Глава 1

Лекции и семинары, 1 семестр

§ 1.1. Арифметика и топология поля $\mathbb{C}$. Предел и непрерывность. Экспонента и логарифм

1.1.1. Алгебраическая форма комплексных чисел.

1.1.1. Определение. *Полем комплексных чисел* называется множество

$$\mathbb{C} = \{x + iy \colon x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i \text{ — символ}\}$$

с операциями

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

где $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$.

Выражение $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа z; $\operatorname{Re} z = x$ и $\operatorname{Im} z = y$ — его *действительной* и *мнимой частями* соответственно.

1.1.2. Упражнение. Проверить, что $\mathbb{C}$ — поле (9 аксиом), нулем и единицей в котором являются $0 = 0 + i0$ и $1 = 1 + i0$ соответственно. Подполе $\{x + i0 \colon x \in \mathbb{R}\}$ изоморфно $\mathbb{R}$ (далее они отождествляются), $i^2 = -1$.

Указание: ассоциативность умножения удобнее проверять в тригонометрической форме, которая будет определена ниже.

Важно понимать, что

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

1.1.3. Определение. Если $z = x + iy$, то его *комплексно сопряженным* называется число $\overline{z} = x - iy$, а его *модулем* — число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

При $z \neq 0$ обратный элемент к z вычисляется по формуле

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\Big(-\frac{y}{x^2 + y^2}\Big).$$

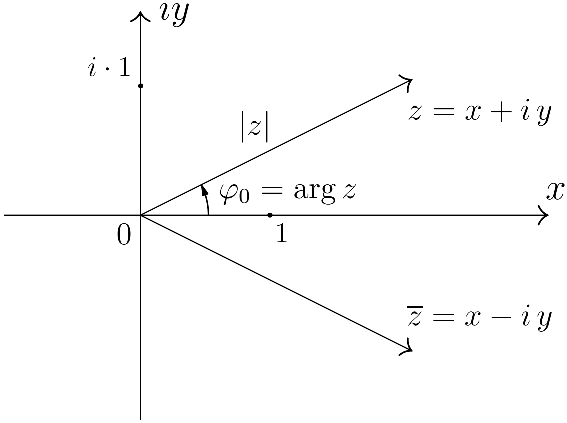

Рис. 1.1.

Множество комплексных чисел интерпретируется как совокупность точек (или их радиус-векторов) декартовой плоскости Oxy (см. рис. 1.1). При этом отображение $z \mapsto \overline{z}$ — это симметрия относительно оси Ox.

1.1.4. Упражнение. Каков геометрический смысл функции $z \mapsto iz$?

1.1.2. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

1.1.5. Определение. *Полярным радиусом* числа $z = x + iy$ называется его модуль: $r = |z|$.

Если $z \neq 0$, то существует единственное $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$ с условиями $x = r\cos(\varphi_0)$, $y = r\sin(\varphi_0)$. Это φ_0 называется *главным значением (полярного) аргумента* z и обозначается $\varphi_0 = \arg(z)$. Отметим, что углы у нас всегда измеряются в *радианах. Совокупным (полярным) аргументом числа* z называется множество

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\varphi_0 + 2\pi k \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

Если $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Последнее выражение называется *тригонометрической формой числа* z (при $\varphi = \varphi_0$ — *основной* тригонометрической формой).

Элементарно проверяется, что при $\varphi_{1,2} \in \operatorname{Arg}(z_{1,2})$, $r_{1,2} = |z_{1,2}|$ справедливо равенство

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отсюда следует *формула Муавра*: если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, то

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.1}$$

1.1.6. Пример. Вычислим $(1-i)^{15}$.

$$(1-i)^{15} = \Big(\sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big)\Big)^{15} = \\ = 2^{\frac{15}{2}}\Big(\cos\Big(-\frac{15\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{15\pi}{4}\Big)\Big) = 2^7(1+i).$$

1.1.3. Извлечение корней из комплексных чисел.

Пусть $n \in \{2, 3, \ldots\}$. По определению, $w \in \sqrt[n]{z} \Longleftrightarrow w^n = z$.

Ясно, что $\sqrt[n]{0} = \{0\}$. Из (1.1.1) следует, что при $z \neq 0$ совокупность $\sqrt[n]{z}$ состоит из n элементов $\{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, находящихся по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{z}_{(k)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\Big(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\Big)\Big), k = 0, \ldots, n-1.$$

Элемент w_0 называется *главным* (*основным*) *значением* $\sqrt[n]{z}$.

1.1.7. Упражнение. Доказать, что в последних обозначениях

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} = 0.$$

Следующие теоремы известны из курса алгебры.

1.1.8. Теорема (Основная теорема алгебры). *Поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, т. е. всякий многочлен $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$, имеет корень в $\mathbb{C}$.*

1.1.9. Теорема (Частный случай теоремы Фробениуса). *Пусть $\mathbb{P}$ — поле, содержащее $\mathbb{C}$, причем $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P} < \infty$. Тогда $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.*

1.1.10. Упражнение. Доказать предыдущую теорему и привести пример какого-либо бесконечномерного поля $\mathbb{P}$ над $\mathbb{C}$.

1.1.4. Топология (метрика) в $\mathbb{C}$.

В $\mathbb{C}$ вводится метрика $\mathrm{d}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ (как в $\mathbb{R}^2$). Через $B(a, r)$ обозначается *открытый* круг $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| < r\}$ с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$.

Для непустых множеств E_1 и E_2 в $\mathbb{C}$ определим *расстояние* между этими множествами:

$$\mathrm{d}(E_1, E_2) = \inf_{z_1 \in E_1, z_2 \in E_2} \mathrm{d}(z_1, z_2).$$

Предполагаются известными определения *открытых, замкнутых, ограниченных, компактных, связных* множеств в произвольном метрическом пространстве (в частности, в $\mathbb{R}^2$). Тем не менее, ряд основных понятий мы напомним.

1.1.5. Предел последовательности в $\mathbb{C}$. Экспонента.

Пусть $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$.

1.1.11. Определение. Говорят, что *число a является пределом последовательности $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ при $n \to +\infty$*, и пишут

$$a = \lim_{n\to+\infty} z_n,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N_\varepsilon$ имеем $\mathrm{d}(z_n, a) < \varepsilon$.

1.1.12. Упражнение. Пусть $z_n = x_n + iy_n$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \operatorname{Re} a \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \operatorname{Im} a \end{cases}$$

1.1.13. Упражнение. Доказать следующие утверждения:
(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.
(2) При $a \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = |a|, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arg}(z_n) = \operatorname{Arg}(a) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Последнее равенство понимается так. Найдутся $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$ и $\varphi_0 \in \operatorname{Arg}(a)$ такие, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = \varphi_0$.

Рассмотрим пример. Зафиксируем произвольное $z \in \mathbb{C}$. Определим

$$e^z = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

т. е. докажем, что данный предел существует, и обозначим его через e^z. Считаем стандартные свойства функции e^x, $x \in \mathbb{R}$, известными.

Пусть, как всегда, $z = x + iy$. Тогда

$$\left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left|\left(1 + \frac{x}{n}\right) + i\frac{y}{n}\right|^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} =$$
$$= \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{2x}{n}\right)\right),$$

откуда, ввиду известного соотношения $\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$ $(t \in \mathbb{R})$, находим

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = e^x.$$

Найдем теперь предел (полярного) аргумента последовательности $w_n = (1 + z/n)^n$ (по $\pmod{2\pi}$). Если $n \gg 1$, то $|z/n| < 1$, поэтому $(1 + z/n)$ находится в правой полуплоскости и справедливо равенство

$$\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \sim \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}, \quad n \to +\infty.$$

Тогда из формулы Муавра получаем, что предел последовательности $\operatorname{Arg}(w_n) \sim y/(1+x/n)$ (по $\pmod{2\pi}$) существует и

$$y \in \operatorname{Arg}\Big(\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n\Big).$$

Итак, существует

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n = e^x(\cos y + i\sin y) =: e^z.$$

В частности, если $x=0$, то $e^z = e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Например,

$$e^{2\pi i} = 1. \tag{1.1.2}$$

Кроме того, из тригонометрической формы комплексных чисел, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, получаем *показательную форму* записи комплексных чисел: $z = re^{i\varphi}$.

Пусть теперь $z_j = x_j + iy_j$, $j \in \{1,2\}$. Тогда, по доказанному,

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = \\
&= e^{x_1+x_2}((\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2) + i(\sin y_1\cos y_2 + \sin y_2\cos y_1)) = \\
&= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2}.
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Из (1.1.2) и (1.1.3) получаем равенство

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Число $2\pi i$ называется *основным периодом экспоненты.*

1.1.6. Предел функции. Непрерывность. Классы $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$.

В дальнейшем через $B'(z_0,r)$ обозначается проколотая r-окрестность точки z_0, т. е. $B'(z_0,r) = B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$.

Пусть $E\subset\mathbb{C}$, $E\neq\varnothing$, z_0 — предельная точка E, т. е. в любой проколотой окрестности точки z_0 есть точка из E, и пусть $f\colon E\to\mathbb{C}$ — некоторая функция. Говорят, что f имеет предел $A\in\mathbb{C}$ при z стремящемся к z_0 (по E), и пишут

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z) = A, \tag{1.1.4}$$

если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех $z\in B'(z_0,\delta)\cap E$ имеем $f(z)\in B(A,\varepsilon)$.

Если E содержит некоторую проколотую окрестность точки z_0, то строка $z\in E$ в записи (1.1.4) опускается.

Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0\in E$ (по E), если $\lim\limits_{z\to z_0, z\in E} f(z) = f(z_0)$ (когда z_0 — предельная точка E), либо z_0 — изолированная точка в E.

Функция f называется *непрерывной на множестве* $E_1\subset E$ (по E), если она непрерывна в каждой точке этого множества (по E).

Напомним, что через $o(1)$ (при $z \to z_0$) обозначается класс всех функций h, определенных в (каждая h в своей) проколотой окрестности точки z_0 и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{z\to z_0} h(z) = 0$.

Если функция g определена в некоторой проколотой окрестности точки z_0, то через $o(g(z))$ (или $o(g)$ при $z \to z_0$) обозначается класс функций $g(z)o(1)$ (при $z \to z_0$).

Есть надежда, что читатели сами легко вспомнят определения классов $O(1)$ и $O(g)$ (при $z \to z_0$).

В качестве примера работы с классами $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$ покажем, что

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Пусть, как всегда, $z = x + iy$. Тогда $z \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$, откуда

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \big(1 + x + o(x)\big)\big(1 + iy + o(y)\big) = 1 + z + o(z) \quad (1.1.5)$$

при $z \to 0$. Следовательно, $(e^z - 1)/z \to 1$ при $z \to 0$, что и требовалось.

Отметим, что в предыдущем примере через $o(g)$ обозначались *конкретные* подходящие функции из соответствующих *классов* $o(g)$.

1.1.14. Упражнение. Доказать:

(1) $o(x) \subsetneq o(z), o(y) \subsetneq o(z), z \to 0$; (2) $o(z) = o(\overline{z}) = o(|z|), z \to 0$.

1.1.7. Экспонента и логарифм.

Как обычно, полагаем $z = x + iy$ и $w = u + iv$.

Пусть α, $\beta \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi < +\infty$. Определим, куда переходит горизонтальная полоса $\Pi_{(\alpha,\beta)} = \{z \in \mathbb{C}\colon \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$ под действием отображения $w = e^z$.

Сначала посмотрим куда перейдет горизонтальная прямая $z_1(t) = t + iy_0$, $t \in \mathbb{R}$ ($y_0 \in (\alpha, \beta)$ фиксировано):

$$w_1(t) = e^{z_1(t)} = e^{t+iy_0} = e^t e^{iy_0}, \quad t \in \mathbb{R},$$

— (открытый) луч на плоскости w, выходящий из точки 0 под углом y_0 (в радианах) к оси Ox.

Пусть теперь $z_2(t) = x_0 + it$, $t \in (\alpha, \beta)$, — вертикальный интервал полосы $\Pi_{(\alpha,\beta)}$. Тогда

$$w_2(t) = e^{z_2(t)} = e^{x_0} e^{it}, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

— дуга окружности радиуса e^{x_0} с центром в точке 0 на плоскости w, проходящая между лучами $\{w \in \mathbb{C}\colon \alpha \in \operatorname{Arg} w\}$ и $\{w \in \mathbb{C}\colon \beta \in \operatorname{Arg} w\}$.

Таким образом, $\Pi_{(\alpha,\beta)}$ под действием экспоненты переходит в угол $V_{(\alpha,\beta)} = \{w \in \mathbb{C}\colon \alpha < \operatorname*{arg}\limits_{(\alpha,\beta)} w < \beta\}$ (здесь берутся конкретные значения $\operatorname*{arg}\limits_{(\alpha,\beta)} w \in \operatorname{Arg} w$, удовлетворяющие указанным условиям).

Нетрудно видеть, что экспонента является гомеоморфизмом $\Pi_{(\alpha,\beta)}$ на $V_{(\alpha,\beta)}$. Обратное к этому отображение обозначается так: $z = \underset{(\alpha,\beta)}{\ln} w$.

Определим теперь *многозначную* функцию $\mathrm{Ln}(z)$.

1.1.15. Определение. $w \in \mathrm{Ln}\, z \Leftrightarrow z = e^w$ (ясно, что $z \neq 0$).

Представим z в *основной показательной форме*: $z = re^{i\varphi_0}$. Поскольку $z = e^w = e^u \cdot e^{iv}$, получаем, что $u = \ln r$, $v = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (проверить!). Таким образом,

$$\mathrm{Ln}(z) = \{\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) \colon k \in \mathbb{Z}\}, \quad z \neq 0.$$

Основной ветвью логарифма называется функция $\ln(z) = \ln|z| + i\arg z$, $z \neq 0$. Слева в последнем равенстве $\ln$ обозначает определяемую здесь функцию *комплексной переменной* z, справа — уже известную логарифмическую функцию положительного аргумента. Нетрудно видеть, что $\ln(z) = \underset{(-\pi,\pi)}{\ln}(z)$ на $V_{(-\pi,\pi)}$.

1.1.16. Упражнение. Доказать, что при $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi/n < +\infty$ отображение $w = z^n$ является гомеоморфизмом угла $V_{(\alpha,\beta)}$ на угол $V_{(n\alpha,n\beta)}$. Обратное к нему отображение обозначается следующим образом:

$$z = \underset{(n\alpha,n\beta)}{\sqrt[n]{w}} = \exp\Big(\frac{1}{n}\underset{(n\alpha,n\beta)}{\ln}(w)\Big).$$

В частности, $\underset{(-\pi,\pi)}{\sqrt[n]{w}} = \sqrt[n]{w}_{(0)}$ на $V_{(-\pi,\pi)}$. Каково множество точек разрыва функции $\sqrt[n]{z}_{(0)}$ в $\mathbb{C}$?

§ 1.2. Связность. Теорема Жордана. Стереографическая проекция. Односвязная область. Оболочка компакта

1.2.1. Связные множества.

Пусть (T,τ) — топологическое пространство (τ — система всех открытых подмножеств в T с известным набором свойств).

1.2.1. Определение. Пусть $X \subset T$ и существуют $U_1, U_2 \in \tau$ со следующими свойствами:

(1) $U_1 \cap X \neq \varnothing$; (2) $U_2 \cap X \neq \varnothing$; (3) $U_1 \cap U_2 = \varnothing$; (4) $X \subset U_1 \cup U_2$.

Тогда множества U_1 и U_2 называются *разделяющими* (*для* X), а множество X называется *несвязным* в (T,τ). Если для $X \neq \varnothing$ *не существует* разделяющих множеств, то X называется *связным* в (T,τ).

1.2.2. Определение. Пусть $X \subset T$. Подмножество $X_1 \subset X$ называется *связной компонентой* множества X, если X_1 связно и не существует связного множества X_2 со свойством $X_1 \subsetneq X_2 \subseteq X$.

1.2.3. Определение. *Областью* в $\mathbb{C}$ называется всякое (непустое) открытое связное множество в $\mathbb{C}$.

При $E \subset \mathbb{C}$ через ∂E обозначается *граница* множества E в $\mathbb{C}$, а через $\overline{E}$ — *замыкание* множества E в $\mathbb{C}$.

1.2.2. Пути и кривые в $\mathbb{C}$. Теорема Жордана.

Пусть (T,τ) — топологическое пространство.

1.2.4. Определение. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, и $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to T$ — непрерывное отображение. Тогда γ называется *путем в* (T,τ), а множество $[\gamma] = \gamma([\alpha,\beta])$ — его *носителем.*

1.2.5. Определение. Множество $X \subset T$, $X \neq \varnothing$, называется *линейно связным*, если для любых x_1, $x_2 \in X$ существует путь $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to T$, $[\gamma] \subset X$, с условием $\gamma(\alpha) = x_1$, $\gamma(\beta) = x_2$.

1.2.6. Упражнение. Доказать эквивалентность понятий связности и линейной связности для открытых множеств в $\mathbb{C}$.

1.2.7. Определение. Путь $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ называется *жордановым*, если он взаимно однозначен на $[\alpha,\beta]$, т. е. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ для всех $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$.

Путь $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ называется *замкнутым жордановым*, если $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при всех $\alpha \leqslant t_1 < t_2 < \beta$, но $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

1.2.8. Теорема (Жордан). *Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — путь в $\mathbb{C}$ с носителем $S = \gamma([\alpha,\beta])$. Обозначим $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$.*

(1) *Если γ — жорданов путь, то Ω связно и $\partial\Omega = S$.*

(2) *Если γ — замкнутый жорданов путь, то Ω состоит ровно из двух непересекающихся компонент (областей): ограниченной (D_γ) и неограниченной (Ω_γ), причем $\partial D_\gamma = \partial\Omega_\gamma = S$.*

В программу экзамена включается доказательство этой теоремы для случая произвольной замкнутой жордановой ломаной (см. Гл. 3, раздел 3.2.2).

1.2.9. Упражнение. Привести пример двух таких ограниченных областей D_1 и D_2 в $\mathbb{C}$, что $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ и $\partial D_1 = \partial D_2$.

1.2.10. Определение. Пусть (T, τ) — хаусдорфово локально-компактное топологическое пространство (т. е. у каждой точки в T есть открытая окрестность, замыкание которой — компакт), *не являющееся* компактным. Его *одноточечной компактификацией* (по Александрову) называется топологическое пространство (T_1, τ_1), где $T_1 = T \sqcup \{\infty\}$ (∞ — символ, не являющийся элементом из T),

$$\tau_1 = \tau \sqcup \{T_1 \setminus K\}_{K \in \mathcal{K}},$$

и $\mathcal{K}$ — совокупность всех компактных подмножеств в (T, τ).

При этом пространство (T_1, τ_1) *компактно и хаусдорфово*, а вложение (T, τ) в (T_1, τ_1) *непрерывно*.

Одноточечная компактификация комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (с ее стандартной топологией) называется *расширенной комплексной плоскостью* (часто обозначаемой $\overline{\mathbb{C}}$, но мы придерживаемся обозначения $\mathbb{C}^\bullet$).

1.2.3. Сферическая метрика на $\mathbb{C}^\bullet$. Стереографическая проекция.

Ранее на комплексной плоскости была введена евклидова метрика:

$$\mathrm{d}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Определим *сферическую* метрику на $\mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$:

$$\mathrm{d}^\bullet(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty \\ 0, & z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

Из предложения 1.2.12 будет следовать, что $\mathrm{d}^\bullet(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет аксиомам метрики, причем топология, задаваемая этой метрикой, является топологией одноточечной компактификации плоскости $\mathbb{C}$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$ сферу Σ с радиусом $1/2$ и центром в точке $(0, 0, 1/2)$ и отождествим $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ с подпространством $\mathbb{R}^2_{(\xi,\eta)} \subset \mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$. Введем обозначения $O = (0, 0, 0)$, $N = (0, 0, 1)$.

Любой точке $M = (\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma \setminus N$ можно сопоставить точку $z = z_M$ комплексной плоскости $\mathbb{C}_z = \mathbb{R}^2_{(x,y)}$, продолжив луч NM до пересечения с последней.

Отображение $\sigma\colon \Sigma \to \mathbb{C}^\bullet$, заданное по правилу

$$\sigma(M) = \begin{cases} z_M, & M \neq N \\ \infty, & M = N \end{cases}$$

называется *стереографической проекцией.* Легко видеть, что оно взаимно однозначно. Будем обозначать $M_z = \sigma^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; $N = \sigma^{-1}(\infty)$.

1.2.11. Упражнение. Вывести следующие формулы стереографической проекции:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}; y = \frac{\eta}{1-\zeta}; \quad \xi = \frac{x}{1+|z|^2}; \eta = \frac{y}{1+|z|^2}; \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

пользуясь коллинеарностью векторов $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{Nz_M}$ и уравнением сферы Σ. В данном случае $M_z = (\xi, \eta, \zeta)$, где $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

1.2.12. Предложение. *Если $\rho(A, B)$ — евклидово расстояние в пространстве $\mathbb{R}^3_{(\xi,\eta,\zeta)}$ между точками A и B, то во введенных выше обозначениях имеет место равенство*

$$\mathrm{d}^\bullet(z_1, z_2) = \rho(M_{z_1}, M_{z_2}).$$

Таким образом, $\sigma\colon \Sigma \to \mathbb{C}^\bullet$ — изометрия (Σ, ρ) и $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$. Поскольку (Σ, ρ) — компактное метрическое пространство, $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$ тоже компактно. Поэтому $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$ (расширенную плоскость) часто называют *сферой Римана.*

Доказательство. Обсудим нетривиальные случаи $0 \neq z_1 \neq z_2 \neq 0$. Рассмотрим плоскость, проходящую через точки O, N, z_1. Она пересекает Σ по окружности с диаметром $ON = 1$, причем M_{z_1} лежит на этой окружности, откуда $\angle NM_{z_1}O = \pi/2$ (см. рис. 2.1 c)). Следовательно, треугольники $\Delta M_{z_1}NO$ и ΔONz_1 подобны, откуда

$$\frac{NM_{z_1}}{NO} = \frac{NO}{Nz_1} \Rightarrow NM_{z_1} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}. \tag{1.2.1}$$

Аналогично,

$$NM_{z_2} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}}. \tag{1.2.2}$$

Обозначим $\delta = \rho(M_{z_1}, M_{z_2})$ и воспользуемся теоремой косинусов в $\Delta M_{z_1}M_{z_2}N$ и в Δz_1z_2N $\big($см. рис. 2.1 b)$\big)$:

$$\delta^2 = (NM_{z_1})^2 + (NM_{z_2})^2 - 2NM_{z_1}NM_{z_2}\cos\beta,$$
$$\cos\beta = \frac{|z_1 - z_2|^2 - (Nz_1)^2 - (Nz_2)^2}{-2Nz_1Nz_2}.$$

Подставив второе равенство в первое, с учетом (1.2.1) и (1.2.2) получаем

$$\delta^2 = \frac{1}{1+|z_1|^2} + \frac{1}{1+|z_2|^2} + \frac{|z_1-z_2|^2 - (1+|z_1|^2) - (1+|z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} =$$
$$= \frac{|z_1-z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}.$$

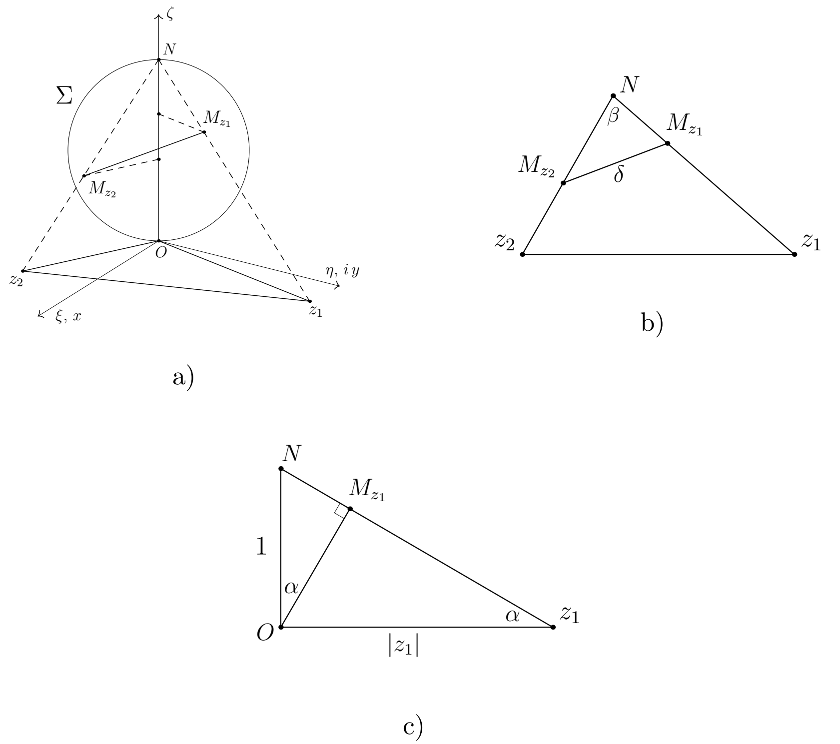

Рис. 2.1.

Что и требовалось. Случаи бесконечных z_1 или z_2 устанавливаются предельным переходом. $\square$

Замечание. Метрики d и $\mathrm{d}^\bullet$ сравнимы на любом круге конечного радиуса в $\mathbb{C}$. Отсюда следует, что все понятия, определяемые в терминах окрестностей (например, открытые множества, пределы последовательностей и функций), совпадают в $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$ и в $(\mathbb{C}, \mathrm{d}^\bullet)$.

Действительно, для двух точек z_1 и z_2 из некоторого круга $B(0, R)$, $R \in (0, +\infty)$, значения $\sqrt{1 + |z_1|^2}$ и $\sqrt{1 + |z_2|^2}$ принадлежат $[1, \sqrt{1 + R^2})$, откуда

$$(\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2})^{-1} \in \bigl[1/(1 + R^2), 1\bigr].$$

Следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}(z_1, z_2)}{1 + R^2} \leqslant \mathrm{d}^\bullet(z_1, z_2) \leqslant \mathrm{d}(z_1, z_2).$$

1.2.13. Упражнение. Доказать, что при стереографической проекции окружности на сфере Римана, не содержащие точку N, переходят в окружности в $\mathbb{C}$ (круговое свойство стереографической проекции).

1.2.14. Упражнение. Доказать свойство сохранения (абсолютных величин) углов между окружностями при стереографической проекции.

1.2.4. Односвязные области в $\mathbb{C}$.

Для множества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим через $E_c = \mathbb{C} \setminus E$ — дополнение (complement) множества E в $\mathbb{C}$, а через ∂E — границу E в $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$.

Аналогично, для $E \subset \mathbb{C}^\bullet$ пусть $E_c^\bullet = \mathbb{C}^\bullet \setminus E$ — дополнение множества E в $\mathbb{C}^\bullet$ и $\partial^\bullet E$ — граница E в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$.

Так, при $E \subset \mathbb{C}$, если E ограничено, то $\partial^\bullet E = \partial E$; если E не ограничено, то $\partial^\bullet E = \partial E \sqcup \{\infty\}$.

1.2.15. Определение. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется *односвязной*, если $D_c^\bullet$ связно в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$.

Рассмотрим несколько примеров.

(1) Пусть D — произвольная звездная область в $\mathbb{C}$ (т. е. найдется точка $z_0 \in D$ такая, что для любой точки $z \in D$ отрезок $[z_0, z]$ целиком лежит в D. Тогда $D_c^\bullet$ является линейно связным множеством (а, значит, и связным) в $\mathbb{C}^\bullet$. Следовательно, D — односвязная область.

(2) В частности, пусть $D = \Pi_{(\alpha,\beta)} = \{z \in \mathbb{C}\colon \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$ — полоса (звездна относительно любой своей точки, как и любая выпуклая область в $\mathbb{C}$). По предыдущему примеру, она односвязна. В то же время D_c не связно в $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$.

(3) Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $D_c^\bullet = \{0\} \sqcup \{\infty\}$ — не связное множество в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, поэтому D не односвязна. Заметим, однако, что $D_c = \{0\}$ связно в $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$.

1.2.16. Упражнение. Если D область в $\mathbb{C}$ и $\partial^\bullet D$ связно в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, то и $D_c^\bullet$ связно в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, т. е. D — односвязная область.

Обратное тоже верно, но доказывается гораздо сложнее. Мы установим этот факт в Гл. 2 (теорема **??**), пока он нам не потребуется. Мы также установим, что область D в $\mathbb{C}$ односвязна, если и только если она гомеоморфна кругу.

1.2.5. Оболочка компакта.

Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ (т. е. замкнутое ограниченное множество).

1.2.17. Упражнение. Множество $\mathbb{C} \setminus K$ распадается на не более чем счетное множество непересекающихся областей (связных компонент), причем среди них есть ровно одна неограниченная.

Пусть $D_1, D_2, \ldots$ — ограниченные компоненты $\mathbb{C} \setminus K$ (если такие есть), Ω — неограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus K$.

1.2.18. Упражнение. $\partial D_j \subset K$, $\partial \Omega \subset K$.

1.2.19. Определение. Множество $\widehat{K} = K \sqcup \sqcup_{j\geqslant 1} D_j = \mathbb{C} \setminus \Omega$ (если ограниченные компоненты D_j отсутствуют, то $\widehat{K} = K$) называется (топологической, полиномиальной) *оболочкой* компакта K в $\mathbb{C}$.

1.2.20. Теорема. *Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, K — компакт в $\mathbb{C}$. Если $K \subset D$, то $\widehat{K} \subset D$.*

Доказательство. Если ограниченные компоненты $\mathbb{C}\setminus K$ отсутствуют, то $\widehat{K} = K \subset D$ и все доказано. В противном случае положим $U_1 = \cup_{j\geqslant 1} D_j$. Тогда U_1 — (ограниченное) непустое открытое множество в $\mathbb{C}$, значит, в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$. Множество $U_2 = \Omega \cup \{\infty\}$ также непусто и открыто в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, причем $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Ясно, что $U_1 \sqcup U_2 = \mathbb{C}^\bullet \setminus K$.

Пусть, от противного, $\widehat{K} = K \cup U_1 \not\subset D$, откуда $U_1 \not\subset D$ и, следовательно, $U_1 \cap D_c^\bullet \neq \varnothing$. С другой стороны, $\infty \in U_2 \cap D_c^\bullet \neq \varnothing$ и $D_c^\bullet \subset U_1 \sqcup U_2$. Получаем, что множество $D_c^\bullet$ несвязно. Противоречие. □

1.2.21. Следствие. *Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, $S = [\gamma]$ — носитель замкнутого жорданова пути γ, $S \subset D$. Пусть D_γ — ограниченная компонента $\mathbb{C}\setminus S$ (см. теорему Жордана). Тогда $D_\gamma \sqcup [\gamma] = \widehat{S} \subset D$, т. е. $D_\gamma \subset D$.*

1.2.22. Упражнение. Пусть D — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ и $r > 0$ таковы, что $X = \{z \in D\colon \mathrm{d}(z, \partial D) \geqslant r\} \neq \varnothing$. Тогда $\widehat{X} = X$.

§ 1.3. Комплексная производная. Производная сложной и обратной функции. $\mathbb{C}$- и $\mathbb{R}$-дифференцируемость. Теорема Коши – Римана. Свойства производных. Производная по направлению. Голоморфность в точке и области

1.3.1. Комплексная производная. $\mathbb{C}$-дифференцируемость в точке. Производная сложной и обратной функции.

1.3.1. Определение. Пусть (комплекснозначная) функция f определена в некоторой окрестности точки z_0. Если существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, то он называется *комплексной производной функции f в точке z_0* и обозначается $f'(z_0)$. Функция f в этом случае называется *$\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0*, что эквивалентно наличию следующего представления:

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+o(\Delta z),\quad \Delta z\to 0. \tag{1.3.1}$$

В качестве примера покажем, что для каждого $z_0\in\mathbb{C}$ имеем равенство $(e^z)'\big|_{z_0}=e^{z_0}$. Иными словами, $(e^z)'=e^z$. Действительно,

$$(e^z)'\big|_{z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{e^{z_0+\Delta z}-e^{z_0}}{\Delta z}=e^{z_0}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{e^{\Delta z}-1}{\Delta z}=e^{z_0}.$$

1.3.2. Теорема (О комплексной производной сложной функции). *Пусть функция g имеет комплексную производную в точке z_0, f имеет комплексную производную в точке $w_0=g(z_0)$. Тогда*

$$f\big(g(z)\big)'\big|_{z_0}=f'(w_0)g'(z_0). \tag{1.3.2}$$

Доказательство. В силу $\mathbb{C}$-дифференцируемости функций g и f в точках z_0 и w_0 соответственно, в некоторой окрестности точки 0 переменных $\Delta z=z-z_0$ и $\Delta w=w-w_0$ имеем

$$\Delta g|_{z_0}(\Delta z):=g(z_0+\Delta z)-g(z_0)=g'(z_0)\Delta z+o(\Delta z),\quad \Delta z\to 0,$$

$$\Delta f|_{w_0}(\Delta w):=f(w_0+\Delta w)-f(w_0)=f'(w_0)\Delta w+o(\Delta w),\quad \Delta w\to 0.$$

Подставляя $\Delta w=\Delta g|_{z_0}(\Delta z)$ в последнее равенство, получаем

$$\begin{aligned}\Delta f(g)|_{z_0}(\Delta z)&=f(g(z_0+\Delta z))-f(g(z_0))=\\&=f'(w_0)(g'(z_0)\Delta z+o(\Delta z))+o(\Delta g|_{z_0}(\Delta z))=\\&=f'(w_0)g'(z_0)\Delta z+o(\Delta z),\quad \Delta z\to 0,\end{aligned}$$

что и означает справедливость (1.3.2). □

1.3.3. Теорема (О производной обратной функции). *Пусть функция f гомеоморфно отображает некоторую окрестность $U(z_0)$ точки z_0 на некоторую окрестность $V(w_0)$ точки w_0 в $\mathbb{C}$, $f(z_0)=w_0$, и пусть $g\colon V(w_0)\to U(z_0)$ — обратная к f функция.*

Если существует $f'(z_0)\neq 0$, то существует $g'(w_0)=1/f'(z_0)$.

Доказательство. Для $\Delta w \neq 0$ такого, что $w_0 + \Delta w \in V(w_0)$, положим $\Delta z = g(w_0 + \Delta w) - g(w_0)$. Тогда $\Delta z \neq 0$, $z_0 + \Delta z \in U(z_0)$, причем Δw и Δz стремятся к 0 одновременно. Следовательно (провести детальное доказательство центрального равенства!),

$$g'(w_0) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{g(w_0 + \Delta w) - g(w_0)}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

$\square$

1.3.4. Пример. В указанных выше обозначениях (при $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi < +\infty$), пусть $z_0 \in \Pi_{(\alpha,\beta)}$, $w_0 = e^{z_0} \in V_{(\alpha,\beta)}$. Тогда

$$\big(\ln_{(\alpha,\beta)} w\big)'\big|_{w_0} = \frac{1}{(e^z)'|_{z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}.$$

Иными словами, $\big(\ln_{(\alpha,\beta)} z\big)' = 1/z$, $z \in V_{(\alpha,\beta)}$.

