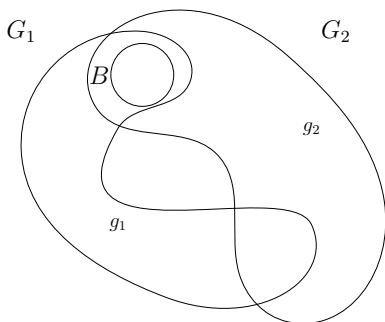


Рис. 7.1.

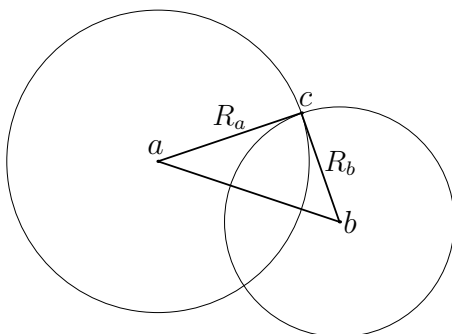


Рис. 7.2.

1.7.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\{\mathcal{F}^t: t \in T\}$ — семейство канонических элементов, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) для любых $\tau_1, \dots, \tau_J$ из T , $J \in \mathbb{N}$, круги $B^{\tau_1}, \dots, B^{\tau_J}$ элементов $\mathcal{F}^{\tau_1}, \dots, \mathcal{F}^{\tau_J}$ имеют непустое пересечение, т. е. $B^{\tau_1} \cap \dots \cap B^{\tau_J} \neq \emptyset$;

(2) для любых $t, t' \in T$ найдутся $t_1, \dots, t_N \in T$, $N \in \mathbb{N}$, такие, что $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_N} \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}$.

Тогда для всех $t, t' \in T$ имеем $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем две произвольные точки $t, t' \in T$. Пусть $B^t, B^{t_1}, \dots, B^{t_N}, B^{t'}$ — круги элементов $\mathcal{F}^t, \mathcal{F}^{t_1}, \dots, \mathcal{F}^{t_N}, \mathcal{F}^{t'}$ (согласно (2)) соответственно. Поскольку множество $B^t \cap B^{t_1} \cap \dots \cap B^{t_N} \cap B^{t'}$

открыто и (по условию (1)) непусто, в нем содержится некоторый открытый круг B_0 . Таким образом, $f^t \equiv f^{t_1} \equiv \dots \equiv f^{t_N} \equiv f^{t'}$ на B_0 , т.е. по определению имеем $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t'}$, что и требовалось. $\square$

1.7.2. Аналитическое продолжение вдоль пути и его свойства.

1.7.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ — канонический элемент с центром $a \in \mathbb{C}$, и пусть $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ — путь, такой, что $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ (последние два свойства будем кратко обозначать, используя символ γ_{ab} вместо γ). Говорят, что элемент $\mathcal{F}_a$ *допускает аналитическое продолжение (АП) вдоль пути* $\gamma = \gamma_{ab}$, если существует семейство $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ элементов, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\mathcal{F}_\gamma^\alpha = \mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_\gamma^t$ имеет центр $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$;
- 2) для любого $t_0 \in [\alpha, \beta]$ найдется окрестность $O(t_0)$ точки t_0 в $[\alpha, \beta]$, такая, что при всех $t \in O(t_0)$ имеем $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}$.

Элемент $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_\gamma^\beta$ называется *результатом продолжения* элемента $\mathcal{F}_a$ *вдоль* γ . Совокупность элементов $\{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ называется *семейством, осуществляющим это продолжение*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Далее будет доказано, что семейство, осуществляющее аналитическое продолжение вдоль пути (если существует) единственно, поэтому определения семейства и результата продолжения корректны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Элемент $\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t)$ зависит от t , а не только от $\gamma(t)$.

1.7.9. ПРИМЕР (Логарифм). Пусть $f(z) = \ln z$ в $\mathbb{C}_-$, $a \in \mathbb{C}_-$, $\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_a^f$. Пусть $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_b = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — путь, $\gamma(\alpha) = a$. Определим семейство $\{\mathcal{L}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$, осуществляющее АП $\mathcal{L}_a$ вдоль γ .

Мы знаем, что существует (причем единственная) непрерывная ветвь $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ (на всем $[\alpha, \beta]$) многозначной функции $\text{Arg}(\gamma(t))$, определяемая условием $\varphi(\alpha) = \arg(a)$. Тогда при $t \in [\alpha, \beta]$ положим $\mathcal{L}_\gamma^t = (B_\gamma^t, l_\gamma^t(z))$, где

$$B_\gamma^t = B(\gamma(t), |\gamma(t)|), \quad l_\gamma^t(z) = \frac{\ln z}{(\varphi(t) - \pi, \varphi(t) + \pi)} = \ln |z| + i \frac{\arg z}{(\varphi(t) - \pi, \varphi(t) + \pi)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда (как в предыдущем примере) в записи канонического элемента (B, f) функция f , задаваемая по некоторой формуле, оказывается определенной и голоморфной в более широкой области, чем круг B (но не в большем концентрическом круге); на самом деле всегда имеется в виду, что мы рассматриваем элемент $(B, f|_B)$.

1.7.10. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что семейство $\{\mathcal{L}_\gamma^t\}$, определенное в примере 1.7.9, действительно осуществляет АП $\mathcal{L}_a$ вдоль γ , т.е. нужно

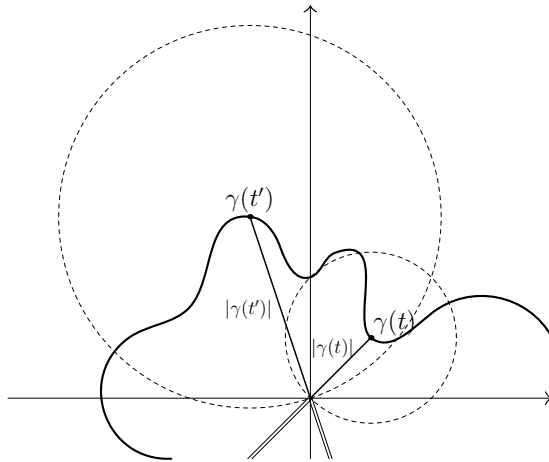


Рис. 7.3.

найти какую-либо окрестность $O(t_0)$ из определения 1.7.8. Доказать, что максимальной такой окрестностью является множество

$$\{t \in [\alpha, \beta]: |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \pi\}.$$

Доказать, что $\mathcal{L}_a$ не продолжается вдоль пути γ_{ab} , который проходит через точку 0 .

Указание. По построению для любого $t \in [\alpha, \beta]$ в соответствующем круге B_γ^t имеем $(l_\gamma^t(z))' = 1/z$, поэтому для всех $t, t' \in [\alpha, \beta]$ имеем $l_\gamma^t(z) = l_\gamma^{t'}(z) + 2\pi i k(t, t')$ на $B_\gamma^t \cap B_\gamma^{t'}$, где $k(t, t') \in \mathbb{Z}$. Поэтому остается показать, что $k(t, t') = 0$ для достаточно близких t и t' (см. рис. 7.3).

1.7.11. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть $p \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$ фиксировано, $z_{(o)}^p = e^{p \ln(z)}$ на $\mathbb{C}_-$, $a \in \mathbb{C}_-$. Возникает элемент $\mathcal{P}_a^p = \mathfrak{D}_a^{z_{(o)}^p}$. Пусть $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_b$ — путь, $\gamma(\alpha) = a$. Выписать семейство $\{\mathcal{P}_\gamma^{pt}\}_{[\alpha, \beta]}$, осуществляющее АП $\mathcal{P}_a^p$ вдоль γ . Найти максимальную $O(t_0)$.

Доказать, что $\mathcal{P}_a^p$ не продолжается вдоль пути γ_{ab} , который проходит через точку 0 .

1.7.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В условиях и обозначениях определения 1.7.8 либо при всех $t \in [\alpha, \beta]$ имеем $R_\gamma^t = +\infty$ (следовательно, все f_γ^t — равные целые функции), либо справедливы следующие утверждения:

(1) при всех $t \in [\alpha, \beta]$ выполняется условие $R_\gamma^t < +\infty$ и при всех $t \in O(t_0)$ имеем $|R_\gamma^t - R_\gamma^{t_0}| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)|$ (в частности, $R_\gamma(t) = R_\gamma^t -$

непрерывная строго положительная на $[\alpha, \beta]$ функция, и существует $\min_{t \in [\alpha, \beta]} R_\gamma(t) = R_\gamma > 0$);

(2) пусть $\tilde{O}(t_0)$ — связная окрестность точки t_0 на $[\alpha, \beta]$, для которой верно условие: при всех $t \in \tilde{O}(t_0)$ имеем $\gamma(t) \in B(\gamma(t), R_\gamma^t)$; тогда $\tilde{O}(t_0)$ может быть взята в качестве $O(t_0)$;

(3) существует $\delta > 0$ такое, что из условий $t, t' \in [\alpha, \beta]$ и $|t - t'| \leq \delta$ вытекает $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t'}$ (в частности, в качестве $O(t_0)$ можно взять δ -окрестность $O_\delta(t_0)$ точки t_0 в $[\alpha, \beta]$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Следует из предложения 1.7.6.

(2) Пусть $U(t_0) = \{t \in \tilde{O}(t_0) : \mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}\}$. Ясно, что $t_0 \in U(t_0) \neq \emptyset$. По предложению 1.7.7 и свойству (1) множество $U(t_0)$ открыто и замкнуто в $\tilde{O}(t_0)$ (проверить!). Поскольку $\tilde{O}(t_0)$ — связное множество, имеем равенство $\tilde{O}(t_0) = U(t_0)$, откуда $\tilde{O}(t_0)$ может быть взято в качестве $O(t_0)$.

(3) Пусть R_γ взято из (1), и $\delta > 0$ определяется из условия

$$|t - t'| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t')| < R_\gamma$$

(оно существует в силу равномерной непрерывности пути γ). Тогда имеем $O_\delta(t_0) \subset \tilde{O}(t_0)$, откуда получаем, что $O_\delta(t_0)$ также может быть взята в качестве $O(t_0)$. $\square$

1.7.13. ТЕОРЕМА (Единственность АП вдоль пути). *В условиях определения 1.7.8, если элемент $\mathcal{F}_a$ аналитически продолжается вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab}$, то элементы семейства $\mathbb{F}_\gamma$, осуществляющего это продолжение (в частности, конечный элемент $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_\gamma^\beta$) определены однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что $R_\gamma^t < +\infty$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$, иначе все $R_\gamma^t = +\infty$ (следовательно, все $\mathcal{F}_\gamma^t$ совпадают) и доказывать нечего. Пусть, от противного, существуют два различных семейства $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ и $\tilde{\mathbb{F}}_\gamma = \{\tilde{\mathcal{F}}_\gamma^t = (B(\gamma(t), \tilde{R}_\gamma^t), \tilde{f}_\gamma^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$, осуществляющих аналитическое продолжение $\mathcal{F}_a$ вдоль γ_{ab} .

Из предложения 1.7.12 (1) определим $R_\gamma = R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) > 0$ и $\tilde{R}_\gamma = R_\gamma(\tilde{\mathbb{F}}_\gamma) > 0$, тогда $R_0 = \min(R_\gamma, \tilde{R}_\gamma) > 0$. Определим $\delta > 0$ из условия: $\{|t - t'| < \delta\} \Rightarrow \{|\gamma(t) - \gamma(t')| < R_0\}$ ($t, t' \in [\alpha, \beta]$). Положим $t_n = \alpha + n\delta$, $n \in \{1, \dots, N\}$, где число $N = (\beta - \alpha)/\delta$ без ограничения общности будем считать натуральным. Для всех $t \in [\alpha, t_1]$ имеем

$$\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_a \leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\gamma^t,$$

и для таких t , очевидно, $\mathcal{F}_\gamma^t$ и $\tilde{\mathcal{F}}_\gamma^t$ совпадают. Далее повторяем это рассуждение $N - 1$ раз. $\square$

§ 1.8. Связь аналитического продолжения по путям и по цепочкам. АП по «близким» путям. Теорема о монодромии. АП первообразного элемента

1.8.1. Связь аналитического продолжения по путям и по цепочкам.

1.8.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (Связь аналитического продолжения по путям и по цепочкам). Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}_a$ и $\mathcal{F}_b$ — канонические элементы с центрами a и b соответственно. Следующие условия эквивалентны:

(а) существует путь $\gamma = \gamma_{ab}$ такой, что элемент $\mathcal{F}_b$ является результатом продолжения $\mathcal{F}_a$ вдоль γ_{ab} (с семейством $\{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$);

(б) существует такая цепочка канонических элементов $\mathcal{F}_{a_n}$, $n \in \{1, \dots, N\}$, что $\mathcal{F}_a \leftrightarrow \mathcal{F}_{a_1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \mathcal{F}_{a_N} \leftrightarrow \mathcal{F}_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Положим $a_n = \gamma(\alpha + n\delta)$ при $n \in \{1, \dots, N\}$, где $N + 1 = (\beta - \alpha)/\delta$, а $\delta > 0$ определено условием предложения 1.7.12 (3) так, чтобы N было натуральным. Остается положить $\mathcal{F}_{a_n} = \mathcal{F}_\gamma^{\alpha + n\delta}$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Без ограничения общности можно считать, что $a = a_0 \neq a_1$, $a_1 \neq a_2, \dots, a_N \neq a_{N+1} = b$. Пусть $\mathcal{F}_{a_n} = (B_{a_n}, f_{a_n})$, где $n \in \{0, \dots, N+1\}$. Пусть $\gamma(t)$ — натуральная параметризация ломаной $L = [a, a_1] \cup \dots \cup [a_N, b]$, определенная на отрезке $[0, \ell]$, $\ell = \ell(L)$ — длина L . Пусть $\{0 = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \alpha_{N+1} = \ell\}$ — разбиение отрезка $[0, \ell]$ такое, что

$$\gamma|_{[\alpha_n, \alpha_{n+1}]} = [a_n, a_{n+1}], \quad n \in \{0, \dots, N\}.$$

Теперь для каждого $n \in \{0, \dots, N\}$ при $t \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ положим $\mathcal{F}_\gamma^t = \mathfrak{F}_{\gamma(t)}^{f_{a_n}}$, если $\gamma(t) \in B_{a_n}$, $\mathcal{F}_\gamma^t = \mathfrak{F}_{\gamma(t)}^{f_{a_{n+1}}}$, если $\gamma(t) \in B_{a_{n+1}}$ (напомним, что $f_{a_n} = f_{a_{n+1}}$ на пересечении B_{a_n} и $B_{a_{n+1}}$ в силу предложения 1.7.6). Завершить доказательство. $\square$

1.8.2. АП по «близким» путям. Теорема о монодромии.

1.8.2. ТЕОРЕМА (Об аналитическом продолжении по «близким» путям). Пусть элемент $\mathcal{F}_a$ аналитически продолжается вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, и R_γ определен как в предложении 1.7.12, $R_\gamma < +\infty$. Пусть есть другой путь $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{ab}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ с условием $d(\gamma, \tilde{\gamma}) < R_\gamma$, где

$$d(\gamma, \tilde{\gamma}) = \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{[\alpha, \beta]} = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)|.$$

Тогда $\mathcal{F}_a$ аналитически продолжается вдоль $\tilde{\gamma}$ и результаты продолжений $\mathcal{F}_b$ и $\tilde{\mathcal{F}}_b$ элемента $\mathcal{F}_a$ (вдоль γ и $\tilde{\gamma}$ соответственно) совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ — семейство, осуществляющее аналитическое продолжение элемента $\mathcal{F}_a$ вдоль γ ,

$$\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t) = (B_\gamma^t, f_\gamma^t).$$

Укажем явно семейство $\tilde{\mathbb{F}}_{\tilde{\gamma}} = \{\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{F}_a$ вдоль $\tilde{\gamma}$.

Для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ имеем $|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| < R_{\gamma} \leq R_{\gamma}^t$, поэтому $\tilde{\gamma}(t) \in B_{\gamma}^t$ и определен элемент $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t = \mathfrak{D}_{\tilde{\gamma}(t)}^{f_{\gamma}^t} = (B(\tilde{\gamma}(t), \tilde{R}_{\tilde{\gamma}}^t), \tilde{f}_{\tilde{\gamma}}^t)$. Докажем, что семейство $\{\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ — искомое.

По условию, $\max_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < R_{\gamma}$, поэтому найдется $\varepsilon \in (0, R_{\gamma}]$ с условием $\max_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| = R_{\gamma} - \varepsilon$. Следовательно, при всех $t \in [\alpha, \beta]$ имеем

$$\tilde{R}_{\tilde{\gamma}}^t \geq R_{\gamma}^t - |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \geq \min_{t \in [\alpha, \beta]} R_{\gamma}^t - \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| = \varepsilon$$

т. е. $\tilde{R}_{\tilde{\gamma}}^t$ отделен от нуля.

Зафиксируем произвольную точку $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Остается найти окрестность $O(t_0)$ в $[\alpha, \beta]$ такую, что для всех $t \in O(t_0)$ имеем $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t \leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^{t_0}$.

Действительно, найдется такое $\delta > 0$, что для любого $t \in O_{\delta}(t_0)$ (напомним, что $O_{\delta}(t_0)$ — это δ -окрестность точки t_0 в $[\alpha, \beta]$) справедливы следующие утверждения:

(1) $\mathcal{F}_{\gamma}^t \leftrightarrow \mathcal{F}_{\gamma}^{t_0}$ (семейство $\{\mathcal{F}_{\gamma}^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ аналитически продолжает $\mathcal{F}_a$ вдоль пути γ);

(2) $\tilde{\gamma}(t_0) \in B_{\gamma}^t$ (ввиду непрерывности функций $\gamma(t)$, R_{γ}^t и условия $\tilde{\gamma}(t_0) \in B_{\gamma}^{t_0}$);

(3) $\tilde{\gamma}(t_0) \in \tilde{B}_{\tilde{\gamma}}^t = B(\tilde{\gamma}(t), \tilde{R}_{\tilde{\gamma}}^t)$ (функция $\tilde{\gamma}(t)$ непрерывна и $\tilde{R}_{\tilde{\gamma}}^t \geq \varepsilon$).

Остается воспользоваться предложением 1.7.7 для семейства элементов $\{\mathcal{F}_{\gamma}^t, \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t\}_{t \in O_{\delta}(t_0)}$ с учетом того, что $\tilde{\gamma}(t_0)$ лежит во всех кругах указанных элементов, $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\gamma}}^t \leftrightarrow \mathcal{F}_{\gamma}^t$ и $\mathcal{F}_{\gamma}^t \leftrightarrow \mathcal{F}_{\gamma}^{t_0}$. $\square$

1.8.3. ТЕОРЕМА (Об аналитическом продолжении по путям гомотопии). Пусть $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — (1)-гомотопия. При фиксированном $s \in [0, 1]$ положим $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)|_{t \in [0, 1]}$, $a = \gamma_s(0)$, $b = \gamma_s(1)$.

Пусть элемент $\mathcal{F}_a$ (с центром в точке a) аналитически продолжается вдоль γ_s для любого $s \in [0, 1]$. Тогда результаты $\mathcal{F}_{b,s} = \mathcal{F}_b$ всех этих продолжений совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $s \in [0, 1]$ пусть

$$\mathbb{F}_{\gamma_s} = \{\mathcal{F}_s^t = (B(\gamma_s(t), R_s^t), f_s^t)\}_{t \in [0, 1]}$$

— семейство, аналитически продолжающее $\mathcal{F}_a$ вдоль γ_s . Тогда $R_s = \min_{t \in [0, 1]} R_s^t > 0$.

В силу равномерной непрерывности Γ на $[0, 1]^2$, для всякого $s \in [0, 1]$ существует $\delta > 0$ с условием $\|\gamma_{s'} - \gamma_s\|_{[\alpha, \beta]} < R_s$ при всех $s' \in O_{\delta}(s)$.

По теореме 1.8.2 результаты $\mathcal{F}_{b,s'}$ продолжения элемента $\mathcal{F}_a$ по всем путям $\gamma_{s'}$, $s' \in O_\delta(s)$ совпадают. Остается воспользоваться компактностью отрезка $[0, 1]$ (завершить доказательство). $\square$

1.8.4. ТЕОРЕМА (О монодромии). Пусть D — $\Gamma(1)$ -односвязная область в $\mathbb{C}$, $a \in D$, $\mathcal{F}_a$ — канонический элемент с центром a , который аналитически продолжается вдоль любого пути γ_a с началом в точке a , целиком лежащего в D . Тогда для любой точки $b \in D$ результаты продолжений $\mathcal{F}_b$ элемента $\mathcal{F}_a$ по всем путям γ_{ab} в D (с началом a и концом b) совпадают.

Более того, найдется $f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $\mathcal{F}_b = \mathcal{D}_b^f$ при всех $b \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой фиксированной точки $b \in D$ единственность элемента $\mathcal{F}_b$ следует из предыдущей теоремы, поскольку область D является $\Gamma(1)$ -односвязной.

Итак, для любой точки $z \in D$ однозначно определен элемент $\mathcal{F}_z = (B_z, f_z)$. Определим функцию f по формуле $f(z) = f_z(z)$. Ясно, что для любого фиксированного $z_0 \in D$ и круга $B(z_0, r) \subset B_{z_0} \cap D$ при всех $z \in B(z_0, r)$ имеем $f_{z_0}(z) = f_z(z)$, поэтому $f \in \mathcal{A}(D)$. $\square$

1.8.5. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать теорему о монодромии для $\Gamma(2)$ -односвязной области в $\mathbb{C}$.

1.8.3. Аналитическое продолжение первообразного элемента.

1.8.6. ТЕОРЕМА (О продолжении первообразного элемента). Пусть $\gamma = \gamma_{ab}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ — спрямляемый путь ($\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$),

$$U_\varepsilon = U_\varepsilon([\gamma]) = \bigcup_{t \in [\alpha, \beta]} B(\gamma(t), \varepsilon)$$

— ε -окрестность $[\gamma]$ (является областью в $\mathbb{C}$), $\varepsilon > 0$.

Пусть $f \in \mathcal{A}(U_\varepsilon)$ и F_a — первообразная (п/о) для f в $B(a, \varepsilon)$ с условием $F_a(a) = 0$. Пусть, наконец, $\mathcal{F}_a = \mathcal{D}_a^{F_a}$ — канонический элемент.

Тогда $\mathcal{F}_a$ аналитически продолжается вдоль пути γ . Кроме того, для семейства $\mathbb{F}_\gamma$, осуществляющего это продолжение, имеем оценку $R_\gamma = R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geq \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Элемент $\mathcal{F}_a$ называется первообразным каноническим элементом для f (п/о-элементом для f) в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ при $z \in B(\gamma(t), \varepsilon)$ определим

$$F_\varepsilon^t(z) = \int_{[\gamma|_{[\alpha, t]}} f(\zeta) d\zeta + \int_{[\gamma(t), z]} f(\zeta) d\zeta. \quad (1.8.1)$$

Очевидно, что $F_\varepsilon^t \in \mathcal{A}(B_\varepsilon^t)$ и $(F_\varepsilon^t(z))' = f(z)$ в B_ε^t , $B_\varepsilon^t = B(\gamma(t), \varepsilon)$.

Определим $\mathcal{F}^t = \mathfrak{F}_{\gamma(t)}^{F^t} =: (B(\gamma(t), R^t), F^t) =: (B^t, F^t)$, тогда $R^t \geq \varepsilon$. Докажем, что $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ осуществляет АП элемента $\mathcal{F}_a$ вдоль γ . При этом $R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geq \varepsilon$.

Зафиксируем $t_0 \in [\alpha, \beta]$. В силу непрерывности γ существует такое $\delta > 0$, что для всех $t \in O_\delta(t_0)$ имеем $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$. Докажем, что $O_\delta(t_0)$ можно взять в качестве $O(t_0)$ из определения АП вдоль пути для $\mathbb{F}_\gamma$. Пусть $G_\varepsilon^t = B_\varepsilon^{t_0} \cap B_\varepsilon^t \subset B^{t_0} \cap B^t$. Так как $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$, то $[\gamma(t_0), \gamma(t)] \subset G_\varepsilon^t \neq \emptyset$. Остается показать, что для всех $t \in O_\delta(t_0)$ имеем $F^{t_0} = F^t$ в G_ε^t (тогда $F^{t_0} = F^t$ в $B^{t_0} \cap B^t$ по теореме единственности).

По определению для всех $z \in G_\varepsilon^t$ имеем

$$F^{t_0}(z) = F_\varepsilon^{t_0}(z) = \int_{\gamma|_{[\alpha, t_0]}} f(\zeta) d\zeta + \int_{[\gamma(t_0), z]} f(\zeta) d\zeta,$$

$$F^t(z) = F_\varepsilon^t(z) = \int_{\gamma|_{[\alpha, t_0]}} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma|_{[t_0, t]}} f(\zeta) d\zeta + \int_{[\gamma(t), z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Так как в G_ε^t имеем $(F^t)' = (F^{t_0})' = f$, нам остается установить, что $F^t(\gamma(t)) = F^{t_0}(\gamma(t))$. Последнее непосредственно (в силу интегральной теоремы Коши в односвязной области $B_\varepsilon^{t_0}$) следует из равенств

$$F^t(\gamma(t)) - F^{t_0}(\gamma(t)) = \int_{\gamma|_{[t_0, t]}} f(\zeta) d\zeta - \int_{[\gamma(t_0), \gamma(t)]} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Теорема доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Спрямяемость пути γ была нужна для возможности интегрирования по нему.

1.8.7. СЛЕДСТВИЕ. Теорема 1.8.6 верна без условия спрямяемости пути γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть мы находимся в условиях теоремы 1.8.6, за исключением условия спрямяемости пути $\gamma = \gamma_{ab}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Найдем путь $\lambda = \lambda_{ab}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, который является вписанной в γ ломаной и для которого верна оценка $\|\gamma - \lambda\|_{[\alpha, \beta]} < \varepsilon/3$ (путь λ_{ab} существует в силу равномерной непрерывности γ на $[\alpha, \beta]$).

Путь λ спрямляем, $f \in \mathcal{A}(U_{2\varepsilon/3}([\lambda]))$, поэтому по теореме 1.8.6 элемент $\mathcal{F}_a$ продолжается вдоль λ . Пусть $\mathbb{F}_\lambda = \{\mathcal{F}_\lambda^t = (B(\lambda(t), R_\lambda^t), F_\lambda^t)\}_{[\alpha, \beta]}$ — семейство элементов, осуществляющее указанное продолжение. Тогда $R_\lambda = R_\lambda(\mathbb{F}_\lambda) \geq 2\varepsilon/3$. По теореме 1.8.2 (о продолжении по «близким» путям) элемент $\mathcal{F}_a$ продолжается и вдоль γ , причем из ее доказательства следует, что $R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geq \varepsilon/3$.