1.3.5. Упражнение. Доказать, что при $n \in \{2, 3, \ldots\}$ для каждого $z_0 \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $(z^n)'\big|_{z=z_0} = n z_0^{n-1}$.

1.3.6. Упражнение. Доказать, что при $n \in \{2, 3, \ldots\}$ и $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi/n < +\infty$ имеем

$$\Big(\sqrt[n]{w}_{(n\alpha,n\beta)}\Big)' = \frac{1}{nw} \sqrt[n]{w}_{(n\alpha,n\beta)}, \quad w \in V_{(n\alpha,n\beta)}.$$

1.3.2. $\mathbb{R}$-дифференцируемость.

1.3.7. Определение. Функция f, определенная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, называется $\mathbb{R}$-*дифферецируемой* в точке z_0, если найдутся комплексные постоянные A и B такие, что

$$\Delta f\big|_{z_0}(\Delta z) := f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + B\overline{\Delta z} + o(\Delta z), \quad \Delta z \to 0.$$

В этих условиях A и B определены однозначно (проверить), и их обозначают через $\frac{\partial f}{\partial z}\big|_{z_0}$ и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big|_{z_0}$ соответственно. Выражение

$$df\big|_{z_0}(\Delta z) := \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z_0} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\bigg|_{z_0} \overline{\Delta z}$$

называется *дифференциалом функции f в точке z_0 с приращением Δz.*

Из формулы (1.3.1) непосредственно следует, что всякая $\mathbb{C}$-дифференцируемая в точке z_0 функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в этой точке и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big|_{z_0} = 0$.

1.3.8. Пример. Рассмотрим функцию $f(z) = \overline{z}^2$. Тогда

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (\overline{z_0} + \overline{\Delta z})^2 - \overline{z_0}^2 = 2\overline{z_0}\,\overline{\Delta z} + o(\Delta z), \quad \Delta z \to 0.$$

Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial z}\big|_{z_0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big|_{z_0} = 2\overline{z_0}$ для любого $z_0 \in \mathbb{C}$.

1.3.9. Определение. Функция $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-*линейной*, если для всех z_1, z_2 и λ_1, λ_2 в $\mathbb{C}$ имеем

$$L(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 L(z_1) + \lambda_2 L(z_2).$$

1.3.10. Предложение. *Функция L является $\mathbb{C}$-линейной тогда и только тогда, когда $L(z) = \lambda z$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Свойство ($\Leftarrow$) очевидно. Докажем ($\Rightarrow$). Положим $\lambda = L(1)$. Тогда в силу $\mathbb{C}$-линейности имеем

$$L(z) = L(z \cdot 1) = z \cdot L(1) = \lambda z, \quad z \in \mathbb{C},$$

что и требовалось. □

1.3.11. Определение. Функция $L_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется $\mathbb{R}$-*линейной*, если для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$L_1(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 L_1(z_1) + \lambda_2 L_1(z_2).$$

1.3.12. Предложение. *Функция L_1 является $\mathbb{R}$-линейной тогда и только тогда, когда найдутся постоянные $a, b \in \mathbb{C}$ с условием $L_1(z) = az + b\overline{z}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Утверждение ($\Leftarrow$) очевидно.

Докажем ($\Rightarrow$). Положим $p = L_1(1)$ и $q = L_1(i)$. Тогда для всех $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, имеем

$$L_1(z) = px + qy = p\frac{z + \overline{z}}{2} + q\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{p - qi}{2}z + \frac{p + qi}{2}\overline{z}.$$

Предложение доказано. □

Фактически установлено следующее предложение.

1.3.13. Предложение. *Справедливы утверждения:*

(1) *две $\mathbb{R}$-линейные функции $L_j(z) = a_j z + b_j \overline{z}$, $j \in \{1, 2\}$, совпадают как функции от z тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и одновременно $b_1 = b_2$ (т. е. по $\mathbb{R}$-линейной функции ее коэффициенты a и b находятся однозначно);*

(2) *$\mathbb{R}$-линейная функция $L_1(z) = az + b\overline{z}$ является $\mathbb{C}$-линейной только если $b = 0$;*

(3) *всякая $\mathbb{R}$-линейная функция $az + b\overline{z}$ представима в виде $px + qy$ ($z = x + iy$), где постоянные $p, q \in \mathbb{C}$ определены по a и b однозначно.*

1.3.14. Упражнение. При каких a и b отображение $w = az + b\overline{z}$ всякий (открытый) круг переводит в круг?

В частности, если f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0, то (при $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$) справедливо равенство

$$\Delta f\big|_{z_0}(\Delta z) = P\Delta x + Q\Delta y + o(\Delta z), \quad \Delta z \to 0.$$

Естественно обозначить $P = \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{z_0} = f_x\big|_{z_0}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}\big|_{z_0} = f_y\big|_{z_0}$.

Найдем выражение A и B (т. е. $\frac{\partial f}{\partial z}\big|_{z_0}$ и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big|_{z_0}$) через P и Q и обратно:

$$P\Delta x + Q\Delta y = A\Delta z + B\Delta\overline{z} = A(\Delta x + i\Delta y) + B(\Delta x - i\Delta y) = \\ = (A+B)\Delta x + i(A-B)\Delta y,$$

откуда $P = A + B$, $Q = i(A - B)$, т. е. $A = \frac{P-iQ}{2}$, $B = \frac{P+iQ}{2}$. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right), \tag{1.3.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \tag{1.3.4}$$

в точке z_0.

Далее, пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$). Ясно, что f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ если и только если функции u и v являются дифференцируемыми в точке (x_0, y_0) как функции двух переменных. При этом (полагая $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$) имеем

$$df|_{z_0}(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{z_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{z_0}\Delta y = (u_x + iv_x)|_{z_0}\Delta x + (u_y + iv_y)|_{z_0}\Delta y,$$

так что $\partial f/\partial x = u_x + iv_x$, $\partial f/\partial y = u_y + iv_y$,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y) \tag{1.3.5}$$

в точке z_0.

1.3.15. Теорема (Коши – Римана). *Пусть функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0. Тогда f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0 если и только если выполнены следующие эквивалентные условия Коши – Римана*:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\bigg|_{z_0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_x|_{z_0} = v_y|_{z_0} \\ u_y|_{z_0} = -v_x|_{z_0} \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Доказательство. При условии $\mathbb{R}$-дифференцируемости в z_0 функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке если и только если

$$df\big|_{z_0}(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{z_0}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\bigg|_{z_0}\overline{\Delta z}$$

является $\mathbb{C}$-линейной функцией, что эквивалентно первому из условий в (1.3.6). Оно, в свою очередь, эквивалентно второму из условий в (1.3.6), ввиду равенства (1.3.5). □

Заметим, что если функция f является $\mathbb{R}$-линейной в $\mathbb{C}$, то для каждой точки z_0 полное приращение $\Delta f\big|_{z_0}(\Delta z)$ функции f в точке z_0 совпадает с ее дифференциалом $df\big|_{z_0}(\Delta z)$ в этой точке. Так что $\Delta z = dz$, $\Delta\overline{z} = d\overline{z} = \overline{dz}$ и $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ для каждой точки z_0.

1.3.16. Предложение. *Пусть функции f и g являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми в точке z_0. Тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (при $g(z_0) \neq 0$) являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми в точке z_0 и справедливы следующие соотношения:*

$$\left.\frac{\partial(f \pm g)}{\partial z}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} \pm \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{z_0}; \left.\frac{\partial(f \pm g)}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} \pm \left.\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0};$$

$$\left.\frac{\partial(fg)}{\partial z}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} g(z_0) + f(z_0)\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{z_0};$$

$$\left.\frac{\partial(fg)}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} g(z_0) + f(z_0)\left.\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0}.$$

$$\left.\frac{\partial(f/g)}{\partial z}\right|_{z_0} = \frac{(\partial f/\partial z)|_{z_0} g(z_0) - f(z_0)(\partial g/\partial z)|_{z_0}}{g^2(z_0)};$$

$$\left.\frac{\partial(f/g)}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} = \frac{(\partial f/\partial \overline{z})|_{z_0} g(z_0) - f(z_0)(\partial g/\partial \overline{z})|_{z_0}}{g^2(z_0)}.$$

В частности, если f и g являются $\mathbb{C}$-дифференцируемыми в точке z_0, то $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (при $g(z_0) \neq 0$) являются также $\mathbb{C}$-дифференцируемыми в точке z_0 и верны стандартные формулы для (комплексных) производных суммы, произведения и частного, например,

$$(f \cdot g)'\big|_{z_0} = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0) \text{ и}$$

$$(f/g)'\big|_{z_0} = (f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0))/g^2(z_0).$$

1.3.17. Предложение. *Пусть функция $g(z)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0, а функция $f(w)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $w_0 = g(z_0)$. Тогда сложная функция $f \circ g(z) = f(g(z))$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0 и выполнены соотношения:*

$$\left.\frac{\partial f \circ g}{\partial z}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{w_0} \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{z_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\right|_{w_0} \left.\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}\right|_{z_0},$$

$$\left.\frac{\partial f \circ g}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{w_0} \left.\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\right|_{w_0} \left.\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0}.$$

В частности, если g является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0 и f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке w_0, то функция $f \circ g$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0 и $(f \circ g)'\big|_{z_0} = f'(w_0) \cdot g'(z_0)$, что было установлено ранее.

Доказательства этих двух предложений остаются в качестве упражнений.

1.3.3. Производная по направлению.

1.3.18. Определение. Пусть функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0, $\theta \in (-\pi, \pi]$. *Производной функции f в точке z_0 по направлению θ* (точнее, по направлению $e^{i\theta}$) называется величина

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z_\theta}\right|_{z_0} = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \arg(\Delta z)=\theta}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Нетрудно найти формулу для указанной производной:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z_\theta}\right|_{z_0} = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \arg(\Delta z)=\theta}} \frac{\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} \Delta z + \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} \overline{\Delta z} + o(\Delta z)}{\Delta z} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} e^{-2i\theta},$$

поскольку $\Delta z = |\Delta z| e^{i\theta}$, $\overline{\Delta z} = |\Delta z| e^{-i\theta} = \Delta z e^{-2i\theta}$ при $\arg(\Delta z) = \theta$.

При $\left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} \neq 0$ множество $\left\{ \left.\frac{\partial f}{\partial z_\theta}\right|_{z_0} \right\}_{\theta \in (-\pi, \pi]}$ всех производных по направлению дважды пробегает окружность с радиусом $\left| \left.\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|_{z_0} \right|$ и центром в точке $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}$. Поэтому очевидно, что $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке z_0 функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке, если и только если для всех $\theta \in (-\pi, \pi]$ имеем $\left.\frac{\partial f}{\partial z_\theta}\right|_{z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0}$, т. е. все производные по направлению совпадают.

1.3.4. Ассоциированное отображение.

Пусть $z = x + iy$ и функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда в окрестности точки $(x_0, y_0)^t \in \mathbb{R}^2$ определено так называемое *ассоциированное отображение* $F\colon (x, y)^t \mapsto \big(u(x, y), v(x, y)\big)^t$, где $(\cdot, \cdot)^t$ означает (матричное) транспонирование. Если вдруг f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z_0, то по теореме 1.3.15 в точке z_0 выполняются равенства $u_x = v_y, u_y = -v_x$, поэтому якобиан ассоциированного отображения в этой точке равен

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = (u_x v_y - v_x u_y)\big|_{z_0} = (u_x^2 + v_x^2)\big|_{z_0} = \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{z_0} \right|^2 = \left|f'(z_0)\right|^2.$$

Таким образом, квадрат модуля комплексной производной равен якобиану ассоциированного отображения в соответствующей точке. В частности, если якобиан ассоциированного отображения $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции f в точке z_0 отрицателен, то функция f не может быть $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке.

1.3.5. Голоморфность в точке и области.

1.3.19. Определение. Пусть функция f определена и $\mathbb{C}$-дифференцируема *в некоторой окрестности точки* $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда f называется *голоморфной функцией* (*ГФ*) *в точке* z_0 (это свойство кратко записывается так: $f \in \mathcal{A}(z_0)$).

Если f определена и голоморфна в каждой точке области $D \subset \mathbb{C}$ (т. е. функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в каждой точке области D), то f называется *голоморфной в области* D. Пространство всех функций, голоморфных в области D, обозначается через $\mathcal{A}(D)$.

Функции класса $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ называются *целыми*. Примеры: z^{10}, e^{z^2}.

1.3.20. Пример. Функция $f(z) = \overline{z}^2$ является всюду $\mathbb{R}$-дифференцируемой. Но $\mathbb{C}$-дифференцируема она только в точке $z_0 = 0$, поэтому f нигде не голоморфна.

§ 1.4. Конформные отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства

1.4.1. Конформные отображения.

1.4.1. Определение. $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке z_0 функция f называется *конформной в точке* z_0, если ее дифференциал в этой точке является композицией гомотетии (с положительным коэффициентом, с центром в нуле) и поворота (с центром в нуле), т. е.

$$df\Big|_{z_0}(\Delta z) = ke^{i\alpha}\Delta z, \quad k > 0, \quad \alpha \in (-\pi, \pi],$$

что эквивалентно условию наличия $f'(z_0) = ke^{i\alpha} \neq 0$.

Коэффициент гомотетии $k = |f'(z_0)|$ и угол поворота $\alpha = \arg(f'(z_0))$ составляют *геометрический смысл* производной конформного отображения в точке z_0.

1.4.2. Определение. Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и функция f конформна в каждой точке $z_0 \in D$. В этом случае говорят, что f *локально конформна в области* D.

Функция f называется *конформной в области* D, если f локально конформна в D и взаимно-однозначна в D.

1.4.3. Пример. (1) Функция $f(z) = e^z$ локально конформна в $\mathbb{C}$, поскольку в любой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ существует отличная от нуля производная $f'(z_0) = e^{z_0} \neq 0$; эта функция конформна, например, в любой полосе $\Pi_{(\alpha,\beta)}$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi < +\infty$; полоса $\Pi_{(-\pi,\pi)}$ называется *стандартной областью конформности* экспоненты.

(2) Функция $f(z) = z^n$, $n \in \{2, 3, \ldots\}$, локально конформна в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, конформна в любом угле $V_{(\alpha,\beta)}$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi/n < +\infty$; угол $V_{(-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n})}$ называется *стандартной областью конформности* указанной функции.

1.4.2. Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства.

1.4.4. Определение. *Дробно-линейное отображение*(ДЛО) — это функция вида

$$w = \Lambda(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доопределим ДЛО до отображения $\mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}^\bullet$. При $c = 0$ положим $\Lambda(\infty) = \infty$. При $c \neq 0$ положим $\Lambda(\infty) = \dfrac{a}{c}$, $\Lambda\Big(-\dfrac{d}{c}\Big) = \infty$.

1.4.5. Предложение. *Всякое ДЛО является гомеоморфизмом из $\mathbb{C}^\bullet$ в $\mathbb{C}^\bullet$, причем обратное отображение — тоже ДЛО.*

Доказательство. Непрерывность ДЛО во всех точках, кроме $-d/c$ (при $c \neq 0$) и ∞, очевидна. Непрерывность в последних точках легко следует из определения метрики в $\mathbb{C}^\bullet$. Кроме того, непосредственно проверяется, что ДЛО, заданное формулой $z = \dfrac{dw-b}{-cw+a}$ обратно к ДЛО $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$. □

1.4.6. Предложение. *Совокупность всех ДЛО образует группу относительно композиции* $\Lambda_2 \circ \Lambda_1(z) = \Lambda_2\big(\Lambda_1(z)\big)$.

Доказательство. Так как существование обратного элемента установлено в предыдущем предложении, а единичным элементом, очевидно, является ДЛО $\Lambda(z) = z = \dfrac{1\cdot z+0}{0\cdot z+1}$, то нужно лишь установить, что композиция двух ДЛО — снова ДЛО. Этот факт проверяется непосредственно. □

Рассмотрим отображение Φ из группы $GL(2,\mathbb{C})$ всех невырожденных 2×2 - матриц с коэффициентами из $\mathbb{C}$ в группу всех ДЛО $\{\Lambda\}$ по формуле

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Легко проверяется, что Φ есть гомоморфизм групп, т. е. $\Phi(M_2M_1)(z) = \Phi(M_2)(\Phi(M_1)(z))$ для всех M_1 и M_2 из $GL(2,\mathbb{C})$.

1.4.7. Упражнение. Какой факторгруппе группы $SL(2,\mathbb{C})$ изоморфна группа $\{\Lambda\}$ всех ДЛО? Коммутативна ли группа $\{\Lambda\}$?

1.4.2.1. *Конформность ДЛО на* $\mathbb{C}^\bullet$.

1.4.8. Определение. Пусть функция f отображает некоторую окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ в некоторую окрестность точки ∞ (из $\mathbb{C}^\bullet$), причем $f(z_0) = \infty$. Говорят, что функция f *конформна в точке* z_0, если отображение $\widetilde{w} = g(z) = 1/f(z)$ (полагаем $g(z) = 0$ при $f(z) = \infty$) конформно в точке z_0.

Пусть задана функция f, отображающая некоторую окрестность точки ∞ (из $\mathbb{C}^\bullet$) в некоторую окрестность точки ∞ (в $\mathbb{C}^\bullet$), причем $f(\infty) = \infty$. Говорят, что f *конформна в точке* ∞, если отображение $\widetilde{w} = g(\widetilde{z}) = 1/f(1/\widetilde{z})$ (полагаем $g(\widetilde{z}) = 0$ при $f(1/\widetilde{z}) = \infty$, $1/0 = \infty$) конформно в точке $\widetilde{z} = 0$.

1.4.9. Упражнение. Дать определение конформности функции f в точке ∞ при $f(\infty) = w_0 \neq \infty$.

1.4.10. Предложение. *Всякое ДЛО есть конформный изоморфизм* $\mathbb{C}^\bullet$ *на* $\mathbb{C}^\bullet$.

Доказательство. Пусть сначала $c = 0$, тогда $\Lambda(z) = az + b$, где $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Отсюда для каждого $z_0 \in \mathbb{C}$ имеем $\Lambda'(z_0) = a \neq 0$, т. е. Λ — конформный изоморфизм $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ (с обратным, который равен

$\Lambda^{-1}(w) = (w-b)/a)$. Остается проверить конформность Λ в точке ∞, что эквивалентно конформности в точке $\widetilde{z} = 0$ отображения

$$\widetilde{w} = \frac{1}{\Lambda\,(1/\widetilde{z})} = \frac{\widetilde{z}}{b\widetilde{z} + a} = \widetilde{\Lambda}(\widetilde{z}).$$

Проверяем: $\widetilde{\Lambda}'(0) = \dfrac{1}{a} \neq 0$.

Пусть теперь $c \neq 0$. Следует рассмотреть три случая:

(1) при $z_0 \neq -\dfrac{d}{c}$ и $z_0 \neq \infty$ имеем $\Lambda'(z_0) = \dfrac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2} \neq 0$, что и требовалось;

(2) при $z_0 = -\dfrac{d}{c}$ получаем $\Lambda(z_0) = \infty$; рассмотреть самостоятельно;

(3) случай $z_0 = \infty$ также оставляем читателю. □

1.4.2.2. *Сохранение углов между путями.*

Прежде чем формулировать следующее свойство ДЛО, докажем одно вспомогательное утверждение.

Пусть $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — путь, дифференцируемый в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Если $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, то

$$\frac{d}{dt}\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t_0} = \dot\gamma(t_0) = \dot x(t_0) + i\dot y(t_0).$$

1.4.11. Определение. Если $\dot\gamma(t_0) \neq 0$, то $\dot\gamma(t_0)$ называется *касательным вектором к пути* γ в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ (соответствующим параметру t_0).

1.4.12. Определение. Пусть $\gamma_j\colon [\alpha_j, \beta_j] \to \mathbb{C}$, $j \in \{1, 2\}$ — пути, $t_j \in (\alpha_j, \beta_j)$, $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. Пусть существуют $\dot\gamma_j(t_j) \neq 0$, $j \in \{1, 2\}$. *Углом между путями* γ_1 *и* γ_2 *в точке* z_0 (соответствующим параметрам t_1 и t_2) называется *направленный* угол между касательными векторами $\dot\gamma_1(t_1)$ и $\dot\gamma_2(t_2)$ (вращаем $\dot\gamma_1(t_1)$ в ближайшую сторону до совпадения с $\dot\gamma_2(t_2)$, учитываем направление вращения, значение угла лежит в пределах $(-\pi, \pi]$).

1.4.13. Лемма. *Пусть* $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *— путь,* $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *и пусть существует производная* $\dot\gamma(t_0)$. *Если функция* f *непрерывна в окрестности точки* $z_0 = \gamma(t_0)$ *и* $\mathbb{C}$*-дифференцируема в точке* z_0*, то в некоторой окрестности точки* t_0 *определен путь* $\sigma(t) = f(\gamma(t))$*, причем*

$$\dot\sigma(t_0) = \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t_0} = f'(z_0)\dot\gamma(t_0). \tag{1.4.1}$$

В частности, если $\dot\gamma(t_0) \neq 0$ *и* $f'(z_0) \neq 0$*, то* $\dot\sigma(t_0) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку γ — путь, а функция f непрерывна в окрестности $z_0 = \gamma(t_0)$, композиция $f \circ \gamma$ является путем (непрерывна) в окрестности точки t_0. Поскольку путь γ дифференцируем в точке t_0, имеем $\Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t) = \dot\gamma(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$. Наконец, в силу $\mathbb{C}$-дифференцируемости функции f в точке z_0 справедливо представление

$$\Delta(f\circ\gamma)\big|_{t_0}(\Delta t) = f\circ\gamma(t_0+\Delta t) - f\circ\gamma(t_0) =$$
$$= f\big(\gamma(t_0) + \Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t)\big) - f\big(\gamma(t_0)\big) =$$
$$= f'(z_0)\Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t) + o(\Delta\gamma|_{t_0}(\Delta t)) = f'(z_0)\dot\gamma(t_0)\Delta t + o(\Delta t),\ \Delta t\to 0,$$

что и означает справедливость (1.4.1). $\square$

1.4.14. Следствие. *Пусть γ_1 и γ_2 — пути, дифференцируемые в точках t_1 и t_2 соответственно, причем $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, $\dot\gamma_1(t_1) \neq 0$, $\dot\gamma_2(t_2) \neq 0$. Пусть функция f непрерывна в окрестности точки z_0 и существует $f'(z_0)\neq 0$. Тогда угол между путями $f\circ\gamma_1$ и $f\circ\gamma_2$ в точке $f(z_0)$ равен углу между путями γ_1 и γ_2 в точке z_0 (соответственно параметрам t_1 и t_2).*

Доказательство. По лемме 1.4.13 имеем $(f\circ\gamma_j)^{\cdot}(t_j) = f'(z_0)\dot\gamma_j(t_j)$, $j\in\{1,2\}$, т. е. оба касательных вектора умножаются на одно и то же ненулевое комплексное число $f'(z_0)$. Поскольку это равносильно композиции растяжения и поворота, угол между касательными векторами сохраняется с учетом направления. $\square$

1.4.2.3. *Круговое свойство.*

1.4.15. Определение. *Обобщенной окружностью* в $\mathbb{C}^\bullet$ называется обычная окружность в $\mathbb{C}$ либо прямая в $\mathbb{C}$, дополненная точкой ∞.

1.4.16. Лемма. *Всякая обобщенная окружность в $\mathbb{C}^\bullet$ (ее часть в $\mathbb{C}$) задается уравнением*

$$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0, \quad A, C\in\mathbb{R}, \quad B\in\mathbb{C}, \quad |B|^2 > AC. \tag{1.4.2}$$

Обратно, всякое такое уравнение с указанными условиями на постоянные параметры задает обобщенную окружность в $\mathbb{C}^\bullet$ (точнее — ее часть в $\mathbb{C}$), т. е. окружность или прямую.

Доказательство. Всякая окружность в $\mathbb{C}$ задается уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0, \quad a, b\in\mathbb{R}, \quad R > 0.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, выразив x и y через z и $\overline{z}$ ($x = (z+\overline{z})/2$, $y = (z-\overline{z})/2$):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 =$$
$$= |z|^2 - 2a\frac{z+\overline{z}}{2} - 2b\frac{z-\overline{z}}{2i} + C = z\overline{z} + (-a+bi)z + (-a-bi)\overline{z} + C =$$
$$= z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C,$$

где $A = 1$, $C = a^2+b^2-R^2$, $B = -a-bi$. Таким образом, уравнение окружности имеет нужный вид (очевидно, что $|B|^2 > AC$).

Случай прямой в $\mathbb{C}$ оставляем читателю.

Чтобы доказать, что любое уравнение вида (1.4.2) задает обобщенную окружность (ее часть в $\mathbb{C}$), достаточно подставить в (1.4.2) выражения z и $\overline{z}$ через x и y (проверить!). $\square$

1.4.17. Предложение. *Произвольное ДЛО отображает обобщенную окружность на обобщенную окружность.*

Доказательство. Рассмотрим два случая. Пусть сначала $c = 0$; тогда $a \neq 0$ и $d \neq 0$ (без ограничения общности, положим $d = 1$). Пусть $k = |a|, \alpha = \arg a$, тогда $\Lambda(z) = ke^{i\alpha}(z + b/a)$ есть последовательная композиция сдвига (параллельного переноса на вектор b/a), поворота на угол α и гомотетии с коэффициентом $k > 0$. Каждое их этих отображений, очевидно, окружности переводит в окружности и прямые в прямые. Точка ∞ неподвижна.

Пусть теперь $c \neq 0$, $z_0 = -d/c$. Тогда

$$\Lambda(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(z - z_0) + \widetilde{b}}{c(z - z_0)} = A + \frac{B}{z - z_0},$$

где $\widetilde{b}$, A, B — постоянные в $\mathbb{C}$, $B = |B|e^{i\alpha} \neq 0$. Поскольку гомотетия, поворот и сдвиги сохраняют обобщенные окружности, остается доказать, что отображение $z \mapsto 1/z$ переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности.

Напомним, что всякая обобщенная окружность задается уравнением (1.4.2). Подставим в него $z = 1/w$; получим

$$Cw\overline{w} + Bw + \overline{B}\overline{w} + A = 0,$$

т. е. снова уравнение вида (1.4.2) при $A' = C, B' = \overline{B}, C' = A$ с условиями $|B'|^2 > A'C'$. Для завершения доказательства кругового свойства остается еще отдельно рассмотреть случаи, когда точки $z = 0$ и $z = \infty$ лежат на исходной обобщенной окружности. $\square$

1.4.2.4. *Сохранение симметрии относительно обобщенной окружности.*

1.4.18. Определение. Пусть S — окружность в $\mathbb{C}$ с центром в точке a, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$. Точка z^* на луче az называется *симметричной точке z относительно S*, если $|z - a||z^* - a| = r^2$. Кроме того, считается, что $a^* = \infty$, $\infty^* = a$.

Точки, симметричные относительно прямой, определяются как обычно.

1.4.19. Пример. Пусть $S = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ — единичная окружность с центром в нуле, $z \neq 0$. Тогда $z^* = 1/\overline{z}$. Действительно, $\arg 1/\overline{z} = \arg z$, $|z| \cdot |1/\overline{z}| = 1$.

1.4.20. Лемма. *Точки z и $z^* \neq z$ (т. е. не лежащие на S) симметричны относительно обобщенной окружности S если и только если* *всякая обобщенная окружность* Γ, *проходящая через* z *и* z^*, *перпендикулярна* S.

1.4.21. Упражнение. Доказать лемму 1.4.20, используя школьную теорему о секущей и касательной.

1.4.22. Предложение. *Пусть* z *и* z^* — *точки, симметричные относительно обобщенной окружности* S, Λ — *произвольное ДЛО. Тогда* $\Lambda(z)$ *и* $\Lambda(z^*)$ *симметричны относительно* $\Lambda(S)$.

Доказательство. Если $z = z^*$, то утверждение справедливо. Далее считаем, что $z \neq z^*$. Пусть Γ — произвольная обобщенная окружность, проходящая через $\Lambda(z)$ и $\Lambda(z^*)$. Согласно предложению 1.4.17, $\Lambda^{-1}(\Gamma)$ — обобщенная окружность, проходящая через точки z и z^*. Согласно лемме 1.4.20, $\Lambda^{-1}(\Gamma) \perp S$. По следствию 1.4.14, $\Gamma \perp \Lambda(S)$. Таким образом, мы получили, что всякая обобщенная окружность, проходящая через $\Lambda(z)$ и $\Lambda(z^*)$, ортогональна $\Lambda(S)$. Остается снова применить лемму 1.4.20. □

1.4.2.5. *Свойство трех точек. Сохранение сложного отношения.*

1.4.23. Предложение. *Пусть дана тройка попарно различных точек* z_1, z_2, z_3 *в* $\mathbb{C}^\bullet$ *и еще одна тройка попарно различных точек* w_1, w_2, w_3 *в* $\mathbb{C}^\bullet$. *Тогда существует единственное ДЛО* Λ *такое, что* $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. Пусть $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \infty$, $\zeta_3 = 1$, а точки z_1, z_2, z_3 лежат в $\mathbb{C}$. Определим

$$\Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

В случае, если одна из точек z_1, z_2, z_3 равна ∞, определение модифицируется естественным образом; например, если $z_1 = \infty$, то $\Lambda_{\infty,z_2,z_3}(z) = (z_3 - z_2)(z - z_2)^{-1}$. Ясно, что $\Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_j) = \zeta_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Искомое ДЛО $\Lambda = \Lambda^{w_1,w_2,w_3}_{z_1,z_2,z_3} = \left(\Lambda_{w_1,w_2,w_3}\right)^{-1} \circ \Lambda_{z_1,z_2,z_3}$ обладает нужными свойствами: $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Отметим, что на практике ответ удобнее записывать сначала в неявной форме $\Lambda_{w_1,w_2,w_3}(w) = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z)$, а затем отсюда выражать w явно.

1.4.24. Упражнение. Доказать, что $\Lambda = \Lambda^{w_1,w_2,w_3}_{z_1,z_2,z_3}$ — единственное ДЛО со свойствами $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

□

1.4.25. Определение. *Сложным (ангармоническим) отношением четырех различных точек* z_1, z_2, z_3, $z_4 \in \mathbb{C}^\bullet$ называется величина

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_4).$$

1.4.26. Предложение. *Всякое ДЛО сохраняет сложное отношение любых четырех (различных) точек.*

Доказательство. Пусть Λ — произвольное ДЛО, z_1, z_2, z_3, z_4 — любые разные точки в $\mathbb{C}^\bullet$. Пусть $w_j = \Lambda(z_j)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. В обозначениях предложения 1.4.23, нужно доказать, что

$$\Lambda_{w_1,w_2,w_3}(w_4) = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_4).$$

Согласно предложению 1.4.23, единственное ДЛО, переводящее тройку (z_1, z_2, z_3) в тройку (w_1, w_2, w_3) имеет вид $\left(\Lambda_{w_1,w_2,w_3}\right)^{-1} \circ \Lambda_{z_1,z_2,z_3}$. Но ДЛО Λ тоже переводит тройку (z_1, z_2, z_3) в тройку (w_1, w_2, w_3). Следовательно,

$$\Lambda = \left(\Lambda_{w_1,w_2,w_3}\right)^{-1} \circ \Lambda_{z_1,z_2,z_3} \Leftrightarrow \Lambda_{w_1,w_2,w_3} \circ \Lambda = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}.$$

В частности, выполнено равенство $\Lambda_{w_1,w_2,w_3} \circ \Lambda(z_4) = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_4)$, т. е. $\Lambda_{w_1,w_2,w_3}(w_4) = \Lambda_{z_1,z_2,z_3}(z_4)$, что и требовалось. □

1.4.27. Упражнение. Четыре различные точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^\bullet$ лежат на одной обобщенной окружности в точности тогда, когда выполнено включение $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

§ 1.5. ДЛО-автоморфизмы B_1, Π_+, $\mathbb{C}$. Функция Жуковского. Тригонометрические функции. Многозначные функции и их однозначные ветви

1.5.1. Группы ДЛО-автоморфизмов B_1, Π_+, $\mathbb{C}$.

Обозначим через B_1 открытый круг с радиусом 1 и центром в нуле.

1.5.1. Предложение. *Группа ДЛО-автоморфизмов B_1 — это совокупность всех ДЛО вида*

$$\Lambda(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{\overline{a}z-1}, \quad \theta \in (-\pi,\pi], \quad a \in B_1. \tag{1.5.1}$$

Доказательство. Пусть ДЛО Λ является автоморфизмом B_1 на себя и точка $a \in B_1$ такова, что $\Lambda(a) = 0$. По предложению 1.4.22 точка a^*, симметричная точке a относительно ∂B_1, перейдет в точку ∞, симметричную точке 0 относительно $\Lambda(\partial B_1) = \partial B_1$. Если $a = 0$, то

$$\Lambda(z) = kz = -k\frac{z-a}{\overline{a}z-1}$$

для некоторого $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$. Если $a \neq 0$, то

$$\Lambda(z) = k_1\frac{z-a}{z-1/\overline{a}} = k_2\frac{z-a}{\overline{a}z-1}, \quad k_2 \in \mathbb{C}.$$

Поскольку $|\Lambda(1)| = 1$ и $|1-a| = |1-\overline{a}|$, имеем $1 = |k_2||(1-a)(\overline{a}-1)^{-1}| = |k_2|$, откуда $k_2 = e^{i\theta}$ для некоторого $\theta \in (-\pi,\pi]$. Таким образом, любой ДЛО-автоморфизм B_1 имеет вид (1.5.1).

Покажем, что любое ДЛО вида (1.5.1) является автоморфизмом B_1 на себя. Поскольку точки $0 = \Lambda(a)$ и $\infty = \Lambda(1/\overline{a})$ должны быть симметричны относительно $\Lambda(\partial B_1)$, то $\Lambda(\partial B_1)$ является окружностью с центром в нуле. Так как $|\Lambda(1)| = 1$, то $\Lambda(\partial B_1) = \partial B_1$. Теперь, поскольку $\Lambda(a) = 0$ и всякое ДЛО есть гомеоморфизм $\mathbb{C}^\bullet$ на $\mathbb{C}^\bullet$, нетрудно показать, что B_1 отображается на B_1. $\square$

Пусть $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость.