Пусть $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), F_\gamma^t)\}_{[\alpha, \beta]}$ — семейство, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{F}_a$ вдоль γ . Из доказательств теорем 1.8.2 и 1.8.6 следует, что $(F_\gamma^t(z))' = f(z)$ в $B(\gamma(t), \varepsilon/3)$ (равенство $(F_\lambda^t(z))' = f(z)$ в $B(\lambda(t), 2\varepsilon/3)$ видно из явной формулы для случая спрямляемого пути λ ,

а F_γ^t есть просто переразложение F_λ^t в ряд Тейлора с центром в точке $\gamma(t) \in B(\lambda(t), 2\varepsilon/3)$. Но тогда по теореме единственности функция F_γ^t должна быть голоморфна по крайней мере в $B(\gamma(t), \varepsilon)$, где голоморфна ее производная $f(z)$. Откуда $R_\gamma(\mathbb{F}_\gamma) \geq \varepsilon$. $\square$

1.8.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В условиях следствия 1.8.7 определим

$$\int_\gamma f(z) dz = F_b(b) - F_a(a) = F_b(b).$$

Напомним, что элемент $\mathcal{F}_b = (B_b, F_b)$ — результат продолжения $\mathcal{F}_a$ вдоль пути γ . Таким образом, если $f \in \mathcal{A}(U([\gamma]))$, где $U([\gamma])$ — некоторая окрестность носителя пути γ , то определен интеграл от f по этому пути, который для спрямляемых путей совпадает с определенным ранее.

1.8.9. СЛЕДСТВИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, γ_0 и γ_1 — пути в D , определенные на $[0, 1]$. Если $\gamma_0 \stackrel{D}{\underset{(1)}{\sim}} \gamma_1$, то

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma: [0, 1]^2 \rightarrow D$ — (1)-гомотопия в D между γ_0 и γ_1 . Обозначим через $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)|_{t \in [0, 1]}$ — s -й путь гомотопии, где $s \in [0, 1]$, $\gamma_s(0) = a$, $\gamma_s(1) = b$. Результат продолжения п/о-элемента $\mathcal{F}_a$ для f вдоль γ_s при любом $s \in [0, 1]$ один и тот же (по теореме 1.8.3), обозначим его через $\mathcal{F}_b = (B_b, F_b)$. Тогда $\int_{\gamma_s} f(z) dz = F_b(b)$. В частности, $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$. $\square$

1.8.10. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, γ_0 и γ_1 — пути на $[0, 1]$ в D . Доказать, что если $\gamma_0 \stackrel{D}{\underset{(2)}{\sim}} \gamma_1$, то $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$.

§ 1.9. Следствия. Полная аналитическая функция по Вейерштрассу. Точки ветвления многозначных ветвей ПАФ

1.9.1. Следствия.

1.9.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть D — $\Gamma(1)$ -односвязная область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$, причем $f(z) \neq 0$ в D . Тогда существует такая функция $g \in \mathcal{A}(D)$, что $g(z) \in \text{Ln}(f(z))$ при всех $z \in D$, т. е. g — голоморфная ветвь m -функции $\text{Ln}(f(z))$ в D , или $f = \exp(g)$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $a \in D$ и канонический элемент $\mathcal{H}_a = (B_a, h_a)$, $h'_a(z) = f'(z)/f(z)$ в некоторой окрестности точки a , $h_a(a) = 0$. По следствию 1.8.7, примененному к функции $f'(z)/f(z)$, $\mathcal{H}_a$ продолжается вдоль любого пути γ_{ab} , $[\gamma_{ab}] \subset D$. По теореме 1.8.4 найдется функция $h \in \mathcal{A}(D)$ такая, что для любого $b \in D$ результат продолжения элемента $\mathcal{H}_a$ по любому пути γ_{ab} в D есть $\mathcal{H}_b^h$. В частности, для функции h имеем $h(a) = 0$ и $h'(z) = f'(z)/f(z)$ в D .

В качестве искомой функции $g(z)$ можно взять $g(z) = h(z) + \ln_{(o)} f(a)$.

Действительно, для $g(z)$ имеем $g'(z) = f'(z)/f(z)$ и $g(a) \in \text{Ln } f(a)$. При этом множество $\{z \in D : g(z) \in \text{Ln } f(z)\}$ открыто и замкнуто в D , поэтому совпадает с D , так что g — действительно искомая функция. $\square$

1.9.2. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать аналог предложения 1.9.1 для $\Gamma(2)$ -односвязной области D в $\mathbb{C}$.

1.9.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для $\Gamma(1)$ -односвязной (или $\Gamma(2)$ -односвязной) области D в $\mathbb{C}$ и функции $f \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq 0$ в D , при любом натуральном $n \geq 2$ найдется функция $g_n \in \mathcal{A}(D)$ такая, что $f(z) = (g_n(z))^n$ для всех $z \in D$, т. е. g_n — голоморфная ветвь m -функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(z)$ — голоморфная ветвь многозначной функции $\text{Ln } f(z)$ в D . Тогда искомая функция $g_n(z) = \exp(g(z)/n)$. $\square$

1.9.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если D является $\Gamma(1)$ -односвязной (или $\Gamma(2)$ -односвязной) областью в $\mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, то D конформно эквивалентна $B_1 = \{|z| < 1\}$. Этим завершается доказательство теоремы 1.6.15 (об эквивалентности определений односвязной области в $\mathbb{C}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замечаем, что в доказательстве теоремы 1.4.6 (теоремы Римана), свойство односвязности области D используется только для построения в этой области голоморфных ветвей квадратных корней из голоморфных функций, не имеющих нулей в D . С учетом предложения 1.9.3, теперь мы умеем строить такие ветви в $\Gamma(1)$ - и $\Gamma(2)$ -односвязных областях. $\square$

1.9.2. Полная аналитическая функция по Вейерштрассу.

1.9.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}_a$ — некоторый фиксированный канонический элемент. *Полной аналитической функцией (ПАФ в смысле Вейерштрасса)*, определяемой элементом $\mathcal{F}_a$, называется совокупность Φ всех канонических элементов, полученных из $\mathcal{F}_a$ аналитическим продолжением по всем путям в $\mathbb{C}$ с началом в точке a , по которым продолжение возможно. Через D_Φ обозначается объединение кругов всех элементов из Φ (D_Φ называется *областью определения ПАФ Φ*).

ЗАМЕЧАНИЕ. ПАФ Φ определяется любым своим элементом. Множество D_Φ — открытое связное множество, т. е. действительно является областью. По определению, для любого $b \in D_\Phi$ найдется элемент $\mathcal{F}_b \in \Phi$ — канонический элемент с центром b .

1.9.6. ТЕОРЕМА (Пуанкаре–Вольтерра). *Если Φ — ПАФ, $b \in D_\Phi$, то число элементов из Φ с центром в точке b не более чем счетно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $b \in D_\Phi$ и элемент $\mathcal{F}_b \in \Phi$ с центром b . Все другие элементы $\tilde{\mathcal{F}}_b \in \Phi$ с центром b получаются из $\mathcal{F}_b$ с помощью АП по замкнутым путям с началом и концом в b .

Пусть $\tilde{\mathcal{F}}_b$ получен из $\mathcal{F}_b$ с помощью аналитического продолжения вдоль пути $\gamma = \gamma_{bb}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$. Пусть $R_\gamma > 0$ — минимальный радиус из предложения 1.7.12 для указанного продолжения. Существует ломаная $\lambda = \lambda_{bb}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = b$, такая, что $\|\gamma - \lambda\|_{[\alpha, \beta]} < R_\gamma$ и все вершины ломаной λ имеют рациональные координаты (кроме начала и конца в b). По теореме 1.8.2 (об АП по близким путям) результаты продолжения элемента $\mathcal{F}_b$ по γ и по λ совпадают. Остается заметить, что совокупность всех возможных ломаных с началом и концом b и остальными вершинами в точках с (обеими) рациональными координатами не более чем счетна. $\square$

1.9.7. ПРИМЕР (ПАФ $\text{Ln}(z - z_0)$). Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}$. Напомним обозначения (при $z_0 = 0$ все нижние индексы z_0 в этих обозначениях опускаются).

Пусть $\mathbb{C}_{z_0b} = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Для $a \in \mathbb{C}_{z_0b}$ определим исходный элемент

$$\mathcal{L}_{z_0a} = \mathcal{E}_a^{l_{z_0a}} = \left(B(a, |a - z_0|), l_{z_0a}(z) \right), \quad l_{z_0a}(z) = \frac{\ln(z - z_0)}{(\arg(a - z_0) - \pi, \arg(a - z_0) + \pi)}.$$

Для произвольного пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$, $\gamma(\alpha) = a$, пусть $\varphi(t)$ — непрерывная ветвь м-функции $\text{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ на $[\alpha, \beta]$, для которой $\varphi(\alpha) = \arg(a - z_0) \in (-\pi, \pi]$. Определим функции

$$l_{z_0\gamma}^t(z) = \frac{\ln(z - z_0)}{(\varphi(t) - \pi, \varphi(t) + \pi)}.$$

При этом $(l_{z_0\gamma}^t(z))' = 1/(z - z_0)$. Элемент $\mathcal{L}_{z_0a}$ продолжается вдоль пути γ . Семейство, осуществляющее это продолжение, имеет вид

$$\mathbb{L}_{z_0\gamma} = \left\{ \mathcal{L}_{z_0\gamma}^t = \left(B(\gamma(t), |\gamma(t) - z_0|), l_{z_0\gamma}^t(z) \right) \right\}_{t \in [\alpha, \beta]}.$$

Ясно, что $R_\gamma = \min_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - z_0|$. Из элемента $\mathcal{L}_{z_0a}$ можно с помощью АП получить все элементы $\mathcal{L}_{z_0b}$, $b \neq z_0$. Если же путь γ проходит через точку z_0 , то продолжения вдоль этого пути элемента $\mathcal{L}_{z_0a}$ не существует (доказать).

Получаем, что для каждой точки $b \neq z_0$ множество всех различных элементов с центром b в рассматриваемой ПАФ имеет вид

$$\mathcal{L}_{z_0b}^k = \mathcal{L}_{z_0b} + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом, если $\gamma = \gamma_{bb}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$ — путь, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$, и $n_{z_0\gamma} = \text{ind}_\gamma(z_0)$, то результатом продолжения элемента $\mathcal{L}_{z_0b}^k$ вдоль пути γ является элемент $\mathcal{L}_{z_0b}^k + 2\pi i n_{z_0\gamma}$. Прибавление константы к элементу означает, что константа прибавляется к функции указанного элемента, а радиус элемента не меняется.

Указанная ПАФ обозначается $\text{Ln}(z - z_0)$. Ясно, что здесь $D_\Phi = \mathbb{C}_{z_0b}$.

1.9.8. ПРИМЕР $(\text{ПАФ } (z - z_0)^p)$. Зафиксируем $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ и $z_0 \in \mathbb{C}$. Используются обозначения из предыдущего примера. При $a \in \mathbb{C}_{z_0b}$ определим исходный элемент

$$\mathcal{P}_{z_0a}^p = \left(B(a, |a - z_0|), (z - z_0)_a^p \right), \quad \rho_{z_0a}^p(z) := (z - z_0)_a^p = \exp(pl_{z_0a}(z)),$$

который аналитически продолжается вдоль любого пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$, $\gamma(\alpha) = a$. Семейство, осуществляющее это продолжение имеет вид

$$\mathbb{P}_{z_0\gamma}^p = \left\{ \mathcal{P}_{z_0\gamma}^{pt} = \left(B(\gamma(t), |\gamma(t) - z_0|), \rho_{z_0\gamma}^{pt} \right) \right\}, \quad \rho_{z_0\gamma}^{pt}(z) = \exp(pl_{z_0\gamma}^t(z)),$$

где функция $l_{z_0\gamma}^t(z)$ определена в примере 1.9.7. Поскольку экспонента — целая функция, окрестности $O(t_0)$ из определения АП для семейства $\mathbb{P}_{z_0\gamma}^p$ можно брать такие же, как для $\mathbb{L}_{z_0\gamma}$. Аналогично предыдущему примеру, из элемента $\mathcal{P}_{z_0a}^p$ можно с помощью аналитического продолжения получить все элементы $\mathcal{P}_{z_0b}^p$, $b \neq z_0$.

Пусть есть элемент $\mathcal{P}_{z_0b}^p$ и путь $\gamma = \gamma_{bb}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$, $n_{z_0\gamma} = \text{ind}_\gamma(z_0)$. Тогда результатом продолжения элемента $\mathcal{P}_{z_0b}^p$ вдоль γ является элемент $\mathcal{P}_{z_0b}^p e^{p2\pi i n_{z_0\gamma}}$, т.е. функция элемента $\mathcal{P}_{z_0b}^p$ умножается на постоянную $e^{p2\pi i n_{z_0\gamma}}$, а круг не меняется. При $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ число разных элементов нашей ПАФ над каждой точкой $b \neq 0$ будет конечным, а при $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ — бесконечным (счетным). Указанная ПАФ обозначается через $(z - z_0)^p$. Здесь $D_\Phi = \mathbb{C}_{z_0b}$.

Рассмотрим подробнее случай $p = 1/n$, $n \geq 2$ натурально. Представим $n_{z_0\gamma} = kn + q$, $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \{0, \dots, n-1\}$. Тогда

$$e^{(1/n)2\pi i n_{z_0\gamma}} = (e^{2\pi i})^k e^{(q/n)2\pi i} = e^{2\pi i q/n} \in \sqrt[n]{1}.$$

Следовательно, над каждой точкой $b \neq z_0$ имеется ровно n различных элементов из ПАФ $(z - z_0)^{1/n}$ (она же $\sqrt[n]{z - z_0}$), соответствующих различным значениям q , причем все они отличаются множителями $e^{2\pi i q/n}$, $q \in \{0, \dots, n-1\}$.

1.9.3. Точки ветвления многозначных ветвей ПАФ.

1.9.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Φ — ПАФ, D_Φ — ее область определения, $D_1 \subset D_\Phi$ — область. Пусть $\mathcal{F}_b \in \Phi$ — элемент с центром $b \in D_1$, который продолжается вдоль любого пути γ_b в D_1 с началом в точке b . Совокупность различных элементов, полученных в результате всех таких продолжений, обозначим через Φ_1 . Будем говорить, что Φ_1 — (многозначная, вообще говоря) аналитическая ветвь ПАФ Φ над D_1 , определяемая элементом $\mathcal{F}_b$.

В указанных условиях число $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ элементов из Φ_1 с центром в каждой из точек $c \in D_1$ — одно и то же (поэтому в этом случае Φ_1 еще называют n -значной аналитической ветвью ПАФ Φ над D_1).

1.9.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в условиях предыдущего определения $D_2 \subset D_1$ — еще одна область, и функция $f \in \mathcal{A}(D_2)$ такова, что для всякого $c \in D_2$ имеем $\mathcal{F}_c \in \Phi_1$. Тогда говорят, что f есть голоморфная (следовательно, однозначная) ветвь для аналитической ветви Φ_1 в D_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ. В определении 1.9.10 вместо Φ_1 полезно взять и всю Φ (вместо D_1 всю D_Φ соответственно), даже если Φ не является аналитической ветвью над D_Φ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть в условиях определения 1.9.9 область D_1 односвязна. Тогда по теореме о монодромии найдется $f_1 \in \mathcal{A}(D_1)$ такая, что

- (1) для всякого $c \in D_1$ имеем $\mathcal{F}_c^{f_1} \in \Phi_1$;
 - (2) для всякого $c \in D_1$ и всякого $\mathcal{F}_c \in \Phi_1$ имеем $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c^{f_1}$,
- т. е. f_1 — единственная голоморфная ветвь для Φ_1 в D_1 , причем f_1 и Φ_1 в известном смысле можно отождествить.

1.9.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в условиях определения 1.9.9 семейство $\{f_j\}_{j \in J}$ различных функций в области $D_2 \subset D_1$ обладает следующими свойствами:

- (1) для любого $j \in J$ функция f_j есть голоморфная ветвь для Φ_1 в области D_2 ;
 - (2) для всяких $c \in D_2$ и $\mathcal{F}_c \in \Phi_1$ найдется $j \in J$ с условием $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c^{f_j}$.
- Тогда в этом случае говорят, что Φ_1 распадается над D_2 на голоморфные ветви $\{f_j\}_{j \in J}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. По теореме Пуанкаре–Вольтерра указанное семейство функций $\{f_j\}_{j \in J}$ не более чем счетно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Первое замечание к определению 1.9.10 полезно учесть и здесь.

1.9.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В условиях определения 1.9.9 пусть $z_0 \in D_1$, тогда найдется $\delta > 0$ с условием $D_2 = B(z_0, \delta) \subset D_1$. Поскольку область D_2 односвязна, Φ_1 распадается над D_2 на голоморфные ветви. Говорят, что точка z_0 — *правильная для Φ_1* (Φ_1 *аналитична над z_0* , Φ_1 *аналитична над D_1*).

1.9.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $D_1 = B'(z_0, \delta) \subset D_\Phi$ (сама z_0 может как принадлежать D_Φ , так и не принадлежать). Пусть $b \in D_1$, $\mathcal{F}_b \in \Phi$, Φ_1 — аналитическая ветвь Φ над D_1 , определяемая элементом $\mathcal{F}_b$ (согласно определению 1.9.9, $\mathcal{F}_b$ продолжается вдоль любого пути в D_1 с началом в точке b). Возможны три случая:

(1) После одного обхода точки z_0 (по пути в D_1) элемент $\mathcal{F}_b$ переходит в себя. Из теоремы о монодромии, примененной в двух односвязных областях (полученных из D_1 с помощью разрезов по двум разным радиусам, не проходящим через b), найдется функция $f_1 \in \mathcal{A}(D_1)$, определяющая Φ_1 , т. е. Φ_1 , распадающаяся на одну голоморфную ветвь f_1 над D_1 , является однозначной над D_1 . Следовательно, для любого $c \in D_1$ единственный элемент $\mathcal{F}_c \in \Phi_1$ также при обходе вокруг z_0 переходит в себя.

В этом случае говорят, что z_0 является *изолированной особой точкой однозначного характера для Φ_1* ; она классифицируется также, как и для f_1 — голоморфной функции в проколотой окрестности z_0 (устранимая, полюс некоторого порядка, существенной особой);

(2) найдется $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ такое, что элемент $\mathcal{F}_b$ после $1, \dots, (n-1)$ обходов в D_1 точки z_0 переходит в элемент, отличный от $\mathcal{F}_b$, а после n обходов переходит в $\mathcal{F}_b$ (то же будет для всех $c \in D_1$ и для всех $\mathcal{F}_c \in \Phi_1$); тогда говорят, что z_0 — *точка ветвления порядка n для Φ_1* (или что Φ_1 имеет над точкой z_0 ветвление порядка n);

(3) при любом натуральном числе обходов вокруг z_0 в D_1 элемент $\mathcal{F}_b$ не переходит в себя; тогда говорят, что z_0 — *точка ветвления бесконечного порядка (логарифмическая точка ветвления)* для Φ_1 (или что Φ_1 имеет над точкой z_0 логарифмическое ветвление).

Так, в примере 1.9.7 (для ПАФ $\Phi = \text{Ln}(z - z_0)$) точки z_0 и ∞ — логарифмические точки ветвления при $D_1 = D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\Phi_1 = \Phi$. В примере 1.9.8 (для ПАФ $\Phi = \sqrt[n]{z - z_0}$, $n \in \{2, 3, \dots\}$) точки z_0 и ∞ — точки ветвления порядка n при $D_1 = D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\Phi_1 = \Phi$.

Укажем в чем состоит *полное описание* ПАФ Φ .

1. Выбрать исходный элемент $\mathcal{F}_a \in \Phi$, обсудить его каноничность. Отметим, что даже формула элементарной функции может не задать корректно ПАФ. Например, формула $\sqrt{z^2}$ задает две однозначные ПАФ $\Phi(z) = z$ и $\Phi(z) = -z$ в $\mathbb{C}$.

2. Установить вдоль каких путей этот элемент продолжается, а вдоль каких — нет (с обоснованием); вписать семейства, осуществляющие эти продолжения. Найти область определения D_Φ .

3. Указать сколько различных элементов данной ПАФ имеют своим центром произвольную точку $b \in D_\Phi$, как эти элементы связаны друг с другом.

4. Найти и классифицировать все ИОТ *ветвей* ПАФ Φ . Отметим, что одна и та же точка $z_0 \in D_\Phi$ может иметь разную классификацию у разных ветвей ПАФ Φ . Поэтому следует указывать: сколько различных ветвей имеют изолированную особенность *над этой точкой* и классифицировать *каждую* из них.

§ 1.10. Примеры полного описания ПАФ. АП сложного элемента

1.10.1. Примеры полного описания ПАФ.

Для ПАФ Φ и произвольной области $U \subset D_\Phi$ полезно ввести обозначение $\Phi|_U$ — совокупность всех *элементов* из Φ с центрами в U .

Если производные элементов ПАФ Φ задают рациональную функцию (как в случае $\text{Ln}(z - z_0)$, или в следующем примере), то для описания Φ достаточно воспользоваться линейными комбинациями *табличных* продолжений для $\text{Ln}(z - z_0)$ (и, возможно, просто рациональными функциями).

1.10.1. ПРИМЕР (ПАФ $\Phi = \text{Arctg}(z)$).

1. Исходный элемент $\mathcal{F}_0 = \mathcal{Z}_0^{\text{arctg}(z)} = (B(0, 1), \text{arctg}(z))$ — канонический (из табличных тейлоровских разложений). Находим производную:

$$(\text{arctg}(z))' = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{i/2}{z + i} + \frac{-i/2}{z - i},$$

откуда (уравнивая значения у двух рассматриваемых п/о в точке 0) получаем

$$\mathcal{F}_0 = \left(B(0, 1), \frac{i}{2} l_{-i0}(z) + \frac{-i}{2} l_{i0}(z) + \pi/2 \right).$$

Таким образом, можно воспользоваться табличными ПАФ $\text{Ln}(z + i)$ и $\text{Ln}(z - i)$.

2. Конкретно, пусть $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, $\gamma(\alpha) = a = 0$, — путь. Тогда семейство, осуществляющее нужное АП $\mathcal{F}_0$ вдоль γ , имеет вид

$$\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}, \quad \mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R^t), f^t),$$

$$R^t = \min\{|\gamma(t) + i|, |\gamma(t) - i|\}, \quad f^t(z) = \frac{i}{2} l_{-i\gamma}^t(z) + \frac{-i}{2} l_{i\gamma}^t(z) + \pi/2$$

(см. определение $l_{z_0\gamma}^t(z)$ в примере 1.9.7; здесь нужно коротко объяснить: почему R^t именно такой, и почему по путям, проходящим через точки $-i$ или i , нужного АП не существует). Таким образом, $D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ и сама Φ является (своей) аналитической ветвью над $D_1 = D_\Phi$.

3. Пусть $b \in D_\Phi$ и пусть $\mathcal{F}_b = (B(b, R_b), f_b) \in \Phi$. Тогда

$$R_b = \min\{|b + i|, |b - i|\}.$$

Пусть путь γ с началом и концом в точке b не проходит через точки $-i$ и i . Положим $n_- = \text{ind}_\gamma(-i)$, $n_+ = \text{ind}_\gamma(i)$. Тогда элемент $\mathcal{F}_b$ в результате АП вдоль γ перейдет в элемент

$$\mathcal{F}_b + (i/2)2\pi i n_- + (-i/2)2\pi i n_+ = \mathcal{F}_b - \pi n_- + \pi n_+.$$

Следовательно, над точкой b имеется счетное число элементов из Φ с указанными равными радиусами R_b , и отличающихся друг от друга на аддитивные постоянные πk , $k \in \mathbb{Z}$.

4. Из указанных соображений сразу получаем, что точки $-i$ и i являются точками ветвления бесконечного порядка для *аналитических ветвей* $\Phi|_{B'(-i,2)}$ и $\Phi|_{B'(i,2)}$ соответственно (по одному логарифмическому ветвлению). Над проколотой окрестностью $D_2 = \{1 < |z| < +\infty\}$ точки ∞ ПАФ Φ (как аналитическая ветвь над $D_1 = D_\Phi$) распадается на счетное число голоморфных (однозначных) ветвей $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$; при правильной нумерации справедливы равенства $f_j - f_{j'} = \pi(j - j')$. Действительно, если $b \in D_2$ и путь γ_{bb} обходит $+1$ раз точку ∞ , оставаясь в D_2 , то он обходит одновременно по -1 разу точки i и $-i$. Поэтому любой элемент $\mathcal{F}_b \in \Phi|_{D_2}$ после АП вдоль γ_{bb} перейдет в себя.

Чтобы перейти на другую ветвь в D_2 надо обойти точку $-i$ или i .

Наконец, каждая голоморфная ветвь f_j имеет в точке ∞ устранимую особенность, поскольку f_j ограничена в некоторой проколотой окрестности точки ∞ . Для доказательства этого факта достаточно заметить, что $f'_j(z) = 1/(z^2 + 1)$ и применить формулу Ньютона–Лейбница (проверить!).

Заметим, что $\Phi|_{D_2}$ не является аналитической ветвью нашей ПАФ Φ над D_2 . Тем не менее, *корректно* говорить, что Φ распадается над D_2 на голоморфные ветви. Например, Φ является аналитической ветвью над своей областью определения $D_1 = D_\Phi$ и Φ распадается над D_2 на голоморфные ветви $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

Следующий пример также входит в экзаменационную программу.

1.10.2. ПРИМЕР (ПАФ $\Phi = \mathcal{K}^{-1}(z)$).

Исходный элемент имеет вид $\mathcal{O}_0^f = (B(0, 1), f)$, где

$$f(z) = \mathcal{K}_+^{-1}(z)|_{B(0,1)}, \quad f(0) = i.$$

Решая уравнение $\mathcal{K}(w) = z$, находим $w \in z + \sqrt{z^2 - 1} =: \mathcal{K}^{-1}(z)$, откуда (проверить, что $f(B(0, 1)) \subset \Pi_+$; * найти $f(B(0, 1))$)

$$f(z) = z + (z + 1)_{(-\pi, \pi)}^{1/2} (z - 1)_{(0, 2\pi)}^{1/2} = z + \rho_{-1,0}^{1/2}(z) \cdot \rho_{1,0}^{1/2}(z).$$

Покажем, что $\mathcal{O}_0^f$ продолжается вдоль любого пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, $\gamma(\alpha) = 0$.

Сначала выпишем семейство, осуществляющее аналитическое продолжение вдоль пути $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ табличного элемента (здесь $a \neq z_0$ фиксировано)

$$\mathcal{P}_{z_0 a}^{1/2} = \left(B(a, |a - z_0|), \rho_{z_0, a}^{1/2}(z) \right), \quad \rho_{z_0, a}^{1/2}(z) = \exp((1/2)l_{z_0 a}(z)).$$

Оно имеет вид $\{\mathcal{P}_{z_0 \sigma}^{1/2, t}\}_{t \in [\alpha, \beta]}$, где

$$\mathcal{P}_{z_0 \sigma}^{1/2, t} = (B(\sigma(t), |\sigma(t) - z_0|), \rho_{z_0 \sigma}^{1/2, t}(z)), \quad \rho_{z_0 \sigma}^{1/2, t}(z) = \exp((1/2)l_{z_0 \sigma}^t(z)).$$

В частности, табличная ПАФ $(z - z_0)^{1/2}$ является аналитической ветвью над всей своей областью определения $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} = \mathbb{C}_{z_0 b}$, с двумя точками ветвления второго порядка z_0 и ∞ для всей этой ПАФ (ветви) над $\mathbb{C}_{z_0 b}$.

Искомое аналитическое продолжение начального элемента $\mathfrak{A}_0^f$ вдоль пути γ имеет вид $\{\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), f_\gamma^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$,

$$f_\gamma^t(z) = z + \rho_{-1\gamma}^{1/2,t}(z) \cdot \rho_{1\gamma}^{1/2,t}(z), \quad R_\gamma^t = \min\{|\gamma(t) - 1|, |\gamma(t) + 1|\}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

(Почему радиус R_γ^t именно такой, и почему по путям, проходящим через -1 или 1 , нужного АП не существует?)

Каждая конечная точка $b \neq \pm 1$ — правильная для нашей ПАФ; имеется два элемента нашей ПАФ с центром в этой точке. Обозначим их $\mathcal{F}_b = (B(b, R_b), f_b)$ и $\tilde{\mathcal{F}}_b = (B(b, R_b), \tilde{f}_b)$, $R_b = \min\{|b - 1|, |b + 1|\}$. При однократном обходе (только) одной из точек -1 или $+1$ элемент $\mathcal{F}_b$ переходит в $\tilde{\mathcal{F}}_b$, и наоборот. При этом $\tilde{f}_b(z) = 1/f_b(z)$ в $B(b, R_b)$ (почему?). ПАФ Φ является аналитической ветвью над своей областью определения $D_\Phi = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Точки -1 и 1 являются точками ветвления второго порядка для аналитических ветвей $\Phi|_{B'(-1,2)}$ и $\Phi|_{B'(1,2)}$ соответственно (по одному ветвлению). Над проколотой окрестностью $D_2 = \{1 < |z| < +\infty\}$ точки ∞ ПАФ Φ (как аналитическая ветвь над областью $D_1 = D_\Phi$) распадается на две голоморфные ветви: одна с полюсом первого порядка, другая устранимая в точке ∞ . Последнее нетрудно установить, доказав, что функции $\mathcal{J}\mathcal{K}_o^{-1}$ и $\mathcal{J}\mathcal{K}_i^{-1}$ являются этими голоморфными ветвями в D_2 .

1.10.3. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что каждая голоморфная ветвь *многозначной* функции $\text{Ln}(z)$ ($\sqrt[3]{z}$, $\text{Arctg}(z)$, $\mathcal{J}\mathcal{K}^{-1}(z)$) является голоморфной ветвью для некоторой *аналитической ветви* соответствующей ПАФ.

1.10.4. УПРАЖНЕНИЕ. Очень поучительным является полное описание ПАФ $\text{Ln}(\sqrt[3]{z}\mathcal{J}\mathcal{K}(z))$.

В случае, когда производная исходного элемента (и, значит, любого элемента) ПАФ «задает» (однозначную) мероморфную функцию в $\mathbb{C}$ (не обязательно рациональную), удобно использовать теорему 1.8.6 (и следствие 1.8.7) о продолжении п/о элемента с формулой (1.8.1).

1.10.5. ПРИМЕР (ПАФ $\Phi = \text{Ln}(\sin(z))$).

1. Исходный элемент $\mathcal{F}_a = \mathfrak{A}_a^{\text{Ln}(\sin(z))} = (B(a, |a|), f_a)$, где $a = \pi/2$, $f_a \in \mathcal{A}(B(a, |a|))$ совпадает с $\text{Ln}(\sin(z))$ в некоторой окрестности точки a . Заметим, что $f'_a(z) = (\text{Ln}(\sin(z)))' = \text{ctg}(z)$ в некоторой окрестности точки a , и, следовательно, во всем круге голоморфности $B(a, |a|)$ функции $\text{ctg}(z)$ (откуда и берется радиус $R_a = \pi/2$). По теореме единственности, поскольку функция $\text{ctg}(z)$ мероморфна в $\mathbb{C}$ (имеет простые полюса в точках πk , $k \in \mathbb{Z}$), для любого элемента $\mathcal{F}_b = (B_b, f_b)$, принадлежащего нашей ПАФ Φ (определяемой элементом $\mathcal{F}_a$), мы имеем $f'_b(z) = \text{ctg}(z)$ в B_b .

2. Пусть $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D = \mathbb{C} \setminus \{\pi k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — путь с $\gamma(\alpha) = a$. По теореме 1.8.6 о продолжении п/о элемента (ее следствию 1.8.7 и формуле (1.8.1)) семейство $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ ($\mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R_\gamma^t), F_\gamma^t)$), осуществляющее АП элемента $\mathcal{F}_a$ вдоль γ , имеет вид

$$F_\gamma^t(z) = \int_{\gamma|_{[\alpha, t]}} \text{ctg}(\zeta) d\zeta + \int_{[\gamma(t), z]} \text{ctg}(\zeta) d\zeta, \quad z \in B(\gamma(t), R_\gamma^t),$$

при этом ясно, что $R^t = \min\{|\gamma(t) - \pi k| : k \in \mathbb{Z}\}$.

Если путь γ (с началом в точке a) проходит хотя бы через одну из точек множества $P = \{\pi k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, т.е. не лежит целиком в D , то АП $\mathcal{F}_a$ вдоль γ не существует (доказать!). Таким образом, $D_\Phi = D = \mathbb{C} \setminus P$ и ПАФ Φ аналитична над D_Φ .

3. Пусть теперь $b \in D$, $\mathcal{F}_b \in \Phi$ и путь γ_k с началом и концом в точке b обходит точку πk ровно +1 раз, не обходя при этом никакую другую точку из P . Из формулы (1.8.1) (ее аналога для $\mathcal{F}_b$ и γ_k), получаем, что при АП элемента $\mathcal{F}_b$ вдоль γ_k элемент $\mathcal{F}_b$ перейдет в элемент

$$\mathcal{F}_b + \int_{\gamma_k} \text{ctg}(\zeta) d\zeta = \mathcal{F}_b + 2\pi i \text{res}_{\pi k}(\text{ctg}(z)) = \mathcal{F}_b + 2\pi i.$$

Следовательно, над точкой b имеется счетное число элементов из Φ с равными радиусами $R_b = \min\{|b - \pi k| : k \in \mathbb{Z}\}$, и отличающихся друг от друга на аддитивные постоянные $2\pi i j$, $j \in \mathbb{Z}$.

4. В результате получаем, что каждая точка $z_k = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) является точкой ветвления бесконечного порядка (по одному логарифмическому ветвлению в $B'(z_k, \pi)$ для аналитической ветви $\Phi|_{B'(z_k, \pi)}$). Точка ∞ не является ИОТ для Φ , поэтому она не подлежит классификации.

1.10.2. АП сложного элемента.

1.10.6. ТЕОРЕМА (О продолжении сложного элемента). Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ — канонический элемент с центром a , который продолжается вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, и пусть

$$\{\mathcal{F}^t = (B^t, f^t) = (B(\gamma(t), R^t), f^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$$

— семейство, осуществляющее указанное продолжение. Определим

$$\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Пусть элемент $\mathcal{G}_A = (B_A, g_A)$ с центром $A = \Gamma(\alpha)$ аналитически продолжается вдоль пути Γ , и

$$\{\mathcal{G}^t = (\tilde{B}^t, g^t) = (B(\Gamma(t), \tilde{R}^t), g^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$$

— семейство, осуществляющее это продолжение.

Тогда элемент $\mathcal{H}_a = \mathfrak{F}_a^{g_A \circ f_a}$ продолжается вдоль пути γ , причем семейство, осуществляющее это продолжение имеет вид

$$\{\mathcal{H}^t = \mathfrak{F}_{\gamma(t)}^{g^t \circ f^t}\}_{t \in [\alpha, \beta]}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо установить, что Γ — путь, и проверить, что указанное семейство $\{\mathcal{H}^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ канонических элементов удовлетворяет условию 2) определения 1.7.8.

Зафиксируем произвольную точку $t_0 \in [\alpha, \beta]$. По утверждению (3) предложения 1.7.12 существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ найдется связная открытая окрестность $O_1^\delta(t_0)$ (зависящая от δ) такая, что при всех $t \in O_1^\delta(t_0)$ выполняются следующие свойства:

- (1) $B_\delta = B(z_0, \delta) \subset B^t$, где $z_0 = \gamma(t_0)$;
- (2) $\gamma(t) \in B_\delta$, $\mathcal{F}^t \leftrightarrow \mathcal{F}^{t_0}$, откуда $f^t = f^{t_0}$ всюду в B_δ .

Следовательно, для всех $t \in O_1^\delta(t_0)$ имеем $\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)) = f^{t_0}(\gamma(t))$, значит, функция $\Gamma(t)$ непрерывна в окрестности точки t_0 . Так что Γ — путь на $[\alpha, \beta]$.

Аналогично, найдется $\varepsilon > 0$ и связная открытая окрестность $O_2^\varepsilon(t_0)$ такие, что при всех $t \in O_2^\varepsilon(t_0)$ выполняются следующие свойства:

- (3) $\tilde{B}_\varepsilon = \tilde{B}(w_0, \varepsilon) \subset \tilde{B}^t$, где $w_0 = \Gamma(t_0) = f^{t_0}(z_0)$;
- (4) $\Gamma(t) \in \tilde{B}_\varepsilon$, $\mathcal{G}^t \leftrightarrow \mathcal{G}^{t_0}$, откуда $g^t = g^{t_0}$ всюду в $\tilde{B}_\varepsilon$;
- (5) зафиксируем указанное ε и выберем столь малое $\delta \in (0, \delta_0)$, чтобы дополнительно выполнялось включение $f^{t_0}(B_\delta) \subset \tilde{B}_\varepsilon$, т. е. чтобы функция $h_0(z) = g^{t_0} \circ f^{t_0}(z)$ была голоморфна в B_δ .

Из этих свойств получаем, что при всех $t \in O_1^\delta(t_0) \cap O_2^\varepsilon(t_0)$ имеем $h_0(z) = g^t \circ f^t(z)$ в B_δ и, следовательно,

$$\mathcal{H}^t = \mathfrak{A}_{\gamma(t)}^{g^t \circ f^t} = \mathfrak{A}_{\gamma(t)}^{h_0},$$

т. е. $\mathcal{H}^t \leftrightarrow \mathcal{H}^{t_0}$. □

Приведем пример несложного применения теоремы 1.10.6.

1.10.7. ПРИМЕР (ПАФ $\Phi(z) = \exp(1/(1 + \sqrt{z}))$).

В качестве «внутренней» берется ПАФ, определяемая элементом $\mathfrak{A}_1^{f_1}$, где $f_1(z) = 1/(1 + \sqrt{z}_{(0)})$. Указанный элемент (с центром $a = 1$ и радиусом $R_1 = 1$ продолжается по всем путям $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ с началом в точке 1, не проходящим через 0, а также не проходящим через 1 при нечетном числе обходов точки 0. Семейство

$$\{\mathcal{F}^t = (B^t, f^t) = (B(\gamma(t), R^t), f^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]},$$

осуществляющее указанное АП, выписывается следующим образом. Во-первых, $R^t = |\gamma(t)|$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$, для которых $\operatorname{Re}(\gamma(t)) \leq 1/2$, а при $\operatorname{Re}(\gamma(t)) > 1/2$ радиус R^t равен $|\gamma(t)|$ при «почти» четном числе обходов точки 0, и равен $\min\{|\gamma(t)|, |\gamma(t) - 1|\}$ при «почти» нечетном числе обходов точки 0 (обсудить). При этом всегда

$$f^t(z) = \frac{1 - \rho_{0\gamma}^{1/2, t}}{1 - z}, \quad z \neq 1,$$

а в точке 1 следует учитывать устранимость для указанных продолжений при четном числе обходов точки 0 (тогда $R^t = |\gamma(t)|$), или наличие полюса 1-го порядка в противном случае.

«Внешняя» ПАФ — целая, поэтому искомое семейство, осуществляющее АП исходного элемента, имеет вид

$$\{\mathcal{H}^t = (B^t, h^t) = (B(\gamma(t), R^t), \exp(f^t))\}_{t \in [\alpha, \beta]}.$$

Следовательно, $D_\Phi = \mathbb{C}_b$. При этом ПАФ Φ не является аналитической ветвью над всей D_Φ , являясь таковой (двузначной) над областью $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. В точках 0 и ∞ ПАФ Φ имеет ветвления 2 порядка у аналитических ветвей $\Phi|_{B(0,1)}$ и $\Phi|_{\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)}}$ соответственно. Над $B'(1, 1)$ аналитическая ветвь $\Phi|_{D_1}$ распадается на 2 голоморфные ветви, одна из которых имеет устранимость в точке 1, а другая — существенную особенность (доказать!).

§ 1.11. Модулярная функция и малые теоремы Пикара

1.11.1. Модулярная функция.

Пусть $\gamma = \partial B_1 = \{|z| = 1\}$ — единичная окружность, где $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Зафиксируем точки $a_0^1, a_0^2 = i, a_0^3$ на γ , делящие эту окружность на три равные части (см. рис. 11.1).

Проведем через точки a_0^1 и a_0^2 окружность Γ_0^1 , перпендикулярную γ . Часть ее внутри B_1 (без точек a_0^1 и a_0^2) назовем γ_0^1 . Аналогично проводим окружности Γ_0^2 (через a_0^2 и a_0^3 , перпендикулярно γ) и Γ_0^3 (через a_0^3 и a_0^1 , перпендикулярно γ) и обозначим их части внутри B_1 соответственно через γ_0^2 и γ_0^3 . В результате, γ_0^1 , γ_0^2 и γ_0^3 ограничивают (открытый) криволинейный треугольник, который обозначим через T_0 .

При инверсии относительно окружности Γ_0^1 дуга γ_0^1 остается на месте (поточечно), γ переходит в себя в силу перпендикулярности окружностей γ и Γ_0^1 , точка a_0^3 переходит в точку a_1^1 на γ , треугольник T_0 переходит в треугольник T_1^1 , ограниченный дугами γ_0^1 , γ_1^1 (соединяет точки a_0^1 и a_1^1) и γ_1^2 (соединяет точки a_1^1 и a_0^2), ортогональными γ (см. рис 11.1). Аналогично, точка a_1^2 симметрична точке a_0^1 относительно Γ_0^2 , точка a_1^3 симметрична a_0^2 относительно Γ_0^3 ; треугольники T_1^2 и T_1^3 симметричны треугольнику T_0 относительно γ_0^2 и γ_0^3 соответственно.

При симметрии относительно Γ_0^1 дуга γ_0^2 переходит в γ_1^2 , а дуга γ_0^3 — в γ_1^1 . При симметрии относительно Γ_0^2 дуга γ_0^1 переходит в γ_1^3 , а γ_0^3 — в γ_1^2 . При симметрии относительно Γ_0^3 дуга γ_0^1 переходит в γ_1^1 , а γ_0^2 переходит в γ_1^3 .

Все дуги γ_1^k , $k \in \{1, \dots, 6\}$, — это части перпендикулярных γ окружностей (обозначаемых соответственно Γ_1^k , $k \in \{1, \dots, 6\}$), находящиеся внутри B_1 . Какие у них концевые точки, можно увидеть на рис. 11.1.

Для порядка в индексах на каждом уровне мы нумеруем объекты, начиная с точки a_0^1 и двигаясь против часовой стрелки. Нижний индекс отвечает за шаг индукции, верхний — за номер объекта на этом шаге (именно так обозначены γ_1^k , $k \in \{1, \dots, 6\}$). Например, через T_n^j обозначен j -й открытый криволинейный треугольник n -го уровня.

Введем еще обозначения: $P_1^j = T_0 \sqcup \gamma_0^j \sqcup T_1^j$ — «пары» первого уровня с номером $j \in \{1, 2, 3\}$, а также $D_1 = \bigcup_{j=1}^3 P_1^j$.

По теореме Римана конформно отображим T_0 на верхнюю полуплоскость Π_+ ; тогда по теореме Каратеодори это отображение будет продолжаться до гомеоморфизма $\bar{T}_0$ на $\overline{\Pi_+}^\bullet$ (замыкание берется в $\mathbb{C}^\bullet$). Применяя дополнительно ДЛЮ-автоморфизм в Π_+ , найдем (единственное) гомеоморфное отображение $\mu_0: \bar{T}_0 \rightarrow \overline{\Pi_+}^\bullet$, конформно отображающее T_0 на Π_+ , с условиями: $a_0^1 \mapsto 0$, $a_0^2 \mapsto 1$, $a_0^3 \mapsto \infty$. Отсюда следует, что $\gamma_0^1 \rightarrow (0, 1) = I_0^1$, $\gamma_0^2 \rightarrow (1, +\infty) = I_0^2$, $\gamma_0^3 \rightarrow (-\infty, 0) = I_0^3$ (см. рис. 11.2).

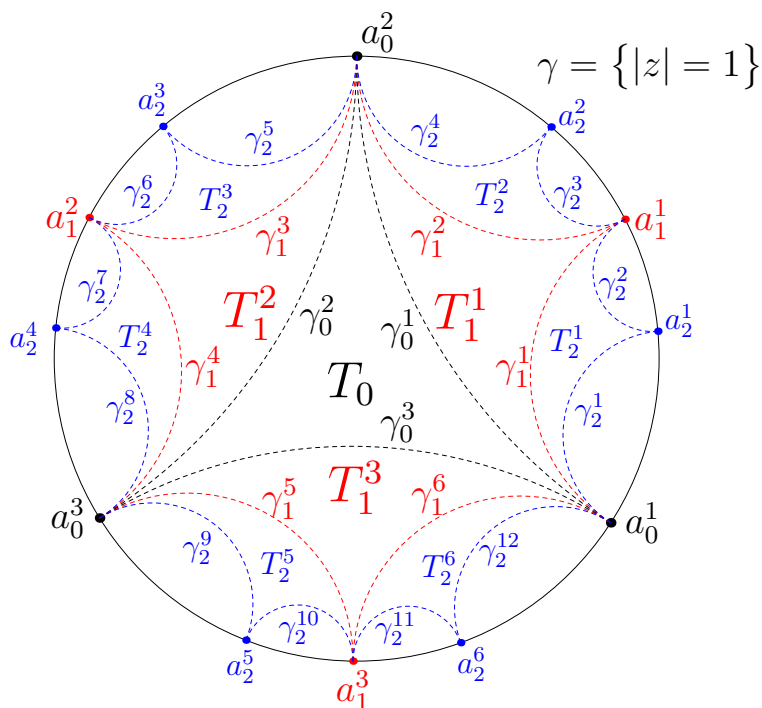


Рис. 11.1.

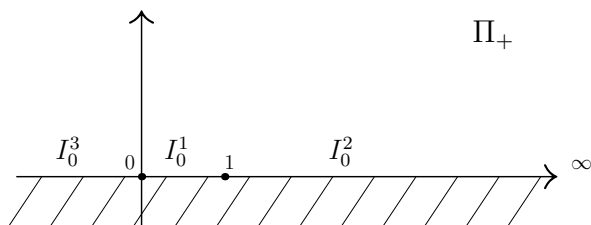


Рис. 11.2.

Введем обозначения: $\Omega_1^j = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup I_0^j$, $j \in \{1, 2, 3\}$. По принципу симметрии для каждого $j \in \{1, 2, 3\}$ функцию μ_0 можно продолжить до конформного отображения $\mu_1^j: P_1^j \xrightarrow{\text{на}} \Omega_1^j$. Поэтому μ_0 можно продолжить до локально конформного отображения $\mu_1: D_1 \xrightarrow{\text{на}} \Omega$, где $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Пусть сделан n -й шаг индукции ($n \geq 1$), т. е. построены криволинейные треугольники T_n^j , $j = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$, со «свободными» сторонами γ_n^k , $k = 1, \dots, 3 \cdot 2^n$, причем γ_n^{2j-1} и γ_n^{2j} — стороны треугольника T_n^j для всех $j = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$. Кроме того, определены «пары» P_n^j и конформные отображения $\mu_n^j: P_n^j \xrightarrow{\text{на}} \Omega_n^j$, а также локально конформное отображение $\mu_n: D_n \xrightarrow{\text{на}} \Omega$.

По индукции, криволинейный треугольник T_{n+1}^{2j-1} (T_{n+1}^{2j} соответственно) получается из T_n^j симметрией относительно окружности Γ_n^{2j-1} , определяемой дугой γ_n^{2j-1} (соответственно, Γ_n^{2j} , определяемой дугой γ_n^{2j}). Определим также «пары» уровня $(n+1)$

$$P_{n+1}^{2j-1} = T_n^j \sqcup \gamma_n^{2j-1} \sqcup T_{n+1}^{2j-1}, \quad P_{n+1}^{2j} = T_n^j \sqcup \gamma_n^{2j} \sqcup T_{n+1}^{2j}, \quad j = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n-1},$$

и область

$$D_{n+1} = D_n \cup \bigcup_{k=1}^{3 \cdot 2^n} P_{n+1}^k$$

Рисунок 11.1 соответствует окончанию второго шага индукции.

По принципу симметрии $\mu_n|_{T_n^j}$ продолжается до конформных отображений

$$\begin{aligned} \mu_{n+1}^{2j-1}: P_{n+1}^{2j-1} &\xrightarrow{\text{на}} \Omega_{n+1}^{2j-1} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup I_n^{2j-1}, \\ \mu_{n+1}^{2j}: P_{n+1}^{2j} &\xrightarrow{\text{на}} \Omega_{n+1}^{2j} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup I_n^{2j}, \end{aligned}$$

где $I_n^k \in \{I_0^1, I_0^2, I_0^3\}$ для всех рассматриваемых n и k (что следует из явной формулы в доказательстве принципа симметрии). Таким образом, определено локально конформное отображение

$$\mu_{n+1}: D_{n+1} \xrightarrow{\text{на}} \Omega, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Пусть $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$. Тогда $D \subset B_1$ — односвязная область (что легко следует, например, из ее звездности относительно нуля). В результате определено локально конформное отображение $\mu: D \xrightarrow{\text{на}} \Omega$, совпадающее с μ_n на D_n , $n \in \mathbb{N}$. Это отображение μ называется *модулярной функцией*.

1.11.1. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что $D = B_1$ (в настоящем доказательстве этого не требуется).

Для каждой пары P_n^j , $j = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$, определено конформное отображение $(\mu_n^j)^{-1}: \Omega_n^j \xrightarrow{\text{на}} P_n^j$, обратное к μ_n^j . Рассмотрим отображение $\mu_0^{-1}: \Pi_+ \rightarrow T_0$.

Положим $\mathfrak{E}_i = \mathfrak{E}_i^{\mu_0^{-1}} = (B(i, R_i), g_i)$. Покажем, что радиус R_i этого элемента равен 1. Ясно, что R_i не меньше 1. Если, от противного, $R_i > 1$, то в точке 0 существовала бы ненулевая производная некоторого конечного порядка $p \geq 1$ для функции g_i (поскольку функция μ_0^{-1} непостоянна); но тогда бесконечно малый полукруг в Π_+ с центром в нуле

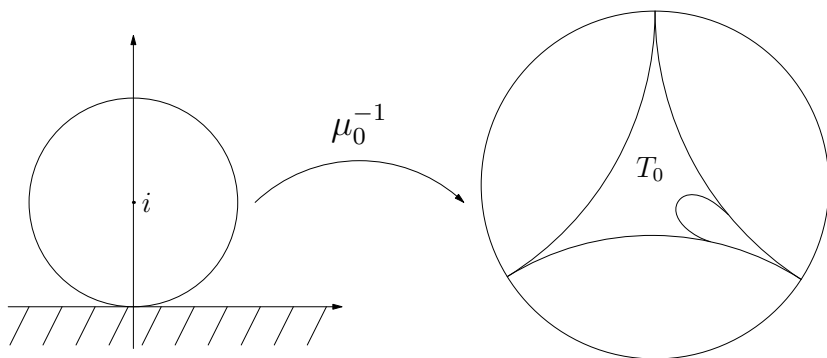


Рис. 11.3.

перейдет под действием g_i (а, значит, μ_0^{-1}) в бесконечно малый (криволинейный) сектор величины $r\pi$ с центром a_0^1 , чего не может быть, так как он переходит в бесконечно малый (криволинейный) сектор величины 0, лежащий в T_0 (см. рис. 11.3).

Обозначим через μ^{-1} ПАФ, определяемую элементом $\mathfrak{G}_i$. Аналогично предыдущему доказывается, что всякий элемент $(B(b, R_b), f_b)$ из ПАФ μ^{-1} удовлетворяет условиям $R_b = \min\{|b|, |b-1|\}$ и $f_b(B(b, R_b)) \subset B(0, 1)$.

1.11.2. УПРАЖНЕНИЕ. Элемент $\mathfrak{G}_i$ продолжается вдоль любого пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ с началом в точке i , не проходящего через точки 0 и 1 и не продолжающегося по другим путям. Следовательно, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ является областью определения ПАФ μ^{-1} и μ^{-1} аналитична над всей Ω , а все точки $b \in \Omega$ являются правильными для ПАФ μ^{-1} . Точки 0, 1, ∞ — точки логарифмического ветвления, причем над каждой из них имеется счетное число логарифмических ветвлений.

Указание (для доказательства существования АП). Построить цепочку неканонических элементов (являющихся некоторой последовательностью элементов из $\{(\Omega_n^j, (\mu_n^j)^{-1})\}$), которые «задают» нужное продолжение элемента $\mathfrak{G}_i$ вдоль γ , используя следующие два факта. В каждой области Ω_n^j определена голоморфная функция $(\mu_n^j)^{-1}$, которая является голоморфной ветвью ПАФ μ^{-1} . Путь γ можно представить в виде $\gamma = \cup_{s=1}^S \gamma_s$, где каждый из $[\gamma_s]$ полностью содержится в одной из Ω_n^j .

1.11.3. УПРАЖНЕНИЕ. Выписать (и изобразить графически) АП элемента $\mathfrak{G}_{i/2} = \mathfrak{G}_{i/2}^{\mu_0^{-1}}$ вдоль пути $\{e^{it}/2: t \in [\pi/2, 5\pi/2]\}$, а также вдоль пути

$$[i/2, 1 + i/2] \cup \{1 + e^{it}/2: t \in [\pi/2, 5\pi/2]\} \cup [1 + i/2, i/2].$$

1.11.2. Малые теоремы Пикара.