1.5.2. Предложение. *Группа ДЛО-автоморфизмов Π_+ — это совокупность всех ДЛО вида*

$$\Lambda(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0. \tag{1.5.2}$$

Доказательство. Пусть Λ — ДЛО-автоморфизм Π_+ на Π_+. Тогда вещественная прямая $\mathbb{R}$ переходит в себя. Очевидно, что найдутся три различные точки $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, такие, что $u_1 = \Lambda(x_1)$, $u_2 = \Lambda(x_2)$, $u_3 = \Lambda(x_3) \in \mathbb{R}$. Согласно предложению 1.4.23, отображение $w = \Lambda(z)$ определяется равенством

$$\frac{z-x_1}{z-x_2} : \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} = \frac{w-u_1}{w-u_2} : \frac{u_3-u_1}{u_3-u_2},$$

откуда легко следует, что

$$\Lambda(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Далее, поскольку $\Lambda(i) \in \Pi_+$, имеем

$$\operatorname{Im}\Lambda(i) = \operatorname{Im}\frac{ai+b}{ci+d} = \operatorname{Im}\frac{(ai+b)(d-ci)}{(d+ci)(d-ci)} = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} > 0,$$

откуда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$.

Обратно: любое ДЛО вида (1.5.2) переводит $\mathbb{R}$ на себя, а точку i в $\Lambda(i) \in \Pi_+$. Остается воспользоваться тем, что всякое ДЛО — гомеоморфизм $\mathbb{C}^\bullet$ на себя. □

1.5.3. Упражнение. Доказать, что группа ДЛО-автоморфизмов $\mathbb{C}$ — это совокупность всех ДЛО вида $\Lambda(z) = az+b$, где $a,b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$.

1.5.2. Функция Жуковского.

Определим *функцию Жуковского*:

$$Ж(z) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) = Ж\Big(\frac{1}{z}\Big).$$

Так как ее производная имеет вид

$$Ж'(z) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{z^2}\Big),$$

то функция Ж является локально конформной в $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$. На самом деле функция Ж конформна и в точках $z = 0$ и $z = \infty$ (проверить по определению).

Определим функции $\Lambda_1(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ и $S(z) = z^2$. Непосредственно проверяется, что $\Lambda_1^{-1}(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$ и $Ж = \Lambda_1^{-1} \circ S \circ \Lambda_1$ (композиция всегда действует справа налево).

Найдем некоторые *максимальные области конформности* функции Ж, т. е. такие области конформности, которые не содержатся ни в каких бо́льших областях конформности (для функции Ж).

Пусть $D_1 = \mathbb{C}^\bullet \setminus \overline{B}_1$. На рисунке 5.1 показано: как преобразуется эта область при последовательном применении отображений Λ_1, S, Λ_1^{-1}. Ясно, что D_1 является областью конформности. Ее нельзя увеличить, поскольку $Ж(z) = Ж(1/z)$. Положим $\Omega_1 = Ж(D_1)$. Обратное к Ж отображение, переводящее Ω_1 в D_1, обозначается через $Ж_o^{-1}$.

Замечание. Открытый круг B_1 тоже является максимальной областью конформности Ж. Аналогично можно определить обратное к функции Ж отображение $Ж_i^{-1}$, переводящее область Ω_1 в B_1.

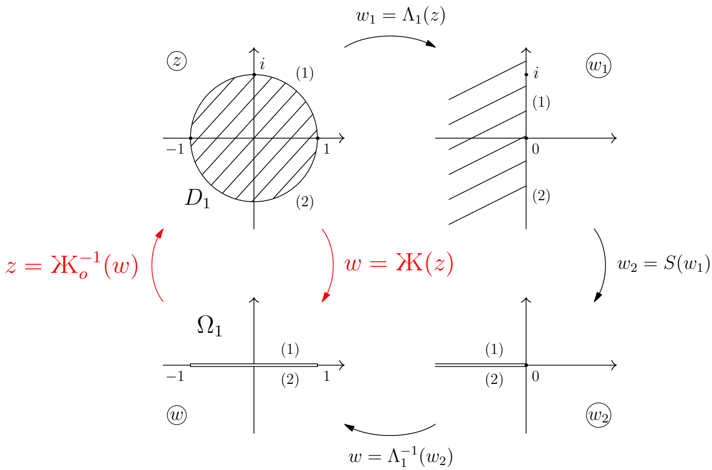

Рис. 5.1.

Две другие *основные* максимальные области конформности функции Жуковского — верхняя и нижняя полуплоскости. На рисунке 5.2 представлено преобразование области $D_2 = \Pi_+$ под последовательным действием функций Λ_1, S, Λ_1^{-1}. В частности,

$$\Omega_2 = Ж(D_2) = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)).$$

Обратное отображение из Ω_2 в D_2 обозначается $Ж_+^{-1}$. Аналогично определяется функция $Ж_-^{-1}$, конформно отображающая Ω_2 на полуплоскость Π_-.

1.5.3. Тригонометрические функции.

Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного определяются через экспоненту:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \ \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \ \tanh z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

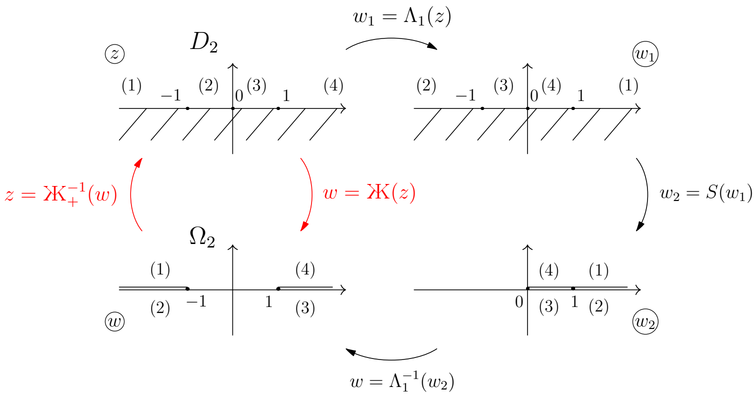

Рис. 5.2.

1.5.4. Упражнение. Найти точки $z \in \mathbb{C}$, для которых $\sin z = 0$ или $\cos z = 0$.

1.5.5. Упражнение. Доказать, что для всех $z \in \mathbb{C}$ верны тождества $\sin z = \cos(\pi/2 - z)$ и $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

При $0 < \alpha < \beta < +\infty$ через $\Pi'_{(\alpha,\beta)}$ обозначим вертикальную полосу $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$. Найдем одну из *максимальных областей конформности* отображения $w = \cos z$. В силу равенства $\cos z = Ж(e^{iz})$ и четности функции $\cos z$ одна из возможных таких областей — полоса $\Pi'_{(0,\pi)}$. Здесь конформность функции $\cos z$ действительно имеет место, поскольку функция $w_1 = e^{z_1}$ конформна в полосе $\{0 < \operatorname{Im} z_1 < \pi\}$, а функция $w = Ж(w_1)$ конформна в Π_+. Образ Ω_2 области $\Pi'_{(0,\pi)}$ при отображении $w = \cos z$ и определение функции $z = \arccos w$ приведены на рисунке 5.3.

1.5.6. Упражнение. Пользуясь формулой $\sin z = \cos(\pi/2 - z)$, найти образ (он равен Ω_2) области $\Pi'_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ при конформном отображении $w = \sin z$. Возникающая обратная функция $(\Omega_2 \to \Pi'_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})$ обозначается через $\arcsin w$.

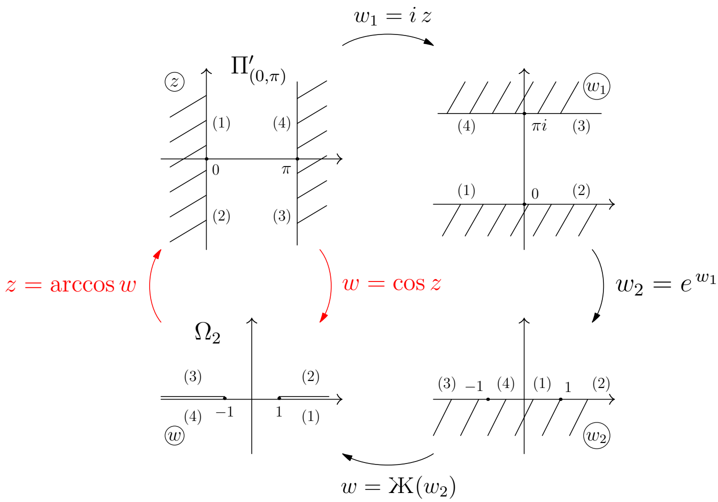

Рис. 5.3.

1.5.7. Определение. Определим многозначные функции, обратные к функциям $\cos z$ и $\sin z$ соответственно:

$$z \in \operatorname{Arccos} w \Leftrightarrow w = \cos z; \quad z \in \operatorname{Arcsin} w \Leftrightarrow w = \sin z.$$

Чтобы найти максимальную область конформности функции $w = \operatorname{tg} z$, преобразуем эту функцию:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = -i\Lambda_1\big(e^{2iz}\big),$$

где $\Lambda_1(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.

Одна из максимальных областей конформности функции $\operatorname{tg}(z)$ — вертикальная полоса $\Pi'_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Ее образ Ω_3 при отображении $w = \operatorname{tg} z$ и определение функции $z = \operatorname{arctg} w$ приведены на рисунке 5.4.

1.5.8. Определение. Определим многозначные функции, обратные к функциям $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ соответственно:

$$z \in \operatorname{Arctg} w \Leftrightarrow w = \operatorname{tg} z; \quad z \in \operatorname{Arcctg} w \Leftrightarrow w = \operatorname{ctg} z.$$

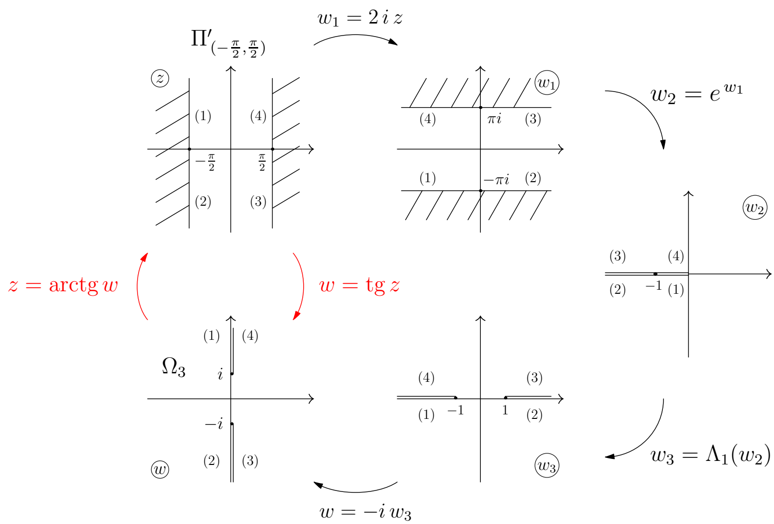

Рис. 5.4.

1.5.9. Упражнение. Доказать, что вертикальная полоса $\Pi'_{(0,\pi)}$ является максимальной областью конформности функции $\operatorname{ctg} z$. Определить функцию $\operatorname{arcctg} w$.

1.5.10. Упражнение. Найти образ вертикальной полосы $\Pi'_{(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$.

1.5.11. Упражнение. Доказать, что $(\operatorname{arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$ на Ω_3.

1.5.4. Многозначные функции и их однозначные ветви.

1.5.12. Определение. Пусть $E \subseteq \mathbb{C}^\bullet$, $E \neq \varnothing$. Пусть F сопоставляет каждой точке $z \in E$ непустое множество $F(z) \subseteq \mathbb{C}^\bullet$. Тогда говорят, что *на E задана многозначная функция* (*м-функция*) F.

1.5.13. Определение. Пусть F — м-функция на E, $E_1 \subset E$, $E_1 \neq \varnothing$. Пусть $f_1 \colon E_1 \to \mathbb{C}^\bullet$ — функция, такая, что $f_1(z) \in F(z)$ для всех $z \in E_1$. Тогда f_1 называется *однозначной ветвью* м-функции F на E_1.

Замечание. Если функция f_1 из определения 1.5.13 непрерывна на E_1 (или голоморфна, или конформна в *области* E_1), то f_1 называется *непрерывной* (*или голоморфной, или конформной*) *ветвью* м-функции F на E_1 (без добавления слова «однозначной», что здесь всегда подразумевается).

1.5.14. Пример. (1) $\operatorname{Ln} z$ — м-функция на множестве $E = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\ln_{(\alpha,\alpha+2\pi)}(z)$ является ее конформной (и голоморфной) ветвью на $V_{(\alpha,\alpha+2\pi)}$.

(2) $F(z) = \sqrt[n]{z}$ — м-функция на множестве $E = \mathbb{C}^\bullet$ (полагаем $\sqrt[n]{\infty} := \infty$). При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\sqrt[n]{z}_{(\alpha,\alpha+2\pi)}$ на $V_{(\alpha,\alpha+2\pi)}$ — ее конформная (и голоморфная) ветвь (см. примеры 1.3.4 и 1.4.3, упражнение 1.3.6).

1.5.15. Упражнение. М-функция $F(z) = \operatorname{Arctg} z$ определена на множестве $\mathbb{C}^\bullet \setminus \{\pm i\}$. Напомним, что функция $\operatorname{tg} z$ принимает все значения из $\mathbb{C}^\bullet \setminus \{\pm i\}$ (в точках $z_k = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, доопределяем ее по непрерывности: $\operatorname{tg} z_k = \infty$). Функция $f_1(z) = \operatorname{arctg} z$ — голоморфная ветвь м-функции $\operatorname{Arctg} z$ на множестве $E_1 = \Omega_3$ (см. рис. 5.4).

1.5.16. Пример. М-функция $\operatorname{Arg} z$ определена на множестве $\mathbb{C}_\flat := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Функция $f_1(z) = \arg z$ — непрерывная ветвь м-функции $\operatorname{Arg} z$ на множестве $E_1 = \mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Однако очевидно, что f_1 не является голоморфной ветвью м-функции $\operatorname{Arg} z$.

1.5.5. Функции z^p и a^z.

Зафиксируем $p \in \mathbb{C}$ и определим м-функцию

$$z^p = e^{p \operatorname{Ln} z} = \{e^{pw_k} : w_k \in \operatorname{Ln} z\}, \quad z \in \mathbb{C}_\flat.$$

Тогда функция $f_1(z) = z^p_{(o)} = e^{p \ln z}$ — голоморфная ветвь z^p в $\mathbb{C}_-$. При этом $(z^p_{(o)})' = p z^{p-1}_{(o)}$ в $\mathbb{C}_-$.

1.5.17. Упражнение. Найти i^i.

1.5.18. Упражнение. Найти какую-либо максимальную область конформности функции $z^i_{(o)}$.

Пусть теперь фиксировано $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. По определению положим

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = \{e^{zw_k} : w_k \in \operatorname{Ln} a\}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $a^z_{(o)} = e^{z \ln a} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ — *целая* ветвь м-функции a^z. При этом

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z(\ln |a| + i\cdot(\arg a + 2\pi k))} = e^{z \ln a} e^{2\pi k i z} = a^z_{(o)} e^{2\pi k i z}.$$

Таким образом, м-функция a^z «распадается» на счетное число целых ветвей.

§ 1.6. Непрерывная ветвь м-функции $\mathrm{Arg}(z)$ вдоль пути. Индекс пути относительно точки. Эквивалентные пути. Действия с кривыми. Спрямляемые пути и кривые. Интеграл вдоль кривой по комплексной переменной

1.6.1. Непрерывная ветвь м-функции $\mathrm{Arg}(z)$ вдоль пути.

1.6.1. Теорема. *Пусть* $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}_\flat = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *— путь. Тогда м-функция* $F(t) = \mathrm{Arg}(\gamma(t))$ *имеет непрерывную ветвь* $\varphi_0(t)$ *на* $[\alpha,\beta]$*, причем все непрерывные на* $[\alpha,\beta]$ *ветви м-функции* F *имеют вид* $\varphi_k(t) = \varphi_0(t) + 2\pi k$*,* $k\in\mathbb{Z}$*.*

Доказательство. Положим $\mathbb{C}_- = \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$. Докажем существование хотя бы одной непрерывной ветви м-функции F на всем $[\alpha,\beta]$.

Пусть сначала $[\gamma] = \gamma([\alpha,\beta]) \subset \mathbb{C}_-$. Тогда полагаем $\varphi_0(t) = \arg\gamma(t)$ на $[\alpha,\beta]$. Аналогично, если $[\gamma]\subset\mathbb{C}_+$, то положим $\varphi_0(t) = \underset{(0,2\pi)}{\arg}\gamma(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$.

В общем случае разбиваем отрезок $I = [\alpha,\beta]$ на $N\in\mathbb{N}$ равных последовательных отрезков $I_n = [\alpha_{n-1},\alpha_n]$, где $\alpha = \alpha_0 < \ldots < \alpha_N = \beta$, так, чтобы $[\gamma|_{I_n}]$ целиком содержался в $\mathbb{C}_+$ или в $\mathbb{C}_-$ для каждого $n\in\{1,\ldots,N\}$. Поясним, почему такое разбиение существует. Поскольку $[\gamma]$ — компакт в $\mathbb{C}$, не содержащий точку 0, имеем $\mathrm{d}(0,[\gamma]) = \rho > 0$. В силу равномерной непрерывности γ на I, существует такое $\varepsilon > 0$, что $|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)| < \rho$ для любых t_1,t_2 из I с условием $|t_1-t_2|<\varepsilon$. Остается для этого ε найти натуральное N с условием $(\beta-\alpha)/N < \varepsilon$.

Пусть $\psi_n(t) = \arg\gamma(t)|_{I_n}$ при $[\gamma(t)|_{I_n}]\subset\mathbb{C}_-$, и $\psi_n(t) = \arg_{(0,2\pi)}\gamma(t)|_{I_n}$ в противном случае (тогда $[\gamma(t)|_{I_n}]\subset\mathbb{C}_+$), $n\in\{1,\ldots,N\}$.

Положим $\varphi_0(t) = \psi_1(t)$ на I_1. Тогда $\psi_2(\alpha_1) = \varphi_0(\alpha_1) + 2\pi k_1$ для некоторого $k_1\in\mathbb{Z}$. Положим $\varphi_0(t) = \psi_2(t) - 2\pi k_1$ на I_2. Тогда $\psi_3(\alpha_2) = \varphi_0(\alpha_2) + 2\pi k_2$ для некоторого $k_2\in\mathbb{Z}$. Положим $\varphi_0(t) = \psi_3(t) - 2\pi k_2$ на I_3 и т. д. По построению, функция $\varphi_0(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ и для всех $t\in[\alpha,\beta]$ имеем $\varphi_0(t)\in\mathrm{Arg}(\gamma(t))$, т. е. φ_0 — непрерывная ветвь м-функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на $[\alpha,\beta]$.

Пусть теперь φ — еще одна непрерывная ветвь многозначной функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на $[\alpha,\beta]$. Тогда $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)-\varphi_0(t)}{2\pi}$ — непрерывная на $[\alpha,\beta]$ функция, принимающая во всех точках целочисленные значения, и, следовательно, $\psi(t)\equiv k$ на $[\alpha,\beta]$ для некоторого $k\in\mathbb{Z}$. Отсюда получаем $\varphi(t)\equiv\varphi_0(t)+2\pi k$. С другой стороны, очевидно, что все функции вида $\varphi_k(t) = \varphi_0(t) + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, являются непрерывными ветвями м-функции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на $[\alpha,\beta]$. □

1.6.2. Индекс пути относительно точки.

1.6.2. Определение. Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}_\flat$ — путь и φ — какая-либо непрерывная на $[\alpha,\beta]$ ветвь м-функции $\operatorname{Arg}(\gamma(t))$. Величина

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z)=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$$

называется *приращением* (*полярного*) *аргумента* вдоль пути γ.

Замечание. Из теоремы 1.6.1 следует, что значение $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z)$ определено корректно, т. е. не зависит от выбора непрерывной ветви φ м-функции $\operatorname{Arg}\gamma(t)$.

1.6.3. Определение. Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ — путь, и пусть $a\notin[\gamma]$. Тогда путь $\gamma_{-a}(t)=\gamma(t)-a$, $t\in[\alpha,\beta]$, не проходит через точку 0 и определен *индекс пути γ относительно точки a*:

$$\operatorname{ind}_\gamma(a)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_{-a}}\operatorname{Arg}(z).$$

Замечание. Функция $f(z)=\operatorname{ind}_\gamma(z)$ непрерывна в $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$. Для доказательства этого факта достаточно разбить путь γ на «маленькие» пути (как это сделано в доказательстве теоремы 1.6.1) и установить нужный факт для каждого из этих путей.

В случае замкнутого пути γ функция $f(z)$ постоянна (и целочисленна) в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$.

Следующая теорема будет доказана в Гл. 3 (теорема **??**).

1.6.4. Теорема. *Пусть γ — замкнутый жорданов путь в $\mathbb{C}$. По теореме Жордана, $\mathbb{C}\setminus[\gamma]=D\sqcup\Omega$, где D — ограниченная компонента $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$, Ω — неограниченная. Тогда утверждается, что* $\operatorname{ind}_\gamma(z)\equiv 0$ *для всех $z\in\Omega$,* $\operatorname{ind}_\gamma(z)\equiv 1$ (*или* $\operatorname{ind}_\gamma(z)\equiv -1$) *для всех $z\in D$.*

В случае, когда $\operatorname{ind}_\gamma(z)\equiv 1$ для всех $z\in D$, путь γ называется *положительно ориентированным относительно области D*. Если же $\operatorname{ind}_\gamma(z)\equiv -1$ для всех $z\in D$, то γ *отрицательно ориентирован относительно D*.

Приведем подробный план доказательства предыдущей теоремы для случая произвольной замкнутой жордановой ломаной (для нее у нас есть простое доказательство теоремы Жордана). Пусть Σ^+ — замкнутая ориентированная жорданова ломаная с первым ребром $[v_1,v_2]^+$, и пусть $a=(v_1+v_2)/2$. Обозначим через Γ^+ жорданову ломаную $\Sigma^+\setminus(v_1,v_2)$. Если точка $z^+\to a$ (соответственно, $z^-\to a$) по нормали к ребру $[v_1,v_2]^+$ *из неограниченной* (соответственно, *из ограниченной*) компоненты дополнения к $[\Sigma]$, то $\operatorname{ind}_{\Gamma^+}(z^+)-\operatorname{ind}_{\Gamma^+}(z^-)\to 0$. Нетрудно установить также, что $\operatorname{ind}_{\Sigma^+}(z^+)=0$. Остается заметить, что

$$\left|\operatorname{ind}_{[v_1,v_2]^+}(z^+)-\operatorname{ind}_{[v_1,v_2]^+}(z^-)\right|\to 1.$$

1.6.3. Эквивалентные пути. Действия с кривыми.

1.6.5. Определение. Пусть $\gamma_{1,2}\colon [\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}] \to \mathbb{C}$ — два пути. Они называются *эквивалентными* (обозначение: $\gamma_1 \simeq \gamma_2$), если существует возрастающий гомеоморфизм $h\colon [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha_2, \beta_2]$ с условием $\gamma_2(h(t)) = \gamma_1(t)$ при всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$.

1.6.6. Упражнение. Доказать, что $\simeq$ — отношение эквивалентности.

Класс эквивалентных путей (с представителем γ) называется *кривой*, которая обозначается через Γ (или $\{\gamma\}$). Корректно определен *носитель* $[\Gamma] = [\gamma]$ кривой Γ.

1.6.7. Упражнение. Если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, то $\mathrm{ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{ind}_{\gamma_2}(a)$ для всех $a \in \mathbb{C} \setminus [\gamma_1] = \mathbb{C} \setminus [\gamma_2]$. Следовательно, корректно определен $\mathrm{ind}_\Gamma(a)$ — *индекс* кривой Γ относительно точки $a \notin [\Gamma]$.

Пусть $\gamma_{1,2}\colon [\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}] \to \mathbb{C}$ — два пути, причем $\beta_1 = \alpha_2$ и $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\alpha_2)$. Тогда определен путь $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2\colon [\alpha_1, \beta_2] \to \mathbb{C}$ по формуле

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \gamma_2(t), & t \in [\alpha_2, \beta_2]. \end{cases}$$

Пусть Γ_1 и Γ_2 — кривые, причем конец Γ_1 совпадает с началом Γ_2. Тогда можно определить кривую $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Для этого нужно взять какие-либо представители γ_1 и γ_2 кривых Γ_1 и Γ_2 соответственно (т. е. $\Gamma_1 = \{\gamma_1\}$ и $\Gamma_2 = \{\gamma_2\}$), определенных (запараметризованных) на отрезках $[0, 1]$ и $[1, 2]$ соответственно, а затем рассмотреть кривую $\Gamma = \{\gamma_1 \cup \gamma_2\}$. Нетрудно доказать корректность этого определения. Порядок путей и кривых в указанной операции *объединения путей и кривых*, очевидно, важен. Вопрос о коммутативности смысла не имеет.

1.6.8. Определение. Пусть $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — путь. Тогда путь

$$\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t), \quad \gamma^-\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$$

называется *противоположным* к γ. Очевидным образом корректно определяется кривая Γ^-, противоположная кривой Γ.

1.6.9. Упражнение. Если $a \notin [\Gamma_1] \cup [\Gamma_2]$ и определена кривая $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то $\mathrm{ind}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}(a) = \mathrm{ind}_{\Gamma_1}(a) + \mathrm{ind}_{\Gamma_2}(a)$.

1.6.10. Упражнение. Если $a \notin [\Gamma]$, то $\mathrm{ind}_{\Gamma^-}(a) = -\mathrm{ind}_\Gamma(a)$.

1.6.4. Спрямляемые пути и кривые.

Пусть $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — путь, $T = \{\alpha = t_0, \ldots, t_N = \beta\}$ — *разбиение* отрезка $[\alpha, \beta]$ порядка N ($N \in \mathbb{N}$); $\Delta t_n = t_n - t_{n-1} > 0$ ($n \in \{1, \ldots, N\}$). Число $\lambda(T) = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} \Delta t_n$ называется *диаметром разбиения* T.

Сопоставим каждому разбиению $T = \{\alpha = t_0, \ldots, t_N = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ величину $l_T(\gamma) = \sum_{n=1}^N |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})|$ — длину вписанной в γ ломаной, соответствующей T.

1.6.11. Определение. *Длиной пути* γ называется (конечная или бесконечная) величина

$$l(\gamma) = \sup_T l_T(\gamma).$$

Если $l(\gamma) < +\infty$, то путь γ называется *спрямляемым*.

1.6.12. Упражнение. Доказать, что путь γ спрямляем, если и только если существует и конечен предел $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} l_T(\gamma)$, причем он равен $l(\gamma)$.

Замечание. Легко видеть, что если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, то $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$; в частности, γ_1 и γ_2 одновременно спрямляемые или нет. Поэтому корректно определены понятия *спрямляемой кривой* и ее *длины* $l(\{\gamma\}) := l(\gamma)$.

1.6.13. Упражнение. Пусть $K(t)$ — канторова лестница на $[0,1]$. Определим путь $\gamma(t) = t + iK(t)$ на $[0,1]$ («график» K на плоскости Oxy, $z = x + iy$). Доказать, что $l(\gamma) = 2$.

Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — спрямляемый путь, не постоянный ни на каком интервале $(\alpha_1,\beta_1) \subset [\alpha,\beta]$. Тогда функция $s(t) = l(\gamma|_{[\alpha,t]})$ непрерывна и строго возрастает, и, следовательно, является гомеоморфизмом $[\alpha,\beta]$ на $[0, l(\gamma)]$. Поэтому определены обратное отображение $t = t(s)$ и путь $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))\colon [0, l(\gamma)] \to \mathbb{C}$, $\widetilde{\gamma} \simeq \gamma$. Параметр s называется *натуральным параметром* для кривой $\Gamma = \{\gamma\}$, а путь $\widetilde{\gamma}$ ее *натуральной параметризацией*.

1.6.14. Определение. Путь $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ на $[\alpha,\beta]$ называется *гладким*, если $x(t)$ и $y(t)$ являются функциями класса $C^1([\alpha,\beta])$, причем $\dot\gamma(t) = \dot x(t) + i\dot y(t) \neq 0$ на $[\alpha,\beta]$.

1.6.15. Определение. Два гладких пути $\gamma_{1,2}\colon [\alpha_{1,2},\beta_{1,2}] \to \mathbb{C}$ называются *эквивалентными как гладкие пути*, если существует возрастающий диффеоморфизм (класса C^1 в обе стороны) $h\colon [\alpha_1,\beta_1] \to [\alpha_2,\beta_2]$ такой, что $\gamma_2(h(t)) = \gamma_1(t)$, $t \in [\alpha_1,\beta_1]$.

1.6.16. Упражнение. Эквивалентность гладких путей — отношение эквивалентности.

Класс эквивалентности гладких путей называется *гладкой кривой*.

1.6.17. Упражнение. Если γ_1 и γ_2 — гладкие пути, эквивалентные как обычные пути, то они эквивалентны и как гладкие пути.

1.6.18. Упражнение. Если $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — непрерывно дифференцируемый путь, то он спрямляем и $l(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\dot\gamma(t)|\,dt$.

1.6.19. Упражнение. Дать определения кусочно-гладкого пути, эквивалентности кусочно-гладких путей, кусочно-гладкой кривой.

1.6.5. Интеграл вдоль пути и кривой по комплексной переменной.

Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — путь, $f\colon [\gamma] \to \mathbb{C}$ — некоторая функция, $T = \{\alpha = t_0, \dots, t_N = \beta\}$ — разбиение $[\alpha,\beta]$. Пусть $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ — *выборка, подчиненная разбиению* T, т. е. $\tau_n \in [t_{n-1}, t_n]$ для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$. Определим *интегральную сумму*:

$$\Sigma_\gamma(T,\tau,f) = \sum_{n=1}^{N} f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)\bigl(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\bigr).$$

1.6.20. Определение. Если существует конечный предел

$$I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \Sigma_\gamma(T,\tau,f),$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения T с условием $\lambda(T) < \delta$ и для всякой выборки τ, подчиненной T, имеем $\bigl|I - \Sigma_\gamma(T,\tau,f)\bigr| < \varepsilon$, то он называется *интегралом от функции* f *вдоль пути* γ и обозначается

$$\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Функция f в этом случае называется *интегрируемой вдоль пути* γ *по комплексной переменной* z.

1.6.21. Упражнение. Пусть γ_1, γ_2 — два произвольные пути. Если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ и функция f определена на $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, то $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ и $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ существуют либо не существуют одновременно, и в первом случае они равны между собой. Следовательно, корректно определен *интеграл вдоль кривой* Γ *от функции* f.

1.6.22. Упражнение. Пусть для кривой Γ существуют интегралы $\int_\Gamma f_1(z)\,dz$ и $\int_\Gamma f_2(z)\,dz$. Тогда для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ существует интеграл

$$\int_\Gamma \bigl(\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)\bigr)\,dz = \lambda_1 \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \lambda_2 \int_\Gamma f_2(z)\,dz.$$

1.6.23. Упражнение. Пусть для кривых Γ_1 и Γ_2 определена кривая $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, и $f\colon [\Gamma] \to \mathbb{C}$. Если существуют интегралы $\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz$ и $\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$, то существует интеграл

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $E \neq \varnothing$. Через $C(E)$ обозначается пространство функций, *непрерывных* (по E) в каждой точке $a \in E$ и *ограниченных* на E. В $C(E)$ определяется *равномерная норма*

$$\|f\|_E = \sup_{z\in E} |f(z)|.$$

1.6.24. Теорема. *Пусть* $\gamma\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ — *спрямляемый путь, функция* f *непрерывна на* $[\gamma]$. *Тогда* $\int_\gamma f(z)\,dz$ *существует и выполняется неравенство*

$$\Bigl|\int_\gamma f(z)\,dz\Bigr| \leqslant \|f\|_{[\gamma]} l(\gamma). \tag{1.6.1}$$

Доказательство. Полагая $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ и $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, по определению интегралов через соответствующие интегральные суммы получаем

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f\bigl(\gamma(t)\bigr)\,d\gamma(t) = \\ = \int_\alpha^\beta u\bigl(x(t),y(t)\bigr)\,dx(t) - \int_\alpha^\beta v\bigl(x(t),y(t)\bigr)\,dy(t) + \\ + i\Bigl(\int_\alpha^\beta u\bigl(x(t),y(t)\bigr)\,dy(t) + \int_\alpha^\beta v\bigl(x(t),y(t)\bigr)\,dx(t)\Bigr),$$

где $\int_\alpha^\beta f\bigl(\gamma(t)\bigr)\,d\gamma(t)$ и другие интегралы в последней серии равенств являются интегралами Римана–Стилтьеса.

Докажем, например, существование интеграла

$$\int_\gamma u\,dx = \int_\alpha^\beta u\bigl(x(t),y(t)\bigr)\,dx(t)$$

Функция $u\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ как композиция непрерывных. Функция $x(t)$ имеет на $[\alpha,\beta]$ ограниченную вариацию, поскольку $\mathrm{Var}_{[\alpha,\beta]}\bigl(x(t)\bigr)\leqslant l(\gamma)$ (проверить!). Из курса действительного анализа известно, что этих двух условий достаточно для существования интеграла Римана–Стилтьеса $\int_\alpha^\beta u\bigl(x(t),y(t)\bigr)\,dx(t)$.

Существование интегралов $\int_\gamma v\,dy$, $\int_\gamma u\,dy$, $\int_\gamma v\,dx$ доказывается аналогично.

Наконец, для каждой интегральной суммы $\Sigma_\gamma(T,\tau,f)$ справедлива оценка

$$\bigl|\Sigma_\gamma(T,\tau,f)\bigr| \leqslant \|f\|_{[\gamma]} l_T(\gamma) \leqslant \|f\|_{[\gamma]} l(\gamma).$$

Переходя к пределу при $\lambda(T)\to 0$, получаем нужное неравенство (1.6.1). $\square$

§ 1.7. Интеграл вдоль непрерывно-дифференцируемого пути. Лемма Гурса. Лемма о приближении

1.7.1. Интеграл вдоль непрерывно-дифференцируемого пути.

1.7.1. Теорема. *Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ — непрерывно-дифференцируемый путь, а функция f непрерывна на $[\gamma]$. Тогда*

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f\bigl(\gamma(t)\bigr)\dot\gamma(t)\,dt.$$

Мы несколько отложим доказательство этой теоремы. Сначала приведем один важный пример ее использования, затем нам понадобится одно новое полезное понятие и некоторые предварительные результаты.

1.7.2. Пример. Зафиксируем $n\in\mathbb{Z}$; по определению положим $z^0=1$ для всех $z\in\mathbb{C}$. Найдем значение $\int_{\gamma_R} z^n\,dz$, где $\gamma_R(t)=Re^{it}|_{[0,2\pi]}$ — окружность радиуса R с центром в нуле:

$$\int_{\gamma_R} z^n\,dz=\int_0^{2\pi}(Re^{it})^nRie^{it}\,dt=iR^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}\,dt=$$
$$=iR^{n+1}\int_0^{2\pi}\cos\bigl((n+1)t\bigr)\,dt-R^{n+1}\int_0^{2\pi}\sin\bigl((n+1)t\bigr)\,dt=$$
$$=iR^{n+1}\int_0^{2\pi}\cos\bigl((n+1)t\bigr)\,dt=\begin{cases}0, & n\neq-1,\\ 2\pi i, & n=-1.\end{cases}$$

Этот простой результат именуется как «свойство ортогональности степеней» (пока без комментариев):

$$\int_{\gamma_R} z^n\,dz=\begin{cases}0, & n\neq-1,\\ 2\pi i, & n=-1.\end{cases}\tag{1.7.1}$$

1.7.3. Определение. Пусть $E\subset\mathbb{C}$, $E\neq\varnothing$, $f\colon E\to\mathbb{C}$ — ограниченная функция. *Модуль непрерывности функции f на множестве E* определяется по формуле

$$\omega_E(f,\delta)=\sup_{\substack{z_1,z_2\in E\\ |z_1-z_2|\leqslant\delta}}\bigl|f(z_1)-f(z_2)\bigr|.$$

Замечание. Ясно, что функция f равномерно непрерывна на множестве E тогда и только тогда, когда $\omega_E(f,\delta)\xrightarrow[\delta\to0]{}0$.

1.7.4. Лемма. *Пусть $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ — путь на $[\alpha,\beta]$ класса C^1. Положим $\mu(\delta)=\omega_{[\alpha,\beta]}(\dot x,\delta)+\omega_{[\alpha,\beta]}(\dot y,\delta)$. Тогда для всех $t\in[\alpha,\beta)$, $\Delta t>0$ с условием $[t,t+\Delta t]\subset[\alpha,\beta]$ и $\theta\in[t,t+\Delta t]$ выполняется оценка*

$$\bigl|\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)-\dot\gamma(\theta)\Delta t\bigr|\leqslant\mu(\Delta t)\Delta t.$$

Доказательство. Пусть t, Δt, θ удовлетворяют всем условиям леммы. По теореме Лагранжа (для функций $x(t)$ и $y(t)$) при некоторых $\theta_x, \theta_y \in [t, t+\Delta t]$ справедливы равенства

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \dot{x}(\theta_x)\Delta t,$$
$$y(t+\Delta t) - y(t) = \dot{y}(\theta_y)\Delta t.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\bigl|\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t) - \dot\gamma(\theta)\Delta t\bigr| = \bigl|\bigl(x(t+\Delta t) - x(t) - \dot{x}(\theta)\Delta t\bigr) + \\ + i\bigl(y(t+\Delta t) - y(t) - \dot{y}(\theta)\Delta t\bigr)\bigr| \leqslant \bigl(\bigl|\dot{x}(\theta_x) - \dot{x}(\theta)\bigr| + \bigl|\dot{y}(\theta_y) - \dot{y}(\theta)\bigr|\bigr)\Delta t \leqslant \\ \leqslant \bigl(\omega_{[\alpha,\beta]}(\dot{x}, \Delta t) + \omega_{[\alpha,\beta]}(\dot{y}, \Delta t)\bigr)\Delta t = \mu(\Delta t)\Delta t,\end{gathered}$$

что и требовалось доказать. □

Эта лемма является как бы заменой цитируемой в ее доказательстве теоремы Лагранжа, которая не верна для путей на плоскости. Приведем пример: $\gamma(t) = e^{it}|_{[0,2\pi]}$. Здесь $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 0$, однако $\dot\gamma(t) = ie^{it} \neq 0$ при всех $t \in [0, 2\pi]$.

Доказательство теоремы 1.7.1. Используем обозначения предыдущей леммы. В силу равномерной непрерывности функций $\dot{x}$ и $\dot{y}$ на $[\alpha, \beta]$, имеем: $\mu(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.

Заметим, что интегралы, равенство которых требуется установить, существуют: левый — в силу спрямляемости C^1-пути и непрерывности f на его носителе (по теореме 1.6.24); правый — в силу непрерывности подынтегральной функции.

Пусть $T = \{t_0, \ldots, t_N\}$ — разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$, а $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$ — выборка, подчиненная T. Оценим разность интегральных сумм для $\int_\gamma f(z)\,dz$ и $\int_\alpha^\beta f\bigl(\gamma(t)\bigr)\dot\gamma(t)\,dt$, соответствующих паре (T, τ):

$$\begin{aligned}&\Bigl|\sum_{n=1}^{N} f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)\bigl(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\bigr) - \sum_{n=1}^{N} f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)\dot\gamma(\tau_n)\Delta t_n\Bigr| \leqslant \\ &\qquad\leqslant \sum_{n=1}^{N}\bigl|f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)\bigr|\bigl|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1}) - \dot\gamma(\tau_n)\Delta t_n\bigr| \leqslant \\ &\qquad\leqslant \sum_{n=1}^{N}\bigl|f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)\bigr|\mu(\Delta t_n)\Delta t_n \leqslant \|f\|_{[\gamma]}(\beta - \alpha)\mu\bigl(\lambda(T)\bigr) \to 0\end{aligned}$$

при $\lambda(T) \to 0$. Далее ясно. □

1.7.2. Лемма Гурса (теорема Коши для треугольников).

1.7.5. Упражнение. Для произвольного отрезка $[a, b]$ в $\mathbb{C}$ доказать равенства

$$\int_{[a,b]} z^n\,dz = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Из этих равенств следует, что для всякого многочлена $p(z)$ и всякого треугольника Δ с положительно ориентированной границей $\partial^+\Delta$ справедливо равенство

$$\int_{\partial^+\Delta} p(z)\,dz = 0.$$

Здесь и далее в этом параграфе через Δ обозначается *замкнутый* (вместе с внутренней областью) треугольник.

1.7.6. Лемма (Гурса). *Пусть Δ — треугольник с (положительно) ориентированной границей $\partial^+\Delta$. Пусть функция f определена в некоторой окрестности Δ и является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в каждой точке $z \in \Delta$. Тогда*

$$\int_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Предположим противное:

$$\int_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz = I \neq 0.$$

Средними линиями разобьем треугольник $\Delta = \Delta_0$ на 4 треугольника $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_2^{(1)}$, $\Delta_3^{(1)}$, $\Delta_4^{(1)}$ (как показано на рис. 7.1). Нетрудно видеть, что

$$\int_{\partial^+\Delta_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial^+\Delta_j^{(1)}} f(z)\,dz.$$

Следовательно, можно выбрать $j_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ с условием

$$\left| \int_{\partial^+\Delta_1} f(z)\,dz \right| \geqslant \frac{|I|}{4},$$

где $\Delta_1 = \Delta_{j_1}^{(1)}$.

Аналогично, разбивая средними линиями треугольник Δ_1 на четыре треугольника $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_2^{(2)}$, $\Delta_3^{(2)}$, $\Delta_4^{(2)}$, выберем $j_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ с условием

$$\left| \int_{\partial^+\Delta_2} f(z)\,dz \right| \geqslant \frac{|I|}{4^2},$$

где $\Delta_2 = \Delta_{j_2}^{(2)}$.

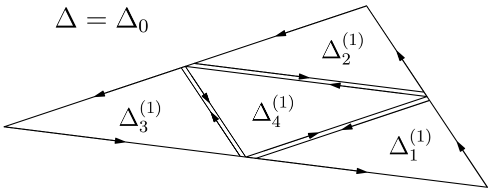

Рис. 7.1.

Продолжая построение по индукции, получаем систему вложенных замкнутых треугольников Δ_k, $k = 1, 2, \ldots$, со следующими свойствами (где через $P(\Delta_k)$ обозначается периметр треугольника Δ_k):

$$P(\Delta_k) = \frac{P(\Delta)}{2^k}, \quad \left|\int_{\partial^+\Delta_k} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{|I|}{4^k}. \tag{1.7.2}$$

Согласно теореме о вложенных компактах существует точка $z_0 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \Delta_k \subset \Delta$.

Поскольку функция $f(z)$ по условию является $\mathbb{C}$-дифференцируемой всюду в Δ (в частности, в точке z_0), для нее справедливо представление:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mu(z)(z - z_0), \quad \mu(z) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

Выражая отсюда $\mu(z)$, имеем

$$\mu(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), \quad z \neq z_0.$$

Функция $\mu(z)$, доопределенная нулем в точке z_0, определена и непрерывна на Δ. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что $|\mu(z)| < \varepsilon$ при $z \in B(z_0, \delta) \cap \Delta$.

Определим $n \in \mathbb{N}$ из условия: $P_n = P(\Delta_n) < \delta$. Ясно, что тогда $\Delta_n \subset B(z_0, \delta) \cap \Delta$. Теперь, пользуясь свойствами (1.7.2) и упражнением 1.7.5, получаем

$$\frac{|I|}{4^n} \leqslant \left|\int_{\partial^+\Delta_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial^+\Delta_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mu(z)(z - z_0))\,dz\right| =$$

$$= \left|\int_{\partial^+\Delta_n} \mu(z)(z - z_0)\,dz\right| \leqslant \varepsilon P_n^2 = \varepsilon\frac{P(\Delta)^2}{4^n},$$

откуда $|I| \leqslant \varepsilon P(\Delta)^2$. При $\varepsilon < \dfrac{|I|}{P(\Delta)^2}$ получаем противоречие. □

1.7.7. Определение. Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и пусть функция f *непрерывна* в D. Говорят, что f *удовлетворяет в D условию треугольника*, если для всякого замкнутого треугольника $\Delta \subset D$ выполняется равенство

$$\int_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Замечание. Если f голоморфна в D, то по лемме Гурса f удовлетворяет в D условию треугольника.

1.7.3. Лемма о приближении.

1.7.8. Лемма (О приближении). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, функция f непрерывна в D, $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to D$ — спрямляемый путь. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого разбиения T отрезка $[\alpha,\beta]$ с условием $\lambda(T) < \delta$ выполнены следующие утверждения*:

(1) $\|\gamma - \Lambda_\gamma^T\|_{[\alpha,\beta]} < \varepsilon$, $[\Lambda_\gamma^T] \subset D$,

(2) $\left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\Lambda_\gamma^T} f(z)\,dz\right| < \varepsilon$,

где Λ_γ^T — ломаная, вписанная в γ, соответствующая разбиению T.

Доказательство. Будем считать, что путь γ нетривиален (неодноточечный), иначе все просто. Положим $d = \operatorname{dist}([\gamma], \partial D)$ при $\partial D \neq \varnothing$, т. е. при $D \neq \mathbb{C}$, и $d = 1$ при $D = \mathbb{C}$. Определим множество

$$K = \{z \in D\colon \operatorname{dist}(z, [\gamma]) \leqslant d/2\}.$$

Тогда K — компакт в D, содержащий $[\gamma]$.

Напомним определение модуля непрерывности функции g на множестве E:

$$\omega_E(g,r) = \sup_{\substack{z_1,z_2\in E\\ |z_1-z_2|\leqslant r}} |g(z_1) - g(z_2)|.$$

По условию, функция f непрерывна в D, а значит f равномерно непрерывна на K. Следовательно,

$$\mu(r) := \omega_K(f,r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{1.7.3}$$

В силу равномерной непрерывности γ на $[\alpha,\beta]$, имеем

$$\omega(r) := \omega_{[\alpha,\beta]}(\gamma,r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{1.7.4}$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, d/2)$. Из (1.7.3) и (1.7.4), а также по теореме 1.6.24 (γ спрямляема и f непрерывна на $[\gamma]$), найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\omega(\delta) < \varepsilon, \quad \mu(\omega(\delta)) < \frac{\varepsilon}{2l(\gamma)}, \tag{1.7.5}$$

и для любого разбиения T отрезка $[\alpha,\beta]$ с условием $\lambda(T)<\delta$, а также любой выборки τ, подчиненной разбиению T, имеем

$$\left|\Sigma_\gamma(T,\tau,f)-\int_\gamma f(z)\,dz\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.7.6}$$

Покажем, что указанное δ удовлетворяет условиям доказываемой леммы.

Пусть теперь $T=\{t_0,\ldots,t_N\}$ — произвольное разбиение $[\alpha,\beta]$ (порядка N) с условием $\lambda(T)<\delta$ и Λ_γ^T — соответствующая вписанная в γ ломаная. При $n\in\{1,\ldots,N\}$ положим $\gamma_n=\gamma\big|_{[t_{n-1},t_n]}$. Тогда для всех $t\in[t_{n-1},t_n]$ справедлива оценка

$$\left|\Lambda_\gamma^T(t)-\gamma_n(t)\right|\leqslant\max(|\gamma_n(t)-\gamma_n(t_{n-1})|,|\gamma_n(t)-\gamma_n(t_n)|)<\varepsilon.$$

Следовательно, $\|\Lambda_\gamma^T-\gamma\|_{[\alpha,\beta]}<\varepsilon$, и (1) доказано. Заметим также, что $[\Lambda_\gamma^T]\subset K$, поскольку для всех $t\in[\alpha,\beta]$ имеем $\Lambda_\gamma^T(t)\in U_{d/2}\big(\gamma(t)\big)$.

Докажем теперь, что

$$\left|\int_{\Lambda_\gamma^T} f(z)\,dz-\Sigma_\gamma(T,\tau,f)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

для любой выборки $\tau=\{\tau_1,\ldots,\tau_N\}$, подчиненной T. Тогда в силу оценки (1.7.6) и неравенства треугольника будет доказано (2).

Пользуясь аддитивностью интеграла и определениями интегральных сумм $\Sigma_\gamma(T,\tau,f)$ и $l(\gamma)$, имеем (рассмотреть $\Delta\gamma(t_{n-1})\gamma(t_n)\gamma(\tau_n)$ и $z\in[\gamma(t_{n-1}),\gamma(t_n)]$):

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Lambda_\gamma^T} f(z)\,dz-\Sigma_\gamma(T,\tau,f)\right|\leqslant\\
&\leqslant\sum_{n=1}^N\left|\int_{[\gamma(t_{n-1}),\gamma(t_n)]} f(z)\,dz-f(\gamma(\tau_n))(\gamma(t_n)-\gamma(t_{n-1}))\right|=\\
&=\sum_{n=1}^N\left|\int_{[\gamma(t_{n-1}),\gamma(t_n)]}(f(z)-f(\gamma(\tau_n)))\,dz\right|\leqslant\\
&\leqslant\mu\left(\omega\big(\lambda(T)\big)\right)\sum_{n=1}^N|\gamma(t_n)-\gamma(t_{n-1})|\leqslant\mu\big(\omega(\delta)\big)l(\Lambda_\gamma^T)<\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

□

§ 1.8. Теорема Коши для односвязной области. Существование первообразной в односвязной области. Формула Ньютона – Лейбница. Интегральная теорема Коши для допустимых областей

1.8.1. Теорема Коши для односвязной области.

1.8.1. Теорема. *Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$ и пусть функция f удовлетворяет в D условию треугольника. Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ с условием $[\Gamma] \subset D$ выполняется равенство:*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. 1. По условию, утверждение теоремы верно, если Γ — ориентированная граница некоторого треугольника $\Delta \subset D$ (из односвязности D и теоремы 1.2.20 следует, что и внутренность треугольника Δ лежит в D).

2. Если Γ — граница выпуклого многоугольника $G \subset D$, то этот многоугольник можно разбить его диагоналями на треугольники, и свести доказательство к случаю треугольника.

3. Теперь проверим нужное утверждение для произвольной (ориентированной) замкнутой *жордановой* ломаной Γ в D. Поскольку область D односвязна, жорданов (открытый) многоугольник G, ограниченный ломаной $[\Gamma]$, целиком лежит в D (см. теорему 1.2.20 и Гл. 3, раздел 3.2.2). Поэтому, по аналогии со случаем 2., достаточно установить следующее утверждение и затем воспользоваться методом индукции.

1.8.2. Лемма. *В указанных обозначениях, существует диагональ многоугольника G (открытый интервал, соединяющий несоседние вершины в Γ), целиком лежащая в G.*

Доказательство. По индукции. Пусть лемма доказана для всех жордановых ломаных с числом вершин меньшим, чем N. Пусть $A_1, \ldots, A_N$ — последовательные вершины ломаной Γ ($N \geqslant 4$), причем никакие соседние ребра этой ломаной не являются продолжениями друг друга (т. е. все внутренние углы многоугольника G отличны от π рад.), иначе мы можем считать, что число вершин ломаной на самом деле равно $N-1$, и все доказано. Делая при необходимости параллельный перенос и перенумерацию вершин, мы можем предположить, что $A_2 = 0$ — вершина ломаной Γ с минимальной ординатой, т. е. $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ для всех $z \in [\Gamma]$, так что *внутренний* угол $\angle A_1A_2A_3$ многоугольника G (с вершиной A_2) имеет величину, меньшую π (обосновать!). Если интервал (A_1, A_3) целиком лежит в G, то все доказано. Пусть это не так. Тогда на интервале (A_1, A_3), или внутри треугольника $\triangle A_1A_2A_3$ (случай $(*)$) должна находится хотя бы одна точка множества $[\Gamma]' = [\Gamma] \setminus ([A_1, A_2] \cup [A_2A_3])$. Следовательно, из соображений непрерывности (они нужны только в случае $(*)$) найдутся точки a_1 и a_3 на полуинтервалах $(A_2, A_1]$ и $(A_2, A_3]$ соответственно такие, что интервалы (a_1, a_3) и (A_1, A_3) параллельны (совпадают, если $(*)$ не имеет места), внутри треугольника $\triangle a_1 A_2 a_3$ *нет* точек из $[\Gamma]'$ (так что внутренность $\triangle a_1 A_2 a_3$ лежит в G), а на (a_1, a_3) *есть* точки из $[\Gamma]'$ (хотя бы одна точка a). Если a — одна из вершин A_n, $n > 3$, то (A_2, A_n) — искомая диагональ. Если точка a не является вершиной ломаной Γ, то она лежит внутри некоторого ребра $[A_n, A_{n+1}]$, которое должно строго содержаться в отрезке $[a_1, a_3]$, откуда хотя бы одна из вершин A_n или A_{n+1} лежит в (a_1, a_3). Тогда искомой диагональю является (A_2, A_n) или (A_2, A_{n+1}). $\square$

4. Пусть, наконец, Γ — произвольная замкнутая нежорданова ломаная в D. У нее есть представитель — замкнутый кусочно-линейный путь $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, для которого найдется натуральное $N > 1$ и разбиение $T = \{\alpha = t_0, \ldots, t_N = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ порядка N такое, что при каждом $n \in \{1, \ldots, N\}$ имеем $\gamma(t) = c_n t + d_n$ на $[t_{n-1}, t_n]$ (c_n и d_n — комплексные постоянные).

1.8.3. Лемма. *Справедливо хотя бы одно из следующих утверждений*:

(1) *для любой функции $f \in C([\Gamma])$ выполняется равенство*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

(*случай, когда Γ не имеет замкнутых жордановых «частей»*);

(2) *найдутся такие замкнутые жордановы ломаные $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$, где $J < N$ натурально, что $[\Gamma_j] \subset [\Gamma]$ для всех $j \in \{1, \ldots, J\}$ и для любой функции $f \in C([\Gamma])$ имеем*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{J} \int_{\Gamma_j} f(z)\, dz.$$

Доказательство. *Доказательство этой леммы* легко сводится к случаю, когда все указанные выше коэффициенты $c_n \neq 0$, и N — минимально возможное в таком представлении ломаной Γ. Тогда будем говорить, что Γ имеет порядок N.

Применим индукцию по N. Пусть лемма доказана для всех указанных ломаных порядка не выше $N-1$, и пусть Γ — ломаная порядка N с представителем γ (и введенными выше обозначениями). Можем считать $N \geqslant 4$. Пусть $A_n = \gamma(t_n)$ ($n \in \{1, \ldots, N\}$) — последовательные вершины ломаной Γ. Если какие-нибудь *соседние* ребра этой ломаной лежат на одной прямой, то шаг индукции сделать совсем легко. Далее полагаем, что таких соседних ребер нет. Пусть E — совокупность всех $t' \in (\alpha, \beta]$, для которых путь $\gamma|_{[\alpha, t']}$ является жордановым (незамкнутым). Тогда $E = (\alpha, \beta_1)$ — открытый интервал и $\beta_1 \in (\alpha, \beta)$ (проверить!). При этом найдется единственная точка $\alpha_1 \in [\alpha, \beta_1)$ условием $\gamma(\alpha_1) = \gamma(\beta_1)$. Ломаная Γ_1 с представителем $\gamma|_{[\alpha_1,\beta_1]}$ — замкнутая жорданова. Наконец, замкнутая ломаная $\Gamma' = \{\gamma|_{[\alpha,\alpha_1]}\} \cup \{\gamma|_{[\beta_1,\beta]}\}$ имеет порядок меньший, чем N, $[\Gamma_1] \subset [\Gamma]$, $[\Gamma'] \subset [\Gamma]$, и для всех $f \in C([\Gamma])$ выполнено равенство

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma'} f(z)\,dz.$$

Далее ясно. □

Таким образом, для произвольной замкнутой ломаной утверждение теоремы 1.8.1 также справедливо.

5. В общем случае остается воспользоваться леммой 1.7.8 о приближении. □

1.8.4. Следствие. *Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$ и пусть функция f удовлетворяет в D условию треугольника. Тогда для любых спрямляемых кривых Γ_1 и Γ_2 в D с одинаковыми началами и концами выполняется равенство*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.8.1

$$0 = \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2^-} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz,$$

что и требовалось. □

1.8.2. Существование первообразной в односвязной области. Формула Ньютона – Лейбница (Н – Л).

1.8.5. Определение. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $F \in \mathcal{A}(D)$ и пусть $F'(z) = f(z)$ в D. Тогда F называется *комплексной первообразной* (п/о) для функции f в D.

1.8.6. Упражнение. Если F_1 и F_2 — две п/о для функции f в D, то $F_1 - F_2 \equiv const$ в D.

1.8.7. Теорема (О существовании первообразной в односвязной области). *Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, и пусть f удовлетворяет в D условию треугольника. Для любого фиксированного $a \in D$ определим функцию*

$$F_a(z) = \int_{\Gamma_{az}} f(\zeta)\,d\zeta,$$

где Γ_{az} — любая спрямляемая кривая в D с началом в точке a и концом в точке z (по следствию 1.8.4 значения $F_a(z)$ не зависят от выбора кривой Γ_{az}). Тогда функция $F_a(z)$ является п/о для функции f в D.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $z_0 \in D$ и $\delta_0 > 0$ с условием $B(z_0, \delta_0) \subset D$. Докажем, что $F'_a(z_0) = f(z_0)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу непрерывности f в D найдется $\delta = \delta(\varepsilon) \leqslant \delta_0$ такое, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$. Для $z \in B(z_0, \delta)$ проведем оценку:

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{F_a(z) - F_a(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\Big| = \\
&\qquad = \left|\frac{1}{z - z_0}\left(\int_{\Gamma_{az}} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\Gamma_{az_0}} f(\zeta)\,d\zeta\right) - f(z_0)\right| = \\
&\qquad = \left|\frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f(z_0)\,d\zeta\right| = \\
&\qquad = \left|\frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} (f(\zeta) - f(z_0))\,d\zeta\right| \leqslant \|f - f(z_0)\|_{[z_0,z]} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F_a(z) - F_a(z_0)}{z - z_0} = f(z_0),$$

т. е. $F'_a(z_0) = f(z_0)$. □

1.8.8. Теорема (Формула Н–Л). *Пусть D — произвольная область в $\mathbb{C}$, функция f непрерывна в D и для нее существует п/о F в D. Тогда для любой спрямляемой кривой Γ_{ab} в D с началом a и концом b справедлива формула Ньютона–Лейбница*

$$\int_{\Gamma_{ab}} f(z)\,dz = F(b) - F(a). \tag{1.8.1}$$

Доказательство. Из леммы 1.7.8 (о приближении) следует, что равенство (1.8.1) достаточно установить для ломаных в D. Кроме того, очевидно, что равенство (1.8.1) для ломаной следует из аналогичного равенства для каждого из ее последовательных отрезков, т. е. остается установить (1.8.1) для случая, когда $\Gamma_{ab} = [a, b]$ — отрезок в D с параметризацией $\gamma_{ab}(t) = \gamma(t) = a + t \cdot (b - a)$, $t \in [0, 1]$. По теореме 1.7.1 получаем

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^1 \big(F(\gamma(t))\big)'_t\,dt = \\
= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

В этой серии равенств применена теорема о производной сложной функции (см. лемму 1.4.13) и формула Н–Л на отрезке (проверить!). □

1.8.9. Упражнение. Пусть D — произвольная область в $\mathbb{C}$ и функция f непрерывна в D. Тогда f имеет п/о в D если и только если для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ в D справедливо равенство

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

1.8.10. Пример. Функция $f(z) = 1/z$ не имеет п/о в $\mathbb{C}_\flat$, поскольку

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0, \quad \gamma_1(t) = e^{it}|_{[0,2\pi]}.$$

1.8.3. Интегральная теорема Коши (ИТК) для допустимых областей.

Пусть замкнутый жорданов путь γ_c (с началом в точке c), ограничивающий жорданову область G, является положительно ориентированным относительно G. Если γ — произвольный путь с такими же условиями, то пути γ и γ_c эквивалентны. Пусть $\partial_c^+ G = \{\gamma_c\}$ — кривая, определяемая путем γ_c.

Если теперь b — произвольная точка на ∂G и $\gamma_b \in \partial_b^+ G$, то для любой (ограниченной) функции f на ∂D имеем $\int_{\gamma_b} f(z)\,dz = \int_{\gamma_c} f(z)\,dz$ (интегралы существуют или нет одновременно).

1.8.11. Определение. *Положительно ориентированной границей* $\partial^+ G$ жордановой области G в $\mathbb{C}$ называется совокупность всех кривых $\{\partial_c^+ G\colon c \in \partial G\}$. Таким образом, может быть корректно определен интеграл $\displaystyle\int\limits_{\partial^+ G} f(z)\,dz$.

Смысл обозначения $\partial^- G$ очевиден без дополнительного пояснения.

1.8.12. Определение. Пусть $D_1, \ldots, D_S$ — жордановы области в $\mathbb{C}$ ($S \in \mathbb{N}$) со *спрямляемыми* положительно ориентированными границами $\partial^+ D_1, \ldots, \partial^+ D_S$ соответственно. При $S = 1$ положим $D = D_1$, а при $S \geqslant 2$ предположим, что *замыкания* областей $D_2, \ldots, D_S$ попарно не пересекаются и целиком содержатся внутри D_1. При $S \geqslant 2$ кроме того потребуем, чтобы множество $D = D_1 \setminus (\bigcup_{s=2}^S \overline{D}_s)$ было связно, т. е. являлось *областью* (то, что это верно всегда, мы докажем позже, как следствие из теоремы Римана о конформном отображении).

Такие множества D будем называть *допустимыми областями (ДО) ранга* S.

1.8.13. Определение. *Положительно ориентированной границей* допустимой области D ранга $S \geqslant 2$ называется совокупность (цепь) границ:

$$\partial^+ D = \{\partial^+ D_1, \partial^- D_2, \ldots, \partial^- D_S\}.$$

Для $f\colon \partial D \to \mathbb{C}$ интеграл от f по $\partial^+ D$ определяется по формуле

$$\int_{\partial^+ D} f(z)\,dz = \int_{\partial^+ D_1} f(z)\,dz - \sum_{s=2}^S \int_{\partial^+ D_s} f(z)\,dz,$$

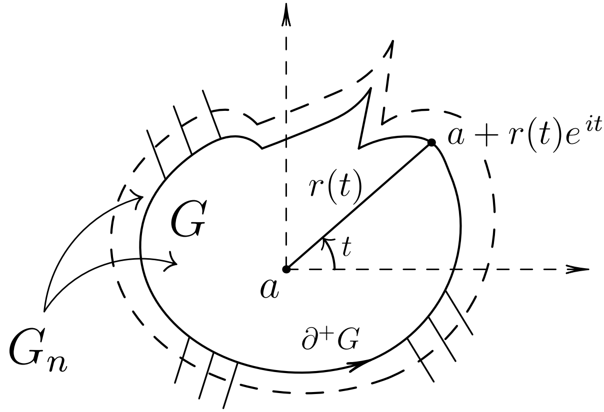

Рис. 8.1.

если указанные справа интегралы существуют.

Справедлива следующая *интегральная теорема Коши.*

1.8.14. Теорема (ИТК для ДО). *Пусть D — допустимая область в $\mathbb{C}$ и $f \in C(\overline{D})$ удовлетворяет в D условию Δ. Тогда*

$$\int_{\partial^+ D} f(z)\, dz = 0. \tag{1.8.2}$$

Докажем сначала ослабленный вариант этой теоремы для т.н. *простых областей.*

1.8.15. Определение. Жорданова область G называется *простейшей*, если ее положительно ориентированная граница задается следующей параметризацией (см. рис. 8.1):

$$\gamma(t) = a + r(t)e^{it}, \quad t \in [\alpha, \alpha + 2\pi],$$

т. е. $\{\gamma\} \in \partial^+ G$. Здесь $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [-\pi, \pi)$ и $r\colon [\alpha, \alpha + 2\pi] \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция с ограниченной вариацией и условием периодичности $r(\alpha) = r(\alpha + 2\pi)$.

Важно, что в указанном случае понятие $\partial^+ G$ определяется напрямую (без использования теоремы Жордана в общем виде). Кроме того, обычно берется $\alpha = -\pi$ или $\alpha = 0$.

1.8.16. Предложение. *В условиях предыдущего определения справедливы следующие утверждения:*

(1) *для γ выполняется теорема Жордана*;

(2) *путь* γ *спрямляем*;

$$(3)\ \mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ G}\frac{dz}{z-z_0} = 1, \quad \forall z_0 \in G;$$

$$(4)\ \mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ G}\frac{dz}{z-z_0} = 0, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}.$$

Доказательство. Свойства (1) и (2) достаточно просты (проверить!). Свойства индекса в (3) и (4) уже обсуждены (пользуемся его локальной постоянностью и целочисленностью, и вычисляем указанный индекс по определению в точке a). Как мы независимо покажем ниже (в более общем контексте), для функции

$$h(z_0) = \int_{\partial^+ G}\frac{1}{z-z_0}\,dz$$

имеем $h'(z_0) = \int_{\partial^+ G}(z-z_0)^{-2}\,dz = 0$ вне $[\gamma]$. Последнее равенство нулю вытекает из формулы Ньютона–Лейбница (при переменной z) для функции $(z-z_0)^{-2}$ с п/о $-(z-z_0)^{-1}$. Остается доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ G}\frac{1}{z-a}\,dz = 1.$$

Последнее доказывается с применением формулы Н–Л в области $\mathbb{C}$ с разрезом $\{a+t\colon t\in(-\infty,0]\}$ для функции $(z-a)^{-1}$ с п/о $\ln(z-a)$, пути $\gamma_\varepsilon = \gamma|_{[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]}$ (случай $\alpha=-\pi$), $\varepsilon\in(0,\pi/2)$:

$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{dz}{z-a} = \ln(r(\pi-\varepsilon)e^{i(\pi-\varepsilon)}) - \ln(r(-\pi+\varepsilon)e^{i(-\pi+\varepsilon)}) =$$

$$= \ln\frac{r(\pi-\varepsilon)}{r(-\pi+\varepsilon)} + i(2\pi-2\varepsilon)$$

и последующим устремлением ε к нулю. □

§ 1.9. Доказательство ИТК для простых областей. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Формула Коши для производных. Теорема Морера

1.9.1. Доказательство ИТК для простых областей.

1.9.1. Предложение. *Утверждение ИТК верно для простейших областей.*

Доказательство. Предположим, что в условиях теоремы 1.8.14 и определения 1.8.15 область $D = G$ является простейшей. При $n \in \mathbb{N}$ пусть G_n — область, гомотетичная области G относительно точки a с коэффициентом $(n+1)/n$, и пусть

$$f_n(z) = f\Big(a + \frac{n(z-a)}{n+1}\Big)$$

(см. рис. 8.1).

Очевидно, что G_n односвязна и f_n удовлетворяет в G_n условию треугольника (по определению, сравнить соответствующие интегральные суммы). Так как $\overline{G} \subset G_n$, по теореме Коши для односвязной области G_n, функции f_n и замкнутой кривой $\partial^+ G$ имеем

$$\int_{\partial^+ G} f_n(z)\, dz = 0.$$

Теперь, поскольку

$$\left| \int_{\partial^+ G} f_n(z)\, dz - \int_{\partial^+ G} f(z)\, dz \right| \leqslant \|f_n - f\|_{\partial G} l(\partial G),$$

остается установить, что $f_n \rightrightarrows f$ на ∂G при $n \to +\infty$. В самом деле, при любом $z \in \partial G$ имеем

$$\left| z - \Big(a + \frac{n(z-a)}{n+1}\Big) \right| = \frac{|z-a|}{n+1} \leqslant \frac{\operatorname{diam}(G)}{n+1},$$

откуда

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| f(z) - f\Big(a + \frac{n(z-a)}{n+1}\Big) \right| \leqslant \omega_{\overline{G}}\Big(f, \frac{\operatorname{diam}(G)}{n+1}\Big) \to 0$$

при $n \to +\infty$. □

1.9.2. Определение. Область D в $\mathbb{C}$ называется *простой*, если

(1) она является допустимой и все D_s из определения 1.8.12 для D являются простейшими областями;

(2) существует конечное число простейших областей $G'_1, \ldots, G'_N$ со следующими свойствами:

(a) $G'_n \subset D$ для всех n и различные G'_n попарно не пересекаются (см. рис. 9.1);

(b) для всякой функции $f \in C(\overline{D})$ имеем

$$\int_{\partial^+ D} f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{N} \int_{\partial^+ G'_n} f(z)\,dz.$$

1.9.3. Упражнение. Всякое открытое (концентрическое) кольцо $V(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C}\colon r < |z-a| < R\}$, $0 < r < R < +\infty$, является простой областью.

1.9.4. Следствие. *ИТК справедлива для любой простой области.*

1.9.5. Упражнение. В условиях определения 1.9.2 верно равенство $\overline{D} = \bigcup_{n=1}^{N} \overline{G}'_n$. Кроме того, D всегда связно (без дополнительного требования в определении 1.8.12).

1.9.6. Упражнение. Найти простейшую область G с параметром $a = 0$ такую, что при всех достаточно малых $r > 0$ область $G \setminus \overline{B(a,r)}$ не является простой.

1.9.2. Интегральная формула Коши (ИФК).

1.9.7. Теорема (ИФК). *Пусть D — допустимая область и пусть $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда для любого $z_0 \in D$ справедлива формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}.$$

Доказательство для простых областей. Зафиксируем $z_0 \in D$ и пусть

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \in \overline{D} \setminus \{z_0\}, \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Тогда $g \in C(\overline{D})$ удовлетворяет в D условию треугольника (треугольник Δ при $z_0 \in \Delta$ разбивается на два треугольника, к каждому из которых применяется предложение 1.9.1; см. рис. 9.1).