1.11.4. ТЕОРЕМА (Малая теорема Пикара для целых функций). Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ — целая функция, не являющаяся тождественной константой. Тогда f принимает (в $\mathbb{C}$) все значения из $\mathbb{C}$, кроме, быть может, одного.

Если последнее значение существует, оно называется *исключительным пикаровским значением (ИПЗ)* для f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, от противного, найдется $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, не равная тождественно константе, и различные числа a и b из $\mathbb{C}$, для которых $f(z) \neq a$ и $f(z) \neq b$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда целая функция $f_1(z) = (f(z) - a)/(b - a)$ не принимает значений 0 и 1. Будем считать, что $f_1 = f$.

Утверждается, что $f(\mathbb{C}) \cap B(i, 1) \neq \emptyset$. Действительно, в противном случае функция $1/(f(z) - i) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ ограничена по модулю единицей, и по теореме Лиувилля является константой, а, следовательно, и f является константой, что не так. Таким образом, найдется $z_0 \in \mathbb{C}$ с условием $w_0 = f(z_0) \in B(i, 1)$.

Пусть $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольный путь, удовлетворяющий условию $\gamma(\alpha) = z_0$. Тогда $\mathfrak{F}_{z_0}^f$ продолжается вдоль γ , поскольку f — целая функция.

Рассмотрим путь $\Gamma(t) = f(\gamma(t)): [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $\Gamma(\alpha) = w_0$.

Рассмотрим $\mathfrak{G}_{w_0} = \mathfrak{F}_{w_0}^{\mu_0^{-1}}$. Поскольку $R_i = R(\mathfrak{G}_i) = 1$, элемент $\mathfrak{G}_{w_0}$ может быть получен из элемента $\mathfrak{G}_i$ перерасложением. Следовательно, $\mathfrak{G}_{w_0}$ продолжается вдоль любого пути, не проходящего через 0 и 1 (в частности, вдоль Γ), и определяет ПАФ μ^{-1} .

По теореме 1.10.6 (о продолжении сложного элемента) элемент $\mathfrak{H}_{z_0} = \mathfrak{F}_{z_0}^{\mu_0^{-1} \circ f}$ аналитически продолжается вдоль γ .

1.11.5. УПРАЖНЕНИЕ. Показать, что множество значений всех (функций из) элементов, получающихся АП $\mathfrak{H}_{z_0}$ по всем указанным путям, лежат в $D \subset B_1$.

Поскольку путь γ — произвольный, в результате продолжений элемента $\mathfrak{H}_{z_0}$ по всем путям в $\mathbb{C}$ мы получим целую функцию $h(z)$ (по теореме о монодромии), ограниченную по модулю единицей (поскольку все ее значения принадлежат B_1). Поэтому $h(z) \equiv \text{const}$, и, следовательно, $f(z) \equiv \text{const}$ в некоторой окрестности точки z_0 . Поскольку $f(z)$ — целая функция, по теореме единственности $f(z) \equiv \text{const}$ в $\mathbb{C}$. Это противоречие завершает доказательство теоремы 1.11.4. $\square$

1.11.6. ТЕОРЕМА (Малая теорема Пикара для мероморфных функций). Пусть $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ и f не является тождественной константой. Тогда f принимает в $\mathbb{C}$ все значения из $\mathbb{C}^\bullet$, кроме, быть может, двух (называемых ИПЗ для f).

Напомним, что условие мероморфности функции f в $\mathbb{C}$ означает, что она голоморфна всюду в $\mathbb{C}$, за исключением (локально конечного множества) полюсов. Считается, что значение f в ее полюсе равно ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, от противного, f не принимает в $\mathbb{C}$ трех различных значений a, b, c из $\mathbb{C}^\bullet$. Если одно из них равно ∞ , то f — целая, не принимающая двух различных (конечных) значений. Если все они конечны, то функция $f_1(z) = 1/(f(z) - a)$ — целая (после устранения особенностей), не принимающая двух значений $1/(b - a)$ и $1/(c - a)$. В обоих случаях имеем противоречие с предыдущей теоремой. $\square$

1.11.7. ПРИМЕР. Функция e^z является целой с ИПЗ, равным 0. Функция $\operatorname{tg}(z)$ — мероморфная с ИПЗ, равными $\pm i$.

1.11.8. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что функции $f(z) = z + e^z$ (как целая) и $f(z) = z + \operatorname{tg}(z)$ (как мероморфная) не имеют ИПЗ.

§ 1.12. Алгебраические элементы. ПАФ $\sqrt{1+\sqrt{z}}$ и $\operatorname{Arcsin}(z)$.

1.12.1. Алгебраические элементы.

Пусть $\mathbb{C}[z]$ — кольцо всех полиномов, а $\mathbb{C}(z)$ — поле всех рациональных функций комплексной переменной z . Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и $\{P_n\}_{n=0}^N \subset \mathbb{C}[z]$, причем P_N — ненулевой многочлен. Определим многочлен от двух переменных $z = x + iy$ и $w = u + iv$

$$P(z, w) = \sum_{n=0}^N P_n(z)w^n,$$

рассматриваемый как многочлен от w степени $N \geq 1$ над кольцом $\mathbb{C}[z]$ (или полем $\mathbb{C}(z)$). Канонический элемент $\mathcal{F} = (B, f)$ называется *алгебраическим с представляющим многочленом* P , если $P(z, f(z)) \equiv 0$ на B . Представляющий многочлен Q для $\mathcal{F}$ минимально возможной степени назовем *определяющим* для $\mathcal{F}$ (он единственный с точностью до ненулевого полиномиального от переменной z множителя). Кроме того, всякий такой многочлен Q является *неприводимым* как многочлен от w над полем $\mathbb{C}(z)$. Последнее означает, что Q нельзя представить в виде произведения двух нетривиальных (по w) многочленов с рациональными (от z) коэффициентами. Эти утверждения следуют из алгоритма Евклида и теоремы единственности. Примером является любой канонический элемент ПАФ $\sqrt{z}$ с представляющим (и определяющим) полиномом $w^2 - z$.

Точку z назовем *сингулярной* для многочлена $P = P(z, w)$ указанного типа, если $P_N(z) = 0$, или найдется такое w , что пара (z, w) является решением системы уравнений

$$P(z, w) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial w}(z, w) = 0.$$

В примере $P(z, w) = w^2$ все точки $z \in \mathbb{C}$ являются сингулярными, а в примере приводимого полинома $P(z, w) = w^2 - z^2$ сингулярная точка только одна: $z = 0$. Нетрудно показать, что если многочлены P и $\partial P / \partial w$ не имеют нетривиального (по w) общего множителя (в частности, если P неприводим), то множество $S = S_P$ всех сингулярных точек для P конечно (алгоритм Евклида). Далее рассматриваются только такие P . Зафиксируем какую-либо точку $z_0 \notin S$. Тогда уравнение $P(z_0, w) = 0$ имеет N различных корней $\{w_1, \dots, w_N\}$. Применим теорему о неявной функции для отображения $(z, w) \mapsto \zeta = P(z, w)$ в окрестности точки (z_0, w_n) (как отображения из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^2$, $\zeta = (\xi, \eta)$), согласно которой, ввиду

$$\left| \begin{array}{cc} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{array} \right|_{|(z_0, w_n)} = \left| \frac{\partial P(z, w)}{\partial w} \right|_{|(z_0, w_n)}^2 > 0,$$

найдутся такие круги $B_0 \subset \mathbb{C} \setminus S$ и B_n с центрами z_0 и w_n соответственно и такая функция $f_n: B_0 \rightarrow B_n$ класса $C^1(B_0)$, что $f_n(z_0) = w_n$ и при всех

$(z, w) \in B_0 \times B_n$ имеем

$$P(z, w) = 0 \iff w = f_n(z).$$

Тогда при всех $z \in B_0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial P(z, f_n(z))}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{(z, f_n(z))} \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} \Big|_{(z, f_n(z))} + \\ &+ \frac{\partial P}{\partial w} \Big|_{(z, f_n(z))} \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial P}{\partial \bar{w}} \Big|_{(z, f_n(z))} \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial P}{\partial w} \Big|_{(z, f_n(z))} \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}, \end{aligned}$$

откуда $\partial f_n / \partial \bar{z} = 0$ в B_0 , т.е. $f_n \in \mathcal{A}(B_0)$. Кроме того, аналогично,

$$0 = \frac{\partial P(z, f_n(z))}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{(z, f_n(z))} + \frac{\partial P}{\partial w} \Big|_{(z, f_n(z))} f'_n(z)$$

и $f'_n(z) = -(\partial P / \partial z) / (\partial P / \partial w) \Big|_{(z, f_n(z))}$ в B_0 . Таким образом, определены N алгебраических (канонических) элементов $\{\mathfrak{A}(z_0, f_n)\}$ с центром z_0 и представляющим многочленом P , и других таких элементов нет. По теореме о монодромии нетрудно установить, что радиусы этих элементов не меньше, чем расстояние от z_0 до S .

Нам понадобится следующая лемма.

1.12.1. ЛЕММА. *В указанных выше обозначениях пусть $z_1 \in S$ является нулем полинома $P_N(z)$ порядка $p \in \{0, 1, \dots\}$. Тогда найдутся такие $A > 0$ и $r > 0$, что для любого алгебраического элемента $(B(a, r_a), f_a)$ с представляющим многочленом P и условием $0 < |z_1 - a| \leq r$ имеем $|z_1 - a| \leq r_a$ и при всех $z \in B(a, |z_1 - a|)$ справедлива оценка*

$$|f_a(z)| \leq \frac{A}{|z - z_1|^p}.$$

Кроме того, найдутся такие $A_1 > 0$, $s \geq 0$ и $R > 0$, что для любого алгебраического элемента $(B(a, r_a), f_a)$ с представляющим многочленом P , для которого $|a| > R$, при всех $z \in B(a, r_a) \setminus B(0, R)$ справедлива оценка

$$|f_a(z)| \leq A_1 |z|^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности пусть $z_1 = 0$. Любой (канонический) элемент (B, f) с представляющим многочленом P определяет (не обязательно канонический) элемент (B, g) , где $g(z) = z^p f(z)$, с представляющим многочленом (в смысле $P_p(z, g(z)) = 0$ в B)

$$P_p(z, w) = \frac{P_N(z)}{z^p} w^N + P_{N-1}(z) w^{N-1} + \dots + z^{p(N-1)} P_0(z) \equiv \sum_{n=0}^N Q_n(z) w^n,$$

где $Q_N(0) \neq 0$ (что легко проверить). Найдем $\rho > 0$ с условиями $|Q_N(z)| \geq C_1 > 0$ и $|Q_n(z)| \leq C_2 \in (0, +\infty)$ для всех $z \in B(0, \rho)$ и $n \in \{0, \dots, N-1\}$, причем ρ не превышает расстояния от 0 до других точек из S . Положим $r = \rho/2$. Пусть теперь $(B(a, r_a), f_a)$ — произвольный элемент с центром

$a \in B(0, r)$ и представляющим многочленом $P(z, w)$. Из сказанного выше имеем неравенство $r_a \geq |a|$. Пусть $g_a(z) = z^p f_a(z)$. Поскольку P_p является представляющим для $(B(a, r_a), g_a)$, в круге $B(a, |a|) \subset B(0, \rho)$ имеем

$$Q_N(z)(g_a(z))^N = - \sum_{n=0}^{N-1} Q_n(z)(g_a(z))^n,$$

откуда

$$|g_a(z)|^N \leq \frac{C_2}{C_1} \sum_{n=0}^{N-1} |g_a(z)|^n = \frac{C_2(|g_a(z)|^N - 1)}{C_1(|g_a(z)| - 1)}.$$

Следовательно, во всех точках, где $|g_a(z)| \geq 2$, получаем неравенство $|g_a(z)|^N \leq 2C_2|g_a(z)|^{N-1}/C_1$, т. е. $|g_a(z)| \leq 2C_2/C_1$. Далее ясно.

Второе утверждение этой леммы оставляем в качестве упражнения. $\square$

1.12.2. ТЕОРЕМА. При указанных выше обозначениях совокупность всех алгебраических элементов с представляющим неприводимым многочленом P образует ПАФ Φ , для которой $\Phi_1 = \Phi|_{\mathbb{C} \setminus S}$ является N -значной аналитической ветвью над $D = \mathbb{C} \setminus S$. При этом P является определяющим для всех указанных элементов, а все изолированные особые точки (ветвей) ПАФ Φ либо являются точками ветвления конечного порядка, либо являются полюсами (ИОТ однозначного характера).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in D$ и $\mathcal{F} = (B, f)$ — канонический элемент с центром a и представляющим многочленом P , определяющий ПАФ Φ . Обозначим через $\{\mathcal{F}_j = (B_j, f_j)\}_{j=1}^J$ (J — некоторое натуральное число, $J \leq N$ по лемме 1.12.1) совокупность всех различных элементов из Φ с центром a . Пусть

$$\Sigma_1 = \mathcal{F}_1 + \cdots \mathcal{F}_J, \quad \Sigma_2 = \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 + \cdots \mathcal{F}_{J-1} \mathcal{F}_J, \dots, \quad \Sigma_J = \mathcal{F}_1 \cdots \mathcal{F}_J$$

— базовые симметрические элементы, определяемые набором $\{\mathcal{F}_j\}_{j=1}^J$. Пусть $\gamma = \gamma_{aa}$ — произвольный путь в D с началом и концом в точке a . При АП вдоль γ набор элементов $\{\mathcal{F}_j\}_{j=1}^J$ перейдет в себя, но с некоторой перестановкой, а каждый элемент Σ_j перейдет в себя. Из теоремы о монодромии и леммы 1.12.1 следует, что каждый элемент Σ_j продолжается до рациональной функции, которую мы тоже обозначим через Σ_j . Тогда многочлен $Q(z, w)$ (над $\mathbb{C}[z]$), полученный из многочлена (над $\mathbb{C}(z)$)

$$w^N - \Sigma_1(z)w^{N-1} + \cdots (-1)^N \Sigma_N(z)$$

умножением на общий знаменатель рациональных функций $\{\Sigma_j\}_{j=1}^J$ также является представляющим для всех $\{\mathcal{F}_j\}_{j=1}^J$. При $J = N$ всё доказано. Пусть $J < N$. Если Q делит P (над $\mathbb{C}(z)$), то P приводим, что не так. В противном случае остаток R от деления P на Q (помноженный на некоторый ненулевой многочлен от z) будет представляющим многочленом для $\mathcal{F}$ степени меньше J (по w), что также противоречит лемме 1.12.1. $\square$

В качестве примеров мы уже рассмотрели обратную ПАФ Жуковского и ПАФ $1/(1+\sqrt{z})$ (с представляющими многочленами $w^2 - 2zw + 1$ и $(z-1)w^2 + 2w - 1$ соответственно). Далее приводится более содержательный пример исследования ПАФ, заданной алгебраическим элементом.

1.12.2. ПАФ $\sqrt{1+\sqrt{z}}$.

1.12.3. ПРИМЕР (ПАФ $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{z}}$).

Пусть $h(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}}_{(o)}$. Требуется охарактеризовать ПАФ Φ , определяемую элементом $\mathfrak{A}_1^h$.

1. Легко проверяется, что $h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_-)$, т.е. h — голоморфная ветвь ПАФ Φ , поэтому для любого $a \in \mathbb{C}_-$ элемент $\mathfrak{A}_a^h \in \Phi$.

2. Функция h удовлетворяет уравнению $(h^2(z) - 1)^2 = z$, т.е.

$$h^4 - 2h^2 + 1 - z = 0,$$

следовательно, элемент $\mathfrak{A}_1^h$ — *алгебраический* с представляющим многочленом $P(z, w) = w^4 - 2w^2 - z + 1$ (предлагается проверить его неприводимость). По теореме единственности, если $\mathcal{H}_b = (B(b, R_b), h_b) \in \Phi$, то $(h_b^2(z) - 1)^2 \equiv z$ при $z \in B(b, R_b)$, откуда, в частности, если $z \neq 0$ и 1 , то $h_b(z) \neq \pm 1$ и $h_b(z) \neq 0$ в $B(b, R_b)$.

3. Поскольку $\partial P / \partial w = 4w^3 - 4w$, в обозначениях предыдущего раздела находим $S = \{0, 1\}$, так что над каждой точкой $b \neq 0$, $b \neq 1$ имеется ровно 4 различных элемента из Φ с центром b .

4. Зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Пусть $\gamma: [0, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_b$ — путь с началом в точке x_0 . Семейство, продолжающее элемент $\mathfrak{A}_{x_0}^{\sqrt{z}_{(o)}}$ вдоль γ имеет вид $\{\mathcal{F}^t = (B(\gamma(t), |\gamma(t)|), f^t)\}_{t \in [0, \beta]}$, где

$$f^t(z) = \sqrt{|z|} \exp(i \arg(z) / 2)_{(\varphi(t) - \pi/2, \varphi(t) + \pi/2)}$$

и $\varphi(t)|_{[0, \beta]}$ — непрерывная ветвь $\text{Arg}(\gamma(t))$ на $[0, \beta]$ с условием $\varphi(0) = 0$, т.е. $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}$, $t \in [0, \beta]$. Пусть

$$\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)) = \sqrt{|\gamma(t)|}e^{i\varphi(t)/2}, \quad t \in [0, \beta].$$

Элемент $\mathcal{G}_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{1+w}_{(o)}}$ продолжается вдоль пути Γ в точности тогда, когда Γ не проходит через точку -1 , т.е. если $\sqrt{|\gamma(t)|} \neq 1$ при $e^{i\varphi(t)/2} = -1$ (т.е. $\gamma(t) \neq 1$ при $\varphi(t) = 2\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Пусть

$$\{\mathcal{G}^t = (B(\Gamma(t), |\Gamma(t) + 1|), g^t)\}_{t \in [0, \beta]}$$

— семейство, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{G}_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{1+w}_{(o)}}$ вдоль такого пути Γ , где

$$g^t(w) = \sqrt{|w+1|} \exp(i \arg(w+1) / 2)_{(\psi(t) - \pi/2, \psi(t) + \pi/2)}$$

и $\psi(t)$ — непрерывная ветвь $\text{Arg}(\Gamma(t) + 1)$ на $[0, \beta]$ с условием $\psi(0) = 0$.

По теореме об АП сложного элемента, исходный элемент $\mathcal{H}_{x_0}^h$ продолжается вдоль *указанных* γ и соответствующее продолжающее семейство имеет вид

$$\{\mathcal{H}^t = \mathfrak{D}_{\gamma(t)}^{g^t \circ f^t}\}_{t \in [0, \beta]}. \quad (1.12.1)$$

В частности, отсюда следует, что Φ имеет только три особые точки: 0, 1 и ∞ .

5. При аналитическом продолжении элемента $\mathfrak{D}_{1/2}^h$ (+1 раз) вдоль пути $\{(1/2)e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ мы приходим к элементу $\mathfrak{D}_{1/2}^{h_-}$, где $h_-(z) = \sqrt{1 - \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)} \in \mathcal{A}(D_0)$ и $D_0 = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (0, 1)$. После еще одного обхода снова получаем $\mathfrak{D}_{1/2}^h$, т.е. имеем ветвление 2 порядка у этой аналитической ветви в $B'(0, 1)$, что легко следует из (1.12.1), где можно брать вместо g^t функцию $g^+(w) = \sqrt{1 + w_{(o)}}$.

6. Так как $h(z) = \sqrt[4]{z}_{(o)} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{z}_{(o)}}}_{(o)}$ на $\mathbb{C}_- \setminus \overline{B_1}$ (применить теорему единственности), то, продолжая $\mathfrak{D}_2^h$ вдоль пути $\{2e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$, после + одного обхода получаем элемент $\mathfrak{D}_2(i\sqrt[4]{z}_{(o)} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{z}_{(o)}}}_{(o)})$, после 2-го обхода — элемент $\mathfrak{D}_2(-\sqrt[4]{z}_{(o)} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{z}_{(o)}}}_{(o)})$, после третьего — элемент $\mathfrak{D}_2(-i\sqrt[4]{z}_{(o)} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{z}_{(o)}}}_{(o)})$, после четвертого возвращаемся к элементу $\mathfrak{D}_2^h$. Поэтому над ∞ имеем 1 ветвление 4 порядка (над множеством $\{|z| > 1\}$). В частности, отсюда следует, что над каждой точкой этого кольца наша ПАФ имеет по 4 элемента, которые попарно отличаются только знаками.

7. По теореме единственности над каждой точкой $b \neq 0$, $b \neq 1$ ПАФ Φ также имеет по 4 различных элемента, попарно отличающихся только знаками. Над $b = 0$ имеется 2 ветвления 2-го порядка (второе получается из пункта 5 сменой знака у внешнего корня; как его получить продолжением вдоль пути из $\mathfrak{D}_{1/2}^h$?).

8. Над точкой $a = 1$ имеется две однозначные ветви (которые задаются голоморфными ветвями $\pm h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_-)$), и одно ветвление второго порядка. Разобрать последний случай самостоятельно, рассмотрев элемент $\mathfrak{D}_{1/2}^{h_-}$, где

$$h_-(z) = \sqrt{1 - \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)} = \frac{\sqrt{1 - z_{(o)}}}{\sqrt{1 + \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}} = \frac{-i\sqrt{z - 1}_{(\pi/2, 3\pi/2)}}{\sqrt{1 + \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}}$$

в $B(1/2, 1/2)$. Каковы радиусы элементов из Φ ?

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в предыдущей задаче в качестве исходной функции взять $h(z) = \sqrt{z + \sqrt{z}_{(o)}_{(o)}}$, то для описания соответствующей новой ПАФ используем равенство $h(z) = \sqrt[4]{z}_{(o)} \sqrt{1 + \sqrt{z}_{(o)}_{(o)}}$ в $\mathbb{C}_-$, и сводим эту задачу к предыдущей.

Аналогично можно рассматривать задачи об описании ПАФ с исходными элементами $\mathfrak{A}_1^h$ при $h(z) = \sqrt[n]{az^m + b\sqrt[k]{z}_{(o)}_{(o)}}$, где a и $b \in (0, +\infty)$, $n, k \in \{2, 3, \dots\}$, $m \in \{0, 1, \dots\}$.

1.12.3. ПАФ $\operatorname{Arcsin}(z)$.

1.12.4. ПРИМЕР (Полное описание ПАФ $\operatorname{Arcsin}(z)$).

В качестве исходного элемента берем $\mathcal{F}_0 = (B(0, 1), f_0)$, где $f_0(z) = \arcsin(z)$. Напомним, что $\arcsin(z)$ — главная ветвь арксинуса, определенная и голоморфная в области $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$. Покажем, что $\mathcal{F}_0$ — канонический. Действительно, «производная» этого элемента в круге $B_0 = B(0, 1)$ по теореме единственности имеет вид

$$f'_0(z) = (\arcsin(z))' = \frac{i}{\sqrt{z+1}_{(-\pi, \pi)} \sqrt{z-1}_{(0, 2\pi)}},$$

поскольку в этом равенстве участвуют две голоморфные функции, совпадающие на $(-1, 1)$. В частности, f'_0 неограничена в B_0 .

Пользуясь «табличными» ПАФ $\sqrt{z - z_0}$, мы можем продолжить элемент $\mathcal{F}'_0 = (B_0, f'_0)$ вдоль любого пути с началом в точке 0, не проходящего через точки -1 и 1 (и не можем продолжать по другим путям). При этом радиус любого из полученных элементов с центром в точке $b \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ равен $\min\{|b+1|, |b-1|\}$. Возникает ПАФ (обозначим ее через Φ'), которая является аналитической ветвью над своей областью определения $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Она распадается на две голоморфные ветви (отличающиеся только знаком) над каждой из областей $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$, $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus [-1, +\infty)$ и $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. ПАФ Φ' имеет по одному ветвлению 2 порядка над $B'(-1, 2)$ и $B'(1, 2)$; над областью $\{1 < |z| < +\infty\}$ — две голоморфные ветви с устранимыми особенностями в ∞ .

По теореме о продолжении первообразного элемента мы можем продолжать исходный элемент $\mathfrak{F}_0$ вдоль тех же путей (не проходящих через точки -1 и 1) и с такими же радиусами: достаточно разбить рассматриваемый путь на последовательные «короткие» пути, каждый из которых полностью лежит в одной из областей Ω_j ($j \in \{0, 1, 2\}$). Таким образом, ПАФ $\Phi = \operatorname{Arcsin}(z)$ является аналитической ветвью над своей областью определения $D_\Phi = D_1 = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

Охарактеризуем особые точки -1 , 1 и ∞ ПАФ $\operatorname{Arcsin}(z)$. Для этого посмотрим: что происходит с элементом $\mathcal{F}_0$ при однократном (положительно) обходе точек -1 и 1 по окружностям $\gamma_{-1} = \{-1 + e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$

и $\gamma_1 = \{1 + e^{it} : t \in [-\pi, \pi]\}$ соответственно. При $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ положим

$$\arcsin(x + i0) = \lim_{y \rightarrow 0+} \arcsin(x + iy), \quad \arcsin(x - i0) = \lim_{y \rightarrow 0+} \arcsin(x - iy).$$

Убедимся, что

$$\arcsin(x + i0) + \arcsin(x - i0) = \pi \quad \text{при} \quad x \in (1, +\infty), \quad (1.12.2)$$

$$\arcsin(x + i0) + \arcsin(x - i0) = -\pi \quad \text{при} \quad x \in (-\infty, -1). \quad (1.12.3)$$

Действительно, при каждом фиксированном $x \in (1, +\infty)$ траектории $\arcsin(x + it)$ и $\arcsin(x - it)$ (где $t > 0$ мало) симметричны относительно вещественной оси (ввиду равенства $\arcsin(\bar{z}) = \overline{\arcsin(z)}$), и при $t \rightarrow 0+$ они выходят на прямую $\{\operatorname{Re} z = \pi/2\}$. Из этого вытекает равенство (1.12.2). Если же $x \in (-\infty, -1)$, то аналогичные траектории будут симметрично выходить на прямую $\{\operatorname{Re} z = -\pi/2\}$, что дает равенство (1.12.3).