По ИТК в D имеем

$$\int_{\partial^+ D} g(z)\,dz = 0,$$

откуда

$$\int_{\partial^+ D} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = f(z_0) \int_{\partial^+ D} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Остается доказать, что

$$h(z_0) = \int_{\partial^+ D} \frac{dz}{z - z_0} \equiv 2\pi i, \quad z_0 \in D.$$

Пусть D — простая область с обозначениями определения 1.9.2. Достаточно для каждого D_s воспользоваться предложением 1.8.16 (свойствами (3) или (4)). $\square$

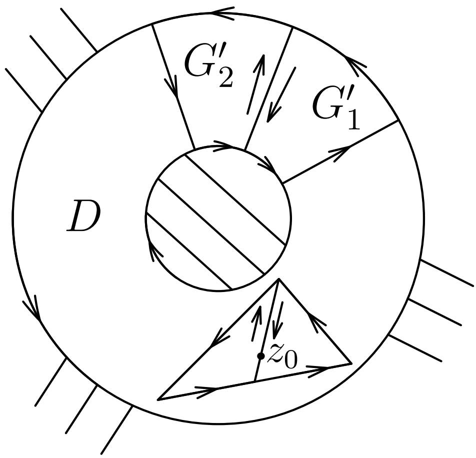

Рис. 9.1.

Нам потребуются определение и свойства интеграла 1-го рода.

1.9.8. Определение. Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — путь, $f\colon [\gamma] \to \mathbb{C}$ — некоторая функция, $T = \{\alpha = t_0, \dots, t_N = \beta\}$ — разбиение $[\alpha,\beta]$. Пусть $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ — *выборка, подчиненная разбиению* T, т. е. $\tau_n \in [t_{n-1}, t_n]$ для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$. Определим *интегральную сумму*

$$\Sigma_\gamma^+(T,\tau,f) = \sum_{n=1}^N f\bigl(\gamma(\tau_n)\bigr)|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})|.$$

Если существует конечный предел

$$I^+ = \lim_{\lambda(T)\to 0} \Sigma_\gamma^+(T,\tau,f),$$

т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения T с условием $\lambda(T) < \delta$ и для всякой выборки τ, подчиненной T, имеем $\bigl|I^+ - \Sigma_\gamma^+(T,\tau,f)\bigr| < \varepsilon$, то он называется *интегралом 1 рода от функции* f по (длине пути) γ и обозначается

$$\int_\gamma f(z)\,|dz|.$$

Следующие свойства этого интеграла доказываются почти также, как аналогичные (доказанные выше) свойства интеграла $\int_\gamma f(z)\,dz$.

1.9.9. Предложение. *В условиях предыдущего определения справедливы следующие утверждения*:

(1) *если путь γ спрямляем и $f \in C([\gamma])$, то $\int_\gamma f(z)|dz|$ существует и*

$$\left|\int_\gamma f(z)|dz|\right| \leqslant \|f\|_{[\gamma]} l(\gamma);$$

(2) *если γ — непрерывно-дифференцируемый путь и $f \in C([\gamma])$, то*

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_\alpha^\beta f\bigl(\gamma(t)\bigr)|\dot\gamma(t)|\,dt.$$

Важно еще отметить, что в указанных обозначениях всегда

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,|dz| = \int_\gamma f(z)\,|dz|$$

(оба интеграла существуют или нет одновременно) и, следовательно, корректно определен $\int_{\partial D} f(z)\,|dz|$ для любой допустимой области D.

1.9.10. Теорема (О среднем). *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $R \in (0, +\infty)$ и пусть $f \in \mathcal{A}(B(z_0, R)) \cap C(\overline{B(z_0, R)})$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(z_0,R)} f(z)\,|dz|. \tag{1.9.1}$$

Доказательство. По ИФК имеем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ B(z_0,R)} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}.$$

Остается вычислить этот и последний интегралы в формуле 1.9.1 с помощью стандартной параметризации $\{z = z_0 + Re^{it} : t \in [-\pi, \pi]\}$. □

1.9.11. Теорема (Основная теорема алгебры). *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ — произвольный многочлен степени n комплексного переменного z ($a_n \neq 0$). Тогда p имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.*

Доказательство. Пусть, от противного, $p(z) \neq 0$ при всех z. Тогда $f(z) = 1/p(z)$ — целая функция. Поскольку $|p(z)| \to +\infty$ при $z \to \infty$, мы получаем, что $|f(z)| \to 0$ при $z \to \infty$. Применяя теорему о среднем для f в кругах $B(0, R)$ и стандартную оценку интеграла, получаем, что

$$|f(0)| = \lim_{R\to+\infty}\left|\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B(0,R)} f(z)\,|dz|\right| \leqslant \lim_{R\to+\infty} \|f\|_{\partial B(0,R)} = 0.$$

Противоречие. □

1.9.12. Теорема (Принцип максимума модуля). *Пусть D — произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}$. Если $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, то для любого $z_0 \in D$ имеем*

$$|f(z_0)| \leqslant \max_{z\in\partial D} |f(z)| = \|f\|_{\partial D}. \tag{1.9.2}$$

При этом, если для некоторого $z_0 \in D$ неравенство (1.9.2) *обращается в равенство, то f постоянна в D.*

Доказательство. Напомним, что максимум модуля всякой непрерывной на компакте функции достигается. Нам достаточно доказать, что если найдется $z_0 \in D$ с условием $|f(z_0)| \geqslant \|f\|_{\partial D}$, то f — постоянна. Пусть такое z_0 существует. Без ограничения общности мы можем предположить, что $M = |f(z_0)| = \|f\|_{\overline{D}}$. Положим $E = \{z \in D\colon |f(z)| = M\}$. Ясно, что $E \neq \varnothing$ и E замкнуто в D (последнее вытекает из непрерывности f). Открытость E следует из теоремы о среднем (провести доказательство!). Из связности D получаем, что $E = D$. Итак, $|f(z)| \equiv M$ на $\overline{D}$. Остается доказать, что $f'(z) = 0$ всюду в D. Если, от противного, существует $z_1 \in D$ с условием $f'(z_1) \neq 0$, то из определения $\mathbb{C}$-дифференцируемости получаем, что $f(z) = f(z_1) + f'(z_1)(z - z_1) + o(z - z_1)$, $z - z_1 \to 0$, так что $|f(z)|$ не может быть постоянным ни в какой окрестности точки z_1. Противоречие. □

1.9.3. ИФК для производных. Интеграл типа Коши. Теорема Морера.

1.9.13. Теорема (ИФК для производных). *Пусть D — допустимая область в $\mathbb{C}$ и пусть $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда при каждом $k \in \mathbb{N}$ функция $f^{(k)} \in \mathcal{A}(D)$, причем для любого $z_0 \in D$ справедлива формула*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

Эта теорема сразу вытекает из ИФК и следующего утверждения, имеющего и другие важные следствия (например, в частном случае $k = 1$ и $f(z) \equiv 1$ оно уже использовалось в доказательстве предложения 1.8.16).

1.9.14. Предложение. *Пусть Γ — спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$ и пусть $f \in C([\Gamma])$. При фиксированном $k \in \mathbb{N}$ определим функцию*

$$F_k(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^k}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma].$$

Тогда F_k голоморфна вне $[\Gamma]$, причем $F_k'(z) = kF_{k+1}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$.

Замечание. Функция $F_k(z)$ в этом предложении называется *интегралом типа Коши* порядка k от функции f по кривой Γ.

Доказательство. Зафиксируем $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$. Положим $d = \mathrm{d}(z_0, [\Gamma])$. Пусть всюду далее $\Delta z \in B(0, d/2)$, $\Delta z \neq 0$. Имеем

$$\frac{F_k(z_0 + \Delta z) - F_k(z_0)}{\Delta z} = \int_\Gamma f(z) g_{\Delta z}(z)\,dz,$$

где

$$g_{\Delta z}(z) = \frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)^k} - \frac{1}{(z - z_0)^k}\right).$$

Докажем, что $g_{\Delta z} \rightrightarrows k(z-z_0)^{-k-1}$ на $[\Gamma]$ при $\Delta z \to 0$. Для этого сначала заметим, что из элементарной формулы

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1})$$

вытекает равенство

$$g_{\Delta z}(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(z-z_0)^j (z-z_0-\Delta z)^{k+1-j}}.$$

Тогда при $z \in [\Gamma]$ и $|\Delta z| < d/2$ имеем

$$\left| \frac{1}{(z-z_0)^j (z-z_0-\Delta z)^{k+1-j}} - \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{d^j} \left| \frac{1}{(z-z_0-\Delta z)^{k+1-j}} - \frac{1}{(z-z_0)^{k+1-j}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\Delta z|}{d^j} \left| \sum_{l=1}^{k+1-j} \frac{1}{(z-z_0)^l (z-z_0-\Delta z)^{k+2-j-l}} \right| \leqslant \frac{2^{k+1-j}(k+1-j)|\Delta z|}{d^{k+2}},$$

что стремится к нулю при $\Delta z \to 0$. □

1.9.15. Следствие. *Если функция f имеет в D (комплексную) п/о, то $f \in \mathcal{A}(D)$.*

1.9.16. Теорема (Морера). *Пусть D — произвольная область в $\mathbb{C}$ и f удовлетворяет в D условию треугольника. Тогда $f \in \mathcal{A}(D)$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы достаточно воспользоваться теоремой 1.8.7 о первообразной в односвязной области (для кругов из D) и следствием 1.9.15. □

1.9.17. Упражнение. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, функция f голоморфна в D (в частности, f удовлетворяет условию треугольника в D), и пусть f не обращается в ноль всюду в D. Тогда существует голоморфная ветвь $g(z)$ многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$ в D, т. е. существует $g \in \mathcal{A}(D)$ с условиями $g(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ для всех $z \in D$, или же $f(z) = \exp(g(z))$.

1.9.18. Следствие. *Пусть $n \in \{2, 3, \dots\}$. В условиях предыдущего упражнения функция $h_n(z) = \exp(g(z)/n)$ является голоморфной ветвью многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в D, т. е. $h_n \in \mathcal{A}(D)$, причем $h_n(z) \in \sqrt[n]{f(z)}$ для всех $z \in D$, т. е. $f(z) = (h_n(z))^n$.*

§ 1.10. Теорема Вейерштрасса. Степенные ряды. Теорема Коши – Тейлора и ее следствия

1.10.1. Теорема Вейерштрасса.

1.10.1. Определение. Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Последовательность $\{f_n\} = \{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ функций $f_n \colon D \to \mathbb{C}$ сходится *равномерно внутри* D к функции f при $n \to +\infty$ (коротко: $f_n \rightrightarrows f$ вн. D при $n \to +\infty$), если эта последовательность сходится к f равномерно на всяком компакте K из D, т. е. $\|f - f_n\|_K \to 0$ при $n \to +\infty$.

1.10.2. Пример. Последовательность функций $z^n \rightrightarrows 0$ *внутри* B_1, но не сходится равномерно *на* B_1 при $n \to +\infty$.

1.10.3. Определение. Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функций $f_n \colon D \to \mathbb{C}$ сходится *равномерно внутри* D к своей сумме S, если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ частичных сумм этого ряда сходится к S равномерно внутри D при $n \to +\infty$.

1.10.4. Теорема (Вейерштрасса). *Пусть последовательность функций $\{f_n\}$ из $\mathcal{A}(D)$ сходится равномерно внутри D к функции f при $n \to +\infty$. Тогда $f \in \mathcal{A}(D)$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к $f^{(k)}$ равномерно внутри D при $n \to +\infty$.*

Доказательство. Свойство $f \in \mathcal{A}(D)$ следует из леммы Гурса, свойства сохранения условия треугольника при равномерной сходимости внутри D и теоремы 1.9.16 (Морера). Из соображений индукции и компактности нам достаточно установить, что $\|f_n' - f'\|_K \to 0$ при $n \to +\infty$, где K — произвольный *замкнутый круг* в D. Пусть $K = \overline{B(a, r)}$ и $d > 0$ таково, что $\overline{B(a, r + d)} \subset D$. Положим $\Gamma^+ = \partial^+ B(a, r + d)$ (сама граница $\Gamma = \partial B(a, r + d)$ — компакт в D) и воспользуемся теоремой 1.9.13 для f_n и f в области $B(a, r + d)$ при $k = 1$. Если $z_0 \in K$, то

$$|f_n'(z_0) - f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma^+} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz\right| \leqslant \|f_n - f\|_\Gamma \frac{2\pi(r + d)}{2\pi d^2} \to 0$$

при $n \to +\infty$, поскольку $f_n \rightrightarrows f$ на Γ. □

1.10.2. Степенные ряды. Лемма Абеля. Формула Коши – Адамара.

1.10.5. Определение. *Степенным рядом* называется функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{1.10.1}$$

Постоянные $c_n \in \mathbb{C}$ называются *коэффициентами*, а точка $z_0 \in \mathbb{C}$ — *центром* степенного ряда (1.10.1). Для всякого $N \in \mathbb{N}$ полином

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n (z - z_0)^n$$

называется *частичной суммой порядка* N ряда (1.10.1).

Множество точек сходимости ряда (1.10.1) обозначим через E. Ясно, что $z_0 \in E \neq \varnothing$.

1.10.6. Лемма (Абеля). *Если ряд* (1.10.1) *сходится в точке* $z_1 \neq z_0$, *то он сходится равномерно внутри круга* $B(z_0, |z_1 - z_0|)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что имеет место равномерная сходимость на любом замкнутом круге $\overline{B(z_0, r)}$, где $r < |z_1 - z_0|$.

Положим $q = r/|z_1 - z_0|$. Поскольку $q < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ сходится. Напомним, что необходимым условием сходимости (числового) ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$$

является условие $c_n (z_1 - z_0)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, из которого для всех n следует оценка $\bigl|c_n (z_1 - z_0)^n\bigr| < M$ при некотором $M > 0$. Далее, оценка

$$|c_n (z - z_0)^n| = |c_n (z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leqslant M q^n.$$

показывает, что сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} M q^n$ является равномерной мажорантой для ряда (1.10.1) при $z \in \overline{B(z_0, r)}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд (1.10.1) сходится равномерно на $B(z_0, r)$, что и требовалось. □

1.10.7. Следствие. *Если ряд* (1.10.1) *расходится в некоторой точке* $z_2 \neq z_0$, *то он расходится всюду вне замкнутого круга* $\overline{B(z_0, |z_2 - z_0|)}$.

1.10.8. Следствие. *Для любого ряда вида* (1.10.1) *определены число* $R \in [0, +\infty]$ *и при* $R > 0$ *круг* $B = B(z_0, R)$ *со следующим свойством: ряд* (1.10.1) *сходится равномерно внутри* B *и расходится вне* $\overline{B}$.

1.10.9. Определение. Число R называется *радиусом сходимости*, а круг $B = B(z_0, R) = E^\circ$ — *областью* (*кругом*) *сходимости* ряда (1.10.1).

1.10.10. Следствие. *Пусть* $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ — *сумма ряда* (1.10.1) *и* $R > 0$. *Тогда функция* $S(z)$ *голоморфна в круге сходимости* $B(z_0, R)$.

Доказательство. Пользуемся леммой Абеля и применяем теорему Вейерштрасса к последовательности $\{S_N\}$ частичных сумм ряда (1.10.1). □

1.10.11. Упражнение. Доказать *формулу Коши – Адамара* для радиуса сходимости ряда (1.10.1)

$$R = \frac{1}{l}, \text{ где } l = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, +\infty].$$

По ряду (1.10.1) определим еще один степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n(z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(n+1)(z-z_0)^n.$$

Такой ряд называется *почленно продифференцированным рядом* для ряда (1.10.1).

Обозначим его радиус сходимости через R'.

1.10.12. Теорема. *Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда* (1.10.1), *$S(z)$ — его сумма. Тогда $R' = R$ и для всех $z \in B = B(z_0, R)$*

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(n+1)(z-z_0)^n. \tag{1.10.2}$$

Доказательство. Равенство (1.10.2) для $z \in B$ сразу следует из теоремы Вейерштрасса, примененной к последовательности $\{S_N\}$ частичных сумм. Отсюда же следует оценка $R' \geqslant R$. Равенство $R = R'$ можно получить из формулы Коши – Адамара. □

1.10.13. Следствие. *Ряд* (1.10.1) *можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.*

Рассмотрим *почленно проинтегрированный ряд* для ряда (1.10.1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(z-z_0)^n. \tag{1.10.3}$$

Обозначим через $R_\int$ его радиус сходимости. Следующее утверждение легко вытекает из теоремы 1.10.2 и доказанной ранее теоремы Ньютона – Лейбница.

1.10.14. Следствие. *Если $R > 0$ — радиус сходимости ряда* (1.10.1), *то $R_\int = R$ и для всех $z \in B = B(z_0, R)$ выполняется равенство*

$$\int_{\Gamma_{z_0 z}} S(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(z-z_0)^n,$$

где последний интеграл (первообразная функции $S(z)$) берется по любой спрямляемой кривой $\Gamma_{z_0 z}$ в B с началом z_0 и концом z.

1.10.3. Теорема Коши – Тейлора (ТКТ) и ее следствия.

1.10.15. Теорема (ТКТ, о разложении в ряд Тейлора). *Пусть* $r \in (0, +\infty]$, $B = B(z_0, r)$, *и пусть* $f \in \mathcal{A}(B)$. *Тогда при всех* $z \in B$ *выполняется равенство*

$$f(z) = T^f_{z_0}(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \tag{1.10.4}$$

где $T^f_{z_0}(z)$ — *ряд Тейлора функции* f *с центром в точке* z_0. *В частности, для радиуса сходимости* R_T *ряда* $T^f_{z_0}$ *верна оценка* $R_T \geqslant r$.

Доказательство. Установим равенство (1.10.4) в произвольной точке $z \in B$. Положим $\delta = |z - z_0| < r$ и зафиксируем $\rho \in (\delta, r)$.

Воспользуемся интегральной формулой Коши в круге $B_\rho = B(z_0, \rho)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Заметим, что для каждого $\zeta \in \partial B_\rho$ имеем

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = q = \frac{\delta}{\rho} < 1,$$

поэтому

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Последний ряд сходится абсолютно и равномерно на ∂B_ρ, поскольку он мажорируется числовым рядом $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\rho}\Big(\dfrac{\delta}{\rho}\Big)^k$.

Нам понадобится следующее простое утверждение.

1.10.16. Упражнение. Пусть Γ — спрямляемая кривая, $g \in C([\Gamma])$ и пусть $\{F_n\}_n$ — последовательность функций, непрерывных на $[\Gamma]$, с условием $F_n \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} F$ на $[\Gamma]$. Тогда

$$\int_\Gamma g(\zeta) F_n(\zeta)\,d\zeta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Gamma g(\zeta) F(\zeta)\,d\zeta. \tag{1.10.5}$$

Воспользуемся теперь этим утверждением при $\Gamma = \partial^+ B_\rho$, $F_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} (z - z_0)^k (\zeta - z_0)^{-k-1}$ и $g(\zeta) = f(\zeta)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} f(\zeta) \sum_{k=0}^{n} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (z - z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k,$$

где в последнем равенстве мы воспользовались ИФК для производных. $\square$

1.10.17. Следствие (Единственность разложения в степенной ряд). *Пусть $r > 0$, $B = B(z_0, r)$ и для всех $z \in B$ справедливо равенство $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Тогда $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.*

Доказательство. Заметим, что указанный здесь ряд автоматически имеет радиус сходимости не менее r. Остается воспользоваться теоремой 1.10.12 о почленном дифференцировании степенного ряда. $\square$

1.10.18. Следствие (Неравенства Коши). *При $\rho \in (0, r)$ в условиях теоремы* 1.10.15 *положим $M_\rho = \max_{\zeta \in \partial B_\rho} |f(\zeta)|$. Тогда для коэффициентов Тейлора $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ справедливы оценки*

$$|c_n| \leqslant \frac{M_\rho}{\rho^n}. \tag{1.10.6}$$

Доказательство. Эти оценки следуют из ИФК для производных:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{M_\rho 2\pi\rho}{2\pi\rho^{n+1}} = \frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

Утверждение доказано. $\square$

1.10.19. Теорема (Теорема Лиувилля). *Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ — целая функция, и пусть найдется $p \in [0, +\infty)$ с условием $f(z) = O(|z|^p)$ при $|z| \to +\infty$. Тогда f является многочленом степени не выше $[p]$.*

В частности, если целая функция f ограничена, то $f \equiv const$.

Доказательство. Поскольку $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, по теореме 1.10.15 всюду в $\mathbb{C}$ функция f представляется своим рядом Тейлора с центром в нуле, т. е. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Положим $M_\rho = \max_{|\zeta|=\rho} |f(\zeta)|$. По условию найдется константа $C > 0$ такая, что $M_\rho \leqslant C(\rho^p + 1)$. Тогда по предыдущему следствию имеем оценку $|c_n| \leqslant C(\rho^p + 1)\rho^{-n}$, справедливую для всех $\rho > 0$. Если в этой оценке фиксировать любое $n > p$ и устремить ρ к бесконечности, то получим $c_n = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

1.10.4. Табличные разложения в ряд Тейлора ($z_0 = 0$).

Из теоремы 1.10.15, формулы Коши–Адамара и следствия 1.10.14 (для доказательства (7)) вытекают следующие (табличные) разложения в ряд Тейлора:

$$(1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < +\infty;$$

$$(2)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad |z| < +\infty;$$

$$(3)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}, \quad |z| < +\infty;$$

$$(4)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$(5)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$(6)\ (1+z)^p_{(o)} = 1 + pz + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \quad |z| < 1, \quad p \notin \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$(7)\ \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{2m+1}, \quad |z| < 1.$$

§ 1.11. Теорема о нулях и теорема единственности для ГФ. Пространства Бергмана $\mathcal{A}^p(D)$ и пространство $\mathcal{A}(D)$. Обобщенные степенные ряды. Теорема Лорана. Связь рядов Лорана и Фурье

1.11.1. Теорема о нулях и теорема единственности для ГФ.

1.11.1. Определение. Пусть даны точка $a \in \mathbb{C}$ и функция $f \in \mathcal{A}(a)$. Если $f(a) = 0$, то точка a называется *нулем голоморфной функции f*.

Если существует $p \in \mathbb{N}$ с условием $f(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0$, но $f^{(p)}(a) \neq 0$, то говорят, что *a — нуль порядка p для функции f*.

При $p = 1$ точка a называется *простым нулем функции f*.

Если $f(a) \neq 0$, то (для общности) точка a называется *нулем функции f порядка* 0.

Если не оговорено противного, порядок нуля далее считается натуральным.

1.11.2. Определение. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — нуль функции f. Говорят, что он *изолированный*, если найдется такое $\delta > 0$, что $f(z) \neq 0$ в проколотой окрестности $B'(a, \delta) = B(a, \delta) \setminus \{a\}$.

1.11.3. Теорема (О нулях ГФ). *Пусть a — нуль голоморфной функции f. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *a — изолированный нуль функции f;*

(2) *a имеет некоторый конечный порядок $p \in \mathbb{N}$;*

(3) *найдется $g \in \mathcal{A}(a)$ с условиями $g(a) \neq 0$ и в некоторой окрестности точки a имеет место равенство $f(z) = (z - a)^p g(z)$.*

Доказательство. Согласно условию $f \in \mathcal{A}(a)$, т. е. существуют такие $\delta > 0$ и круг $B = B(a, \delta)$, что $f \in \mathcal{A}(B)$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2) от противного. Если a — нуль бесконечного порядка, то $f^{(n)}(a) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому $T_a^f \equiv 0$. Но $f(z) = T_a^f(z)$ в B, следовательно, $f \equiv 0$ в B и точка a не является изолированным нулем. Противоречие.

Установим (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $p \in \mathbb{N}$ — порядок нуля a для f. Тогда $f(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0$, но $f^{(p)}(a) \neq 0$. Следовательно, для коэффициентов $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ ряда T_a^f имеем $c_0 = \dots = c_{p-1} = 0$, но $c_p \neq 0$. В круге B справедливо равенство

$$f(z) = T_a^f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n = c_p (z-a)^p + c_{p+1}(z-a)^{p+1} + \dots =$$
$$= (z-a)^p (c_p + c_{p+1}(z-a) + \dots) = (z-a)^p g(z),$$

где функция $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{p+n}(z-a)^n$ голоморфна в B и $g(a) = c_p \neq 0$.

Осталось доказать (3) $\Rightarrow$ (1). Поскольку $g \in \mathcal{A}(B)$ и $g(a) \neq 0$, то $g(z) \neq 0$ в некотором (возможно, меньшем, чем B) круге $B_1 = B(a, \delta_1)$,

$\delta_1 > 0$. Функция $(z-a)^p$ не обращается в ноль в проколотой окрестности точки a. Следовательно, $f(z) = (z-a)^p g(z) \neq 0$ в B_1', т. е. a — изолированный нуль функции f. $\square$

1.11.4. Теорема (Единственности). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и функция $f \in \mathcal{A}(D)$. Пусть $Z_f = \{z \in D\colon f(z) = 0\}$ — множество нулей f в D. Если Z_f имеет в D хотя бы одну предельную точку, то $Z_f = D$, т. е. $f \equiv 0$ в D.*

Доказательство. Пусть $a \in D$ — предельная точка Z_f. В силу непрерывности функции f имеем $a \in Z_f$. Следовательно, a — неизолированный нуль ГФ f. Обозначим через $\widetilde{Z}_f$ множество всех неизолированных нулей функции f в D. Тогда $\widetilde{Z}_f \subseteq Z_f \subseteq D$. Выше мы установили, что $\widetilde{Z}_f \neq \varnothing$. Докажем, что $\widetilde{Z}_f$ одновременно открыто и замкнуто в D. Тогда в силу связности множества D будем иметь $\widetilde{Z}_f = D$, откуда будет следовать утверждение теоремы.

Пусть $z_0 \in \widetilde{Z}_f$. Тогда по теореме 1.11.3 точка z_0 — нуль бесконечного порядка для f. Следовательно, $f(z) = T^f_{z_0}(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности $U(z_0) \subseteq D$ точки z_0. Ясно, что $U(z_0) \subseteq \widetilde{Z}_f$, т. е. любая точка входит в $\widetilde{Z}_f$ вместе с некоторой окрестностью. Замкнутость множества $\widetilde{Z}_f$ в D следует из непрерывности f. $\square$

1.11.5. Пример. Отметим, что прямого аналога доказанной теоремы для функций действительного переменного нет даже в классе $C^\infty(\mathbb{R})$. В качестве примера можно взять функцию

$$f(x) = e^{-1/x^2}\sin(1/x), \quad x \neq 0,$$

$f(0) = 0$. Здесь точка $x = 0$ — не изолированный нуль для f.

1.11.2. Теорема об особой точке на границе круга сходимости степенного ряда.

Рассмотрим степенной ряд с центром в точке z_0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n. \tag{1.11.1}$$

Пусть радиус сходимости этого ряда равен $R \in (0, +\infty)$, $B = B(z_0, R)$ — соответствующий круг сходимости и пусть $S \in \mathcal{A}(B)$ — его сумма.

1.11.6. Определение. Назовем точку $a \in \partial B$ *неособой для S*, если найдутся такие $\delta_a > 0$ и функция $f_a \in \mathcal{A}\big(B(a, \delta_a)\big)$, что $f_a(z) = S(z)$ для всех $z \in B \cap B(a, \delta_a)$.

В противном случае точка $a \in \partial B$ называется *особой* для S.

1.11.7. Теорема. *В описанных выше условиях на ∂B существует хотя бы одна особая точка для S.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что все точки из ∂B неособые. Покроем каждую точку a компакта ∂B кругом $B_a = B(a, \delta_a)$ из определения неособой точки и выберем конечное подпокрытие: $\partial B \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{a_n}$.

Пусть $B_{a_n} \cap B_{a_m} \neq \varnothing$. Тогда из определения B_a и f_a следуют равенства $f_{a_n} \equiv f_{a_m} \equiv S$ на множестве $B_{a_n} \cap B_{a_m} \cap B$. Следовательно, из теоремы 1.11.4 получаем, что $f_{a_n} \equiv f_{a_m}$ всюду на $B_{a_n} \cap B_{a_m}$.

Это рассуждение показывает, что функцию S можно продолжить до голоморфной в области $D = B \cup \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_{a_n}\right)$ функции $\widetilde{S}$. По построению найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B(z_0, R+\varepsilon) \subset D$. Тогда, разлагая функцию $\widetilde{S}$ в ряд Тейлора с центром z_0 и пользуясь его единственностью, мы получаем, что радиус сходимости ряда (1.11.1) не меньше чем $R+\varepsilon$. Противоречие. $\square$

1.11.3. Пространства Бергмана $\mathcal{A}^p(D)$ и пространство $\mathcal{A}(D)$.

1.11.8. Определение. Для области D в $\mathbb{C}$ и любого $p \in [1, +\infty]$ определим следующие p-пространства *Бергмана* голоморфных функций в D:

(1) при $p = +\infty$ полагаем $\mathcal{A}^\infty(D) = \mathcal{A}(D) \cap L^\infty(D)$ с нормой

$$\|f\|_{\infty,D} = \sup_{z \in D} |f(z)|;$$

эти пространства являются банаховыми по теореме Вейерштрасса;

(2) при $p \in [1, +\infty)$ определим $\mathcal{A}^p(D) = \mathcal{A}(D) \cap L^p(D)$ с нормой

$$\|f\|_{p,D} = \left(\iint_D |f(z)|^p \, dx \, dy\right)^{1/p};$$

эти пространства являются банаховыми по теореме Вейерштрасса с дополнительным применением теоремы о среднем по кругам и неравенства Гельдера (проверить); пространства $\mathcal{A}^2(D)$ являются гильбертовыми с эрмитовым произведением

$$(f, g) = \iint_D f(z)\overline{g(z)} \, dx \, dy.$$

1.11.9. Определение. Для произвольной области D в $\mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, при $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$K_n = \{z \in D \colon |z| \leqslant n, \mathrm{d}(z, \partial D) \geqslant 1/n\}$$

и n_1 — первый номер n, для которого $K_n \neq \varnothing$. Тогда $\{K_n\}_{n=n_1}^{+\infty}$ называется *стандартным исчерпанием* области D (указанной возрастающей последовательностью компактов). При $D = \mathbb{C}$ полагаем

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant n\}$$

.

В пространстве $\mathcal{A}(D)$ введем следующую (бинарную) величину:

$$\rho_{\mathcal{A}}(f,g)=\sum_{n=n_1}^{+\infty}2^{-n}\frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}.$$

1.11.10. Упражнение. (а) Пользуясь возрастанием функции

$$\varphi(t)=t/(1+t),\quad t\in[0,+\infty)$$

и ее свойством $\varphi(t_1+t_2)\leqslant\varphi(t_1)+\varphi(t_2)$ при $t_1\geqslant 0$ и $t_2\geqslant 0$, доказать, что $\rho_{\mathcal{A}}(f,g)$ является метрикой;

(б) установить, что сходимость последовательностей в этой метрике эквивалентна равномерной сходимости внутри D, откуда сразу вытекает *полнота* метрики $\rho_{\mathcal{A}}(f,g)$;

(в)* доказать, что эта метрика не задается нормой (теорема П. С. Урысона).

1.11.4. Обобщенные степенные ряды. Теорема Лорана.

1.11.11. Определение. *Обобщенным степенным рядом* называется (формальный) ряд вида

$$\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(z-z_0)^n}_{(*)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{(a)}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n}_{(b)}. \tag{1.11.2}$$

Как и в случае степенных рядов, точка $z_0\in\mathbb{C}$ называется *центром*, а постоянные $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — *коэффициентами* обобщенного степенного ряда (1.11.2).

Говорят, что ряд (1.11.2) *сходится в точке* $z_1\in\mathbb{C}$, если в этой точке одновременно сходятся ряды (a) и (b).

Для ряда (b) пусть $R_2\in[0,+\infty]$ — его радиус сходимости, т. е. ряд (b) сходится абсолютно и равномерно внутри $B_2=B(z_0,R_2)$ и расходится в $\mathbb{C}\setminus\overline{B_2}$.

Сопоставив с помощью замены $w=1/(z-z_0)$ ряду (a) степенной ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}w^n$, легко показать, что существует $R_1\in[0,+\infty]$ такое, что ряд (a) расходится в $B_1=B(z_0,R_1)$ и сходится абсолютно и равномерно внутри $\mathbb{C}\setminus\overline{B_1}$.

1.11.12. Упражнение. По формуле Коши–Адамара выразить R_1 и R_2 через $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

1.11.13. Определение. При $R_1<R_2$ множество

$$V_*=\{z\in\mathbb{C}\colon R_1<|z-z_0|<R_2\}$$

называется *кольцом сходимости ряда* (1.11.2). По доказанному ранее, ряд (1.11.2) сходится *абсолютно и равномерно внутри* V_*.

(При $R_1\geqslant R_2$ имеем $V_*=\varnothing$.)

1.11.14. Теорема (Лорана). *Пусть* $V = \{z \in \mathbb{C} \colon r < |z - z_0| < R\}$ — *кольцо с центром* $z_0 \in \mathbb{C}$ $(0 \leqslant r < R \leqslant +\infty)$ *и функция* $f \in \mathcal{A}(V)$. *Тогда всюду в* V *функция* f *разлагается в обобщенный степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{1.11.3}$$

с коэффициентами c_n, $n \in \mathbb{Z}$, *однозначно определяющимися по формулам*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \tag{1.11.4}$$

где $\rho \in (r, R)$ — *произвольно фиксированное.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $z \in V$ и выберем r_0 и R_0 с условиями $r < r_0 < |z - z_0| < R_0 < R$. Обозначим $\Gamma_0^+ = \partial^+ B(z_0, R_0)$ и $\gamma_0^+ = \partial^+ B(z_0, r_0)$. В кольце $V_0 = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon r_0 < |\zeta - z_0| < R_0\}$ воспользуемся интегральной формулой Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^+} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^+} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = F_0(z) + f_0(z),$$

где

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^+} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad f_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^+} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Представление для F_0 получается как и в доказательстве теоремы Коши – Тейлора:

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^+} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, n \in \{0, 1, \ldots\}. \tag{1.11.5}$$

Рассмотрим подробнее $f_0(z)$. В силу выбора r_0, для точек $\zeta \in [\gamma_0]$ выполнено неравенство $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$, поэтому

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

причем последний ряд сходится абсолютно и равномерно (по ζ) на $[\gamma_0]$. Сделав замену $m = -n - 1$, можно записать предыдущую цепочку равенств в виде

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}}.$$

Повторяя обоснование смены порядка суммирования и интегрирования в доказательстве теоремы Коши – Тейлора, получаем равенство

$$f_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m(z-z_0)^m, c_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{m+1}}, m \in \{-1,-2,\ldots\}. \tag{1.11.6}$$

Теперь важно отметить, что при каждом фиксированном n интегралы в (1.11.4) для всех $\rho \in (r,R)$ совпадают: достаточно при любых $\rho_1 < \rho_2$ из (r,R) применить интегральную теорему Коши для кольца $\{\rho_1 < |\zeta - z_0| < \rho_2\}$ и функции $f(\zeta)/(\zeta-z_0)^{n+1}$.

Объединяя (1.11.5) и (1.11.6), получаем представление для $f(z)$, имеющее вид (1.11.3) с коэффициентами (1.11.4). При этом ряд (1.11.3) сходится равномерно внутри V.