Рассмотрим элемент $\mathcal{F}_2^+ = (B(2, 1), f_2^+)$ (элемент $\mathcal{F}_2^- = (B(2, 1), f_2^-)$ соответственно) с центром 2, получаемый из элемента $\mathcal{F}_0$ продолжением вдоль пути $\gamma_+ = \{1 + e^{-it} : t \in [-\pi, 0]\}$ ($\gamma_- = \{1 + e^{it} : t \in [-\pi, 0]\}$ соответственно). В силу равенства (1.12.2) и теоремы единственности получаем, что $f_2^+ + f_2^- \equiv \pi$ в $B(2, 1)$, откуда вытекает, что элемент $\mathcal{F}_0$ после обхода точки 1 по γ_1 перейдет в элемент $-\mathcal{F}_0 + \pi = (B_0, -f_0 + \pi)$. После двух оборотов по γ_1 элемент $\mathcal{F}_0$ перейдет в себя. Аналогично, если пройти по траектории γ_{-1} , то элемент $\mathcal{F}_0$ перейдет в $-\mathcal{F}_0 - \pi$ (поскольку выполнено равенство (1.12.3)), а при двукратном обходе он перейдет в себя. При обходе по γ_1 , а потом по γ_{-1} элемент $\mathcal{F}_0$ переходит в элемент $\mathcal{F}_0 - 2\pi = (B_0, f_0 - 2\pi)$. (Аналогичным образом проверяется, что при обходе вдоль окружности $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, элемент $\mathcal{F}_2^+$ переходит в $\mathcal{F}_2^+ - 2\pi$.)

Из теоремы об аналитическом продолжении элементов по гомотопным путям получаем, что у ПАФ $\operatorname{Arcsin}(z)$ над каждой точкой $b \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ имеется счетное число элементов вида $\mathcal{F}_b + 2\pi k$ и $-\mathcal{F}_b + \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\mathcal{F}_b$ — некоторый фиксированный элемент ПАФ $\operatorname{Arcsin}(z)$ с центром b (например, $\mathcal{E}_b^{\arcsin(z)}$) при $b \in \Omega_0$.

Итак, над $B'(-1, 2)$ и $B'(1, 2)$ у $\operatorname{Arcsin}(z)$ имеется счетное число ветвлений второго порядка; над $\{1 < |z| < +\infty\}$ — два логарифмических ветвления.

§ 1.13. Алгебраические ПАФ. Теорема Абеля о радикалах. Понятие римановой поверхности ПАФ

1.13.1. Алгебраические ПАФ. Теорема Абеля (б/д).

Пусть Φ — ПАФ с областью определения D_Φ , $z_1 \in \mathbb{C}^\bullet$, $D_1 = B'(z_1, \delta) \subset D_\Phi$ (сама z_1 может как принадлежать D_Φ , так и не принадлежать). Пусть $b \in D_1$, $\mathcal{F}_b \in \Phi$, Φ_1 — аналитическая ветвь Φ над D_1 , определяемая элементом $\mathcal{F}_b$ (в частности, $\mathcal{F}_b$ продолжается вдоль любого пути в D_1 с началом в точке b). Наконец, пусть Φ_1 имеет в точке z_1 ветвление конечного порядка $p \geq 2$, либо имеет ИОТ однозначного характера с полюсом в точке z_1 (тогда полагаем $p = 1$).

1.13.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В указанных обозначениях, говорят, что точка $z_1 \in \mathbb{C}$ (соответственно точка $z_1 = \infty$) является *алгебраической* ОТ для Φ_1 , если найдутся такие $A > 0$, $s \geq 0$ и $r \in (0, \delta)$, что для любого $c \in B'(z_1, r)$ и всякого $\mathcal{F}_c = (B(c, r_c), f_c) \in \Phi_1$ имеем при всех $z \in B(c, r_c) \cap B'(z_1, r)$

$$|f_c(z)| \leq \frac{A}{|z - z_1|^s}$$

(соответственно $|f_c(z)| \leq A|z|^s$).

1.13.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПАФ Φ называется *алгебраической*, если:

(1) найдется *конечное* множество $S_\Phi \subset \mathbb{C}^\bullet$ ($\infty \in S_\Phi$) такое, что область $D = \mathbb{C}^\bullet \setminus S_\Phi$ содержится в D_Φ , и совокупность элементов $\Phi|_D$ является конечнозначной аналитической ветвью ПАФ Φ над D ; берется минимально возможное такое S_Φ ;

(2) для каждой точки $a \in S_\Phi$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой аналитической ветви Φ_1 ПАФ Φ над $D_1 = B'(a, \delta)$ (для которой a — особая) точка a является алгебраической для Φ_1 .

1.13.3. ТЕОРЕМА. Пусть Φ — алгебраическая N -значная (на $D = \mathbb{C}^\bullet \setminus S_\Phi$) ПАФ, $N \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся многочлены $\{P_n(z)\}_{n=0}^N$ такие, что многочлен двух переменных (степени N по w)

$$P(z, w) = \sum_{n=0}^N P_n(z) w^n$$

является неприводимым (как многочлен от w над полем $\mathbb{C}(z)$), и для каждого элемента $\mathcal{F} = (B, f) \in \Phi$ имеем

$$P(z, f(z)) = \sum_{n=0}^N P_n(z) (f(z))^n \equiv 0$$

для всех $z \in B$, т.е. каждый элемент $\mathcal{F} \in \Phi$ является алгебраическим с представляющим (и определяющим) многочленом $P(z, w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $b \in D = \mathbb{C}^\bullet \setminus S_\Phi$. Пусть $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^N$ — занумерованные (все, различные) элементы из Φ с центром

b . Пусть $\gamma = \gamma_{bb}$ — произвольный путь в D с началом и концом в точке b . При АП вдоль γ набор элементов $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^N$ перейдет в себя, но с некоторой перестановкой, которую обозначим через $\sigma = \sigma_\gamma$:

$$\mathcal{F}_n \underset{\gamma}{\rightsquigarrow} \mathcal{F}_{\sigma(n)}, \quad n \in \{1, \dots, N\}.$$

Тогда все базовые симметрические элементы

$$\Sigma_1 = \mathcal{F}_1 + \dots + \mathcal{F}_N, \quad \Sigma_2 = \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 + \dots + \mathcal{F}_{N-1} \mathcal{F}_N, \dots, \quad \Sigma_N = \mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_N,$$

определяемые набором $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^N$, при продолжении вдоль γ перейдут в себя. Из определений 1.13.1 и 1.13.2 сразу следует, что все Σ_n являются рациональными функциями от z (независящими от b). Положим $\mathcal{F}_n = (B_n, f_n)$. По формулам Виета при всех $z \in \cap_{n=1}^N B_n$ числа $\{f_n(z)\}_{n=1}^N$ являются корнями уравнения

$$w^N - \Sigma_1(z)w^{N-1} + \dots + (-1)^N \Sigma_N(z) = 0.$$

Чтобы получить нужный многочлен $P(z, w)$ над $\mathbb{C}[z]$, надо левую часть последнего равенства умножить на общий знаменатель рациональных функций $\{\Sigma_n\}_{n=1}^N$. $\square$

Обратная теорема 1.12.2 установлена в предыдущем параграфе.

Уравнение $P(z, w) = 0$ называется *алгебраическим уравнением* степени N относительно w .

В обозначениях доказательства теоремы 1.13.3, совокупность всех перестановок σ_γ (по всем указанным γ) образует подгруппу $\mathcal{G}_b$ в группе $\mathcal{S}_N$ всех перестановок из N элементов. Эта подгруппа (она с точностью до изоморфизма не зависит от b) называется *группой Галуа, или группой монодромии* ПАФ Φ . Имеется естественный гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(D)$ на $\mathcal{G}$.

1.13.4. УПРАЖНЕНИЕ. Найти группу Галуа ПАФ $\mathcal{K}^{-1}(z)$. Доказать ее коммутативность. Найти определяющий многочлен.

Приведем схему доказательства *теоремы Абеля о неразрешимости в радикалах* общих алгебраических уравнений степени выше четырех. Более подробно об этой теореме можно прочитать в книге В. Б. Алексеева «Теорема Абеля в задачах и решениях» (1976), правда в несколько иной терминологии.

Сначала определим по индукции класс $\mathcal{R}_*$ всех (канонических) элементов, выражающихся в радикалах. На нулевом шаге в него включаются элементы $\mathcal{E}(h_c(z) \equiv c)$ для всех $c \in \mathbb{C}$ и элемент $\mathcal{E}(h(z) \equiv z)$ (их центры считаются произвольными). Совокупность этих элементов обозначим через $\mathcal{R}_0$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и определен класс $\mathcal{R}_{n-1}$. На n -м шаге для произвольного $a \in \mathbb{C}$ из любых двух элементов $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ и $\mathcal{G}_a = (\tilde{B}_a, g_a)$ с центром a , принадлежащих $\mathcal{R}_{n-1}$, образуем элементы $\mathcal{F}_a \pm \mathcal{G}_a = \mathcal{E}_a(f_a \pm g_a)$, $\mathcal{F}_a \mathcal{G}_a = \mathcal{E}_a(f_a g_a)$ и $\mathcal{F}_a / \mathcal{G}_a = \mathcal{E}_a(f_a / g_a)$ при $g_a(a) \neq 0$. Кроме того, при $g_a(a) \neq 0$, для любого $m \in \{2, 3, \dots\}$ образуются элементы $\mathcal{E}_a(\sqrt[m]{g_a(z)}_{(j)})$, где $\{\sqrt[m]{w}_{(j)}\}_{j=0}^{j=m}$ — голоморфные ветви m -функции

$\sqrt[n]{w}$ в некоторой (малой) окрестности точки $g_a(a) \neq 0$. Все полученные элементы образуют класс $\mathcal{R}_n$. Наконец, $\mathcal{R}_* = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}_n$.

1.13.5. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что любой элемент $\mathcal{H}$ из $\mathcal{R}_*$ является *алгебраическим* и значит определяет алгебраическую ПАФ $\Phi_{\mathcal{H}}$.

1.13.6. УПРАЖНЕНИЕ*. Доказать, что для любого элемента $\mathcal{H} \in \mathcal{R}_*$ группа Галуа ПАФ $\Phi_{\mathcal{H}}$ является *разрешимой*.

Указание. Прямое произведение разрешимых групп является разрешимой группой. Всякая подгруппа разрешимой группы разрешима. Если N — нормальная подгруппа группы G , а N и G/N разрешимы, то и G разрешима.

Теперь рассмотрим уравнение

$$P(z, w) = P_5(z, w) \equiv 3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0$$

(многочлен P_5 неприводим). Поскольку $\partial P / \partial w = 15w^4 - 75w^2 + 60$ (корни этого многочлена $\{w_1 = -1, w_2 = 1, w_3 = 2, w_4 = -2\}$), сингулярное множество S_P находится легко: $S_P = \{z_1 = -16, z_2 = 16, z_3 = -38, z_4 = 38\}$. Над каждой (малой) проколотой окрестностью точки z_j ($j \in \{1, 2, 3, 4\}$) имеется по одному ветвлению второго порядка и по три (однозначные) голоморфные ветви. Над (малой) проколотой окрестностью точки ∞ — одно ветвление пятого порядка. Отсюда можно показать, что группа Галуа соответствующей алгебраической ПАФ содержит все элементарные транспозиции и, следовательно, совпадает со всей группой $\mathcal{S}_5$. Как хорошо известно, группа $\mathcal{S}_5$ является *неразрешимой*. Этим доказывается неразрешимость уравнения $P_5(z, w) = 0$ относительно w в радикалах (по переменной z), т. е. никакой элемент с определяющим многочленом P_5 не может принадлежать $\mathcal{R}_*$.

1.13.7. УПРАЖНЕНИЕ. Рассмотрим ПАФ $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$. Она охарактеризована в примере 1.12.3.

- (i) Доказать некоммутативность ее группы Галуа.
- (ii)* Установить ее разрешимость.

1.13.8. УПРАЖНЕНИЕ. Пусть $h(z) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)} + \sqrt{1 + \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}$.

Доказать, что ПАФ, определяемая элементом $\mathfrak{A}_{1/4}^h$, над проколотой окрестностью точки 1 имеет ветвление 2-го и ветвление 3-го порядка (указать: как эти ветви получаются из элемента $\mathfrak{A}_{1/4}^h$).

1.13.2. Понятие римановой поверхности ПАФ.

Пусть Φ — ПАФ с областью определения D_{Φ} . Введем на Φ структуру гладкого двумерного (в вещественном смысле) многообразия $\mathcal{M}_{\Phi}$ следующим образом. Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ — (канонический) элемент с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом R_a , принадлежащий Φ . В качестве базы

окрестностей элемента $\mathcal{F}_a$ в $\mathcal{M}_\Phi$ возьмем совокупность $\{U_R(\mathcal{F}_a)\}_{R \in (0, R_a]}$ открытых множеств

$$U_R(\mathcal{F}_a) = \{\mathcal{F}_b \in \Phi: |b - a| < R, \mathcal{F}_b \leftrightarrow \mathcal{F}_a\}.$$

При любом $R \in (0, R_a]$ «проекция» $P_{\mathcal{F}_a}: \mathcal{F}_b \mapsto b$ является гомеоморфизмом карты $U_R(\mathcal{F}_a)$ на $B(a, R)$ (всюду элемент $\mathcal{F}_b$ имеет центр b). В результате возникает атлас на $\mathcal{M}_\Phi$, все соотношения соседства которого — тождественные отображения (в пересечениях кругов проекций пересекающихся карт).

При этом (в указанных выше обозначениях) функция $F: \mathcal{M}_\Phi \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемая по формуле $F(\mathcal{F}_a) = f_a(a)$, является обычной голоморфной функцией на $\mathcal{M}_\Phi$ в том смысле, что для любой карты $U_R(\mathcal{F}_a)$ соответствующее «координатное» отображение $F(P_{\mathcal{F}_a}^{-1})(z) = f_a(z)$ голоморфно в $B(a, R)$.

Многообразие $\mathcal{M}_\Phi$ называют *римановой поверхностью (РП) ПАФ Φ* .

Пусть ПАФ Φ распадается над областью $D \subset D_\Phi$ на однозначные голоморфные ветви (J штук, $J \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), причем граница D «кусочно прямолинейна» и D всюду плотно в D_Φ . Тогда $\mathcal{M}_\Phi$ представляется как J копий области D друг над другом, причем «отождествляются» (склеиваются) некоторые части границ этих копий так, чтобы при переходе через них одна ветвь «переходила» в другую.

Пользуясь этим соображением, приведем геометрические интерпретации РП ПАФ $\sqrt[N]{z}$, $N \in \{2, 3, \dots\}$, и $\text{Ln}(z)$. Обе эти ПАФ (с областью определения $\mathbb{C}_b$) распадаются над $D = \mathbb{C}_-$ на голоморфные ветви (здесь $J = N$ и $J = +\infty$ соответственно).

Для $\sqrt[N]{z}$ берем N копий $\{D_0, \dots, D_{N-1}\}$ области D , выбирая значения аргумента $\arg_n(z)$ в области D_n из интервала $(2\pi n - \pi, 2\pi n + \pi)$. Согласно тригонометрической формуле для корней степени N , при каждом $n \in \{0, \dots, N-2\}$ приклеим верхний берег D_n (где $\arg_n(z) \rightarrow 2\pi n + \pi$) к нижнему берегу D_{n+1} (где $\arg_{n+1}(z) \rightarrow 2\pi(n+1) - \pi = 2\pi n + \pi$). Наконец, приклеим верхний берег D_{N-1} к нижнему берегу D_0 (где выбранные значения аргументов отличаются на $2\pi N$). Последнюю склейку (аналогично изображению бутылки Клейна) нельзя осуществить в $\mathbb{R}^3$, и следует, включая воображение, считать, что пересечений последней склейки с другими склейками на самом деле нет.

Для $\text{Ln}(z)$ копии D_n области D удобно нумеровать целыми индексами $n \in \mathbb{Z}$; значения (полярного) аргумента в D_n выбираются аналогично: $\arg_n(z) \in (2\pi n - \pi, 2\pi n + \pi)$; при каждом n верхний берег D_n приклеивается к нижнему берегу D_{n+1} . Получается как бы бесконечная винтовая лента, которую можно изобразить и в $\mathbb{R}^3$.

1.13.9. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что РП ПАФ $\sqrt[N]{z}$ диффеоморфна $\mathbb{C}_b$.

Поэтому иногда «присоединяют» точки 0 и ∞ к РП ПАФ $\sqrt[N]{z}$, и считают ее диффеоморфной сфере $\mathbb{C}^\bullet$.

1.13.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Римановой поверхностью (РП) в *широком смысле* называется всякое двумерное (в вещественном смысле) связное гладкое многообразие с фиксированным атласом, все соотношения соседства которого являются конформными изоморфизмами.

Поскольку у всякого конформного изоморфизма h двумерный якобиан в точке z равен $|h'(z)|^2 > 0$, всякая РП является *ориентированным* многообразием (так что лист Мебиуса не может быть диффеоморфен никакой РП).

Ниже приведем без доказательства теорему Ганнинга–Нарасимхана (1967), являющуюся базовой в теории РП. С ее помощью упрощаются многие моменты, связанные с теорией уравнений в частных производных (в частности, гармонических функций) и обобщенных функций на РП.

1.13.11. ТЕОРЕМА. Пусть M — произвольная некомпактная РП (в широком смысле). Тогда найдется атлас на M , который конформно согласован с исходным атласом, но все соотношения соседства в котором — тождественны.

На любой РП M естественно вводятся понятия голоморфной (или гармонической) функции в произвольной области D на M . Классификация ИОТ голоморфных (на областях) в M функций такая же, как в $\mathbb{C}$.

1.13.12. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что $\mathbb{C}^\bullet$ с двумя картами $h_1(z) = z$ на $\mathbb{C}$ и $h_2(z) = 1/z$ на $\mathbb{C}^\bullet \setminus \{0\}$ ($h_2(\infty) = 0$) является компактной РП.

1.13.13. УПРАЖНЕНИЕ. Найти компактную РП, диффеоморфную поверхности тора, и некомпактную РП, диффеоморфную поверхности (кругового) цилиндра.

1.13.14. УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что на всякой компактной РП всякая голоморфная (или гармоническая) функция постоянна.

1.13.15. УПРАЖНЕНИЕ. Сформулировать и доказать (внутреннюю) теорему единственности для голоморфных функций на некомпактной РП.

1.13.16. УПРАЖНЕНИЕ. Сформулировать и доказать (внутреннюю) теорему единственности для гармонических функций на некомпактной РП.

Программа курса ТФКП, 2 семестр

1. Гармонические функции (ГрФ) двух переменных. Связь с голоморфными функциями (ГФ). Внутренняя теорема единственности для ГрФ.
2. Теорема о среднем и принцип минимума-максимума для ГрФ. Инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных. Задача Дирихле (ЗД) для ГрФ. Решение ЗД методом конформных отображений.
3. Разложение ГрФ в ряд по однородным гармоническим полиномам. Аналог теоремы Вейерштрасса для ГрФ.
4. Метод Фурье и формула Пуассона для решения ЗД в круге.
5. Теорема о логарифмических вычетах. Принцип аргумента.
6. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Гомеоморфность однолистной функции в области.
7. Лемма о голоморфной ветви логарифма. Неоднолистность в точке при нулевой производной. Конформность однолистных функций.
8. Критерии локальной однолистности и локальной обратимости.
9. Обратный принцип соответствия границ.
10. Принцип симметрии Римана – Шварца для конформных отображений.
11. Теорема Гурвица о нулях. Сходящиеся последовательности однолистных функций.
12. Равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность семейства функций.
13. Предкомпактность и компактность семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Непрерывный функционал на компактном семействе функций.
14. Доказательство теоремы Римана о конформном отображении.
15. Лемма Кёбе и ее следствие. Лемма Линделёфа.
16. Граничная теорема единственности и окончание доказательства теоремы Каратеодори для жордановых областей.
17. Следствия из теорем Римана и Каратеодори: разрешимость ЗД в жордановой области; усиленный принцип аргумента и теорема Руше; связность любой допустимой области.
18. Характеристика специальных областей в $\mathbb{C}$. Построение специальной области с двумя полюсами и с произвольно заданными полюсами у функции Шварца.
19. Гомотопные пути в области. Связь 1- и 2- гомотопности путей в области. Классы гомотопных замкнутых путей в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
20. Эквивалентные определения односвязной области в $\mathbb{C}$.

21. Элементы и их аналитическое продолжение (АП). АП вдоль пути и его свойства.
22. Единственность АП вдоль пути и его связь с АП по цепочке.
23. АП по близким путям и по путям гомотопии. Теорема о монодромии.
24. АП первообразного элемента. Теорема об интегралах по гомотопным путям.
25. Голоморфная ветвь логарифма $\Gamma\Phi$ в $\Gamma(1)$ -односвязной области. Эквивалентность односвязности и $\Gamma(1)$ -односвязности области.
26. Полная аналитическая функция (ПАФ) в смысле Вейерштрасса. Теорема Пуанкаре – Вольтерра. Аналитические и голоморфные ветви ПАФ.
27. Точки ветвления аналитических ветвей ПАФ, их классификация. Полное описание ПАФ на примерах $\text{Ln}(z)$ и z^p .
28. Полное описание ПАФ $\text{Arctg}(z)$, $\text{Ж}^{-1}(z)$ и $\text{Ln}(\sin(z))$.
29. Полное описание ПАФ $\text{Arcsin}(z)$.
30. Теорема об АП сложного элемента. Пример: ПАФ $\exp \frac{1}{1 + \sqrt{z}}$.
31. Модулярная функция и ее свойства.
32. Малые теоремы Пикара. Есть ли ИПЗ у функции $z + \text{tg}(z)$?
33. Алгебраические элементы и их свойства.
34. ПАФ $\sqrt{1 + \sqrt{z}}$. Некоммутативность её группы Галуа.
35. Алгебраические ПАФ. Теорема Абеля о радикалах (схема доказательства).
36. Понятие о римановой поверхности (РП) ПАФ. РП ПАФ $z^{1/N}$ и $\text{Ln}(z)$.
37. РП в широком смысле. Теорема Ганнинга – Нарасимхана (б/д). Теоремы единственности для голоморфных и гармонических функций на некомпактных римановых поверхностях.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Витушкин А.Г. Курс лекций по комплексному анализу. *Мanuscript*, 1991.
- [2] Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу. МИАН, 2004.
- [3] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. “Наука”, 1976.
- [4] Евграфов М.А. (ред). Сборник задач по теории аналитических функций. “Наука”, 1972.

Задачи по курсу ТФКП, 2 семестр

Задача 1. Вычислить интегралы:

$$(1) \quad (vp) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^4 - 16}$$

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 \, dx}{x^2 - 1}$$

$$(3) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt[3]{x}(x^2 + 1)^2}$$

$$(4) \quad (vp) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} \ln(x) \, dx}{x^2 - 16}$$

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}(\ln(x))^2 \, dx}{x^2 + 4}$$

$$(6) \quad (vp) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} \, dx}{(x - 8)(x^2 + 64)}$$

$$(7) \quad (vp) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x - 1)(x + 2)^3}$$

$$(8) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) \, dx}{(x + 3)^2}$$

$$(9) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) \, dx}{\sqrt[4]{x}(x + 4)}$$

$$(10) \quad \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 \, dx}{x^3 - 1}$$

$$(11) \quad (vp) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1 - x)}$$

$$(12) \quad \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 \, dx}{\sqrt{x}(x - 1)}$$

$$(13) \quad \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}(1 - x) \, dx}{x + 1}$$

$$(14) \quad \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1 - x)^3} \, dx}{x^2 + 1}$$

Задача 2. Найти методом вычетов $B(3/4, 9/4)$, $B(7/5, 8/5)$.

Задача 3. При каком $\lambda \in \mathbb{R}$ функция

$$(1) \quad h(x, y) = e^{\lambda x} \cos 2y$$

$$(2) \quad h(x, y) = 2x^3 + 3\lambda xy^2$$

является гармонической в $\mathbb{R}^2$? При этом λ найти целую функцию f с условием $\operatorname{Re} f = h$.

Задача 4. Привести пример функции, разрывной в начале координат, но удовлетворяющей всюду на плоскости уравнению Лапласа (без условия C^2).

Задача 5. Решить задачи Дирихле (ЗД):

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta h = 0 & (x^2 + y^2 < 16), \\ h(x, y) = 1 - (\arg(x + iy))^2 & (x^2 + y^2 = 16); \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta h = 0 & (x^2 + y^2 < 9), \\ h(x, y) = 3x^2 - 2y^3 & (x^2 + y^2 = 9). \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В неограниченных областях, а также для кусочно непрерывных граничных данных на решение ЗД дополнительно накладывается условие ограниченности (РЗД).

Задача 6. Решить РЗД в указанных областях D с указанными граничными условиями, используя конформные отображения:

$$(1) \begin{cases} \Delta h = 0 & (D = \{|z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}), \\ h|_{|z|=2} = 3, & h|_{\operatorname{Im} z=0} = -3. \end{cases}$$

Найти линии уровня $\{h = 0\}$ и $\{h = 1\}$.

$$(2) \begin{cases} \Delta h = 0 & (D = \{|z - 2i| < 2, |z - i| > 1\}), \\ h|_{|z-2i|=2} = 5, & h|_{|z-i|=1} = -1. \end{cases}$$

Найти линию уровня $\{h = 0\}$.

$$(3) \begin{cases} \Delta h = 0 & (D = \{x^2 + y^2 < 1\}), \\ h|_{\partial D \cap I} = 1, & h|_{\partial D \setminus I} = 0, \end{cases} \quad \text{где } I = \{x > 0, y > 0\}.$$

Найти линии уровня $\{h = t\}$.

Задача 7. Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$, где u и v — гармонические функции в области D . Доказать, что если $|f|$ постоянна в D , то f тоже постоянна в D .

Задача 8. Решить ЗД в круге $\{|z| < 2\}$ с граничными данными $2/(2x + 5)$.

Задача 9. Решить ЗД в полукруге $D = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ с граничными данными $h_0(x, y) = y^2$.

Задача 10. Решить ЗД в полукруге $\{|z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$ с граничными данными y^3 .

Задача 11. Доказать теорему о среднем по площади для гармонических функций.

Задача 12. Если ряд из неотрицательных гармонических в области D функций сходится хотя бы в одной точке из D , то он сходится равномерно внутри D (теорема Гарнака).

Задача 13. Пусть $a \in B_1$. Решить ЗД в круге $B_1 = \{|z| < 1\}$ с граничными данными $h_0(z) = \ln|z - a|$.

Задача 14. Пусть Ω — образ круга $\{|z - 1| < 1\}$ при отображении $w = z^2$ (внутренность кардиоиды). Решить ЗД в Ω с граничными данными $h_0(w) = |w|^2$.

Задача 15. Пусть Ω — образ круга $\{|z| < 1\}$ при отображении $w = (z + 2)^2$. Решить ЗД в Ω с граничными данными $H_0(w) = 1/|w|$.

Задача 16. Доказать аналог теоремы об устранимой особенности для ГФ: если функция h гармонична в проколотой окрестности точки a и ограничена, то существует конечный $\lim_{z \rightarrow a} h(z)$, и, полагая $h(a) = \lim_{z \rightarrow a} h(z)$, мы получаем, что h гармонична в окрестности точки a .

Задача 17. Пусть D — произвольный круг в $\mathbb{C}$. Доказать, что всякая вещественная непрерывная функция h в D , удовлетворяющая для всякого замкнутого круга $\bar{B} \subset D$ теореме о среднем (по граничной окружности), является гармонической в D .

Задача 18. Доказать аналог теоремы Лиувилля: всякая целая ограниченная гармоническая функция постоянна.

- Задача 19.** Доказать, что всякую вещественную непрерывную функцию на единичной окружности ∂B_1 можно с любой точностью равномерно на ∂B_1 приблизить гармоническими полиномами.
- Задача 20.** Доказать единственность решения РЗД для жордановых областей в $\mathbb{C}^\bullet$.
- Задача 21.** Найти число корней многочлена $p(z) = z^3 + 2z^2 + 3z + 8$:
- (1) в верхней полуплоскости;
 - (2) в полукруге $\{|z| < 4, \operatorname{Im} z > 0\}$;
 - (3) в левой полуплоскости.
- Задача 22.** Найти число нулей функции $z^2 - \cos z$ в области $\{|z| < 2\}$.
- Задача 23.** Доказать, что уравнение $\sin z = z$ имеет в $\mathbb{C}$ бесконечно много решений.
- Задача 24.** Исследовать на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения $y''' + py'' + qy' + 12y = 0$ при различных значениях параметров $p > 0$ и $q > 0$.
- Задача 25.** Найти число нулей многочлена $p(z) = z^5 + z^4 + 9z^3 + 2z^2 + z + 1$ в левой полуплоскости.
- Задача 26.** Доказать, что при $t > 1$ уравнение $ze^{t-z} = 1$ имеет в круге $\{|z| \leq 1\}$ ровно один корень, причем действительный.
- Задача 27.** Доказать, что при любом $a \in \mathbb{C}$ и целом $n \geq 2$ уравнение $az^n + z + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень в круге $\{|z| \leq 2\}$.
- Задача 28.** Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} z = z$ имеет только вещественные корни.
- Задача 29.** Доказать, что всякое голоморфное отображение замкнутого круга в себя имеет неподвижную точку.
- Задача 30.** Останется ли верным обратный принцип соответствия границ, если соответствующие области — жордановы в $\mathbb{C}^\bullet$, а функция — непрерывна в топологии $\mathbb{C}^\bullet$?
- Задача 31.** Доказать, что функция $f(z) = ze^{-z}$ однолистка в круге $B = \{|z| < 1\}$ и ни в каком большем круге с центром в нуле. Найти $f(B)$.
- Задача 32.** Доказать, что функция $f(z) = z/\ln z$ однолистка в области $\{|z| < 1/e, \operatorname{Re} z > 0\}$.
- Задача 33.** Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найти максимальный круг однолистности (с центром в нуле) для функции $f(z) = ze^{z^n}$.
- Задача 34.** Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство всех однолистных функций из области $D = \{z = x + iy: x > 0, y > 0\}$ в круг $B = \{z: |z| < 1\}$ с условием $f(1+i) = 0$. Найти $\sup_{f \in \mathfrak{F}} |f'(1+i)|$.
- Задача 35.** Пусть $D \subset \mathbb{C}$ ($D \neq \mathbb{C}$) — односвязная область, $a \in D$. Если f голоморфна в D , $f(D) \subset D$, $f(a) = a$, $f'(a) = 1$, то $f(z) \equiv z$ — тождественное отображение.
- Задача 36.** Стереть разрезы $[-1, 2)$ и $[-i, i]$ из области $G = \{|z| < 2\}$.
- Задача 37.** Найти все кольца с центром в 0, конформно эквивалентные кольцу $\{r < |z| < R\}$, где $0 \leq r < R < \infty$.
- Задача 38.** Найти группу всех конформных автоморфизмов кольца $V = \{1/2 < |z| < 2\}$ и ее групповую операцию.

Задача 39. Доказать, что любой конформный изоморфизм прямоугольника на прямоугольник, переводящий все четыре вершины в вершины, линеен.

Задача 40. Доказать единственность функции Шварца для специальных областей.

Задача 41. Пусть $R > 1$, $a = (R + 1/R)/2$, $b = (R - 1/R)/2$ и кривая

$$\Gamma_R = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

отображается на кривую C_R при отображении $w = 1/z$. Доказать, что область Ω , ограниченная кривой C_R , является неванлинновской. Найти функцию Шварца и ее полюса.

Задача 42. Применить теорему 1.6.5 о специальных областях к функции

$$f(z) = z + \frac{9/2}{z^2 - 4}.$$

Какие полюса имеет функция Шварца области $\Omega = f(B_1)$ (в этой области)? Каков максимальный круг однолиственности B_r для f ?

Задача 43. Если $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — гомотопия (1) или (2) типа, и $a \notin \Gamma([0, 1]^2)$, то $\text{ind}_{\gamma_s}(a)$ не зависит от s , $s \in [0, 1]$.

Задача 44. Положим $D = \mathbb{C}_b = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (в качестве D можно взять и любое кольцо с центром в нуле, содержащее ∂B_1). Пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ — замкнутый путь, $n = \text{ind}_\gamma(0) = (2\pi)^{-1} \Delta_\gamma \text{Arg}(z)$. Если $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}|_{[0, 1]}$ — путь, равномерно проходящий n раз ∂B_1 , то $\gamma \underset{(2)}{\sim} \gamma_n$. Доказать, что разные γ_n не гомотопны в D .

Задача 45. Доказать, что если пути $\gamma_{1,2}: [0, 1] \rightarrow D$ (1)-гомотопны в области D , то путь $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ (перенесенный на $[0, 1]$) (1)-гомотопен (и, значит, (2)-гомотопен) нулю в D .

Задача 46. Пусть f — гомеоморфизм $\overline{B_1}$ на компакт K . Тогда $f|_{B_1}$ — гомеоморфизм B_1 на K° , а $f|_{\partial B_1}$ — гомеоморфизм ∂B_1 на ∂K .

Задача 47. Доказать, что для всякой $\Gamma(2)$ -односвязной области D в $\mathbb{C}$ справедлив аналог теоремы о монодромии.

Задача 48. Исследовать указанные ниже полные аналитические функции (ПАФ) по Вейерштрассу (задать начальный элемент и указать вдоль каких путей он аналитически продолжаем; для таких путей выписать семейство канонических элементов, осуществляющих продолжение; сколько элементов с центром в данной точке имеет данная ПАФ и как они друг от друга отличаются; найти изолированные особые точки *аналитических ветвей* ПАФ и дать их характеристику):

- | | |
|---|--|
| (1) $\sqrt[n]{z}$ | (2) $\operatorname{Ln} z$ |
| (3) $\operatorname{Ln}(\sqrt{z}/(z^2 + 1))$ | (4) $\operatorname{Arctg}(i + 2z^2)$ |
| (5) $\operatorname{Ln}(\operatorname{tg}(z))$ | (6) $\operatorname{Arctg}(e^z)$ |
| (7) $\frac{1}{1 + \sqrt{z}}$ | (8) $\cos(\pi/(2 + \sqrt[3]{z}))$ |
| (9) $1/\operatorname{Ln} z$ | (10) $\sqrt{z + \sqrt{z}}$ |
| (11) $\operatorname{Arcsin} z$ | (12) $\operatorname{Ln}(1 + \sqrt{z})$ |

Задача 49. Имеют ли ИПЗ целые функции

$$z^2 - e^z, \quad z^6 + \sin^2(z) + e^{3z^2}, \quad (z^2 - z)e^z?$$

Задача 50. Имеют ли ИПЗ мероморфные функции

$$\operatorname{tg} z, \quad z^3 + \operatorname{tg} z, \quad z^2 \sin(z) - z^4 \operatorname{tg}(5z)?$$

Задача 51. Найти все целые функции, удовлетворяющие уравнению

$$e^{f(z)} + e^{g(z)} \equiv 1.$$

Задача 52. Пусть $n \geq 2$ — натуральное число. Найти все целые функции f и g такие, что $(f(z))^n + (g(z))^n \equiv 1$.

Задача 53. Существует ли целая функция f с условиями $f(f(z)) = e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$?

Задача 54. Пусть $h(z) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{z}_{(o)}(o)} + \sqrt{1 + \sqrt{z}_{(o)}(o)}$. Доказать, что ПАФ, определяемая элементом $\mathfrak{A}_{1/4}^h$, над проколотой окрестностью точки 1 имеет ветвление 2-го и ветвление 3-го порядка (указать, как указанные ветви получаются из элемента $\mathfrak{A}_{1/4}^h$).

Задача 55. Найти группу Галуа ПАФ $\mathcal{H}^{-1}(z)$. Проверить ее разрешимость. Указать представляющий многочлен $P(w, z)$.

Задача 56. Доказать, что РП ПАФ $\sqrt[n]{z}$ диффеоморфна $\mathbb{C}_b$.

Задача 57. Придумать компактную РП, диффеоморфную тору.

Задача 58. Доказать, что на всякой компактной РП всякая голоморфная (или гармоническая) функция постоянна.

Задача 59. Сформулировать и доказать внутреннюю теорему единственности для голоморфных функций в любой некомпактной РП.

Планы семинаров курса ТФКП, 2 семестр

Семинар 1. Вычисление (vp) -интегралов с помощью вычетов. Выделение ветви.

Вычисление (vp) -интегралов вида

$$I = (vp) \int_0^{+\infty} (\ln(x))^m x^p R(x) dx,$$

где $m \geq 0$ — целое, $p \in (-1, 1)$, $R(x)$ — четная рациональная функция.

Указание. Пусть ветвь логарифма $\ln_*(z) = \ln|z| + i \arg_*(z)$ выбрана с условием $\arg_*(z) \in (-\pi/2, 3\pi/2)$, т. е. с разрезом по отрицательной мнимой полуоси. Аналогично определяется ветвь $z_*^p = \exp(p \ln_* z)$. Метод работает, если к функции $f(z) = (\ln_*(z))^m z_*^p R(z)$ в верхней полуплоскости $D = \Pi_+$ можно применить теорему о вычетах для (vp) -интегралов. Используется также рекуррентное соотношение (аддитивное, мультипликативное, или совместное) между интегралами I и $(vp) \int_{-\infty}^0 f(x) dx$.

Упр. 1. Вычислить интеграл:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) dx}{x^2 - 1}.$$

Интеграл найден в примере ???: $I = \pi^2/4$.

Упр. 2. Вычислить интеграл:

$$I = (vp) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x^4 - 1}.$$

Упр. 3. Вычислить интеграл:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) dx}{\sqrt{x}(x^2 + 4)}.$$

Упр. 4. Обсудить планы решений ДЗ 2,3,5.

Домашнее задание.

- | | |
|--|---|
| $(1) \quad (vp) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 16}$ | $(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 dx}{x^2 - 1}$ |
| $(3) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x}(x^2 + 1)^2}$ | $(4) \quad (vp) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} \ln(x) dx}{x^2 - 16}$ |
| $(5) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}(\ln(x))^2 dx}{x^2 + 4}$ | $(6) \quad (vp) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(t) dt}{1 - \cos(t) - \sin(t)}$ |

Задача 7. Доказать, что преобразование Гильберта

$$f \mapsto H[f](x) = \frac{1}{\pi} (vp) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$$

удовлетворяет условию $H[H[f]](x) = -f(x)$ для всякой правильной (комплексной) рациональной функции f без вещественных полюсов.

Семинар 2. Вычисление (vp)-интегралов. Выделение двух ветвей.

Вычисление (vp)-интегралов вида

$$I = (vp) \int_0^{+\infty} (\ln(x))^m x^p R(x) dx,$$

где $m \geq 0$ — целое, $p \in (-1, 1)$, $R(x)$ — рациональная функция, не являющаяся четной.

Указание. Пусть ветвь логарифма $\ln_*(z) = \ln|z| + i \arg_*(z)$ выбрана с условием $\arg_*(z) \in (-\pi/2, 3\pi/2)$, т.е. с разрезом по отрицательной мнимой полуоси. Аналогично определяется ветвь $z_*^p = \exp(p \ln_*(z))$.

Другую ветвь логарифма $\ln^*(z) = \ln|z| + i \arg^*(z)$ выберем с условием $\arg^*(z) \in (\pi/2, 5\pi/2)$, т.е. с разрезом по положительной мнимой полуоси. Аналогично, $(z^p)^* = \exp(p \ln^*(z))$.

Положим $k = m$ при $p \neq 0$, $k = m + 1$ при $p = 0$. Метод работает, если при некотором $\beta \in (\pi/2, \pi]$ к функции $f_1(z) = (\ln_*(z))^k z_*^p R(z)$ в области $D_1 = \{0 < \arg(z) < \beta\}$ и к функции $f_2(z) = (\ln^*(z))^k (z^p)^* R(z)$ в области $D_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$ можно применить теорему о вычетах для (vp)-интегралов. Используется также рекуррентное соотношение (аддитивное, мультипликативное, или совместное) между функциями f_1 и f_2 на луче $(0, +\infty)$.

Упр. 1. Вычислить интеграл:

$$(vp) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1-x)}.$$

Упр. 2. Вычислить интеграл:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) dx}{(x-1)(x+2)}.$$

Упр. 3. Вычислить интеграл:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(x) dx}{(x+1)^2}.$$

Упр. 4. Обсудить планы решений ДЗ 2,3,5.

Домашнее задание.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (vp) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{(x-8)(x^2+64)} & (2) \quad (vp) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x+2)^3} \\
 (3) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) dx}{(x+3)^2} & (4) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) dx}{\sqrt[4]{x}(x+4)} \\
 (5) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 dx}{x^3-1} & (6) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 dx}{\sqrt{x}(x-1)}
 \end{aligned}$$

Семинар 3. Вычисление интегралов $\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q R(x) dx$.

Вычисление интегралов вида $\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q R(x) dx$ при

$-\infty < a < b < +\infty$, $p \in (-1, 1)$, $q \in (-1, 1)$, $p \notin \mathbb{Z}$, $q \notin \mathbb{Z}$, $p+q \in \mathbb{Z}$,
где $R(z)$ — рациональная функция без полюсов на $[a, b]$.

Упражнение. Для примера вычислим

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x(1-x)^2}}{(x+2)^2} dx; \quad p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{3}, \quad R(z) = \frac{1}{(z+2)^2}.$$

Рассмотрим функцию $g(z) = z_{(o)}^{1/3} \cdot (z-1)_{(o)}^{2/3}$, голоморфную в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. Эта функция непрерывно продолжается и на $(-\infty, 0)$ (становясь непрерывной на $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$), поскольку $|g(z)|$, очевидно, непрерывна на $\mathbb{C}$, а функция $\arg(z_{(o)}^{1/3}) = \arg(z)/3$ имеет перепад $2\pi/3$ (функция $\arg((z-1)_{(o)}^{2/3}) = 2/3 \cdot \arg(z-1)$ имеет перепад $4\pi/3$) при переходе $(-\infty, 0]$ снизу вверх. Общий перепад составляет 2π , что и требовалось. По теореме Мореры получаем, что $g \in \mathcal{A}(D)$, где $D = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. Пусть теперь $f(z) = g(z)/(z+2)^2$, $f_0(x)$ — *подынтегральная* функция (на $[0, 1]$).

Отметим, что при $x \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned}
 f(x+) &:= \lim_{y \rightarrow 0+} f(x+iy) = f_0(x)e^{2\pi i/3}, \\
 f(x-) &:= \lim_{y \rightarrow 0-} f(x+iy) = f_0(x)e^{-2\pi i/3},
 \end{aligned}$$

поскольку $\arg(x+iy)_{(o)}^{2/3} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0\pm$ и $\arg(x+iy-1)_{(o)}^{2/3} \rightarrow \pm 2\pi/3$ при $y \rightarrow 0\pm$.

Выберем лучи I_0 (с вершиной в 0) и I_1 (с вершиной в 1) так, чтобы на них не было полюсов функции $R(z)$, I_0 лежал в левой полуплоскости, I_1 — правее точки 1, а круг $B = B(0, r)$ содержал все полюса $R(z)$ и отрезок $[0, 1]$.

Введем жордановы области D_1 и D_2 так, чтобы

$$\partial D_1 = I_{0r} \cup [0, 1] \cup I_{1r} \cup \Gamma_{1r},$$

где $I_{0r} = I_0 \cap B$, $I_{1r} = I_1 \cap B$, Γ_{1r} (соответственно Γ_{2r}) — часть окружности ∂B , лежащая между лучами I_0 и I_1 сверху (соответственно, снизу). Аналогично,

$$\partial D_2 = I_{0r} \cup \Gamma_{2r} \cup I_{1r} \cup [0, 1].$$

Пусть $f_1(z) = f(z)$ на $\overline{D_1} \setminus [0, 1]$, $f_1(x) = f(x+)$ при $x \in (0, 1)$ и аналогично $f_2(z) = f(z)$ в $\overline{D_2} \setminus [0, 1]$, $f_2(x) = f(x-)$ на $(0, 1)$. Будем считать, что $-2 \in D_1$, т.е. I_0 лежит в 3-м квадранте.

По теореме Коши о вычетах (вообще говоря, в формулировке для (vp) -интегралов), где надо использовать свойства

$$\operatorname{res}_{(a, D_1)} f_1 = \operatorname{res}_{(b, D_1)} f_1 = \operatorname{res}_{(a, D_2)} f_2 = \operatorname{res}_{(b, D_2)} f_2 = 0,$$

имеем

$$J_1 = \int_{\partial^+ D_1} f_1(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{-2} f_1 = 2\pi i \operatorname{res}_{-2} f,$$

$$J_2 = \int_{\partial^+ D_2} f_2(z) dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Пусть J — исходный интеграл, тогда

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 &= \int_{\Gamma_{1r}^+} f_1(z) dz + \int_{\Gamma_{2r}^+} f_2(z) dz + \int_0^1 f(x+) dx - \int_0^1 f(x-) dx = \\ &= \int_{\partial^+ B} f(z) dz + e^{2\pi i/3} J - e^{-2\pi i/3} J = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f + 2i \sin \frac{2\pi}{3} \cdot J = 2\pi i \operatorname{res}_{-2} f, \end{aligned}$$

откуда $J = \pi(\operatorname{res}_{-2} f + \operatorname{res}_{\infty} f) / (\sin(2\pi/3))$.

Чтобы найти $\operatorname{res}_{-2} f$ учтем, что в D_1 выполнено равенство

$$f_1(z) = z_{(*)}^{1/3} (z-1)_{(*)}^{2/3} (z+2)^{-2},$$

где $(z-z_0)_{(*)}^p = (z-z_0)_{(-\pi/2, 3\pi/2)}^p = \exp(p \ln_{(-\pi/2, 3\pi/2)}(z-z_0))$, то есть разрез идет строго вниз. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-2} f &= \lim_{z \rightarrow -2} \left(z_{(*)}^{1/3} (z-1)_{(*)}^{2/3} \right)' = \frac{1}{3} (-2)_{(*)}^{-2/3} (-3)_{(*)}^{2/3} + (-2)_{(*)}^{1/3} \frac{2}{3} (-3)_{(*)}^{-1/3} = \\ &= 2^{-2/3} 3^{-1/3} e^{-2\pi i/3} e^{2\pi i/3} + 2^{4/3} 3^{-4/3} e^{\pi i/3} e^{-\pi i/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{12}} + \sqrt[3]{\frac{16}{81}}. \end{aligned}$$

Поскольку $g(z) = z + o(z)$ при $z \rightarrow \infty$ (это очевидно при $z \in (1, +\infty)$), имеем

$$f(z) = \frac{z + o(z)}{(z+2)^2} = \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right),$$

откуда $\operatorname{res}_\infty f = -1$. Таким образом,

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{12}} + \sqrt[3]{\frac{16}{81}} - 1 \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{7}{6} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 1 \right).$$

Замечание. В общем случае следует брать $g(z) = (z-a)_{(o)}^p (z-b)_{(o)}^q$. Доказать, что g продолжается голоморфно на $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Коэффициент c_{-1} разложения Лорана функции $g(z)R(z)$ в проколотой окрестности точки ∞ по степеням z находится с помощью равенства

$$g(z)R(z) = z^{p+q} (1-a/z)_{(o)}^p (1-b/z)_{(o)}^q R(z), \quad |z| > d = \max\{|a|, |b|\},$$

поскольку оно верно на $(d, +\infty)$.

Домашнее задание.

Задача 1. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}{x^2+1} dx$ (взять $I_0 = (-\infty, 0)$, $I_1 = (1, +\infty)$).

Задача 2. Вычислить $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{x dx}{x+2}$.

Задача 3. Вычислить (нашим способом!) значение

$$B\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) = \int_0^1 x^{2/5} (1-x)^{3/5} dx.$$

Семинар 4. Гармонические функции (ГрФ) двух переменных. Базовые свойства ГрФ.

Замечание. Напоминаем теорию (и идеи доказательств) и сразу решаем встречающиеся *упражнения*. *Задачи* остаются в качестве домашнего задания.

В следующих двух семинарах $\mathbb{C}$ отождествляется с $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ ($z = x + iy$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$, $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса $C^2(D)$ (т.е. $h = h(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в D до второго порядка включительно); если при этом

$$\Delta h \equiv h_{xx} + h_{yy} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \equiv 0 \text{ в } D,$$

то h называется *гармонической функцией (ГрФ) в D* .

Класс всех таких функций обозначается через $\mathcal{H}(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $a \in \mathbb{C}$. Говорят, что функция h является *гармонической в точке a* , если найдется $\delta > 0$ такое, что $h \in \mathcal{H}(B(a, \delta))$. Очевидно, что $h \in \mathcal{H}(D)$ если и только если для всех $a \in D$ функция h является гармонической в точке a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$. Тогда функции $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$ являются гармоническими в D .

Упражнение 1. Для функции

$$h_*(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} = \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{2z^2}\right),$$

доопределенной $h_*(0, 0) = 0$, проверить свойство $\Delta h_* = 0$ во всем $\mathbb{C}$. При этом h_* не является гармонической в точке $(0, 0)$, поскольку она разрывна в этой точке.

ТЕОРЕМА. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, $h \in \mathcal{H}(D)$. Тогда найдется $f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $\operatorname{Re} f = h$. Функция f определяется единственным образом с точностью до аддитивной чисто мнимой постоянной.

Идея доказательства. Определим функцию (сопряженный градиент функции h)

$$g(z) = 2 \frac{\partial}{\partial z} h = h_x - i \cdot h_y \in C^1(D).$$

По теореме ?? (Коши – Римана) $g \in \mathcal{A}(D)$. Первообразная этой функции (+ константа) удовлетворяет нужному свойству. Единственность очевидна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Попутно доказали, что для произвольной вещественной функции $h \in C^2(D)$ имеем $4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} h \equiv \Delta h$ в D .

СЛЕДСТВИЕ. Для любой (не обязательно односвязной) области D в $\mathbb{C}$ выполнено включение $\mathcal{H}(D) \subset C^\infty(D)$.

Упражнение 2. При каком $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $h(x, y) = 2x^3 + 3\lambda xy^2$ является гармонической в $\mathbb{R}^2$? При этом λ найти целую функцию f с условием $\operatorname{Re} f = h$.

Упражнение 3. Привести пример функции $h \in \mathcal{H}(B_1)$, ограниченной в B_1 , для которой функция $f \in \mathcal{A}(B_1)$ ($\operatorname{Re} f = h$) неограничена в B_1 .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и $h \in \mathcal{H}(D)$. Пусть

$$K_h = \{a \in D: \vec{\nabla} h(a) = \vec{0}\}$$

есть совокупность всех критических точек функции h в D . Если K_h имеет в D хоть одну предельную точку, то $h \equiv \operatorname{const}$ в D .

Действительно, K_h есть множество нулей сопряженного градиента $g(z) = 2 \frac{\partial}{\partial z} h$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $D = B(a, R)$ — открытый круг, где $a \in \mathbb{C}$, $0 < R < +\infty$, и пусть $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\bar{D})$. Тогда при любом $r \in (0, R]$ справедливо равенство:

$$h(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(a, r)} h(z) |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a + re^{it}) dt.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$ и пусть $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда для каждого $z_0 \in D$ справедливы оценки:

$$\min_{z \in \partial D} h(z) \leq h(z_0) \leq \max_{z \in \partial D} h(z).$$

Если найдется точка $z_0 \in D$ с условием $h(z_0) = \min_{z \in \partial D} h(z)$ (или $h(z_0) = \max_{z \in \partial D} h(z)$), то $h \equiv \text{const}$ в D .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, а функции h_1 и h_2 принадлежат $\mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$. Если $h_1 \equiv h_2$ на ∂D , то $h_1 \equiv h_2$ в $\overline{D}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть D и Ω — области в $\mathbb{C}$ и $k: D \rightarrow \Omega$, $k \in \mathcal{A}(D)$. Пусть $H = H(w) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Тогда $h(z) = H(k(z)) \in \mathcal{H}(D)$.

Задача Дирихле для ГрФ. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $h_0 \in C(\partial D)$ — вещественнозначная функция. Требуется найти функцию $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ такую, что $h|_{\partial D} = h_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если задача Дирихле разрешима для граничной функции $h_0 \in C(\partial D)$, то ее решение единственно.

Рассматривают также следующее обобщение ЗД. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, $D \neq \mathbb{C}$. И пусть h_0 — вещественная ограниченная функция на ∂D с конечным множеством S_0 точек разрыва. Ищется функция $h \in \mathcal{H}(D)$, непрерывная на $\overline{D} \setminus S_0$, ограниченная в D и удовлетворяющая условию $h = h_0$ на $\partial D \setminus S_0$. Это так называемая *расширенная задача Дирихле* (РЗД).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно доказать существование и единственность решения всякой РЗД в любой жордановой области в $\mathbb{C}^\bullet$.

Решение ЗД и РЗД методом конформных отображений.

Пусть Ω — другая жорданова область, k — конформный изоморфизм области D на Ω , который по теореме Каратеодори мы продолжим до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{\Omega}$. Определим $H_0(w) = h_0(k^{-1}(w)) \in C(\partial\Omega)$. Предположим, что мы умеем решать ЗД в области Ω для граничной функции H_0 . Пусть $H(w)$ — это решение. Тогда функция $h(z) = H(k(z))$ является решением исходной ЗД в D . Указанный метод применим, например, если Ω является кругом: для кругов есть метод Фурье, а также будет приведена формула Пуассона решения ЗД при любой граничной функции.

Этим методом можно решать и РЗД. Отметим, что функция $h(w) = \arg(z - x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\arg(z - x_0) \in [0, \pi]$, является ограниченной гармонической функцией в Π_+ , непрерывной на $\overline{\Pi_+} \setminus \{x_0\}$ и принимающей значения 0 на $(x_0, +\infty)$ и π на $(-\infty, x_0)$.