Докажем единственность. Пусть для f в V справедливо какое-то представление вида (1.11.3). Тогда ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ сходится равномерно внутри V. Поэтому при фиксированных $p \in \mathbb{Z}$ и $\rho \in (r,R)$ получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ B(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{p+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ B(z_0,\rho)} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\zeta-z_0)^{n-p-1}\Big)\,d\zeta = c_p$$

по свойству ортогональности степеней. □

1.11.15. Следствие (Неравенства Коши для коэффициентов Лорана). *В условиях и обозначениях теоремы Лорана, при $\rho \in (r,R)$ определим $M_\rho = \|f\|_{\partial B(z_0,\rho)}$. Тогда справедливы оценки*

$$|c_n| \leqslant \frac{M_\rho}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.11.7}$$

Доказательство. Обоснование оценок аналогично доказательству неравенств Коши для коэффициентов Тейлора. □

1.11.5. Связь рядов Лорана с рядами Фурье.

Пусть $V = \{r < |z| < R\}$ — кольцо при $0 \leqslant r < 1 < R \leqslant +\infty$. В частности, окружность $\Gamma_1 = \{|z| = 1\} \subset V$. При $f \in \mathcal{A}(V)$ функция $g(t) = f(e^{it})$ является 2π-периодической бесконечно-дифференцируемой функцией на $\mathbb{R}$. Тогда, если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ — разложение функции f в ряд Лорана в V, то $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$— разложение функции g в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$ (в комплексной форме).

1.11.16. Упражнение. Разложить функцию $g(t) = 1/(2-\cos(t))$ в ряд Фурье на $[-\pi,\pi]$.

Указание. Пусть $z = e^{it}$, тогда $\cos(t) = (z+1/z)/2$ и в качестве f следует взять функцию $f(z) = (2-(z+1/z)/2)^{-1} = -2z/(z^2-4z+1)$, голоморфную в кольце $\{2-\sqrt{3} < |z| < 2+\sqrt{3}\}$.

Ответ: $g(t) = 1/\sqrt{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}(2/\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n\cos(nt)$.

§ 1.12. Классификация изолированных особых точек (ИОТ) ГФ. Теорема Сохоцкого. Лемма Шварца и ее следствие. ИОТ ∞. Вычеты в ИОТ

1.12.1. Классификация изолированных особых точек ГФ.

1.12.1. Определение. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ и функция $f \in \mathcal{A}(B'(a,\delta))$, но $f \notin \mathcal{A}(a)$ или $f(a)$ не определена. Тогда точка a называется *изолированной особой точкой* (*ИОТ*) *функции* f.

1.12.2. Определение. ИОТ a для функции f называется
— *устранимой*, если существует $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;
— *полюсом*, если существует $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;
— *существенно особой точкой*, если не существует $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

1.12.3. Теорема (Об устранимой особой точке). *Для ИОТ a функции $f \in \mathcal{A}(B'(a,\delta))$, $\delta > 0$, следующие условия эквивалентны*:
(1) *точка a устранима*;
(2) *f ограничена в некоторой проколотой окрестности $B'(a,\delta_1)$, $\delta_1 < \delta$*;
(3) *ряд Лорана функции f в кольце $B'(a,\delta)$ не содержит отрицательных степеней, т. е. $c_n = 0$ при $n < 0$. В этом случае говорят, что главная часть ряда Лорана отсутствует.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Из существования $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$ следует ограниченность f в некоторой проколотой окрестности $B'(a,\delta_1)$ точки a ($\delta_1 < \delta$), т. е.

$$\sup\{|f(z)|\colon z \in B'(a,\delta_1)\} = M < +\infty.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Воспользуемся неравенствами Коши (1.11.7). Поскольку $M_\rho = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)| \leqslant M$ при $\rho \in (0,\delta_1)$, то при $n < 0$ имеем

$$|c_n| \leqslant M_\rho \rho^{-n} \leqslant M\rho^{-n} \to 0 \text{ при } \rho \to 0,$$

откуда $c_n = 0$ при $n < 0$.
(3) $\Rightarrow$ (1). Очевидно, что $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$. □

1.12.4. Следствие. *Если a — устранимая особая точка, то, определяя $f(a) = \lim\limits_{z\to a} f(z)$, получаем $f \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta)\big)$.*

1.12.5. Пример. Положим $f(z) = (\sin z)/z$ при $z \neq 0$ и $f(0) = 1$. Тогда f — целая функция.

1.12.6. Теорема (О полюсах). *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — ИОТ для функции $f \in \mathcal{A}\big(B'(a,\delta)\big)$, $\delta > 0$. Следующие условия эквивалентны*:
(1) *a — полюс*;

(2) *ряд Лорана функции f в $B'(a,\delta)$ содержит конечное (ненулевое) число отрицательных степеней (его главная часть конечна), т. е. существует такое $p \in \mathbb{N}$, что*

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_{-p} \neq 0.$$

В этом случае говорят, что a — полюс функции f порядка p. При $p = 1$ полюс называют простым.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). По условию $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, поэтому найдется $\delta_1 \in (0,\delta)$ такое, что $f(z) \neq 0$ при $z \in B'(a,\delta_1)$. Рассмотрим функцию $g(z) = 1/f(z)$, голоморфную в $B'(a,\delta_1)$. Ясно, что существует $\lim\limits_{z\to a} g(z) = 0$, поэтому, положив $g(a) = 0$, получим функцию $g \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta_1)\big)$ (по следствию 1.12.4). Точка a — изолированный нуль функции g некоторого (конечного) порядка $p \in \mathbb{N}$. По теореме о нулях ГФ, существует $h \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta_1)\big)$ такая, что $g(z) = (z-a)^p h(z)$, причем $h(a) \neq 0$, откуда $h(z) \neq 0$ при $z \in B(a,\delta_1)$. Следовательно, определена функция $\widetilde{h}(z) = 1/h(z) \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta_1)\big)$.

Разложим функцию $\widetilde{h}$ в $B(a,\delta_1)$ в ряд Тейлора:

$$\widetilde{h}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \quad a_0 \neq 0.$$

Тогда для функции f в $B'(a,\delta_1)$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^p}\widetilde{h}(z) = \frac{a_0}{(z-a)^p} + \frac{a_1}{(z-a)^{p-1}} + \cdots .$$

В силу единственности разложения в ряд Лорана, это же разложение верно и в $B'(a,\delta)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Очевидно. □

1.12.7. Упражнение. Для $f(z) = \sin(z)/z^2$ точка $z = 0$ — простой полюс.

Замечание. В обозначениях доказательства теоремы 1.12.6 справедливо следующее утверждение: ИОТ a — полюс порядка $p \geqslant 1$ для функции f, если и только если a — нуль порядка p для функции $g(z) = 1/f(z)$ при $z \in B'(a,\delta_1)$, $g(a) = 0$.

Напомним, что при $f \in \mathcal{A}(a)$ и $f(a) \neq 0$ точка a называется нулем функции f порядка 0.

1.12.8. Предложение. *Пусть f_1, $f_2 \in \mathcal{A}\big(B(a,\delta)\big)$ и пусть точка a — нуль порядка $p_j \in \mathbb{Z}_+$ для функции f_j, $j \in \{1,2\}$.*

Положим $f = f_1/f_2$. Тогда при $p_1 \geqslant p_2$ точка a — устранимая особая точка для f (при $p_2 = 0$ в этой точке нет особенности), а при $p_2 > p_1$ точка a — полюс порядка $(p_2 - p_1)$ для f.

Доказательство. Согласно теореме о нулях ГФ существует такое $\delta' \in (0, \delta)$, что в окрестности $B(a, \delta')$ справедливы представления

$$f_1(z) = (z-a)^{p_1} h_1(z), \quad f_2(z) = (z-a)^{p_2} h_2(z),$$

где функции h_1 и h_2 голоморфны и не обращаются в нуль в $B(a, \delta')$, т. е. функция $h(z) = h_1(z)/h_2(z)$ тоже голоморфна в $B(a, \delta')$.

При $p_1 \geqslant p_2$ функция f имеет вид $f(z) = (z-a)^{p_1 - p_2} h(z)$, поэтому существует конечный $\lim_{z\to a} f(z)$, так что точка a — устранима для f.

При $p_1 < p_2$ функция f имеет вид $f(z) = h(z)(z-a)^{p_1 - p_2}$, откуда точка a — полюс порядка $(p_2 - p_1)$ для f по доказанному в теореме 1.12.6. □

1.12.9. Следствие. *ИОТ a функции $f \in \mathcal{A}\big(B'(a, \delta)\big)$ является существенно особой, если и только если ряд Лорана функции f в $B'(a, \delta)$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых в главной части (т. е. существует бесконечно много $n < 0$ таких, что $c_n \neq 0$).*

1.12.10. Упражнение. Для $f(z) = e^{1/z}$ точка $z = 0$ — существенно особая.

1.12.11. Теорема (Сохоцкого). *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — существенно особая точка для функции $f \in \mathcal{A}\big(B'(a, \delta)\big)$. Тогда для любого $b \in \mathbb{C}^\bullet$ найдется такая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset B'(a, \delta)$, что $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = b$.*

Доказательство. Согласно теореме 1.12.3 функция f не может быть ограниченной ни в какой проколотой окрестности $B'(a, r)$, $r \in (0, \delta)$ (иначе a была бы устранимой для f). Так что в условиях нашей теоремы случай $b = \infty$ очевиден.

Зафиксируем теперь произвольное $b \in \mathbb{C}$. Если для каждого $r \in (0, \delta)$ найдется такое $z_r \in B'(a, r)$, что $f(z_r) = b$, то все доказано.

Пусть теперь существует $r_0 \in (0, \delta)$ такое, что $f(z) \neq b$ для всех $z \in B'(a, r_0)$. Рассмотрим функцию $g(z) = 1/(f(z) - b) \in \mathcal{A}\big(B'(a, r_0)\big)$, для которой точка a — существенно особая (проверить!). По доказанному, найдется $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset B'(a, r_0) \subset B'(a, \delta)$ с условиями $a_n \to a$ и $g(a_n) \to \infty$ при $n \to +\infty$. Откуда $f(a_n) \to b$ при $n \to +\infty$. □

1.12.2. Лемма Шварца. Конформные изоморфизмы круговых областей.

1.12.12. Теорема (Лемма Шварца). *Пусть $B_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — единичный круг и пусть $f \in \mathcal{A}(B_1)$. Пусть также $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant 1$*

при всех $z \in B_1$. *Тогда* $|f(z)| \leqslant |z|$ *для всех* $z \in B_1$ *и, следовательно,* $|f'(0)| \leqslant 1$.

Если найдется $z_1 \in B_1$ *такое, что* $z_1 \neq 0$ *и* $|f(z_1)| = |z_1|$, *то найдется* $\theta \in (-\pi, \pi]$ *с условием* $f(z) = e^{i\theta} z$ *для всех* $z \in B_1$.

Доказательство. Определим функцию $g(z) = f(z)/z$, имеющую устранимую особую точку $z = 0$. Полагая $g(0) = f'(0)$, получаем $g \in \mathcal{A}(B_1)$.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$, и в круге $B(0, 1-\varepsilon)$ к функции g применим принцип максимума модуля:

$$|g(z)| \leqslant \|g\|_{\partial B(0,1-\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad z \in B(0, 1-\varepsilon).$$

Фиксируя $z \in B_1$ и устремляя ε к нулю, получаем, что $|g(z)| \leqslant 1$ для всех $z \in B_1$. Следовательно, $|f(z)| \leqslant |z|$ при всех $z \in B_1$.

Если же найдется $z_1 \in B_1 \setminus \{0\}$ с условием $|f(z_1)| = |z_1|$, то $|g(z_1)| = 1$. Вновь применяя принцип максимума модуля в кругах $B(0, 1-\varepsilon)$ и устремляя ε к нулю, получаем, что $g(z) \equiv g(z_1) = e^{i\theta}$ в B_1 (для некоторого $\theta \in (-\pi, \pi]$). Отсюда $f(z) = e^{i\theta} z$ при всех $z \in B_1$. □

1.12.13. Следствие. *Пусть* D_1 *и* D_2 *— круговые области в* $\mathbb{C}^\bullet$ *(т. е. открытые круги или полуплоскости, или внешности замкнутых кругов в* $\mathbb{C}^\bullet$*). Если функция* f *является конформным изоморфизмом* D_1 *на* D_2*, то* f *— ДЛО.*

Доказательство. Пусть $a_j \in D_j$, $j \in \{1, 2\}$, причем $a_2 = f(a_1)$. Существуют ДЛО $\Lambda_j\colon B_1 \xrightarrow{\text{на}} D_j$ со свойством $\Lambda_j(0) = a_j$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим голоморфную функцию $g = \Lambda_2^{-1} \circ f \circ \Lambda_1\colon B_1 \xrightarrow{\text{на}} B_1$ (воспользоваться ее непрерывностью и теоремой об устранимой особой точке). Она удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому $|g(z)| \leqslant |z|$ для всех $z \in B_1$. Аналогично, g^{-1} голоморфна и удовлетворяет условиям леммы Шварца, поэтому $|g^{-1}(z)| \leqslant |z|$ при всех $z \in B_1$, что эквивалентно условиям $|z| \leqslant |g(z)|$ при всех $z \in B_1$. Следовательно, $|g(z)| = |z|$, и тогда $g(z) = e^{i\theta} z$ для некоторого $\theta \in (-\pi, \pi)$. В частности, g — ДЛО. Но тогда $f = \Lambda_2 \circ g \circ \Lambda_1^{-1}$ — тоже ДЛО, что и требовалось. □

1.12.3. Изолированная особая точка $z = \infty$.

Назовем область $B_{z_0}(\infty, \delta) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| > 1/\delta\} \cup \{\infty\}$ (соответственно, $B'_{z_0}(\infty, \delta) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| > 1/\delta\}$) — *$\delta$-окрестностью* точки ∞ в $\mathbb{C}^\bullet$ (соответственно, *проколотой δ-окрестностью* точки ∞) с антицентром z_0.

1.12.14. Определение. Пусть функция f определена в окрестности $B_{z_0}(\infty, \delta)$ точки ∞ и при этом существует конечный предел

$$\lim_{z \to \infty} z(f(z) - f(\infty)) =: f'(\infty).$$

Тогда этот предел называется *комплексной производной функции* f *в точке* ∞.

1.12.15. Определение. Если $f \in \mathcal{A}\big(B'_{z_0}(\infty, \delta)\big)$, то точка ∞ *всегда по определению является* ИОТ для f (даже если существует $f'(\infty)$). ИОТ ∞ для функции f называется

— *устранимой*, если существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$;

— *полюсом*, если существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$;

— *существенно особой точкой*, если предела $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ нет.

1.12.16. Предложение. *Теоремы* 1.12.3, 1.12.6, 1.12.11 *с соответствующими изменениями остаются справедливыми и в случае* $a = \infty$: *надо только называть главной частью ряда Лорана*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

для f *в* $B'_{z_0}(\infty, \delta)$ *сумму его натуральных степеней.*

1.12.17. Упражнение. Дать определение *порядка полюса* в точке ∞ и доказать его независимость от антицентра z_0.

1.12.4. Вычет в ИОТ.

1.12.18. Определение. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — ИОТ для $f \in \mathcal{A}\big(B'(a, R)\big)$, $R > 0$. При $\rho \in (0, R)$ положим $\Gamma_\rho^+ = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| = \rho\}^+ = \partial^+ B(a, \rho)$. Тогда *вычетом функции* f *в точке* a называется величина

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} f(z)\, dz.$$

1.12.19. Предложение. *Пусть* $(*) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$ *— ряд Лорана функции* f *в* $B'(a, R)$. *Тогда* $\operatorname{res}_a f = c_{-1}$.

Доказательство. Ряд $(*)$ сходится равномерно внутри $B'(a, R)$, в частности, на $\partial B(a, \rho)$ для всякого $\rho \in (0, R)$. Интегрируя почленно и пользуясь свойством ортогональности степеней, получаем требуемое равенство. □

Замечание. Из этого предложения, в частности, следует корректность определения вычета функции в точке.

1.12.20. Следствие. *Если* $a \in \mathbb{C}$ *— устранимая ИОТ для* f, *то* $\operatorname{res}_a f = 0$.

1.12.21. Следствие. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$ *— полюс порядка* p *для функции* $f \in \mathcal{A}\big(B'(a, R)\big)$. *Тогда*

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \big((z - a)^p f(z)\big)^{(p-1)}.$$

Доказательство. Если $\sum_{n=-p}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ — ряд Лорана функции f в $B'(a,R)$, то

$$\sum_{n=-p}^{+\infty} c_n(z-a)^{n+p} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-p}(z-a)^n$$

— ряд Тейлора для функции $g(z) = (z-a)^p f(z) \in \mathcal{A}\big(B(a,R)\big)$ (доопределенной $g(a) = c_{-p}$). Дифференцируя почленно последний ряд, получаем

$$\big((z-a)^p f(z)\big)^{(p-1)} = (p-1)!c_{-1} + (z-a)h(z), \quad h(z) \in \mathcal{A}\big(B(a,R)\big).$$

Переходя к пределу при $z \to a$, деля на $(p-1)!$ и пользуясь предложением 1.12.19, получаем требуемое. $\square$

1.12.22. Следствие. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{A}\big(B(a,R)\big)$, причем $f_1(a) \neq 0$, т. е. порядок нуля функции f_1 в точке a равен нулю, и $f_2(a) = 0$, но $f_2'(a) \neq 0$, т. е. порядок нуля функции f_2 в точке a равен 1. Тогда*

$$\operatorname*{res}_a\Big(\frac{f_1}{f_2}\Big) = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

Доказательство. Из условий вытекает, что функция $f = f_1/f_2$ имеет в точке a полюс порядка $p = 1$. Пользуясь следствием 1.12.21, имеем

$$\operatorname*{res}_a f = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = f_1(a)\lim_{z\to a}\frac{z-a}{f_2(z)-f_2(a)} = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Если $a \in \mathbb{C}$ — существенно особая точка для функции $f \in \mathcal{A}\big(B'(a,R)\big)$, то какой-то специальной формулы для вычисления вычета в этой точке нет, однако справедливо следующее утверждение.

1.12.23. Упражнение. Если функция f является *четной* относительно ИОТ $a \in \mathbb{C}$, т. е. $f(a+z) = f(a-z)$ при всех $z \in B'(0,R)$, то коэффициенты ряда Лорана f в $B'(a,R)$ с нечетными номерами равны нулю. В частности, $\operatorname{res}_a f = c_{-1} = 0$.

1.12.24. Определение. Пусть точка ∞ является ИОТ для функции $f \in \mathcal{A}(V)$, где $V = \{r < |z-z_0| < \infty\}$ — проколотая окрестность точки ∞ ($z_0 \in \mathbb{C}$, $r \geqslant 0$). Пусть $\Gamma_\rho^+ = \{|z-z_0| = \rho\}^+$ при $\rho \in (r,+\infty)$. Тогда *вычет функции f в точке* ∞ определяется по формуле

$$\operatorname*{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho^+} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho^-} f(z)\,dz.$$

1.12.25. Предложение. *Пусть $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ — ряд Лорана функции f в кольце $V = \{r < |z-z_0| < \infty\}$. Тогда $\operatorname{res}_\infty f = -c_{-1}$.*

Доказательство. Обоснование аналогично доказательству предложения 1.12.19. $\square$

1.12.26. Упражнение. Найти формулы (аналогичные формулам из следствия 1.12.21) для вычисления $\operatorname{res}_\infty f$ в случае, когда функция f имеет в точке ∞ полюс порядка $p \in \mathbb{N}$.

Замечание. Функция $f(z) = 1/z$ имеет в точке ∞ устранимую особую точку, но $\operatorname{res}_\infty f = -1 \neq 0$, поэтому утверждение следствия 1.12.20 неверно при $a = \infty$.

§ 1.13. Теорема Коши о вычетах. Примеры вычисления интегралов. Лемма Жордана и преобразование Фурье рациональных функций. Специальные области и функция Шварца

1.13.1. Теорема Коши о вычетах.

1.13.1. Теорема (Теорема Коши о вычетах). *Пусть D — допустимая область в $\mathbb{C}$, $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_J\} \subset D$, $J \in \mathbb{N}$. Пусть функция f непрерывна на $\overline{D} \setminus \mathfrak{A}$ и $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{A})$. Тогда*

$$\int_{\partial^+ D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{J} \operatorname*{res}_{a_j} f.$$

Замечание. Мы докажем эту теорему для простых областей, поскольку в доказательстве будет использоваться интегральная теорема Коши, которая была доказана нами только для простых областей.

Доказательство. Для $j \in \{1, \ldots, J\}$ пусть $V_j = \{0 < |z - a_j| < R_j\}$ — кольцо, лежащее в $D \setminus \mathfrak{A}$. Пусть $\Sigma_j = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^j (z - a_j)^n$ — ряд Лорана функции f в V_j и пусть $f_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^j (z - a_j)^n$ — сумма главной части Σ_j^- ряда Лорана Σ_j функции f в V_j. Из определения области сходимости обобщенного степенного ряда Σ_j вытекает, что $f_j \in \mathcal{A}\big(\mathbb{C} \setminus \{a_j\}\big)$.

Положим $f_0(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{J} f_j(z)$. Функция f_0, очевидно, непрерывна в $\overline{D} \setminus \mathfrak{A}$ и голоморфна в $D \setminus \mathfrak{A}$. При этом в точках a_j, $j = 1, \ldots, J$, функция f_0 имеет устранимые особые точки. Следовательно, f_0 непрерывна на замыкании $\overline{D}$ и $f_0 \in \mathcal{A}(D)$ (после «стирания» особенностей). Поэтому $\int_{\partial^+ D} f_0(z)\, dz = 0$ по интегральной теореме Коши. В силу аддитивности интеграла имеем

$$\int_{\partial^+ D} f(z)\, dz = \int_{\partial^+ D} f_0(z)\, dz + \sum_{j=1}^{J} \int_{\partial^+ D} f_j(z)\, dz = \sum_{j=1}^{J} \int_{\partial^+ D} f_j(z)\, dz,$$

поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\int_{\partial^+ D} f_j(z)\, dz = 2\pi i c_{-1}^j = 2\pi i \operatorname*{res}_{a_j} f.$$

Поскольку ряд Σ_j^- сходится равномерно внутри $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$, его можно почленно интегрировать на границе ∂D. Пользуясь формулой (Н–Л), имеем

$$\int_{\partial^+ D} f_j(z)\, dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\partial^+ D} c_{-n}^j (z - a_j)^{-n}\, dz = \int_{\partial^+ D} \frac{c_{-1}^j}{z - a_j}\, dz = 2\pi i c_{-1}^j,$$

где последнее равенство вытекает из предложения 1.8.16. □

1.13.2. Теорема (Теорема Коши о полной сумме вычетов). *Пусть* $J \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_J\} \subset \mathbb{C}$, *и функция* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \mathfrak{A})$. *Тогда*

$$\sum_{j=1}^{J} \operatorname*{res}_{a_j} f + \operatorname*{res}_{\infty} f = 0.$$

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему в области $B(0, R)$, где $R \in (\max_{1 \leqslant j \leqslant J} |a_j|, +\infty)$, и воспользоваться определением $\operatorname{res}_\infty f$. □

1.13.2. Примеры вычисления интегралов.

1.13.3. Пример. Вычислим интеграл $I = \displaystyle\int_{\{|z|=4\}^+} \operatorname{ctg} z \, dz$.

Все ИОТ функции $f(z) = \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ — полюса первого порядка в точках $a_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пользуясь следствием 1.12.22, находим $\operatorname{res}_{a_k} f = 1$ для всех k. В области $\{|z| < 4\}$ лежат ИОТ a_{-1}, a_0, a_1, поэтому $I = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$.

1.13.4. Пример. Пусть $I = \displaystyle\int_{\{|z|=1\}^+} \frac{dz}{\sin(1/z)}$.

В области $\{|z| < 1\}$ функция $f(z) = 1/\sin(1/z)$ имеет счетное число полюсов $z_k = 1/(\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому в ней теорема Коши о вычетах неприменима. Но так как $f \in \mathcal{A}(\{1/\pi < |z| < +\infty\})$, то I можно вычислить по формуле $I = -2\pi i \operatorname{res}_\infty f$. Здесь ∞ — простой полюс для f (провести оставшееся вычисление самостоятельно).

1.13.5. Пример. Пусть R — рациональная функция двух переменных, такая, что функция $f(t) = R(\cos t, \sin t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Требуется найти $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt$.

Пусть $z = e^{it}$. Тогда

$$\cos(nt) = \frac{1}{2}\Big(z^n + \frac{1}{z^n}\Big), \quad \sin(nt) = \frac{1}{2i}\Big(z^n - \frac{1}{z^n}\Big).$$

Подставляя эти выражения в $R(\cos t, \sin t)$, получим рациональную функцию переменной z, которую обозначим через $\widetilde{R}$. Легко видеть, что $dt = dz/iz$, поэтому

$$I = \int_{\{|z|=1\}^+} \widetilde{R}(z) \frac{dz}{iz}.$$

Подынтегральная функция не имеет особых точек на $\{|z| = 1\}$, а в области $\{|z| < 1\}$ у нее конечное число полюсов, поэтому этот интеграл можно вычислить, используя теорему Коши о вычетах.

1.13.6. Пример. Пусть P_n и Q_m — многочлены (от комплексной переменной) степени n и m соответственно, причем $m \geqslant n+2$ и $Q_m(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$. Положим $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$. Требуется вычислить

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пусть $a_1, \ldots, a_J$ — все различные нули Q_m в $\Pi_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$. Тогда

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{J} \operatorname*{res}_{a_j} f.$$

Действительно, пусть $R > \max_{1 \leqslant j \leqslant J} |a_j|$. Пусть $D_R = B(0,R) \cap \Pi_+$ — верхний полукруг, $\Gamma_R = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ — верхняя полуокружность. Тогда

$$I_0 = \int_{\partial^+ D_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R^+} f(z)\,dz = I_1 + I_2.$$

По теореме Коши о вычетах интеграл I_0 равен $2\pi i \sum_{j=1}^{J} \operatorname{res}_{a_j} f$. При этом интеграл I_1 при $R \to +\infty$ стремится к I, а интеграл I_2 — к нулю в силу тривиальной оценки

$$\left| \int_{\Gamma_R^+} f(z)\,dz \right| = O(1/R^2) \cdot \pi R = O(1/R).$$

1.13.3. Лемма Жордана.

1.13.7. Лемма (Жордана). *Пусть $R \in (0, +\infty)$, функция f непрерывна в $\overline{\Pi_+} \setminus B(0,R)$, причем $\lim\limits_{z \to \infty, z \in \overline{\Pi_+}} f(z) = 0$. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеем*

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{C_r^+} f(z) e^{i\lambda z}\,dz = 0,$$

где $C_r^+ = \{z = re^{it} \colon t \in [0,\pi]\}$ — верхняя полуокружность.

Доказательство. Пусть $\omega(r) = \|f\|_{[C_r^+]}$. Тогда из условия следует, что $\omega(r) \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Зафиксируем $r > R$. Если $z = z(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t)$, то $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda r \sin t}$. На отрезке $[0, \pi/2]$ функция $h(t) = \sin t$ выпукла вверх, поэтому выполняется неравенство $\sin t \geqslant 2t/\pi$. Следовательно, на отрезке $[0, \pi/2]$ справедлива оценка

$$e^{-\lambda r \sin t} \leqslant e^{-\lambda r 2t/\pi}. \tag{1.13.1}$$

Оценим теперь интересующий нас интеграл:

$$\left|\int_{C_r^+} f(z)e^{i\lambda z}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi f(z(t))e^{i\lambda z(t)}ire^{it}\,dt\right| \leqslant \omega(r)\int_0^\pi e^{-\lambda r\sin t}r\,dt =$$
$$= 2r\omega(r)\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda r\sin t}\,dt \overset{(1.13.1)}{\leqslant} 2r\omega(r)\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda r\frac{2}{\pi}t}\,dt = \frac{\pi}{\lambda}\omega(r)\big(1-e^{-\lambda r}\big).$$

Так как $\lambda > 0$, окончательно имеем

$$\left|\int_{C_r^+} f(z)e^{i\lambda z}\,dz\right| \leqslant \frac{\pi}{\lambda}\omega(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и требовалось доказать. □

1.13.4. Преобразование Фурье рациональных функций.

1.13.8. Определение. Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда ее *преобразование Фурье* определяется следующим образом:

$$\widetilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Если функция f — четная (нечетная), то функция $\widetilde{f}$ — тоже четная (соответственно, нечетная).

1.13.9. Предложение. *Пусть P_n и Q_m — многочлены от z степени n и m соответственно, причем $m \geqslant n+2$ и $Q_m(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{R}$. Пусть $a_1, \ldots, a_J$ — различные нули Q_m в Π_+. Определим $F(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, а ее сужение на $\mathbb{R}$ обозначим через f. Тогда для любого $\lambda < 0$ имеем*

$$\widetilde{f}(\lambda) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{J}\operatorname*{res}_{a_j}\big(f(z)e^{-i\lambda z}\big) =: I.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $R > \max_{1\leqslant j\leqslant J}|a_j|$. Для $r > R$ определим область $D_r = B(0,r)\cap\Pi_+$. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\int_{\partial^+ D_r} f(z)e^{-i\lambda z}\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{J}\operatorname*{res}_{a_j}\big(f(z)e^{-i\lambda z}\big) = \sqrt{2\pi}I.$$

Положим $C_r = \{z = re^{it}\colon t \in [0,\pi]\}$. Поскольку $\partial D = [-r,r]\cup C_r$, имеем

$$\widetilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{r} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx =$$
$$= \lim_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\partial^+ D_r} f(z)e^{-i\lambda z}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C_r^+} f(z)e^{-i\lambda z}\,dz\right) =$$
$$= I - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r^+} f(z)e^{-i\lambda z}\,dz = I,$$

где последнее равенство справедливо в силу леммы Жордана. □

1.13.10. Пример. Пусть $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$. Тогда при $\lambda < 0$ находим:

$$\widetilde{f}(\lambda) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{res}_{3i}\Bigl(\frac{1}{z^2+9}e^{-i\lambda z}\Bigr) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{3\lambda}}{6i} = \frac{\sqrt{2\pi}}{6}e^{3\lambda}.$$

Чтобы найти $\widetilde{f}(\lambda)$ при $\lambda > 0$, достаточно заметить, что f четная. Окончательно, $\widetilde{f}(\lambda) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{6}e^{-3|\lambda|}$.

1.13.5. Специальные области. Функция Шварца.

Вводимое ниже понятие специальной области позволяет значительно расширить возможности теоремы Коши о вычетах.

1.13.11. Определение. Жорданова область D в $\mathbb{C}$ называется *специальной*, если найдутся конечное множество $\Sigma \subset D$ и непрерывная на $\overline{D}\setminus\Sigma$ функция $S \in \mathcal{A}(D \setminus \Sigma)$, для которой $S(z) = \overline{z}$ при всех $z \in \partial D$. Такая функция S единственна и называется *функцией Шварца* области D.

Замечание. Единственность функции Шварца мы докажем в следующей главе с помощью теоремы Римана.

Простейшим примером специальной области является любой круг $B(a,r)$, для которого $(z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = r^2$, откуда $S(z) = r^2/(z-a)+\overline{a}$, причем $\Sigma = \{a\}$.

1.13.12. Упражнение. Доказать, что всякая жорданова область, содержащая отрезок прямой на своей границе, не может быть специальной.

Покажем, как используется функция Шварца при вычислении интегралов.

1.13.13. Пример. Функция $S(z) = 4/z$ является функцией Шварца области $B(0,2)$, поэтому

$$\int_{\{|z|=2\}^+} \overline{z}^2 \operatorname{tg} z\, dz = \int_{\{|z|=2\}^+} \frac{16}{z^2} \operatorname{tg} z\, dz,$$

где интеграл справа легко считается с помощью теоремы Коши о вычетах, в то время как слева под интегралом стоит всюду неголоморфная функция.

1.13.14. Упражнение. Вычислить интегралы:

$$\int_{|z-i|=3} \cos(\overline{z})\, dz, \qquad \int_{|z+i|=1} |z|^2 \ln(iz)\, dz.$$

1.13.15. Упражнение. Пусть D — произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$. Если $f(\partial D) \subset \mathbb{R}$, то $f \equiv const$ в $\overline{D}$.

Указание: использовать ДЛО, принцип максимума модуля и теорему Коши – Римана.

Из упражнения 1.13.15 вытекают два важных факта про специальные области.

1.13.16. Предложение. *Пусть D — специальная область и функция Шварца S этой области имеет в D одну особую точку a — полюс первого порядка. Тогда D — круг с центром в точке a.*

Доказательство. Пусть $S(z) = h(z) + \lambda(z-a)^{-1}$, где функция h входит в $\mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда при $z \in \partial D$ имеем

$$0 < |z-a|^2 = (\overline{z} - \overline{a})(z-a) = \Big(h(z) + \frac{\lambda}{z-a} - \overline{a}\Big)(z-a) = \\ = (h(z) - \overline{a})(z-a) + \lambda.$$

Поскольку функция $H(z) = (h(z) - \overline{a})(z-a) + \lambda \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ принимает на ∂D вещественные значения, имеем $H(z) \equiv C > 0$ в $\overline{D}$, откуда получаем $|z-a| = \sqrt{H(z)} \equiv \sqrt{C}$ на ∂D, следовательно, D — круг радиуса $\sqrt{C}$ с центром в точке a. □

Аналогично доказывается следующее утверждение.

1.13.17. Предложение. *В указанных выше обозначениях для всякой специальной области D множество Σ не пусто.*

1.13.18. Определение. Специальная область D называется *неванлинновской*, если ее функция Шварца не имеет в D других особых точек, кроме полюсов.

1.13.19. Пример. Пусть $B = B(a, r)$ — круг, где $0 < a < +\infty$ и $0 < r \leqslant a$. Пусть D — образ круга B при отображении $w = z^2$. Отметим, что при $r = a$ область D (кардиоида!) имеет негладкую границу — точку возврата в 0. Докажем, что D — неванлинновская область. Действительно, если $z \in \partial B$ и $w = z^2$, то $z = s(w), \overline{z} = s(\overline{w})$ (через $s(w)$ мы обозначаем главное значение $\sqrt{w}$, являющееся функцией класса $\mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$). Отсюда при $w \in \partial D$ имеем

$$(s(\overline{w}) - a)(s(w) - a) = r^2 \Leftrightarrow \overline{w} = \Big(a + \frac{r^2}{s(w) - a}\Big)^2,$$

т. е. $\overline{w} = \Big(a + \dfrac{r^2(s(w) + a)}{w - a^2}\Big)^2$, где последняя функция Шварца (для D) имеет в D только одну особую точку $w = a^2$ — полюс второго порядка. Аналогично (для любого $p \in \{3, 4, \ldots\}$) строится неванлинновская область D с одним полюсом порядка p у ее функции Шварца.

1.13.20. Упражнение. Привести пример специальной области D, у которой функция Шварца имеет в D только одну особую точку — существенно особую.

1.13.21. Упражнение*. Привести пример такой неванлинновской области D, у которой функция Шварца имеет в D два полюса первого порядка.

1.13.22. Упражнение. Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей и $f \in \mathcal{A}(D) \cap C^1(\overline{D})$. Доказать, что

$$2i \iint_D f(z)\,dxdy = \int_{\partial^+ D} f(z)\overline{z}\,dz.$$

Для неванлинновских областей D такие интегралы всегда можно вычислять с помощью вычетов.

§ 1.14. Интеграл в смысле главного значения. Вычет функции в точке относительно области. Теорема о вычетах для $(vp)\int$. Примеры вычисления $(vp)\int$

1.14.1. Определение $(vp)\int$.

Пусть Γ^+ — кусочно гладкая жорданова или замкнутая жорданова (ориентированная) кривая в $\mathbb{C}$. Такие кривые мы будем для краткости называть *КГ-допустимыми в* $\mathbb{C}$. «Образ» произвольной КГ-допустимой в $\mathbb{C}$ кривой под действием какого-либо ДЛО будем называть *КГ-допустимой кривой в* $\mathbb{C}^\bullet$. Наиболее частый пример — положительно ориентированная компактифицированная (точкой $\infty \in \mathbb{C}^\bullet$) вещественная ось $\mathbb{R}^\bullet$, полученная, например, из стандартно ориентированной окружности $\{|z| = 1\}^+$ под действием ДЛО $\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{i}{2}$ (проверить!). С другой стороны, ориентированная граница какой-либо полосы, дополненная точкой ∞, не является КГ-допустимой кривой в $\mathbb{C}^\bullet$.

Напомним, что через $B(a,\delta)$ (соответственно $B'(a,\delta)$) обозначается открытый круг (соответственно проколотый круг) с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $\delta > 0$.

При $a = \infty$ полагаем $B(a,\delta) = \{z \in \mathbb{C}^\bullet\colon |z| > \delta^{-1}\}$ (соответственно $B'(a,\delta) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > \delta^{-1}\}$).

Пусть теперь Γ^+ — КГ-допустимая кривая в $\mathbb{C}^\bullet$ и $\mathfrak{A}_* = \{a_1,\dots,a_J\}$ — конечное (возможно пустое) подмножество в $[\Gamma]$, где $[\Gamma]$ — носитель Γ^+, причем, если $\infty \in [\Gamma]$, то по определению $\infty \in \mathfrak{A}_* \neq \varnothing$. При $\Delta = \{\delta_1,\dots,\delta_J\}$, где $\delta_j \in (0,+\infty)$, положим $|\Delta| = \max\{\delta_1,\dots,\delta_J\}$. При всех Δ с достаточно малым $|\Delta|$ выражение

$$\Gamma^+_{\mathfrak{A}_*\Delta} = \Gamma^+ \setminus \Big(\bigsqcup_{j=1}^{J} B(a_j,\delta_j)\Big) \tag{1.14.1}$$

естественно интерпретируется как цепь (формальное конечное объединение) КГ-допустимых кривых в $\mathbb{C}$ (см. рис. 14.1).

В рассматриваемых обозначениях пусть $f\colon [\Gamma]\setminus\mathfrak{A}_* \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Величина

$$(vp)\int_{\Gamma^+} f(z)\,dz = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_{\Gamma^+_{\mathfrak{A}_*\Delta}} f(z)\,dz,$$

если указанный предел существует и конечен, называется *главным значением* (*value principal*) *интеграла* от функции f вдоль кривой Γ^+.

Это определение естественным образом распространяется на цепи КГ-допустимых кривых в $\mathbb{C}^\bullet$ (дать определение самостоятельно).

Так, непосредственно по определению проверяется, что верно равенство $(vp)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^\bullet} (1/z)\,dz = 0$ (здесь $\mathfrak{A}_* = \{0,\infty\}$).

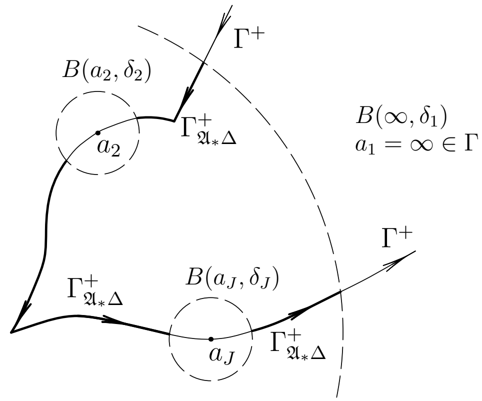

Рис. 14.1.

Нашей целью будет доказательство аналога теоремы Коши о вычетах для (vp)-интегралов и, в частности, доказательство теоремы существования для (vp)-интегралов. Сначала мы введем некоторое обобщение понятия вычета и установим ряд его свойств.

1.14.2. Вычет функции в точке относительно области.

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, ограниченная конечным числом попарно непересекающихся замкнутых КГ-допустимых (в $\mathbb{C}$) кривых. Такие области мы будем называть КГ- допустимыми в $\mathbb{C}$. Образ произвольной КГ-допустимой в $\mathbb{C}$ области под действием какого-либо ДЛО будем называть *КГ-допустимой областью в* $\mathbb{C}^\bullet$. Через $\partial^\bullet_+ D$ (соответственно $\partial^\bullet D$) обозначается ориентированная (соответственно топологическая) граница в $\mathbb{C}^\bullet$ КГ-допустимой области D в $\mathbb{C}^\bullet$. Через $\overline{D}^\bullet$ обозначается *замыкание в* $\mathbb{C}^\bullet$ области D.

Основным примером КГ-допустимой области в $\mathbb{C}^\bullet$ является открытая верхняя полуплоскость.

Зафиксируем произвольную КГ-допустимую область D в $\mathbb{C}^\bullet$ и точку $a \in \overline{D}^\bullet$. При малых $\delta > 0$ кривая $\gamma^+_\delta(a) = \partial^+ B(a, \delta) \cap \overline{D}^\bullet$ представляет собой связную (ориентированную) дугу окружности (см. рис. 14.2). Пусть при некотором $\delta_0 > 0$ задана функция $f\colon B'(a, \delta_0) \cap \overline{D}^\bullet \to \mathbb{C}$, непрерывная на указанной области определения. В этих обозначениях выражение

$$\operatorname*{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \to 0} \int_{\gamma^+_\delta(a)} f(z)\, dz,$$

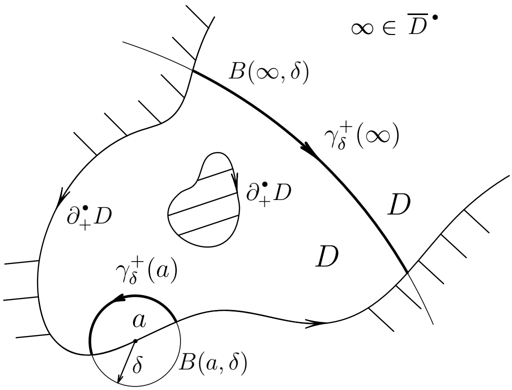

Рис. 14.2.

если последний предел существует и конечен, называется *вычетом функции f в точке a относительно области D.*

Приведем ряд утверждений о вычислении таких вычетов.

1.14.1. Лемма. *Если $a \in D$ и функция f голоморфна в проколотой окрестности точки a, то $\operatorname{res}_{(a,D)} f = \operatorname{res}_a f$ — обычный вычет функции f в точке a.*

1.14.2. Лемма. *Пусть $a \neq \infty$ и $f(z) = o(1/(z-a))$ при $z \to a$ ($z \in \overline{D}^\bullet$) или $a = \infty$ и $f(z) = o(1/z)$ при $z \to \infty$ ($z \in \overline{D}^\bullet$). Тогда выполнено равенство*

$$\operatorname*{res}_{(a,D)} f = 0.$$

Доказательства этих двух лемм очевидны.

1.14.3. Лемма. *Пусть $a \in \partial^\bullet D \cap \mathbb{C}$ является полюсом первого порядка функции f и θ_a — абсолютная величина внутреннего угла области D в точке a. Тогда $\operatorname{res}_{(a,D)} f = \theta_a (2\pi)^{-1} \operatorname{res}_a f$.*

Доказательство. При малых $\delta > 0$ кривую $\gamma_\delta^+(a)$ можно параметризовать следующим образом:

$$\{z(t) = a + \delta e^{it} \colon t \in [\alpha(\delta), \beta(\delta)]\},$$

где $\alpha(\delta) < \beta(\delta) < \alpha(\delta) + 2\pi$, причем $\beta(\delta) - \alpha(\delta) \to \theta_a$ при $\delta \to 0$ (по определению, см. рис. 14.3).

Разложим функцию f в ряд Лорана в $B'(a, \delta_0)$ при некотором $\delta_0 > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

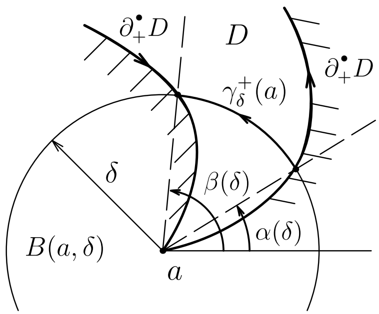

Рис. 14.3.

где $c_{-1} = \operatorname{res}_a f$. Тогда справедливо равенство

$$\operatorname*{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha(\delta)}^{\beta(\delta)} \Big(\frac{c_{-1}}{\delta e^{it}} + O(1)\Big)\delta e^{it} i\,dt = \frac{\theta_a c_{-1}}{2\pi},$$

что и требовалось. □

Для полюсов более высокого порядка полезно следующее утверждение, которое доказывается аналогично предыдущей лемме.

1.14.4. Упражнение. Пусть $D = \Pi_+$ и точка $a \in \mathbb{R}$ является *полюсом порядка* $p > 1$ функции f. Тогда $\operatorname{res}_{(a,D)} f$ существует в точности тогда, когда главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности точки a содержит только нечетные степени $z - a$. В указанном случае верно равенство $\operatorname{res}_{(a,D)} f = 2^{-1} \operatorname{res}_a f$.

Следующее утверждение является простой переформулировкой леммы 1.13.7 (Жордана).

1.14.5. Лемма. *Пусть $R \in (0, +\infty)$, функция f непрерывна на множестве $\overline{\Pi_+} \setminus B(0,R))$, причем $\lim\limits_{z\to\infty, z\in\overline{\Pi_+}} f(z) = 0$. Тогда для любого фиксированного $\lambda > 0$ имеем*

$$\operatorname*{res}_{(\infty,\Pi_+)} \big(f(z)e^{i\lambda z}\big) = 0.$$

1.14.6. Упражнение. Для области

$$D = (B(2,2) \setminus \overline{B(1,1)}) \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$$

и функции $f(z) = z^{-2}$ вычислить $\operatorname{res}_{(0,D)} f$. Как следствие найти интеграл $(vp)\displaystyle\int_{\partial^+ D} f(z)\,dz$.

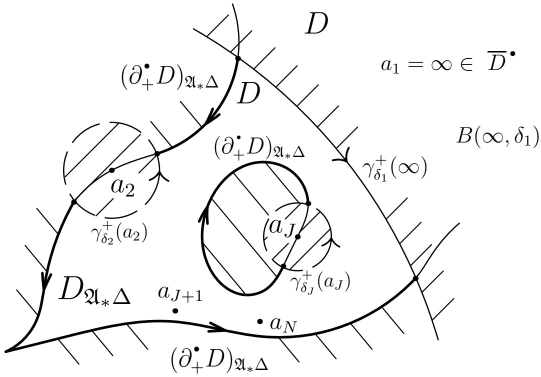

Рис. 14.4.

1.14.3. Теорема о вычетах для $(vp)\int$.

1.14.7. Теорема. *Пусть D — КГ-допустимая область в $\mathbb{C}^\bullet$ и множество $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_N\}$ в $\overline{D}^\bullet$ конечно (возможно, пусто); по определению, если $\infty \in \overline{D}^\bullet$, то $\infty \in \mathfrak{A} \neq \varnothing$. Пусть $f\colon \overline{D}^\bullet \setminus \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{A})$ и функция f непрерывна на $\overline{D}^\bullet \setminus \mathfrak{A}$. Тогда*

$$(vp)\int_{\partial_+^\bullet D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname*{res}_{(a_n, D)} f,$$

где имеется в виду, что интеграл слева существует, если и только если каждый вычет справа существует, и в этом случае выполняется равенство.

Доказательство. Положим $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{A} \cap \partial^\bullet D$. Если $\mathfrak{A}_* = \varnothing$ (откуда, в частности, $\infty \notin \partial^\bullet D$), то утверждение теоремы непосредственно вытекает из стандартной теоремы Коши о вычетах (возможный здесь случай $\infty \in D$ рассмотреть отдельно, самостоятельно!). Пусть далее $\mathfrak{A}_* \neq \varnothing$ (если $\infty \in \partial^\bullet D$, то $\infty \in \mathfrak{A}_*$). Без ограничения общности будем считать, что $\mathfrak{A}_* = \{a_1, \ldots, a_J\}$, где $J \leqslant N$. Пусть, как и ранее, $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_J\}$. Для любого Δ с достаточно малым $|\Delta|$ определим область $D_{\mathfrak{A}_*\Delta} = D \setminus \bigsqcup_{j=1}^{J} \overline{B(a_j, \delta_j)}$ (см. рис. 14.4). Напомним, что обозначение $\left(\partial_+^\bullet D\right)_{\mathfrak{A}_*\Delta}$ определено выше в формуле 1.14.1.

Для функции f в области $D_{\mathfrak{A}_*\Delta}$ применима стандартная теорема Коши о вычетах:

$$\int_{\partial^\bullet_+\left(D_{\mathfrak{A}_*\Delta}\right)} f(z)\,dz = \int_{\left(\partial^\bullet_+ D\right)_{\mathfrak{A}_*\Delta}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{J} \int_{\gamma^+_{\delta_j}(a_j)} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{n=J+1}^{N} \operatorname*{res}_{a_n} f,$$

где последняя сумма считается равной нулю в случае $J = N$. Остается устремить $|\Delta|$ к нулю. □

1.14.4. Примеры вычисления $(vp)\int$**.**

1.14.8. Пример. Вычислить $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos(2x))\,dx}{x^2(x^2+1)}$.

Положим $D = \Pi_+$, $f(z) = (1 - e^{2iz})/(z^2(z^2+1))$. Тогда (абсолютно сходящийся) интеграл I является вещественной частью (vp)-интеграла $I_1 = (vp)\displaystyle\int_{\partial^\bullet_+ D} f(z)\,dz$. В обозначениях теоремы 1.14.7 имеем равенство $\mathfrak{A} = \{a_1 = 0, a_2 = i, a_3 = \infty\}$. Применяя леммы 1.14.2 - 1.14.5 (a_1 и a_2 — полюса первого порядка функции f), находим

$$I_1 = 2\pi i\Big(\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{a_1} f + \operatorname*{res}_{a_2} f\Big) = \pi(1+e^{-2}),$$

откуда $I = \pi(1+e^{-2})$.

1.14.9. Пример. Вычислить $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\sin(x))\,dx}{x^3}$.

Пусть $D = \Pi_+, f(z) = (iz - e^{iz})/z^3$. Тогда исходный (абсолютно сходящийся) интеграл совпадает с мнимой частью (vp)-интеграла $I_1 = (vp)\displaystyle\int_{\partial^\bullet_+ D} f(z)\,dz$. По теореме 1.14.7 при $\mathfrak{A} = \{a_1 = 0, a_2 = \infty\}$ с применением леммы 1.14.2, леммы 1.14.5 и упражнения 1.14.4 (точка a_1 есть полюс порядка 3 функции f), находим

$$I_1 = 2\pi i\ \frac{1}{2}\operatorname*{res}_{a_1} f = \frac{\pi i}{2},$$

откуда $I = \pi/2$.

1.14.10. Пример. Вычислить $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(x)\,dx}{x^2-1}$.

Пусть $f(z) = \dfrac{\ln_*(z)}{z^2-1}$, где ветвь логарифма $\ln_*(z) = \ln|z| + i\arg_*(z)$ выбрана с условием $\arg_*(z) \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ (т. е. с разрезом по отрицательной мнимой полуоси). Пусть D — верхняя полуплоскость. При

$\mathfrak{A} = \{-1, 0, 1, \infty\}$, применяя теорему 1.14.7 и леммы 1.14.2 и 1.14.3, находим

$$(vp) \int_{\partial_+^\bullet D} f(z)\, dz = 2\pi i \frac{1}{2} \operatorname*{res}_{-1} f = \frac{\pi^2}{2}.$$

Учитывая, что $\operatorname{Re}\big[(vp) \int_{-\infty}^{0} f(z)\, dz\big] = I$, получаем $I = \pi^2/4$.

1.14.11. Упражнение. Вычислить $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)\, dx}{(x-1)(x^2+4)}$.

Указание. Для функции $f_1(z) = \dfrac{\big(\ln_*(z)\big)^2}{(z-1)(z^2+4)}$ в верхней полуплоскости D_1 (функция $\ln_*(z)$ определяется как в предыдущем примере) и функции $f_2(z) = \dfrac{\big(\ln^*(z)\big)^2}{(z-1)(z^2+4)}$ в нижней полуплоскости D_2 (здесь $\ln^*(z) = \ln|z| + i\arg^*(z)$, где $\arg^*(z) \in (\pi/2, 5\pi/2)$, т. е. с разрезом по положительной мнимой полуоси) применяем теорему 1.14.7 и леммы 1.14.2 и 1.14.3. Далее складываем полученные ответы для $\displaystyle\int_{\partial_+^\bullet D_1} f_1(z)\, dz$ и $\displaystyle\int_{\partial_+^\bullet D_2} f_2(z)\, dz$ и учитываем, что $f_1(z) = f_2(z)$ в левой полуплоскости (в частности, на $(-\infty, 0)$). Остается воспользоваться равенством

$$\operatorname{Im}\big(f_1(x) - f_2(x)\big) = -4\pi \frac{\ln(x)}{(x-1)(x^2+4)}, \quad x \in (0, +\infty).$$

1.14.12. Упражнение. Доказать, что преобразование Гильберта

$$f \mapsto H[f](x) = \frac{1}{\pi}(vp) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x}\, dt$$

удовлетворяет условию $H\big[H[f]\big](x) = -f(x)$ для всякой правильной рациональной функции f без вещественных полюсов.

Замечание. Формально в последнем интеграле следовало интегрировать по $\mathbb{R}^\bullet$, а не по $\mathbb{R}$, поскольку $\mathbb{R}$ не является КГ-допустимой кривой в $\mathbb{C}^\bullet$.

§ 1.15. Гармонические функции двух переменных. Базовые свойства. Задача Дирихле. Разложение в ряд по однородным гармоническим полиномам

1.15.1. Базовые свойства гармонических функций двух переменных.

В этом параграфе $\mathbb{C}$ метрически отождествляется с $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ $(z = x+iy)$.

1.15.1. Определение. Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$, $h\colon D \to \mathbb{R}$ — функция класса $C^2(D)$ (т. е. $h = h(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в D до второго порядка включительно); если при этом

$$\Delta h \equiv h_{xx} + h_{yy} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \equiv 0 \text{ в } D,$$

то h называется *гармонической функцией* (*ГрФ*) *в* D.

Класс всех таких функций обозначается через $\mathcal{H}(D)$.

Замечание. Пусть $a \in \mathbb{C}$. Говорят, что функция h *является гармонической в точке* a, если найдется $\delta > 0$ такое, что $h \in \mathcal{H}(B(a, \delta))$. Очевидно, что $h \in \mathcal{H}(D)$ если и только если для всех $a \in D$ функция h является гармонической в точке a.

1.15.2. Предложение. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D)$. Тогда функции $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$ являются гармоническими в D.*

Доказательство. Утверждение доказываемого предложения вытекает из теоремы Коши – Римана и из равенства смешанных частных производных $u_{xy} = u_{yx}$ в D. □

Пример ниже показывает существенность требования $h \in C^2(D)$ в определении 1.15.1.

1.15.3. Пример. Рассмотрим функцию

$$h_*(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} = \operatorname{Im}\Big(-\frac{1}{2z^2}\Big) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_\flat), \quad \mathbb{C}_\flat = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

доопределенную $h_*(0, 0) = 0$. Поскольку $h_* \equiv 0$ на осях координат, имеем $\Delta h_*|_{(0,0)} = 0$. Следовательно, $\Delta h_* = 0$ во всем $\mathbb{C}$. Однако h_* не является гармонической в точке $(0, 0)$, поскольку она разрывна в этой точке.

1.15.4. Теорема (Связь гармоничности и голоморфности). *Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, $h \in \mathcal{H}(D)$. Тогда найдется $f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $\operatorname{Re} f = h$. Функция f определяется единственным образом с точностью до аддитивной чисто мнимой постоянной.*

Доказательство. Положим $g(z) = 2\frac{\partial}{\partial z} h = h_x - ih_y \in C^1(D)$. Тогда

$$2\frac{\partial}{\partial \bar z} g = \Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(h_x - ih_y) = \Delta h \equiv 0 \text{ в } D.$$

По теореме Коши – Римана имеем $g \in \mathcal{A}(D)$.

Поскольку область D односвязна, существует п/о $f_0(z)$ функции $g(z)$ в D. Пусть $f_0(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда

$$h_x - ih_y = g(z) = f_0'(z) = \left.\frac{\partial f_0}{\partial x}\right|_z = (u_x + iv_x).$$

Следовательно, $h_x = u_x$ и $h_y = -v_x = u_y$, т. е. $\overrightarrow{\nabla} u(x,y) \equiv \overrightarrow{\nabla} h(x,y)$ (в частности, $h \in C^\infty$, поскольку $u \in C^\infty$). Отсюда следует тождество $u(x,y) \equiv h(x,y) + C_0$, где C_0 — вещественная константа. В качестве $f(z)$ можно взять функцию $f_0(z) - C_0$. Утверждение о единственности тривиально. □

Замечание. Функция $g(z)$ называется *сопряженным градиентом* функции h, поскольку $g(z) = h_x \cdot 1 + (-h_y) \cdot i$, а вектор $(h_x, -h_y)$ на комплексной плоскости сопряжен вектору градиента (h_x, h_y).

Замечание. Попутно доказали, что для произвольной вещественной функции $h \in C^2(D)$ имеем $4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} h \equiv \Delta h$ в D.

1.15.5. Следствие. *Для любой (не обязательно односвязной) области D в $\mathbb{C}$ выполнено включение $\mathcal{H}(D) \subset C^\infty(D)$.*

Доказательство. Требуемое включение следует из голоморфности функции $h_x - ih_y = 2\frac{\partial}{\partial z} h = g$ в области D. □

1.15.6. Упражнение. Рассмотрим $h(z) = \ln|z| \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_\flat)$ (проверить!). Доказать, что нет такой функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_\flat)$, что $\operatorname{Re} f = h$.

1.15.7. Упражнение. Для функции $h \in \mathcal{H}(D)$ в односвязной области D доказать потенциальность поля $\overrightarrow{a}(x,y) = (-h_y, h_x)$ и найти его потенциал v. Тогда функция $f(z) = h(x,y) + iv(x,y)$ подходит в качестве искомой в теореме 1.15.4.

1.15.8. Следствие (Внутренняя теорема единственности для ГрФ). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и пусть функция $h \in \mathcal{H}(D)$. Пусть также $K_h = \{a \in D\colon \overrightarrow{\nabla} h(a) = \overrightarrow{0}\}$ — совокупность всех критических точек функции h в D. Если K_h имеет в D хоть одну предельную точку, то $h \equiv const$ в D.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g = 2\frac{\partial}{\partial z} h$ — сопряженный градиент функции h. Тогда

$$g(a) = h_x(a) - ih_y(a) = 0, \quad \forall a \in K_h.$$

По теореме единственности (примененной к голоморфной функции g), если K_h имеет предельную точку в D, то $g(z) \equiv 0$ в D. Тогда $h_x \equiv 0$ и $h_y \equiv 0$ в D, и, значит, $h(z) \equiv const$ в D. □

1.15.9. Теорема (Теорема о среднем для ГрФ). *Пусть* $D = B(a,R)$ *— открытый круг* ($a \in \mathbb{C}$, $0 < R < +\infty$), $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$. *Тогда при любом* $r \in (0, R]$ *справедливо равенство*

$$h(a) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(a,r)} h(z)\,|dz| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(a + re^{it})\,dt. \tag{1.15.1}$$

Доказательство. Пусть сначала $r \in (0, R)$. Найдем $f \in \mathcal{A}(D)$ с условием $\operatorname{Re} f = h$. По теореме о среднем для голоморфных функций имеем

$$f(a) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(a,r)} f(z)\,|dz|.$$

Остается взять вещественную часть от обеих частей последнего равенства.

Для случая $r = R$ нужно перейти к пределу в равенстве (1.15.1) при $r \to R-$, используя равномерную непрерывность h на $\overline{D}$. □

1.15.10. Теорема (Принцип минимума-максимума). *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{C}$, $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$. *Тогда для каждого* $z_0 \in D$ *справедливы оценки*

$$\min_{z\in\partial D} h(z) \leqslant h(z_0) \leqslant \max_{z\in\partial D} h(z).$$

Если найдется точка $z_0 \in D$ *с условием* $h(z_0) = \min\limits_{z\in\partial D} h(z)$ (*или* $h(z_0) = \max\limits_{z\in\partial D} h(z)$), *то* $h \equiv const$ *в* D.

Доказательство. Пусть найдется $z_0 \in D$ с $h(z_0) \geqslant \max\limits_{z\in\partial D} h(z)$. Пользуясь компактностью $\overline{D}$ и непрерывностью h на $\overline{D}$, мы можем без ограничения общности дополнительно считать, что $h(z_0) = \max\limits_{z\in\overline{D}} h(z)$. Пусть $R = \mathrm{d}(z_0, \partial D)$. Тогда $B = B(z_0, R) \subset D$, $\overline{B} \subset \overline{D}$. Применяя теорему о среднем для h в B, нетрудно показать, что $h(z) \equiv h(z_0)$ в $\overline{B}$. Поскольку $\vec{\nabla} h = \vec{0}$ в B, по следствию 1.15.8 получаем, что $h(z) \equiv const$ в D (и по непрерывности, $h(z) \equiv const = h(z_0)$ в $\overline{D}$). Поэтому $h(z_0)$ не может быть строго больше, чем $\max\limits_{z\in\partial D} h(z)$, а в случае их равенства имеем $h(z) \equiv const$ в $\overline{D}$, что и требовалось доказать.

Ситуация, в которой есть $z_0 \in D$ с условием $h(z_0) \leqslant \min\limits_{z\in\partial D} h(z)$, сводится к рассмотренной выше заменой $h(z)$ на $-h(z)$. □

1.15.11. Следствие (Граничная теорема единственности для ГрФ). *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *а функции* h_1 *и* h_2 *принадлежат классу* $\mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$. *Если* $h_1 \equiv h_2$ *на* ∂D, *то* $h_1 \equiv h_2$ *в* $\overline{D}$.

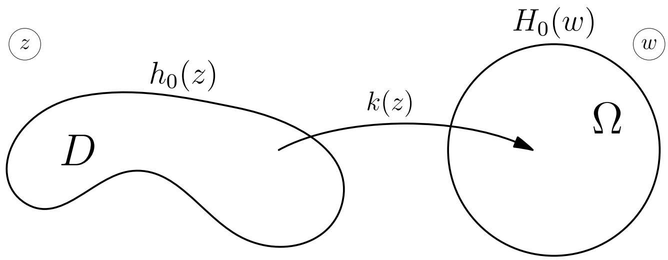

Рис. 15.1.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить теорему 1.15.10 к функции $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$. $\square$

1.15.12. Теорема (Инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных). *Пусть D и Ω — области в $\mathbb{C}$ и $k\colon D \to \Omega$, $k \in \mathcal{A}(D)$. Пусть $H = H(w) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Тогда $h(z) = H(k(z)) \in \mathcal{H}(D)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in D$ и возьмем $w_0 = k(z_0) \in \Omega$. Выберем $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такими, чтобы выполнялись включения $B = B(z_0, \delta) \subset D$ и $k(B) \subset B(w_0, \varepsilon) \subset \Omega$. По теореме 1.15.4 найдется функция $F(w) \in \mathcal{A}(B(w_0, \varepsilon))$ с условием $\operatorname{Re} F = H$ в $B(w_0, \varepsilon)$. Тогда $f(z) = F(k(z)) \in \mathcal{A}(B)$ как композиция голоморфных функций. Отсюда $h = \operatorname{Re} f \in \mathcal{H}(B)$. В силу произвольности $z_0 \in D$ получаем, что $h(z) = H\big(k(z)\big) \in \mathcal{H}(D)$. $\square$

1.15.2. Задача Дирихле для ГрФ.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $h_0 \in C(\partial D)$ — вещественнозначная функция. Требуется найти такую функцию $h \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$, что $h|_{\partial D} = h_0$.

Замечание. Сформулированная выше задача называется *задачей Дирихле* (*ЗД*) для ГрФ. По следствию 1.15.11, если ЗД разрешима для *граничной функции* $h_0 \in C(\partial D)$, то ее решение единственно.

1.15.3. Решение ЗД методом конформных отображений.

Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$ и пусть $h_0 \in C(\partial D)$. Требуется решить ЗД.

Пусть Ω — другая жорданова область, k — конформный изоморфизм области D на Ω, существующий по теореме Римана, который по теореме Каратеодори (обе теоремы будут доказаны в следующей главе, а в конкретных задачах проверяются непосредственно) можно продолжить до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{\Omega}$. Определим $H_0(w) = h_0\big(k^{-1}(w)\big) \in C(\partial\Omega)$.

Предположим, что мы умеем решать ЗД в области Ω для граничной функции H_0. Пусть $H(w)$ — это решение. Тогда из теоремы 1.15.12 следует, что функция $h(z) = H\big(k(z)\big)$ является решением исходной ЗД в D (см. рис. 15.1). Указанный метод применим, например, если Ω является кругом: для кругов в начале следующей главы будет обоснован метод Фурье, а также установлена формула Пуассона решения ЗД при любой граничной функции.

1.15.4. Разложение ГрФ в ряд по однородным гармоническим полиномам.

Введем обозначение $B_r = B(0, r)$, $r > 0$.

1.15.13. Теорема (О разложении ГрФ в круге в ряд по однородным гармоническим полиномам). *При фиксированных $R > 0$, $\varepsilon > 0$ пусть $h \in \mathcal{H}(B_{R+\varepsilon})$. Тогда в $\overline{B}_R$ функция h представляется в следующем виде:*

$$h(re^{i\varphi}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \tag{1.15.2}$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta)\, d\theta, \quad n \in \{0, 1, \ldots\}; \tag{1.15.3}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta)\, d\theta, \quad n \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{1.15.4}$$

Доказательство. По теореме 1.15.4 существует (и единственна) функция $f \in \mathcal{A}(B_{R+\varepsilon})$ с условиями $\operatorname{Re} f = h$, $f(0) = h(0)$.

Разложим f в ряд Тейлора с центром $z_0 = 0$:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = a_n + ib_n$, $c_0 = a_0$, где все a_n и b_n вещественны. При любом $r \in (0, R + \varepsilon)$, подставляя в последнее разложение $z = re^{i\varphi}$, находим

$$f(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + ib_n) r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Теперь приравняем в последнем разложении вещественные части:

$$h(re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi)).$$

Все указанные разложения сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{B}_R$. Таким образом, установили (1.15.2) при $A_0 = 2a_0$, $A_n = a_n$, $B_n = -b_n$.

Возьмем теперь $z = Re^{i\varphi}$. Тогда

$$h(Re^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} R^n (a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi)).$$

Слева здесь стоит 2π-периодическая функция (от φ) класса C^∞, а справа — тригонометрический ряд, который должен совпадать с рядом Фурье этой функции:

$$\begin{aligned} a_0 &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta})\, d\theta, \\ a_n R^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \cos(n\theta)\, d\theta, \\ -b_n R^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(Re^{i\theta}) \sin(n\theta)\, d\theta, \quad n \in \{1, 2, \ldots\}, \end{aligned}$$

откуда получаем (1.15.3) и (1.15.4). □

Замечание. Всякая вещественная линейная комбинация гармонических функций $\mathrm{Re}\big((x+iy)^n\big) = \mathrm{Re}(z^n) = r^n \cos(n\varphi)$ и $\mathrm{Im}\big((x+iy)^n\big) = \mathrm{Im}(z^n) = r^n \sin(n\varphi)$ называется *однородным гармоническим полиномом порядка* n (по переменным x, y).

1.15.14. Упражнение. Найти размерность пространства всех гармонических полиномов (по x, y) степени не выше $N \in \mathbb{N}$.

Программа курса ТФКП, 1 семестр

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней. Метрика в $\mathbb{C}$. Предел последовательности. Определение и простейшие свойства функции e^z.

2. Предел функции. Непрерывность. Классы $o(g)$ и $O(g)$, $z \to z_0$. Действие функции e^z. Многозначный логарифм $\mathrm{Ln}(z)$ и его однозначные ветви $\ln_{(\alpha,\beta)}(z)$. Действие функции z^n $(n \in \{2, 3, \ldots\})$. Многозначный $\sqrt[n]{z}$ и его однозначные ветви $\sqrt[n]{z}_{(n\alpha,n\beta)}$.

3. Пути и кривые в $\mathbb{C}$. Связность и линейная связность. Компоненты связности открытых множеств в $\mathbb{C}$. Теорема Жордана (доказательство для ломаных).

4. Одноточечная компактификация по Александрову. Сферическая метрика на $\mathbb{C}^\bullet$. Стереографическая проекция: вывод формул, круговое свойство и свойство сохранения углов между (обобщенными) окружностями.

5. Односвязные области в $\mathbb{C}$. Оболочка компакта из односвязной области в $\mathbb{C}$.

6. Комплексная производная и ее свойства: производные сложной и обратной функции. Производные функций e^z и $\ln_{(\alpha,\beta)}(z)$, z^n $(n \in \{2, 3, \ldots\})$ и $\sqrt[n]{z}_{(n\alpha,n\beta)}$.

7. $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$- дифференцируемость. Теорема Коши – Римана. Формулы для частных производных $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \bar{z}$ произведения, частного и сложной функции.

8. Производная по направлению. Якобиан ассоциированного отображения. Голоморфная функция в точке и области. Конформные отображения. Геометрический смысл комплексной производной.

9. Группа дробно-линейных отображений (ДЛО). Конформность ДЛО. Сохранение углов между гладкими путями при конформном отображении.

10. Геометрические свойства ДЛО: круговое свойство, сохранение симметрии; сохранение ангармонического отношения и свойство трех точек.

11. Дробно-линейные автоморфизмы областей B_1, Π_+, $\mathbb{C}$.

12. Функции z^n $(n \in \{2, 3, \ldots\})$ и функция Жуковского. Их основные (максимальные) области конформности и обратные ветви.