Упражнение 4. Решить РЗД в области $D = \{|z| < 3, \text{Im } z > 0\}$ с граничными данными $h_0|_\Gamma = -2$, $h_0|_\gamma = 4$, где $\Gamma = \{|z| = 3, \text{Im } z > 0\}$, $\gamma = (-3, 3)$. Найти линии уровня (изотермы) $\{h = 0\}$ и $\{h = 1\}$.

Указание. С помощью ДЛО $w = k(z) = (z + 3)/(-z + 3)$ переводим область D в первый квадрант Ω , где возникает РЗД с граничными данными $H_0(w) = -2$ на $(0, +\infty)$ и $H_0(w) = 4$ на $i(0, +\infty)$. Ищем решение РЗД H в Ω в виде $H(w) = A \arg(w) + B$, где $\arg(w) = \operatorname{Im}(\ln(w)) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Подбираем константы $B = -2$, $A = 12/\pi$ (из условия $A\pi/2 - 2 = 4$). Теперь $h(z) = (12/\pi) \arg((z + 3)/(-z + 3)) - 2$. Изотермы $H = 0$ и $H = 1$ — лучи (найти), затем взять их прообразы при ДЛО k (доделать!).

Домашнее задание.

Задача 1. Рассмотрим $h(z) = \ln|z| \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_b)$ (проверить!). Доказать, что не существует функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_b)$ такой, что $\operatorname{Re} f = h$.

Задача 2. Для $h \in \mathcal{H}(D)$ в односвязной области D доказать потенциальность поля $\vec{a}(x, y) = (-h_y, h_x)$ и найти его потенциал v . Тогда функция $f(z) = h(x, y) + iv(x, y)$ подходит в качестве искомой в приведенной выше теореме.

Задача 3. Доказать теорему о среднем *по площади* для ГрФ: пусть $D = B(a, R)$ — открытый круг ($a \in \mathbb{C}$, $0 < R < +\infty$), $h \in \mathcal{H}(D) \cap L^1(D)$. Тогда при любом $r \in (0, R]$ справедливо равенство:

$$h(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(a, r)} h(x, y) dx dy.$$

Указание. Воспользоваться теоремой Фубини в полярных координатах.

Задача 4. Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$, где u и v — гармонические функции в области D . Доказать, что если $|f|$ постоянна в D , то f тоже постоянна в D .

Задача 5. Решить РЗД в области $D = \{|z| < R\}$ ($R \in (0, +\infty)$) с граничными данными $h_0|_{\{|z|=R, \arg(z) \in [0, \alpha]\}} = 1$, $0 < \alpha < \pi$, $h_0 = 0$ на остальной части границы. Найти линии уровня $\{h = c\}$, $c \in (0, 1)$.

Задача 6. Решить РЗД в области $D = \{|z - 2i| < 2, |z - i| > 1\}$ с граничными данными $h_0|_{\{|z-2i|=2\}} = 5$, $h_0|_{\{|z-i|=1\}} = -1$. Найти линии уровня $\{h = 0\}$ и $\{h = 1\}$.

Указание. С помощью ДЛО отобразить D на некоторую горизонтальную полосу Ω . В возникшей новой РЗД в Ω (какой?) ищем решение H в виде $H(w) = Av + B$, где $w = u + iv$.

Задача 7. Решить РЗД в области $D = \{x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ с граничными данными

$$h_0|_{(0,1)} = 1, \quad h_0|_{(0,i)} = 2, \quad h_0|_{\partial D \cap I} = 0, \quad I = \{x > 0, y > 0\}.$$

Указание. Конформно отобразить D на верхнюю полуплоскость Ω , где возникает новая РЗД с кусочно постоянной граничной функцией H_0 на $(-\infty, +\infty) = \partial\Omega$ (найти какой!). Пусть u_1 и u_2 — точки разрыва функции H_0 . Ищем решение РЗД в Ω в виде

$$H(w) = A \arg(w - u_1) + B \arg(w - u_2) + C.$$

Константы A, B, C находим из линейных уравнений.

Семинар 5. Решение ЗД в круге. Метод Фурье. Формула Пуассона.

Метод Фурье.

Введем обозначение $B_r = B(0, r)$, $r > 0$.

ТЕОРЕМА. При фиксированных $R > 0$, $\varepsilon > 0$ пусть $h \in \mathcal{H}(B_{R+\varepsilon})$. Тогда в $\overline{B}_R$ функция h представляется в следующем виде:

$$h(re^{i\varphi}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), \quad 0 \leq r \leq R,$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \{0, 1, \dots\}; \\ B_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякая вещественная линейная комбинация гармонических функций $\operatorname{Re}((x + iy)^n) = \operatorname{Re}(z^n) = r^n \cos(n\varphi)$ и $\operatorname{Im}((x + iy)^n) = \operatorname{Im}(z^n) = r^n \sin(n\varphi)$ называется *однородным гармоническим полиномом порядка n* (по переменным x, y).

Упражнение 1. Найти размерность пространства всех гармонических полиномов (по x, y) степени не выше $N \in \mathbb{N}$.

Из предыдущей теоремы несложно вытекают следующие факты.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $f \in \mathcal{A}(B_{R+\varepsilon})$ удовлетворяет условиям $\operatorname{Re} f = h$ и $f(0) = h(0)$. Тогда при $r \in (0, R)$ справедлива оценка:

$$\|f\|_{\overline{B}_r} \leq \frac{R + 2r}{R - r} \|h\|_{\overline{B}_R}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\{h_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{H}(D)$, $h_n \rightrightarrows h$ в D при $n \rightarrow +\infty$. Тогда $h \in \mathcal{H}(D)$.

СЛЕДСТВИЕ. В круге $B_R = B(0, R)$ всякая ЗД разрешима, т. е. для любой функции $h_0 \in C(\partial B_R)$ найдется $h \in \mathcal{H}(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$ с условием $h|_{\partial B_R} = h_0$. Функция h при $z = re^{i\varphi}$ задается по формулам:

$$h(z) \stackrel{(1)}{=} \begin{cases} h_0(Re^{i\varphi}), & \text{если } r = R, \\ A_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), & \text{если } r < R, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A_n &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \{0, 1, \dots\}, \\ B_n &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h_0(Re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \in \{1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Упражнение 2. Решить ЗД в круге $B_3 = B(0, 3)$ для граничной функции $h_0(x, y) = 3x^2 - y^2$. Изобразить линии уровня решения ЗД.

Решение. Найти разложение в *конечный* ряд Фурье функции $h_0(3e^{i\varphi})$ с помощью стандартных формул тригонометрии, а не с помощью формул (2) и (3). Так, на ∂B_3 имеем

$$\begin{aligned} h_0(3 \cos(\varphi), 3 \sin(\varphi)) &= 3 \cdot 3^2 \cos^2(\varphi) - 3^2 \sin^2(\varphi) = \\ &= \frac{27}{2} (1 + \cos(2\varphi)) - \frac{9}{2} (1 - \cos(2\varphi)) = 9 + 18 \cos(2\varphi) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), \end{aligned}$$

откуда получаем, что $A_0 = 18$, $A_2 = 18/3^2 = 2$, а остальные A_n, B_n равны нулю. Следовательно,

$$h(re^{i\varphi}) = 9 + 2r^2 \cos(2\varphi) = 9 + 2r^2 (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) = 9 + 2(x^2 - y^2).$$

Линии уровня (гиперболы, пара пересекающихся прямых, пустое множество) имеют вид $\{(x, y) \in B_3 : 9 + 2(x^2 - y^2) = C\}$.

Формула Пуассона.

Подставляя (2), (3) в (1) и суммируя, получаем следующую классическую теорему.

ТЕОРЕМА. *Решение ЗД в B_R с граничной функцией $h_0 \in C(\partial B_R)$ имеет вид (при $z = re^{i\varphi}$):*

$$h(z) = \begin{cases} h_0(z), & \text{если } r = R, \\ \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{(R^2 - |z|^2)h_0(\zeta)}{|\zeta - z|^2} |d\zeta|, & \text{если } r < R. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вторую часть формулы можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{(R^2 - |z|^2)h_0(\zeta)}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h_0(Re^{i\theta})}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\theta,$$

где выражение в знаменателе получено применением теоремы косинусов в треугольнике на комплексной плоскости с вершинами 0 , $\zeta = Re^{i\theta}$ и $z = re^{i\varphi}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Из метода конформных отображений (теорем Римана и Каратеодори) и предыдущей теоремы вытекает разрешимость всякой ЗД в любой жордановой области.*

Упражнение 3. Решить ЗД в круге $B(0, 2)$ с граничной функцией $h_0(x, y) = 2/(2x + 5)$.

Решение. По формуле Пуассона при $|z| < 2$ имеем ($\zeta = \xi + i\eta \in \partial B_2$, откуда $\bar{\zeta} = 4/\zeta$, $\zeta = 2e^{i\theta}$, $d\zeta = 2ie^{i\theta}d\theta$, $|d\zeta| = 2d\theta$, $|d\zeta| = 2d\zeta/(i\zeta)$):

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi 2} \int_{\partial B_2} \frac{(2^2 - |z|^2)2/(2\xi + 5)}{|z - \zeta|^2} |d\zeta| = \\ &= \frac{4 - |z|^2}{4\pi} \int_{\partial B_2} \frac{2/((\zeta + 4/\zeta) + 5)2d\zeta}{i\zeta(\zeta - z)(4/\zeta - \bar{z})} = \\ &= \frac{4 - |z|^2}{i\pi} \int_{\partial B_2} \frac{d\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta + 4)(\zeta - z)(4/\zeta - \bar{z})} = 2(4 - |z|^2)(\operatorname{res}_{-1} f + \operatorname{res}_z f) = \\ &= \frac{2(4 - |z|^2)}{3(z + 1)(4 + \bar{z})} + \frac{2z}{(z + 1)(z + 4)} = \frac{2(16 - |z|^2)}{3|z + 4|^2}, \end{aligned}$$

где $f(\zeta) = 1/((\zeta + 1)(\zeta + 4)(\zeta - z)(4/\zeta - \bar{z}))$ и все вычисления проводились при $z \neq -1$. По непрерывности ответ справедлив при всех $z \in \bar{B}_2$.

Домашнее задание.

Задача 1. Решить ЗД в полукруге $D = \{|z| < 1 : \operatorname{Im} z > 0\}$ с граничными данными $h_0(x, y) = 3x^2y + y^3$.

Указание. Решить ЗД с той же граничной функцией во всем круге B_1 , воспользоваться формулами

$$(\cos(\varphi))^n = \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^n}{2^n}, \quad (\sin(\varphi))^n = \frac{(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^n}{(2i)^n}$$

и биномом Ньютона для разложения этих функций в ряд Фурье.

Задача 2. Пусть D — образ круга $\{|\zeta - 1| < 1\}$ при отображении $z = \zeta^2$ (∂D — кардиоиды: $\rho = 2(1 + \cos(\varphi))$). Решить ЗД в D с граничными данными $h_0(z) = |z|^2$.

Задача 3. Пусть $a \in B_2$. Решить ЗД в круге $B_2 = \{|z| < 2\}$ с граничными данными $h_0(z) = \ln|z - a|$.

Указание. Пусть $a_* = 4/\bar{a}$ симметрична a относительно ∂B_2 . Искать решение в виде $h(z) = A \ln|z - a_*| + B$ (A, B — вещественные постоянные; понять почему, найти A, B).

Задача 4. Пусть Ω — образ круга $\{|z| < 1\}$ при отображении $w = (z + 2)^2$. Решить ЗД в Ω с граничными данными $H_0(w) = 1/|w|$.

Задача 5*. Пусть D — произвольный круг в $\mathbb{C}$. Доказать, что всякая вещественная непрерывная функция h в D , удовлетворяющая для всякого замкнутого круга $\bar{B} \subset D$ теореме о среднем (по граничной окружности), является гармонической в D .

Задача 6. Доказать, что всякую вещественную непрерывную функцию на единичной окружности ∂B_1 можно с любой точностью равномерно на ∂B_1 приблизить гармоническими полиномами.

Задача 7. Доказать аналог теоремы об устранимой особенности для ГФ: если функция h гармонична в проколотой окрестности точки a и

ограничена, то существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow a} h(z)$, и при $h(a) = \lim_{z \rightarrow a} h(z)$ мы получаем, что h гармонична в окрестности точки a .

Задача 8*. Если ряд из неотрицательных гармонических в области D функций сходится хотя бы в одной точке из D , то он сходится равномерно внутри D (теорема Гарнака).

Задача 9. Доказать аналог теоремы Лиувилля для ГрФ: если функция h гармонична и ограничена на всей плоскости, то она постоянна.

Задача 10*. Доказать единственность решения РЗД в B_1 .

Семинар 6. Принцип аргумента и теорема Руше.

Задачи на теорему Руше.

Упражнение 1. Найти число нулей многочлена $p(z) = z^5 + 2z^2 + 5z + 1$ в области $D = \{1 < |z| < 2\}$.

Упражнение 2. Найти число нулей функции $f(z) = z^2 - \cos(z)$ в области $D = \{|z| < 2\}$.

Указание. В завершающей оценке следует применить неравенство $e^2 + e^{-2} < (11/4)^2 + (5/2)^{-2} < 8$.

Упражнение 3. Доказать, что уравнение $\operatorname{tg}(z) = z$ имеет только вещественные корни.

Указание. В области $D_N = \{|\operatorname{Re} z| < 2N\pi, |\operatorname{Im} z| < 2N\pi\}$, где $N \in \mathbb{N}$, применить теорему Руше к функциям $f(z) = z \cos(z)$ и $g(z) = -\sin(z)$. Найти число нулей $f + g$ на $D_N \cap \mathbb{R}$, учитывая, что в точке 0 у функции $f + g$ ноль трехкратный (это доделать дома).

Задачи на принцип аргумента. Устойчивость многочленов. Метод Михайлова.

Упражнение 4. Найти число нулей многочлена

$$p(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 5$$

в левой полуплоскости.

Указание. При больших $R > 0$ применить принцип аргумента в области $D_R = \{|z| < R, \operatorname{Re} z < 0\}$. Пусть $C_R^+ = \{Re^{it} : t \in [\pi/2, 3\pi/2]\}$, $I_R^+ = \{it : t \in [-R, R]\}$. Легко показать, что $\Delta_{C_R^+} \operatorname{Arg}(p) = 4\pi + o(1)$ при $R \rightarrow +\infty$. Значение $\Delta_{I_R^+} \operatorname{Arg}(p) = 4\pi + o(1)$ вычисляется методом (годографа) Михайлова: надо достаточно аккуратно нарисовать траекторию $p(it) = u(t) + iv(t)$, $t \in [-R, R]$. Здесь важно отметить, что $u(t) = o(v(t))$ (или наоборот) при $|t| \rightarrow +\infty$. Для многочлена p с вещественными коэффициентами его многочлен $u(t) = \operatorname{Re}(p(it))$ (соответственно $v(t) = \operatorname{Im}(p(it))$) содержит только четные (соответственно только нечетные) степени переменной t . Ответ: все 4 корня лежат в левой полуплоскости, т. е. p асимптотически устойчив. В задаче также требуется нарисовать график какой-либо непрерывной ветви м-функции $\operatorname{Arg}(p(it))$, $t \in [-R, R]$, чтобы найти $\Delta_{I_R^+} \operatorname{Arg}(p)$. Не забывать $o(1)$ (обсудить).

Упражнение 5. Начать обсуждения задач из ДЗ.

Домашнее задание.

Задача 1. Доказать, что при $t > 1$ уравнение $ze^{t-z} = 1$ имеет в круге $\{|z| \leq 1\}$ ровно один корень, причем действительный.

Задача 2. Доказать, что для всяких $a \in \mathbb{C}$ и натурального $n \geq 2$ уравнение $az^n + z + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень в круге $\{|z| \leq 2\}$.

Указание. При $|a| \geq 2^{-n}$ применить (дополнительно) теорему Виета.

Задача 3. Доказать, что всякое голоморфное отображение g замкнутого круга в себя имеет неподвижную точку.

Указание. При $\lambda > 1$ применить теорему Руше к функциям $f(z) = \lambda z$ и $g(z)$. Затем $\lambda \rightarrow 1$.

Задача 4. Вычислить $\text{Lres}_{a=0}(\exp(\text{ctg}(z)))$. Доказать, что $\text{Lres}_a f \in \mathbb{Z}$, если он определен.

Задача 5. Исследовать на асимптотическую устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения

$$y''' + py'' + qy' + 12y = 0$$

при различных значениях параметров $p > 0$ и $q > 0$.

Указание. Предыдущая задача эквивалентна исследованию на асимптотическую устойчивость соответствующего *характеристического многочлена* (проверить!).

Задача 6. Найти число нулей многочлена

$$p(z) = z^5 + z^4 + 9z^3 + 2z^2 + z + 1$$

в левой полуплоскости.

Задача 7. Доказать, что уравнение $\sin z = z$ имеет в $\mathbb{C}$ бесконечно много решений.

Семинар 7. Обратный принцип соответствия границ (ПСГ) и принцип симметрии (ПС).

Задачи на обратный ПСГ.

Упражнение 1. Найти максимальное $R > 0$, при котором функция $f(z) = ze^{-z}$ однолистка в круге $B_R = \{|z| < R\}$. Изобразить $f(B_R)$.

Задачи на ПС.

Упражнение 2. Стереть разрезы $(-i, -i + 2]$, $(i, i + 2]$ и $[2, +\infty)$ из области $G = \{x + iy: x > 0, |y| < 2\}$.

Упражнение 3. Кратко обсудить ДЗ. Сформулировать теорему Каратеодори и обсудить ДЗ. 6.

Домашнее задание.

Задача 1. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найти максимальный круг однолистности B_R для функции $f(z) = ze^{z^n}$. Изобразить $f(B_R)$.

Задача 2. Останется ли верным обратный принцип соответствия границ, если соответствующие области — жордановы в $\mathbb{C}^\bullet$, а функция — непрерывна в топологии $\mathbb{C}^\bullet$?

Задача 3. Доказать, что функция $f(z) = z/\ln z$ однолистка в полуокруге $\{|z| < 1/e, \text{Re } z > 0\}$.

Задача 4. Стереть разрезы $[-1, 2)$ и $[-i, i]$ из области $G = \{|z| < 2\}$.

Задача 5. Конформно отобразить внешность в $\mathbb{C}$ множества

$$X = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

на единичный круг.

Задача 6. Доказать, что всякий конформный изоморфизм прямоугольника на прямоугольник, переводящий все четыре вершины в вершины, линейен.

Задача 7. Конформно отобразить внешность в $\mathbb{C}^\bullet$ множества

$$X = [-1, 1] \cup [-i, i] \cup [-1 - i, 1 + i] \cup [-1 + i, 1 - i]$$

на единичный круг с дополнительным условием $\infty \mapsto 0$.

Задача 8. Обсудить задачи из КР 1 (см. ниже) и их возможные вариации.

Семинар 8. Контрольная работа 1.

Примерный вариант КР 1.

Задача 1. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) dx}{(x+3)^2}$.

Задача 2. Пусть Ω — образ круга $\{|z-1| < 1\}$ при отображении $w = z^2$ ($\partial\Omega$ — кардиоиды). Решить ЗД в Ω с граничными данными $H_0(w) = |w|^2$.

Задача 3. Сколько не вещественных корней имеет уравнение $\operatorname{tg}(z) = z/2$?

Задача 4. Доказать, что всякий конформный изоморфизм прямоугольника на прямоугольник, переводящий все четыре вершины в вершины, линейен.

Семинар 9. Теоремы Римана и Каратеодори. Специальные области.

Задачи на теоремы Римана и Каратеодори.

Упражнение 1. Пусть D, Ω — жордановы области в $\mathbb{C}$, $a \in D$, $b \in \Omega$, $c \in \partial D$, $d \in \partial\Omega$. Тогда существует единственный конформный изоморфизм $f: D \xrightarrow{\text{на}} \Omega$, такой, что $f(a) = b$, $f(c) = d$.

Указание. Отобразить обе области конформно на B_1 ($a \mapsto 0$, $b \mapsto 0$) и повернуть B_1 .

Упражнение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство всех однолистных функций из области $D = \{z = x + iy : x > 0, y > 0\}$ в круг $B = \{z : |z| < 1\}$ с условием $f(1+i) = 0$. Найти $\sup_{f \in \mathfrak{F}} |f'(1+i)|$.

Упражнение 3. Найти все кольца с центром в 0, конформно эквивалентные кольцу $\{r < |z| < R\}$, где $0 < r < R < +\infty$.

Специальные области.

Упражнение 4. Пусть $R > 1$, $a = (R + 1/R)/2$, $b = (R - 1/R)/2$ и кривая $\Gamma_R = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ отображается на кривую C_R при отображении $w = 1/z$. Доказать, что область Ω , ограниченная кривой C_R , является неванлинновской. Найти функцию Шварца и ее полюса.

Указание. Найти конформное отображение B_1 на Ω . Использовать функции $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_o^{-1}$.

Домашнее задание.

Задача 1. * Адаптировать доказательство теоремы Каратеодори на случай конформного изоморфизма двух (концентрических) колец.

Задача 2. Пусть D, Ω — жордановы области в $\mathbb{C}$, $c_1, c_2, c_3 \in \partial D$, $d_1, d_2, d_3 \in \partial\Omega$, причем эти тройки точек расположены на соответствующих границах «против часовой стрелки». Тогда существует единственный конформный изоморфизм $f: D \xrightarrow{\text{на}} \Omega$, с условиями $f(c_j) = d_j$, $j = 1, 2, 3$.

Задача 3. Найти группу всех конформных автоморфизмов кольца $\{ \frac{1}{2} < |z| < 2 \}$ и ее групповую операцию.

Задача 4. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ ($D \neq \mathbb{C}$) — односвязная область, $a \in D$. Если f голоморфна в D , $f(D) \subset D$, $f(a) = a$, $f'(a) = 1$, то $f(z) \equiv z$ — тождественное отображение. Аналогичное утверждение неверно при $D = \mathbb{C}$.

Задача 5. Проверить утверждение теоремы о специальных областях для функции $f(z) = z + (9/2)/(z^2 - 4)$. Какие полюса имеет функция Шварца области $\Omega = f(B_1)$ (в этой области)? Каков максимальный круг однолистности B_r для f ?

Задача 6. С помощью теоремы Римана доказать, что функция Шварца специальной области определена единственным образом.

Семинар 10. Малые теоремы Пикара. Гомотопии.

Малая теорема Пикара для целых функций.

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ — целая функция, не являющаяся тождественной константой. Тогда f принимает на $\mathbb{C}$ все значения из $\mathbb{C}$, кроме, быть может, одного. Если таковое существует — оно называется исключительным пикаровским значением (ИПЗ) для f .

Так, всякий многочлен натуральной степени не имеет ИПЗ. У функции e^z есть ИПЗ — точка 0.

Упражнение 1. Имеет ли функция $f(z) = z^2 - e^z$ ИПЗ?

Указание. Если f — целая функция и $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, то $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. У таких функций могут быть только вещественные ИПЗ. Найти $f(\mathbb{R})$.

Малая теорема Пикара для мероморфных функций.

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, т. е. f мероморфна в $\mathbb{C}$, причем f не является тождественной константой. Тогда f принимает на $\mathbb{C}$ все значения из $\mathbb{C}^\bullet$, кроме, быть может, двух (называемых ИПЗ для f).

Так, функция $\operatorname{tg}(z)$ имеет два ИПЗ: $+i$ и $-i$ (проверить!).

Упражнение 2. Доказать, что $f(z) = z + \operatorname{tg}(z)$ не имеет ИПЗ.

Указание. Здесь тоже $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Использовать нечетность f . Найти $f(\mathbb{R})$ и $f(i\mathbb{R})$.

Решение функциональных уравнений.

Упражнение 3. Найти все пары целых функций f и g с условием $e^{f(z)} + e^{g(z)} \equiv 1$.

Гомотопии кривых.

Упражнение 4. Если $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — гомотопия (1) или (2) типа, и $a \notin \Gamma([0, 1]^2)$, то $\text{ind}_{\gamma_s}(a)$ не зависит от s , $s \in [0, 1]$.

Упражнение 5. Пусть $D = \{r < |z| < R\}$, где $0 \leq r < 1 < R \leq +\infty$; и пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ — замкнутый путь, $n = \text{ind}_\gamma(0) = (2\pi)^{-1} \Delta_\gamma \text{Arg}(z)$. Если $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}|_{[0, 1]}$ — путь, равномерно проходящий n раз ∂B_1 , то $\gamma \stackrel{D}{\sim} \gamma_n$. При этом разные γ_n не (2)-гомотопны в D .

Домашнее задание.

Задача 1. Имеет ли функция $f(z) = z^{22} - \cos(z)$ ИПЗ?

Указание. Рассмотреть множества $f(\mathbb{R})$ и $f(i\mathbb{R})$.

Задача 2. Доказать, что функция $f(z) = ze^z$ не имеет ИПЗ.

Указание. Пусть, от противного, w_0 — ИПЗ для f ($w_0 \neq 0$). Тогда найдется целая функция g с условием $e^{g(z)} = f(z) - w_0$. При этом $e^{g(z)} = -w_0$ если и только если $z = 0$. Воспользоваться периодичностью экспоненты.

Задача 3. * Существует ли целая функция f с условиями $f(f(z)) = e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$?

Задача 4. Имеет ли ИПЗ функция $f(z) = z^{21} - \text{tg}(z^3)$?

Задача 5. Пусть $n \in \{3, 4, \dots\}$ фиксировано. Найти все пары целых функций f и g с условием $(f(z))^n + (g(z))^n \equiv 1$.

Указание. Использовать малую теорему Пикара для мероморфных функций.

Задача 6. Доказать, что если пути $\gamma_{0,1}: [0, 1] \rightarrow D$ (1)-гомотопны в области D , то путь $\gamma_0 \cup \gamma_1^-$ (перенесенный на $[0, 1]$) (1)-гомотопен в D точечному пути $\gamma_0(0)$ (и, значит, (2)-гомотопен нулю в D).

Задача 7. Пусть f — гомеоморфизм $\bar{B}_1$ на компакт K . Тогда $f|_{B_1}$ — гомеоморфизм B_1 на K° , а $f|_{\partial B_1}$ — гомеоморфизм ∂B_1 на ∂K .

Семинар 11. Аналитическое продолжение (АП) по Вейерштрассу. АП вдоль пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(G)$. Пара $\mathcal{A} = (G, g)$ называется *аналитическим элементом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два аналитических элемента $\mathcal{G}_1 = (G_1, g_1)$ и $\mathcal{G}_2 = (G_2, g_2)$ называются *непосредственными аналитическими продолжениями* друг друга, если существует открытый круг B с условиями $B \subset G_1 \cap G_2$ и $g_1 \equiv g_2$ в B . В частности, $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Краткое обозначение для указанного условия: $\mathcal{G}_1 \leftrightarrow \mathcal{G}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $B = B(a, R_a)$ — открытый круг, $f \in \mathcal{A}(B)$, причем B является кругом сходимости ряда Тейлора функции f с центром a . Элемент $\mathcal{F} = \mathcal{F}_a = (B, f)$ называется *каноническим аналитическим элементом* (с функцией f , центром a , радиусом R_a). Для краткости такой элемент будет также обозначаться через $\mathfrak{A}_a^f$.

В дальнейшем рассматриваются только канонические аналитические элементы, если не оговорено противного.

Упражнение 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \ln z$ в $\mathbb{C}_-$. Тогда для каждой точки $a \in \mathbb{C}_-$ определен элемент $\mathfrak{F}_a^f$.

1) Выписать все $\mathfrak{F}_a^f$. В лекционных обозначениях

$$\mathfrak{F}_a^f \equiv \mathcal{L}_a = (B(a, |a|), l_a(z)), \quad l_a(z) = \frac{\ln z}{(\arg(a) - \pi, \arg(a) + \pi)}.$$

2) Для каких a, b верно, что $\mathfrak{F}_a^f \leftrightarrow \mathfrak{F}_b^f$?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ — канонический элемент с центром $a \in \mathbb{C}$, и пусть $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ — путь с $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ (последние два свойства будем кратко обозначать, используя символ γ_{ab} вместо γ). Говорят, что элемент $\mathcal{F}_a$ *допускает аналитическое продолжение (АП) вдоль пути* $\gamma = \gamma_{ab}$, если существует семейство $\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ элементов, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\mathcal{F}_\gamma^\alpha = \mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_\gamma^t$ имеет центр $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$;

2) для любого $t_0 \in [\alpha, \beta]$ найдется окрестность $O(t_0)$ точки t_0 в $[\alpha, \beta]$, такая, что при всех $t \in O(t_0)$ имеем $\mathcal{F}_\gamma^t \leftrightarrow \mathcal{F}_\gamma^{t_0}$.

Элемент $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_\gamma^\beta$ называется *результатом продолжения* элемента $\mathcal{F}_a$ *вдоль* γ . Совокупность элементов $\{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ называется *семейством, осуществляющим это продолжение*.

ПРИМЕР. Пусть $f(z) = \ln z$ в $\mathbb{C}_-$, $a \in \mathbb{C}_-$, $\mathcal{L}_a = \mathfrak{F}_a^f$. Пусть также $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_b = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — путь, $\gamma(\alpha) = a$. Определим семейство $\{\mathcal{L}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$, осуществляющее АП $\mathcal{L}_a$ вдоль γ .

Мы знаем, что существует (причем единственная) непрерывная ветвь $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ (на всем $[\alpha, \beta]$) многозначной функции $\text{Arg}(\gamma(t))$, определяемая условием $\varphi(\alpha) = \arg(a)$. Тогда при $t \in [\alpha, \beta]$ положим $\mathcal{L}_\gamma^t = (B_\gamma^t, l_\gamma^t(z))$, где

$$B_\gamma^t = B(\gamma(t), |\gamma(t)|), \quad l_\gamma^t(z) = \frac{\ln z}{(\varphi(t) - \pi, \varphi(t) + \pi)} = \ln |z| + i \frac{\arg z}{(\varphi(t) - \pi, \varphi(t) + \pi)}.$$

Упражнение 2. Доказать, что семейство $\mathbb{L}_\gamma$, определенное в примере выше, действительно осуществляет АП $\mathcal{L}_a$ вдоль γ , т.е. найти какую-либо окрестность $O(t_0)$ из определения. Что будет с элементом $\mathcal{L}_a$ после одного обхода вокруг точки 0, т.е. при $\gamma = \gamma_{aa}$, когда $\text{ind}_\gamma(0) = 1$?

Указание. Так как при любом $t \in [\alpha, \beta]$ в круге B_γ^t выполнено равенство $(l_\gamma^t(z))' = 1/z$, то для всяких $t, t' \in [\alpha, \beta]$ имеем

$$l_\gamma^t(z) = l_\gamma^{t'}(z) + 2\pi i k(t, t'), \quad z \in B_\gamma^t \cap B_\gamma^{t'},$$

где $k(t, t') \in \mathbb{Z}$. Остается показать, что $k(t, t') = 0$ для близких t, t' .

Упражнение 3. Зафиксируем $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{C}_-$. Рассмотрим функцию $z_{(o)}^p = e^{p \ln(z)}$ на $\mathbb{C}_-$. Тогда возникает элемент $\mathcal{P}_a^p = \mathfrak{F}_a^{z_{(o)}^p}$. Пусть

$\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_b$ — путь, $\gamma(\alpha) = a$. Выписать семейство $\{\mathcal{P}_\gamma^{pt}\}_{[\alpha, \beta]}$, осуществляющее АП $\mathcal{P}_a^p$ вдоль пути γ . Найти максимальную $O(t_0)$. Рассмотреть отдельно случай $p = 1/3$. Что будет с исходным элементом после n_γ «обходов» вокруг точки 0, т. е. при $\gamma = \gamma_{aa}$, когда $\text{ind}_\gamma(0) = n_\gamma$?

Упражнение 4. Доказать, что $\mathcal{L}_a$ и $\mathcal{P}_a^p$ не продолжаютя вдоль пути γ_{ab} , который проходит через точку 0.

Эти два примера мы будем использовать в качестве табличных, в том числе при сдвиге.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В условиях и обозначениях определения выше либо при всех $t \in [\alpha, \beta]$ имеем $R_\gamma^t = +\infty$ (следовательно, все f_γ^t — равные целые функции), либо справедливы следующие утверждения:

(1) при всех $t \in [\alpha, \beta]$ выполняется условие $R_\gamma^t < +\infty$ и при всех $t \in O(t_0)$ имеем $|R_\gamma^t - R_\gamma^{t_0}| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)|$ (в частности, $R_\gamma(t) = R_\gamma^t$ — непрерывная строго положительная на $[\alpha, \beta]$ функция, и существует $\min_{t \in [\alpha, \beta]} R_\gamma(t) = R_\gamma > 0$);

(2) пусть $\tilde{O}(t_0)$ — связная окрестность точки t_0 на $[\alpha, \beta]$, для которой верно условие: при всех $t \in \tilde{O}(t_0)$ имеем $\gamma(t_0) \in B(\gamma(t), R_\gamma^t)$; тогда $\tilde{O}(t_0)$ может быть взята в качестве $O(t_0)$;

ПРИМЕР. Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}$. При $z_0 = 0$ все нижние индексы z_0 в этих обозначениях опускаются.

Пусть $\mathbb{C}_{z_0b} = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Для $a \in \mathbb{C}_{z_0b}$ определим исходный элемент:

$$\mathcal{L}_{z_0a} = \mathcal{E}_a^{l_{z_0a}} = \left(B(a, |a - z_0|), l_{z_0a}(z) \right), \quad l_{z_0a}(z) = \frac{\ln(z - z_0)}{(\arg(a - z_0) - \pi, \arg(a - z_0) + \pi)}.$$

Для произвольного пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$, $\gamma(\alpha) = a$, пусть $\varphi(t)$ — непрерывная ветвь м-функции $\text{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ на $[\alpha, \beta]$, для которой $\varphi(\alpha) = \arg(a - z_0) \in (-\pi, \pi]$. Определим функции

$$l_{z_0\gamma}^t(z) = \frac{\ln(z - z_0)}{(\varphi(t) - \pi, \varphi(t) + \pi)}.$$

При этом $(l_{z_0\gamma}^t(z))' = 1/(z - z_0)$. Элемент $\mathcal{L}_{z_0a}$ продолжается вдоль пути γ . Семейство, осуществляющее это продолжение, имеет вид:

$$\mathbb{L}_{z_0\gamma} = \left\{ \mathcal{L}_{z_0\gamma}^t = \left(B(\gamma(t), |\gamma(t) - z_0|), l_{z_0\gamma}^t(z) \right) \right\}_{t \in [\alpha, \beta]}.$$

Ясно, что $R_\gamma = \min_{t \in [\alpha, \beta]} |\gamma(t) - z_0|$. Из элемента $\mathcal{L}_{z_0a}$ можно с помощью АП получить все элементы $\mathcal{L}_{z_0b}$, $b \neq z_0$. Если же путь γ проходит через точку z_0 , то продолжения вдоль этого пути элемента $\mathcal{L}_{z_0a}$ не существует (доказать).

Получаем, что для каждой точки $b \neq z_0$ множество всех различных элементов с центром b в рассматриваемой ПАФ имеет вид

$$\mathcal{L}_{z_0b}^k = \mathcal{L}_{z_0b} + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом, если $\gamma = \gamma_{bb}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$ — путь, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$, и $n_{z_0\gamma} = \text{ind}_\gamma(z_0)$, то результатом продолжения элемента $\mathcal{L}_{z_0b}^k$ вдоль пути γ является элемент $\mathcal{L}_{z_0b}^k + 2\pi i n_{z_0\gamma}$. Прибавление константы к элементу означает, что константа прибавляется к функции указанного элемента, а радиус элемента не меняется.

Указанная ПАФ обозначается $\text{Ln}(z - z_0)$. Ясно, что здесь $D_\Phi = \mathbb{C}_{z_0b}$.

ПРИМЕР. Здесь $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ фиксировано и $z_0 \in \mathbb{C}$. Используются обозначения из предыдущего примера. При $a \in \mathbb{C}_{z_0b}$ определим исходный элемент

$$\mathcal{P}_{z_0a}^p = \left(B(a, |a - z_0|), (z - z_0)_a^p \right), \quad \rho_{z_0a}^p(z) := (z - z_0)_a^p = \exp(pl_{z_0a}(z)),$$

который аналитически продолжается вдоль любого пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$, $\gamma(\alpha) = a$. Семейство, осуществляющее это продолжение имеет вид:

$$\mathbb{P}_{z_0\gamma}^p = \left\{ \mathcal{P}_{z_0\gamma}^{pt} = \left(B(\gamma(t), |\gamma(t) - z_0|), \rho_{z_0\gamma}^{pt} \right) \right\}, \quad \rho_{z_0\gamma}^{pt}(z) = \exp(pl_{z_0\gamma}^t(z)),$$

где функция $l_{z_0\gamma}^t(z)$ определена в предыдущем примере. Поскольку экспонента — целая функция, окрестности $O(t_0)$ из определения АП для семейства $\mathbb{P}_{z_0\gamma}^p$ можно брать такие же, как для $\mathbb{L}_{z_0\gamma}$. Аналогично предыдущему примеру, из элемента $\mathcal{P}_{z_0a}^p$ можно с помощью АП получить все элементы $\mathcal{P}_{z_0b}^p$, $b \neq z_0$.

Пусть есть элемент $\mathcal{P}_{z_0b}^p$ и путь $\gamma = \gamma_{bb}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_{z_0b}$, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$, $n_{z_0\gamma} = \text{ind}_\gamma(z_0)$. Тогда результатом продолжения элемента $\mathcal{P}_{z_0b}^p$ вдоль γ является элемент $\mathcal{P}_{z_0b}^p e^{p2\pi i n_{z_0\gamma}}$, т.е. функция элемента $\mathcal{P}_{z_0b}^p$ умножается на постоянную $e^{p2\pi i n_{z_0\gamma}}$, а круг не меняется. При $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ число разных элементов нашей ПАФ над каждой точкой $b \neq 0$ будет конечным, а при $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ — бесконечным (счетным). Указанная ПАФ обозначается через $(z - z_0)^p$. Здесь $D_\Phi = \mathbb{C}_{z_0b}$.

Рассмотрим подробнее случай $p = 1/n$, $n \geq 2$ натурально. Представим $n_{z_0\gamma} = kn + q$, $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \{0, \dots, n-1\}$. Тогда

$$e^{(1/n)2\pi i n_{z_0\gamma}} = (e^{2\pi i})^k e^{(q/n)2\pi i} = e^{2\pi i q/n} \in \sqrt[n]{1}.$$

Следовательно, над каждой точкой $b \neq z_0$ имеется ровно n различных элементов из ПАФ $(z - z_0)^{1/n}$ (она же $\sqrt[n]{z - z_0}$), соответствующих различным значениям q (все они отличаются множителями $e^{2\pi i q/n}$, где $q \in \{0, \dots, n-1\}$).

Упражнение 5. Пусть $\mathcal{F}_0 = \mathcal{Z}_0^{\text{arctg}(z)}$. Вдоль каких путей $\gamma = \gamma_{0b}$ элемент $\mathcal{F}_0$ допускает АП? Вдоль каких нет? Для любого пути γ первого типа выписать семейство, осуществляющее нужное АП. Что происходит с элементом $\mathcal{F}_0$ при однократном обходе точки i (соотв. $-i$)?

Указание. Доказать, что $\mathfrak{D}_0^{\arctg(z)} = (B_1, \arctg(z))$ и что $\arctg(z) = (i/2) \ln(z+i) - (i/2) \ln(z-i) + \pi/2$ в B_1 . Следовательно, семейство, осуществляющее нужное АП элемента $\mathcal{F}_0$ вдоль γ , имеет вид:

$$\mathbb{F}_\gamma = \{\mathcal{F}_\gamma^t\}_{t \in [\alpha, \beta]}, \quad \mathcal{F}_\gamma^t = (B(\gamma(t), R^t), f^t),$$

$$R^t = \min\{|\gamma(t) + i|, |\gamma(t) - i|\}, \quad f^t(z) = \frac{i}{2} l_{-i\gamma}^t(z) + \frac{-i}{2} l_{i\gamma}^t(z) + \pi/2$$

(см. определение $l_{z_0\gamma}^t(z)$ в табличном примере).

Упражнение 6. Пусть $\mathcal{F}_1 = \mathfrak{D}_1^{1/(1+\sqrt{z_{(o)}})}$. Вдоль каких путей $\gamma = \gamma_{1b}$ элемент $\mathcal{F}_1$ допускает АП? Вдоль каких нет? Для любого пути γ первого типа выписать семейство, осуществляющее нужное АП.

Указание. $1/(1+\sqrt{z_{(o)}}) = (1-\sqrt{z_{(o)}})/(1-z)$.

Домашнее задание.

Для указанных канонических элементов $\mathcal{F}_a = (B(a, R_a), f_a)$ найти радиус R_a , указать все пути $\gamma = \gamma_{ab}$, вдоль которых элемент $\mathcal{F}_a$ допускает (соответственно не допускает) АП. Для любого пути γ первого типа выписать семейство, осуществляющее нужное АП:

$$(1) \mathcal{F}_1 = \mathfrak{D}_1^{\sqrt{z_{(o)}} + \sqrt[3]{z_{(o)}}}; (2) \mathcal{F}_1 = \mathfrak{D}_1^{\cos(\sqrt{z_{(o)}})}; (3) \mathcal{F}_0 = \mathfrak{D}_0^{\arctg(z^2)};$$

$$(4) \mathcal{F}_0 = \mathfrak{D}_0^{\mathcal{K}_+^{-1}}; (5) \mathcal{F}_1 = \mathfrak{D}_1^{\sqrt{z_{(o)}}/(1+\sqrt[3]{z_{(o)}})}; (6) \mathcal{F}_1 = \mathfrak{D}_1(\ln(\sqrt{z_{(o)}})\mathcal{K}(z)).$$

Задача 7. Разобрать понятия ПАФ, АП п/о элемента и классификацию ИОТ аналитических ветвей ПАФ.

Семинар 12. Описание ПАФ по Вейерштрассу. Табличные ПАФ и теорема о продолжении п/о элемента.

Упражнение 1. Доказать, что для всякой $\Gamma(2)$ -односвязной области D в $\mathbb{C}$ справедлив аналог теоремы о монодромии.

Указание. Доказать, что тогда всякий замкнутый путь $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow D$ (1)-гомотопен в D точечному пути $\gamma_0(0)$.

Упражнения 2-3. С помощью теоремы о продолжении п/о элемента провести полные исследования следующих ПАФ с исходным элементом $\mathfrak{D}_a^f$, где

$$(1) a = 0 \text{ и } f(z) = \arctg(z^2);$$

$$(2) a = 1 \text{ и } f(z) = \ln(\sqrt{z_{(o)}}\mathcal{K}(z));$$

в примере (2):

— над точкой 0 — одно логарифмическое ветвление (прибавляется коэффициент $-\pi i$ при +1 обходе вокруг 0 в $B'(0, 1)$ у любого элемента с центром в $B'(0, 1)$);

— над точками $\pm i$ — по два логарифмических ветвления (прибавляется $+2\pi i$ при +1 обходе вокруг i (соотв. $-i$) в $B'(i, 1)$ (соотв. в $B'(-i, 1)$) у любого элемента с центром в $B'(i, 1)$ (соотв. в $B'(-i, 1)$));

— над точкой ∞ — три логарифмических ветвления (прибавляется $-3\pi i$ при +1 обходе вокруг ∞ в $V = \{1 < |z| < +\infty\}$ у любого элемента с центром в V).

Упражнение 4. Обсудить ДЗ. (4).

Домашнее задание.

Провести полные исследования следующих ПАФ с исходным элементом $\mathfrak{A}_a^f$, где

- (1) $a = -1$ и $f(z) = \arctg(i + z^2)$;
- (2) $a = 1$ и $f(z) = \ln(\sqrt[3]{z}_{(o)}/(z^2 + 1))$;
- (3) $a = 0$ и $f(z) = \arctg(e^z)$;
- (4) $a = 1$ и $f(z) = \ln(z^2 \operatorname{tg}(z))$;
- (5) $a = 1$ и $f(z) = \ln(z_{(o)}^i \operatorname{tg}(z))$;
- (6) $a = 2$ и $f(z) = 1/\ln z$;
- (7) $a = 1$ и $f(z) = \sqrt{z}_{(o)}/(1 + \sqrt[3]{z}_{(o)})$.

Задачи (2), (3), (4), (5) — обязательные.

Семинар 13. АП сложного элемента. ПАФ $\cos(\pi/(2 + \sqrt[3]{z}))$ и $\sqrt{2 + \sqrt[3]{z}}$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{F}_a = (B_a, f_a)$ — канонический элемент с центром a , который продолжается вдоль пути $\gamma = \gamma_{ab}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, и пусть

$$\{\mathcal{F}^t = (B^t, f^t) = (B(\gamma(t), R^t), f^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$$

— семейство, осуществляющее указанное продолжение. Определим

$$\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Пусть элемент $\mathcal{G}_A = (B_A, g_A)$ с центром $A = \Gamma(\alpha)$ аналитически продолжается вдоль пути Γ , и

$$\{\mathcal{G}^t = (\tilde{B}^t, g^t) = (B(\Gamma(t), \tilde{R}^t), g^t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$$

— семейство, осуществляющее это продолжение.

Тогда элемент $\mathcal{H}_a = \mathfrak{A}_a^{g_A \circ f_a}$ продолжается вдоль пути γ , причем семейство, осуществляющее это продолжение имеет вид

$$\{\mathcal{H}^t = \mathfrak{A}_{\gamma(t)}^{g^t \circ f^t}\}_{t \in [\alpha, \beta]}.$$

Упражнение 1. ПАФ $\Phi = \cos(\pi/(2 + \sqrt[3]{z}))$.

Положим $h(z) = \cos(\pi/(2 + \sqrt[3]{z}_{(o)}))$, $h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_-)$, где $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Требуется охарактеризовать ПАФ Φ , определяемую элементом $\mathcal{H}_1 = \mathfrak{A}_1^h$ (и, следовательно, любым элементом $\mathfrak{A}_b^h$, $b \in \mathbb{C}_-$).

1. Пусть $\gamma: [0, \beta] \rightarrow \mathbb{C}_b$ — путь, $\gamma(0) = 1$. Семейство, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{F}_1 = \mathfrak{A}_1^{\sqrt[3]{z}_{(o)}}$ вдоль γ имеет вид $\{\mathcal{F}^t = (B(\gamma(t), |\gamma(t)|), f^t)\}_{t \in [0, \beta]}$, где

$$f^t(z) = \sqrt[3]{|z|} \exp\left(\frac{i}{3} \begin{pmatrix} \arg(z) \\ (\varphi(t) - \pi/2, \varphi(t) + \pi/2) \end{pmatrix}\right),$$

где $\varphi(t)|_{[0,\beta]}$ — непрерывная ветвь $\text{Arg}(\gamma(t))$ на $[0, \beta]$ с условием $\varphi(0) = 0$, т. е. $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}$, $t \in [0, \beta]$. Пусть $\Gamma(t) = f^t(\gamma(t)) = \sqrt[3]{|\gamma(t)|}e^{i\varphi(t)/3}$, $t \in [0, \beta]$.

2. Элемент $\mathcal{G}_1 = \mathfrak{D}_1^{\cos(\pi/(2+w))}$ продолжается вдоль Γ , если и только если Γ не проходит через точку -2 , т. е. если $\sqrt[3]{|\gamma(t)|} \neq 2$ при $e^{i\varphi(t)/3} = -1$ (т. е. $\gamma(t) \neq -8$ при $\varphi(t) = 3\pi + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Пусть

$$\{\mathcal{G}^t = (B(\Gamma(t), |\Gamma(t) + 2|), g^t)\}_{t \in [0, \beta]}$$

есть семейство, осуществляющее продолжение элемента $\mathcal{G}_1$ вдоль указанного пути Γ , где

$$g^t(w) = \mathfrak{D}_{\Gamma(t)}^{\cos(\pi/(2+w))}.$$

По теореме об АП сложного элемента, исходный элемент $\mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}_1^h$ продолжается вдоль *указанных* γ , и соответствующее продолжающее семейство имеет вид

$$\{\mathcal{H}^t = \mathfrak{D}_{\gamma(t)}^{g^t \circ f^t}\}_{t \in [0, \beta]}.$$

Пусть Φ — полученная ПАФ, $D_\Phi = \mathbb{C}_*$. Введем еще $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{0, -8\}$. Поскольку исходный элемент $\mathcal{H}_1$ продолжается по всем путям в D_1 , ветвь $\Phi_1 = \Phi|_{D_1}$ является аналитической над D_1 и, следовательно, ПАФ Φ имеет только *три особые точки*: 0 , -8 и ∞ . Над областью $\mathbb{C}_-$ ветвь Φ_1 распадается на 3 голоморфных ветви (указать какие, например, h). Над областью $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [0, +\infty), z \neq -8\}$ ветвь Φ_1 также распадается на 3 голоморфных ветви (указать какие, например, h_{-8} ниже), две из которых голоморфны также и в точке -8 , а одна имеет в этой точке существенную особенность. Над каждой точкой $b \in D_1$ имеется 3 элемента ПАФ Φ (с какими радиусами?).

Над точками 0 и ∞ — по одному ветвлению третьего порядка. Над точкой -8 — две (однозначные) голоморфные ветви и однозначная голоморфная ветвь с существенной особенностью, задаваемая голоморфной ветвью

$$h_{-8}(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2 + \sqrt[3]{z}_{(2\pi, 4\pi)}}\right)$$

в области $\{0 < |z + 8| < 8\}$.

Упражнение 2. ПАФ $\Phi = \sqrt{2 + \sqrt[3]{z}}$.

Пусть $h(z) = \sqrt{2 + \sqrt[3]{z}_{(o)}}$. Требуется охарактеризовать ПАФ Φ , определяемую элементом $\mathfrak{D}_1^h$.

Указание. Основные этапы можно проводить по аналогии с примером ПАФ $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$ из лекций.

Домашнее задание.

Задачи 1-2. Провести полные исследования следующих ПАФ с исходным элементом $\mathfrak{D}_a^f$, где

$$(1) a = 1, f(z) = \sqrt{z + \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)};$$

Указание. Поскольку $f(z) = \sqrt{z}_{(o)} \sqrt{1 + \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}$ в окрестности точки a , основные этапы можно проводить по аналогии с примером ПАФ $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$ из лекций.

$$(2) a = 1, f(z) = \ln(1 + \sqrt{z}_{(o)}).$$

Задача 3. Пусть $h(z) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)} + \sqrt{1 + \sqrt{z}_{(o)}}_{(o)}$. Доказать, что ПАФ, определяемая элементом $\mathfrak{A}_{1/4}^h$, над проколотой окрестностью точки 1 имеет ветвление 2-го и ветвление 3-го порядка (указать: как указанные ветви получаются из элемента $\mathfrak{A}_{1/4}^h$).

Семинар 14. Алгебраические ПАФ. Римановы поверхности.

Алгебраические ПАФ. Теорема Абеля о радикалах.

Упражнение 1. Найти группу Галуа ПАФ $\sqrt[3]{\frac{-1}{1+\sqrt{z}}}$. Проверить ее разрешимость. Указать представляющий многочлен $P(w, z)$.

Упражнение 2. ПАФ $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$ была охарактеризована в примере 1.12.3 (напомнить). Проверить, что эта ПАФ алгебраическая, найти соответствующий представляющий многочлен $P(w, z)$, доказать его неприводимость, найти множество сингулярности. Доказать некоммутативность группы Галуа. * Найти группу Галуа этой ПАФ. Проверить ее разрешимость.

Римановы поверхности.

Упражнение 3. Доказать, что $\mathbb{C}^\bullet$ с двумя картами $h_1(z) = z$ на $\mathbb{C}$ и $h_2(z) = 1/z$ на $\mathbb{C}^\bullet \setminus \{0\}$ ($h_2(\infty) = 0$) является компактной РП.

Упражнение 4. Доказать, что на всякой компактной РП всякая голоморфная (или гармоническая) функция постоянна.

Упражнение 5. Привести пример компактной РП, диффеоморфной тору.

Домашнее задание.

Задача 1. Найти группу Галуа ПАФ $\mathcal{J}^{-1}(z)$. Проверить ее разрешимость. Указать представляющий многочлен $P(w, z)$.

Задача 2. Доказать, что РП ПАФ $\sqrt[3]{z}$ диффеоморфна $\mathbb{C}_b$.

Задача 3. Сформулировать и доказать (внутреннюю) теорему единственности для голоморфных функций на любой некомпактной РП.

Задача 4. Сформулировать и доказать (внутреннюю) теорему единственности для гармонических функций на любой некомпактной РП.

Семинар 15. Контрольная работа 2.

Примерный вариант КР 2.

Задача 1. Доказать единственность функции Шварца допустимой области.

Задача 2. Имеет ли ИПЗ целая функция $z^2 e^{\sin(z)}$?

Задача 3. Провести полное исследование ПАФ, задаваемой элементом $\mathfrak{A}_a^f$, где $a = 1$ и $f(z) = \operatorname{arctg}(-i + z^2)$.

Задача 4. Сформулировать и доказать (внутреннюю) теорему единственности для гармонических функций на любой некомпактной РП.