13. Многозначные функции. Их непрерывные, голоморфные и конформные ветви. Корень степени n $(\sqrt[n]{z})$ и логарифм $(\mathrm{Ln}(z))$. Их стандартные конформные ветви (с максимальными областями конформности). Общая степенная (z^p) и показательная (a^z) функции, их максимальные голоморфные ветви.

14. Тригонометрические и гиперболические функции. Образы полосы $\Pi'_{(-\pi/2,\pi/2)}$ под действием функций $\sin z$ и $\operatorname{tg} z$. Обратные тригонометрические м-функции. Функции $\arcsin w$ и $\operatorname{arctg} w$.

15. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Индекс пути относительно точки и его свойства.

16. Свойства индекса замкнутого пути. Индекс замкнутого жорданова пути (доказательство для ломаной).

17. Спрямляемые пути и кривые. Интеграл вдоль пути и кривой по комплексной переменной. Теорема существования интеграла от непрерывной функции вдоль спрямляемого пути.

18. Вычисление интеграла по комплексной переменной вдоль непрерывно-дифференцируемого пути.

19. Лемма Гурса (теорема Коши для треугольников).

20. Лемма о приближении.

21. Теорема Коши для односвязной области (завершение доказательства).

22. Комплексная первообразная. Теорема о существовании первообразной в односвязной области. Формула Ньютона – Лейбница.

23. Интегральная теорема Коши для допустимых областей (б/д). Доказательство для простых областей. Обсуждение примеров.

24. Интегральная формула Коши для допустимой области.

25. Интеграл 1 рода (его оценка и вычисление). Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Основная теорема алгебры.

26. Формула Коши для производных. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Теорема Морера.

27. Равномерная сходимость внутри области. Теорема Вейерштрасса. Метрика в пространстве $\mathcal{A}(D)$ и ее полнота.

28. Степенные ряды. Лемма Абеля. Формула Коши – Адамара. Почленная дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов.

29. Теорема Коши о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Единственность разложения в степенной ряд.

30. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Табличные разложения в ряд Маклорена.

31. Теорема о нулях голоморфной функции. Теорема единственности. Особые точки на границе круга сходимости степенного ряда.

32. Обобщенные степенные ряды. Кольцо сходимости. Теорема Лорана. Единственность разложения функции в обобщенный степенной ряд. Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.

33. Изолированные особые точки голоморфных функций (однозначного характера). Их классификация в терминах рядов Лорана.

34. Изолированная особая точка $z = \infty$. Теорема Сохоцкого. Связь рядов Лорана с рядами Фурье (пример $1/(2 - \cos(t))$).

35. Лемма Шварца. Дробно-линейность конформных изоморфизмов круговых областей.

36. Вычеты и их вычисление.

37. Теоремы Коши о вычетах и о полной сумме вычетов.

38. Некоторые типы интегралов, вычисляемых с помощью вычетов (4 примера).

39. Лемма Жордана. Преобразование Фурье рациональных функций. Пример.

40. Специальные области. Функция Шварца. Неванлинновские области. Примеры таких областей. Вычисление интеграла $\int\limits_{|z+i|=1} |z|^2 \ln(iz)\, dz$.

41. Интеграл в смысле главного значения. Вычет относительно области и его вычисление.

42. Теорема о вычетах для интеграла в смысле главного значения. Примеры вычисления (vp)-интегралов.

43. Гармонические функции (ГрФ) двух переменных. Связь с голоморфными функциями. Внутренняя теорема единственности для ГрФ. Теорема о среднем и принцип минимума-максимума для ГрФ.

44. Инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных. Задача Дирихле (ЗД) для ГрФ. Решение ЗД методом конформных отображений. Разложение ГрФ в ряд по однородным гармоническим полиномам.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА:

[1] Витушкин А.Г. Курс лекций по комплексному анализу. *Манускрипт*, 1991.

[2] Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу. МИАН, 2004.

[3] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. “Наука”, 1976.

[4] Евграфов М.А. (ред). Сборник задач по теории аналитических функций. “Наука”, 1972.

Задачи по курсу ТФКП, 1 семестр

Задача 1. Выписать и проверить для $\mathbb{C}$ аксиомы поля.

Задача 2. Вычислить значения (в алгебраической форме, в радикалах) $\sqrt{3-4i}$, $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$.

Задача 3.* Найти все корни пятой степени из -1 (в радикалах) и разложить многочлен z^5+1 на элементарные множители над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

Задача 4. Доказать, что сумма всех корней степени n ($n \geqslant 2$ — натурально) из произвольного (ненулевого) комплексного числа равна 0, и эти корни являются вершинами некоторого правильного n-угольника с центром в нуле.

Задача 5.* Пусть $\mathbb{P}$ — поле, содержащее $\mathbb{C}$, и размерность $\mathbb{P}$ над $\mathbb{C}$ конечна. Тогда $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

Задача 6. Привести пример бесконечномерного поля $\mathbb{P}$ над $\mathbb{C}$.

Задача 7. Пусть точки z_n, $n \in \mathbb{N}$, лежат в $\{|\arg z| < \alpha\}$, где $\alpha \in (0, \pi/2)$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно. Показать, что при $\alpha \geqslant \pi/2$ это утверждение неверно.

Задача 8. Доказать соотношения:
(1) $o(x) \subsetneq o(z)$, $o(y) \subsetneq o(z)$ при $z \to 0$;
(2) $o(z) = o(\overline{z}) = o(|z|)$ при $z \to 0$.

Задача 9. Найти образ полукруга $\{z = x+iy\colon |z| < 1, x > 0\}$ при отображении $w = \ln(z)$. Для каких $z \neq 0$ верно, что $\ln(z^2) = 2\ln(z)$?

Задача 10. Найти образ полуплоскости $\{z = x+iy\colon y > 2\}$ при отображении $w = z^2$.

Задача 11. При каких $\alpha > 0$ множество $\{|z^2-1| < \alpha\}$ является областью?

Задача 12. Доказать, что подмножество является связным в метрическом пространстве, если и только если оно связно как метрическое пространство с соответствующей индуцированной метрикой.

Задача 13.* Построить жорданов путь в $\mathbb{C}$, носитель которого имеет положительную плоскую меру Лебега.

Задача 14. Найти пример связного, но не линейно связного компакта в $\mathbb{C}$.

Задача 15. Доказать круговое свойство стереографической проекции.

Задача 16. Доказать свойство сохранения (абсолютных величин) углов между окружностями при стереографической проекции.

Задача 17. Доказать теорему Жордана для замкнутых жордановых ломаных.

Задача 18. Доказать, что для всякого многоугольника (ограниченного замкнутой жордановой ломаной, не обязательно выпуклого) найдутся две вершины такие, что соединяющий их интервал (диагональ) целиком лежит внутри этого многоугольника.

Задача 19. Привести пример двух непересекающихся ограниченных односвязных областей в $\mathbb{C}$ с одной и той же границей.

Задача 20. Если D область в $\mathbb{C}$ и $\partial^\bullet D$ связно в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, то и $D_c^\bullet$ связно в $(\mathbb{C}^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)$, т. е. D — односвязная область.

Задача 21. Доказать, что для любого многочлена $P(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k)$ все корни производной $P'(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{j \neq k} (z - a_j)$ принадлежат выпуклой оболочке множества корней $\{a_k\}$ самого многочлена P.

Задача 22. Вывести формулы для частных производных $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \overline{z}$ функций fg, f/g, $f \circ g$ в точке z_0 через аналогичные производные $\mathbb{R}$-дифференцируемых функций f и g.

Задача 23. Найти все точки $\mathbb{C}$-дифференцируемости и производные в них для функций $f(z) = (\overline{z} - z^2)e^{\overline{z}}$ и $g(z) = \ln(z^2 + 1)$.

Задача 24*. Привести пример функции f, всюду в плоскости $\mathbb{C}$ имеющей частные производные, удовлетворяющие условиям Коши – Римана, но не имеющей комплексной производной в точке $z_0 = 0$.

Задача 25. Привести пример $\mathbb{C}$-дифференцируемой в $B_1 = B(0, 1)$ функции $f = u + iv$ для которой $u = \operatorname{Re} f$ ограничена в B_1, а $v = \operatorname{Im} f$ неограничена в B_1.

Задача 26. Как записываются условия Коши – Римана в полярных координатах?

Задача 27. Пусть f — $\mathbb{C}$-дифференцируемая функция в области D, а F — дифференцируемая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}$. Доказать, что если $\operatorname{Im} f = F(\operatorname{Re} f)$ всюду в D, то f — константа.

Задача 28. Пусть функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0. Найти условия на f, необходимые и достаточные для того, чтобы величина $\left| \partial f/\partial z_\theta \big|_{z_0} \right|$ не зависела от θ.

Задача 29. Указать изоморфизм группы $\{\Lambda\}$ всех ДЛО на некоторую факторгруппу группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Задача 30. Пусть $f(z) = z + 2i \ln(z - i)$. Найти все точки $z_0 \in \mathbb{C}$, в которых у функции f:

(1) коэффициент растяжения равен 2;

(2) угол поворота равен $-\pi/2$.

Задача 31. Куда переводит ДЛО $\Lambda(z) = z/(z + i)$ область

$$D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| < 2, |z + i| < 2, \operatorname{Re} z < 0\}?$$

Задача 32. Доказать, что четыре различные точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^\bullet$ лежат на одной обобщенной окружности, если и только если $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ вещественно.

Задача 33. Доказать, что группа ДЛО-автоморфизмов верхней полуплоскости Π_+ состоит из отображений $\Lambda(z) = (az + b)/(cz + d)$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$.

Задача 34. Найти ДЛО-автоморфизм Λ единичного круга B_1 с условиями

$$\Lambda(0) = i/2, \quad \arg(\Lambda'(0)) = \pi/4.$$

Задача 35. Найти все ДЛО-автоморфизмы Λ (открытого) первого квадранта на себя.

Задача 36. Найти все ДЛО с одной неподвижной точкой $a \in \mathbb{C}^\bullet$. Пусть Λ — такое ДЛО и $z_0 \neq a$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\Lambda \circ \cdots \circ \Lambda}_{n}(z_0)$.

Задача 37.* Найти общий вид ДЛО с двумя неподвижными точками a и b в $\mathbb{C}^\bullet$. Пусть Λ — такое ДЛО и $z_0 \neq a, z_0 \neq b$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\Lambda \circ \cdots \circ \Lambda}_{n}(z_0)$.

Задача 38. Найти какую-либо максимальную область конформности функции Ж(Ж(Ж(z))) и ее образ.

Задача 39. Найти образ области

$$\{z \in \mathbb{C}^\bullet\colon |z - i\operatorname{ctg}(\alpha)| > 1/\sin(\alpha)\},$$

где $\alpha \in (0, \pi/2)$ фиксировано, при отображении $w =$ Ж(z).

Задача 40. При каких $z \in \mathbb{C}$, $z \notin i\mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{Ж \circ \cdots \circ Ж}_{n}(z)$, где Ж — функция Жуковского. Найти этот предел.

Задача 41. Доказать, что для функции $f(z) = \operatorname{ctg} z$ полоса

$$D = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$$

является одной из максимальных областей конформности. Найти образ $\Omega = f(D)$. Обратное отображение $f^{-1}(w) = \operatorname{arcctg} w\colon \Omega \to D$ называется главным значением многозначной функции $\operatorname{Arcctg} w$.

Задача 42. Найти образ полосы $\{|\operatorname{Re} z| < \pi/4\}$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$. Установить соответствие границ.

Задача 43. Найти $\lim\limits_{z\to iy_0, \operatorname{Re} z>0} \operatorname{arctg} z$, где y_0 фиксировано, $|y_0| > 1$.

Задача 44. Найти какую-либо максимальную область голоморфности функции $\ln(\operatorname{tg} z)$.

Задача 45. Найти какие-либо максимальные области конформности функций $\cos(z^2)$ и $\sin(z^2)$. Указать их образы и соответствия границ.

Задача 46. Найти какую-либо максимальную область конформности функции Ж($\cos(z^2)$). Указать ее образ.

Задача 47. Найти какую-либо максимальную область конформности функции $z^i_{(o)}$. Указать ее образ и соответствие границ.

Задача 48. Найти какую-либо максимальную область конформности функции $w = \Lambda$(Ж($\operatorname{tg} z$)), где $\Lambda(z) = -iz/(z - i)$. Указать ее образ.

Задача 49. Стереть разрез $[i, 2i)$ из области $\{|z| < 2, |z + i| > 1\}$.

Задача 50. Стереть разрезы $[-8, -4)$ и $(2, 4]$ из области

$$D = \{|z - 1| > 1, |z + 2| > 2\},$$

содержащей ∞.

Задача 51. Стереть разрезы $[i, 1 + i)$, $[-i, 1 - i)$ и $[1, +\infty)$ из области $\{|\operatorname{Im} z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$.

Задача 52. Стереть разрез $(-i\infty, 0)$ из области $\mathbb{C} \setminus \{|z| \leqslant 1, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Задача 53. Функция $I(z) = \operatorname{ind}_\gamma(z)$ непрерывна в $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$. А в случае замкнутого пути γ функция I постоянна (и целочисленна) в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

Задача 54. Доказать, что путь γ спрямляем, если и только если существует и конечен предел $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} l_T(\gamma)$, причем он равен $l(\gamma)$.

Задача 55. Доказать существование интеграла $\int_\gamma f(z)\,|dz|$ от непрерывной функции f по спрямляемому пути γ.

Задача 56*. Привести пример пути γ, для которого $\int_\gamma z\,dz$ не существует.

Задача 57. Пусть Γ — направленная снизу вверх канторова лестница. Найти $\int_\Gamma \overline{z}\,dz$.

Задача 58. Найти $\int_{\partial^+ B_1} \ln z\,dz$. Обсудить независимость от выбора начала пути.

Задача 59. Доказать, что функцию $f(z) = 1/z$ нельзя приблизить равномерно на окружности $\{|z| = 1\}$ полиномами комплексного переменного.

Задача 60. Пусть D — произвольная область в $\mathbb{C}$ и функция f непрерывна в D. Тогда f имеет п/о в D, если и только если для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ в D справедливо равенство

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Задача 61. (1) Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, функция f голоморфна в D, и пусть f не обращается в ноль всюду в D. Тогда существует голоморфная ветвь $g(z)$ многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$ в D (т. е. существует $g \in \mathcal{A}(D)$ с условиями $g(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ для всех $z \in D$, или же $f(z) = \exp(g(z))$).

(2) Пусть $n \in \{2, 3, \dots\}$. В условиях предыдущего упражнения функция $h_n(z) = \exp(g(z)/n)$ является голоморфной ветвью многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в D (т. е. $h_n \in \mathcal{A}(D)$, причем $h_n(z) \in \sqrt[n]{f(z)}$ для всех $z \in D$, т. е. $f(z) = (h_n(z))^n$).

Задача 62. Привести пример жордановой области с кусочно-гладкой границей, которая не является простой.

Задача 63. Вычислить интегралы:

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{\operatorname{tg} z\,dz}{z^3 + 8i}, \quad \int_{|z+1|=2} \frac{|z|^2\,dz}{z^3 + 8}, \quad \int_{|z+1|=4/3} \frac{\operatorname{arctg} z\,dz}{z^4 + z^3}.$$

Задача 64. Доказать, что целая функция с двумя периодами $T_1 = 1$ и $T_2 = i$ постоянна.

Задача 65. Пусть $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$. Доказать, что для функции $|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)|$ в D выполняется принцип максимума.

Задача 66. Доказать теорему о среднем по площади круга для голоморфных функций.

Задача 67*. В условиях определения простой области (п.о.) D верно равенство $\overline{D} = \bigcup_{n=1}^N \overline{G}'_n$. Кроме того, D всегда связно (без дополнительного требования в определении п.о.).

Задача 68*. Найти простейшую область G с «центром» $a = 0$ такую, что при всех достаточно малых $r > 0$ область $G \setminus \overline{B(a, r)}$ не является простой.

Задача 69. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(z+i)^{2n}}{n^n n^2}$$

найти радиус сходимости R и исследовать его сходимость на $\partial B(-i, R)$.

Задача 70. Найти множество сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nz)}{n!}$.

Задача 71. Найти радиус сходимости ряда Маклорена функции $f(z) = 1/(1+e^{3z})$.

Задача 72. Разложить функцию $f(z) = e^z \cos z$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = i$.

Задача 73. Разложить в ряд Тейлора с центром $z_0 = 1 + i$ функцию $f(z) = iz^3/(z^2+2i)^2$ и указать область, где сумма указанного ряда совпадает с f.

Задача 74. Разложить в ряд Тейлора с центром $z_0 = 4 + 4i$ функцию $f(z) = \operatorname{arctg} z$ и указать область, где сумма указанного ряда совпадает с f.

Задача 75. Доказать, что функцию $f(z) = 1/z$ нельзя приблизить равномерно на окружности $\{|z| = 1\}$ полиномами комплексного переменного, но можно приблизить на полуокружности $\{|z| = 1\} \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Задача 76. Найти порядок нуля ГФ $z - \operatorname{tg} z$ в точке 0. То же для функции $(z - \operatorname{tg} z)^{21}$.

Задача 77. Существует ли функция f, голоморфная в круге $\{|z| < 1\}$ и при всех $n = 2, 3, \ldots$, удовлетворяющая условиям $f(n^{-1}) = 1/\sqrt{n}$?

Задача 78. Существует ли $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ такая, что $|f(z)| \geqslant e^{1/|z|}$?

Задача 79. Пусть $B_1 = \{|z| < 1\}$, $f \in \mathcal{A}(B_1) \cap C(\overline{B_1})$, причем $f = 0$ на некоторой дуге на ∂B_1. Тогда $f \equiv 0$ в $\overline{B_1}$.

Задача 80. Доказать неравенство треугольника для стандартной метрики пространства $\mathcal{A}(D)$.

Задача 81.* Доказать, что пространство $\mathcal{A}(D)$ со стандартной метрикой ненормируемо.

Задача 82. Доказать, что система векторов $\{z^n \colon n = 0, 1, \ldots\}$ образует базис в Гильбертовом пространстве $\mathcal{A}^2(\{|z| < 1\})$.

Задача 83. При условиях предыдущей задачи ортонормировать базис $\{z^n \colon n = 0, 1, \ldots\}$ и разложить по нему функцию $\sqrt{1+z}_{(o)}$. Выписать равенство Парсеваля.

Задача 84. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = z^3/(z^2+4)^2$ во всех кольцах голоморфности с центром $z_0 = -2i$.

Задача 85. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \ln \frac{(-1+i)z}{z-i}$$

в максимальном кольце голоморфности с центром $z_0 = 0$.

Задача 86. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{2 - \cos(t)}.$$

Задача 87. Найти и классифицировать все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg}^2(z)}{z^7}.$$

Задача 88. Найти и классифицировать все особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^5}{1 - \cos(z^2)}.$$

Задача 89. Доказать, что если f голоморфна в круге $\{|z| < R\}$ и на его границе имеет полюс, то ряд Тейлора функции f с центром $z_0 = 0$ расходится в каждой точке окружности $\{|z| = R\}$.

Задача 90. Доказать, что все точки на границе круга сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ являются особыми точками для его суммы.

Задача 91. Найти интегралы (и классифицировать все ИОТ подынтегральных функций):

$$\int_{|z-i|=\sqrt{2}} \frac{\cos(1/z)\,dz}{(1+z^2)^2}, \quad \int_{x^2+y^2=2x+7/9} \frac{z^2\,dz}{(z-2)^2 \ln(1+iz)},$$

$$\int_{|z-1|=2} \frac{z^3\,dz}{e^{z^2} - 1}, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{\sin(1/z)}.$$

Задача 92. Пусть a и b — фиксированные точки в круге $B_1 = \{|z| < 1\}$. Найти все конформные изоморфизмы областей $B_1 \setminus \{a\}$ и $B_1 \setminus \{b\}$.

Задача 93. Пусть $\mathcal{F}$ — класс всех функций $f \in \mathcal{A}(B_1)$ с условиями $f(0) = 1+i$ и $f(B_1) \subset \Omega_1$, где Ω_1 — открытый первый квадрант. Найти $\sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$.

Задача 94*. Найти $\operatorname{res}_{z=0}(\exp(\operatorname{ctg} z))$.

Задача 95. Найти интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t)\,dt}{5 + 4\sin(2t)}, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg}(x)}\,dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^4+4)^2}\,dx, \quad \int_{|z-i|=2} \frac{(x+y)\,dz}{\operatorname{arctg}(iz/2)}.$$

Задача 96. Доказать, что функция Шварца специальной области D имеет в D хотя бы одну особую точку.

Задача 97. Привести пример специальной области D, у которой функция Шварца имеет в D только одну особую точку — существенно особую.

Задача 98. Доказать единственность функции Шварца для специальных выпуклых областей с гладкой границей.

Задача 99. Для всякого натурального $p \geqslant 2$ привести пример неванлинновской области D, у которой функция Шварца имеет в этой области полюс порядка p.

Задача 100. Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей и $f \in \mathcal{A}(D) \cap C^1(\overline{D})$. Доказать, что

$$2i \iint\limits_D f(z)\,dxdy = \int_{\partial^+ D} f(z)\overline{z}\,dz.$$

Для неванлинновских областей D такие интегралы всегда можно вычислять с помощью вычетов.

Задача 101*. Доказать, что всякий эллипс не является специальной областью.

Задача 102*. Привести пример неванлинновской области D, у которой функция Шварца имеет в этой области два простых полюса.

Задача 103. Найти преобразование Фурье функции $(x+3)/(x^4+4)$.

Задача 104. Найти (единственное) решение дифференциального уравнения $f'' - f = e^{-|x|}$ с условиями $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Задача 105. Среди функций $f(x) = e^{ax}/(1+e^{bx})$ (с постоянными $b > 0$, $0 < a < b$) найти все те, которые являются собственными функциями оператора Фурье.

Задача 106. Найти интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(x^4+4)}\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^3}\,dx.$$

Задача 107. Для области

$$D = (B(2,2) \setminus \overline{B(1,1)}) \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$$

и функции $f(z) = z^{-2}$ вычислить $\operatorname{res}_{(0,D)} f$. Как следствие найти интеграл $(vp)\displaystyle\int_{\partial^+ D} f(z)\,dz$.

Задача 108. Пусть D — первый квадрант, а функция f имеет в точке 0 полюс порядка $p > 1$. При каких условиях определен $\operatorname{res}_{(0,D)} f$? При этих f найти его.

Планы семинаров курса ТФКП, 1 семестр

Семинар 1. Поле $\mathbb{C}$. Предел и непрерывность. Экспонента и логарифм.

1. Алгебраическая и тригонометрическая форма КЧ. Формула Муавра. Извлечение корней. Основная теорема алгебры.

Упр. 1. Вычислить значения $(-1+7i)/(3+4i)$, $(1-i)^{10}/(-1+\sqrt{3}i)^8$, $\sqrt[3]{-8i}$.

Обсудить аксиому ассоциативности умножения.

Упр. 2. Найти корни многочлена z^4+4 и разложить его на множители (над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$).

2. Определение предела и предельной точки последовательности.

Упр. 3. Обсуждение доказательства формулы

$$\lim_{n\to+\infty}(1+z/n)^n = e^x(\cos(y)+i\sin(y)) =: e^z, \quad z = x+iy.$$

Упр. 4. Найти все предельные точки последовательности $\{e^{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Функции e^z и z^n (с подробными рисунками), их основные обратные ветви $\ln(z)$ и $\sqrt[n]{z}_{(o)}$.

Упр. 5. Найти образ полуполосы $\{x+iy\colon x>0, 0<y<\pi/2\}$ при отображении e^z.

4. Определения и свойства $o(1), O(1), o(f(z)), O(f(z))$ при $z\to z_0$.

Упр. 6. Доказать равенство $\ln(1+z) = z+o(z)$ при $z\to 0$, т.е. $\lim\limits_{z\to 0}\ln(1+z)/z = 1$.

ДЗ. Задачи 1-10 (задачи со $*$ — для желающих).

Семинар 2. Связность. Теорема Жордана. Стереографическая проекция. Односвязная область. Оболочка компакта.

1. Разбор ДЗ (не более 2 задач, до 10 минут).

2. Открытые, замкнутые, компактные, связные множества в метрическом пространстве.

Упр. 1. Доказать, что всякая *область* (открытое и связное множество) в $\mathbb{C}$ линейно связна.

3. Пути. Теорема Жордана.

Упр. 2. Доказать, что носитель всякого замкнутого жорданова пути в $\mathbb{C}$ гомеоморфен окружности.

Упр. 3. Кратко обсудить идею доказательства теоремы Жордана для случая замкнутой жордановой ломаной.

4. Одноточечная компактификация. Сфера Римана $\mathbb{C}^\bullet$. Стереографическая проекция.

Упр. 4. Вывод формул стереографической проекции. Доказать круговое свойство. Докажем круговое свойство стереографической проекции с помощью выведенных *формул перехода*:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}; \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}; \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Пусть окружность Γ на сфере Σ задается пересечением Σ с некоторой *плоскостью* P: $a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0$ (a, b, c, d — вещественные постоянные). Если P проходит через точку $N = (0,0,1)$, то ситуация простая — окружность Γ перейдет в прямую γ с добавленной точкой ∞, где γ — пересечение плоскостей $Oxy = O\xi\eta$ и P.

Пусть теперь P не проходит через точку $N = (0,0,1)$, т.е. $c + d \neq 0$. Подставляя формулы перехода в уравнение плоскости P, получим уравнение $(c+d)|z|^2 + ax + by + d = 0$. Остальное додумать самостоятельно.

5. Односвязная область в $\mathbb{C}$ и оболочка компакта.

Упр. 5. Доказать, что всякое открытое множество в $\mathbb{C}$ состоит из не более чем счетного семейства непересекающихся областей — компонент связности этого множества.

Упр. 6. Разобрать доказательство следующей теоремы: в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ для любого компакта $K \subset D$ имеем $\widehat{K} \subset D$.

ДЗ. Задачи 11-20.

Семинар 3. Комплексная производная. Производная сложной и обратной функции. $\mathbb{C}$- и $\mathbb{R}$-дифференцируемость. Теорема Коши – Римана. Свойства (частных) производных. Производная по направлению.

1. Разбор ДЗ (не более 2 задач, до 10 минут).

2. Производная сложной и обратной функции.

Упр. 1. При $n \in \{2, 3, \dots\}$ найти производные функций $w = z^n$ и $w = \sqrt[n]{z}_{(0)} = \exp(\ln(z)/n)$.

3. $\mathbb{C}$- и $\mathbb{R}$-дифференцируемость. Теорема Коши – Римана.

Упр. 2. Для функции $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ найти по определению $\Delta f\big|_{z_0}(\Delta z)$, $df\big|_{z_0}(\Delta z)$, $\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z_0}$ и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{z_0}$. Найти все точки $\mathbb{C}$-дифференцируемости функции f и ее производные в этих точках.

Упр. 3. Применить теорему Коши – Римана к функции $f(z) = e^z$.

4. Свойства частных производных.

Упр. 4. Сформулировать условия и доказать формулу ($w_0 = g(z_0)$):

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial z}\Big|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial w}\Big|_{w_0} \frac{\partial g}{\partial z}\Big|_{z_0} + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\Big|_{w_0} \frac{\partial \overline{g}}{\partial z}\Big|_{z_0}.$$

В частности, здесь потребуется установить равенство $\overline{\partial g/\partial \overline{z}} = \partial \overline{g}/\partial z$.

5. Производная по направлению.

Упр. 5. Найти все точки $\mathbb{R}$-дифференцируемости функции

$$f(z) = \ln(2z + i\overline{z}).$$

В этих точках найти $\partial f/\partial z_\theta\big|_{z_0}$. При $z_0 = i$ найти такие θ, при которых модуль $\left|\partial f/\partial z_\theta\big|_{z_0}\right|$ максимально возможен.

ДЗ. Задачи 21-28.

Семинар 4. Голоморфность и конформность в точке и области. Дробно-линейные функции.

1. Конформность в точке и области.

Упр. 1. Найти и изобразить все точки $z_0 \in \mathbb{C}$, в которых у функции $\Lambda(z) = iz/(z+i)$:

(1) коэффициент растяжения равен $1/2$;
(2) угол поворота равен $\pi/3$.

Доказать, что функция $\Lambda(z)$ конформна в точке ∞.

2. Круговое свойство и свойство симметрии ДЛО.

Упр. 2. Куда ДЛО $\Lambda(z) = 2iz/(z-i)$ переводит полуполосу

$$D = \{z \in \Pi_{(0,1)} \colon \operatorname{Re} z > 0\}?$$

3. Свойство трех точек для ДЛО. ДЛО-автоморфизмы B_1 и Π_+ (напомнить ответы и планы решения).

Упр. 3. Найти все ДЛО-изоморфизмы Π_+ на B_1.

Упр. 4. Найти ДЛО $\Lambda(z)$ такое, что

$$\Lambda(\Pi_+) = \{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} w > 0\}, \quad \Lambda(i) = 1 + i, \quad \arg(\Lambda'(i)) = \pi/2.$$

Упр. 5. Пусть $\Lambda(z) = 2i + 1/z$ и $z_0 \in \mathbb{C}^\bullet$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\Lambda \circ \cdots \circ \Lambda}_{n}(z_0)$.

ДЗ. Задачи 29-37.

Семинар 5. Функция Жуковского Ж(z). Тригонометрические и гиперболические функции.

1. Напомнить разложение Ж $= \Lambda_1^{-1} \circ S \circ \Lambda_1$. Напомнить действие Ж на максимальной области конформности $\mathbb{C}^\bullet \setminus \overline{B_1}$ (с учетом соответствия границ, см. лекции). Ветвь Ж$_0^{-1}$.

Дать указание к решению ДЗ.38 (то же для ДЗ.40).

Упр. 1. Проверить действие функции Ж на максимальной области конформности Π_+ (с учетом соответствия границ). Ветвь Ж$_+^{-1}$.

Упр. 2. Найти образ области $\{z \in \mathbb{C}^\bullet \colon |z| > R\}$ ($R > 1$ фиксировано) при отображении $w =$ Ж(z).

2. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного.

Напомнить действие функции $\cos(z)$ на максимальной области конформности $\Pi'_{(0,\pi)}$ (с учетом соответствия границ). Ветвь $\arccos(z)$. Куда переводит функция $\cos(z)$ полуполосу $\{z \in \Pi'_{(0,\pi/2)}, \operatorname{Im} z > 0\}$?

Упр. 3. Проверить действие функции $\sin(z)$ на максимальной области конформности $\Pi'_{(-\pi/2,\pi/2)}$ с учетом соответствия границ. Ветвь $\arcsin(z)$.

Упр. 4. Действие функции $\operatorname{tg}(z)$ на максимальной области конформности $\Pi'_{(-\pi/2,\pi/2)}$. Куда переходят прямые $\{\operatorname{Re} z = \theta\}$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$? Ветвь $\operatorname{arctg}(z)$. Найти $(\operatorname{arctg}(z))'$.

Упр. 5. Найти какую-либо максимальную область *голоморфности* функции $f(z) = \ln(\cos(z))$.

ДЗ. Задачи 38-44.

Семинар 6. Конформные отображения, задаваемые основными элементарными функциями (максимальные области конформности, соответствие границ, стирание разрезов). Обзор.

1. Нахождение максимальных областей конформности (МОК) элементарных функций.

Упр. 1. Разбор ДЗ. Найти какую-либо МОК функции $\sin(z^2)$ и ее образ.

Упр. 2. Найти какую-либо МОК функции $\ln(Ж(2iz/(z+i)))$ и ее образ.

2. Стирание разрезов.

Упр. 3. Модельные задачи:

(1) стереть разрез $(0, 2i]$ из области Π_+;

(2) стереть разрезы

$$\{|z| = 1, 0 < \arg(z) \leqslant \pi/3\} \quad \text{и} \quad \{|z| = 1, \pi/2 \leqslant \arg(z) < \pi\}$$

из Π_+.

Упр. 4. Стереть разрез $(4i, 6i]$ в области $\{|z - 2i| > 2, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Упр. 5. Стереть разрезы $(-2i, -i]$, $[i, 2i)$ и $(-\infty, 1]$ в полосе $\{|\operatorname{Im} z| < 2\}$.

3. Обзор. Обсудить упр. 5 из семинара 4.

ДЗ. Задачи 45-52. Готовиться к КР 1.

Семинар 7. КР 1.

Примерный вариант КР 1.

Задача 1. Найти и изобразить множество всех точек конформности функции $f(z) = -iz + \ln(iz + 1)$, в которых угол поворота (дифференциала) равен $-\pi/4$.

Задача 2. Найти все ДЛО-изоморфизмы полукруга

$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 3, \operatorname{Im} z < 0\}$$

на второй квадрант.

Задача 3. Отобразить конформно область $\{|z - 2i| > 2, \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом $(4i, 5i]$ на второй квадрант.

Задача 4. Найти какую-либо максимальную область конформности функции $f(z) = \Lambda(Ж(i\cos(z)))$, где $\Lambda(z) = z/(z - i)$. Указать ее образ.

Семинар 8. Интеграл вдоль пути по комплексной переменной. Интегральная теорема Коши (ИТК) для односвязной области. Первообразная (п/о). Формула Ньютона – Лейбница (Н – Л).

1. Спрямляемые пути и кривые.

Упр. 1. Найти модуль непрерывности $\omega_{\overline{B_1}}(f,\delta)$ функции $f(z) = |z|^2$, где $B_1 = \{|z| < 1\}$.

Упр. 2. Если γ — непрерывно дифференцируемый путь на $[\alpha,\beta]$, то он спрямляем и

$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\dot\gamma(t)|\,dt.$$

2. Определение интеграла вдоль пути по комплексной переменной.

Упр. 3. Найти интегралы

$$\int_{\Gamma_j} \overline{z}^2\,dz, \quad j \in \{1,2\}$$

по отрезку $\Gamma_1 = [-i,i]$ и полуокружности $\Gamma_2 = \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$. Оба раза движение снизу вверх.

3. ИТК для односвязной области. Комплексная п/о. Формула Н – Л.

Упр. 4. Доказать, что функция $f(z) = 1/(z^2+z)$ не имеет п/о в кольце $\{0 < |z| < 1\}$.

Упр. 5. Найти $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{tg}(z)\,dz$ по параболе $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [-1,1]$.

Указание. Найти п/о подынтегральной функции в некоторой области, содержащей $[\gamma]$.

ДЗ. 1. Найти модуль непрерывности $\omega_{\partial B_1}(f,\delta)$ функции $f(z) = z^2$.

ДЗ. * Найти модуль непрерывности $\omega_{\overline{B_1}}(f,\delta)$ функции $f(z) = z^2$.

ДЗ. 2. Вычислить $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{z^4}{z^3+1}\,dz.$

ДЗ. 3-10. Задачи 53-60.

Семинар 9. Интегральная теорема Коши (ИТК) для допустимых областей. Интегральная формула Коши (ИФК). ИФК для производных. Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Теоремы Морера и Вейерштрасса.

1. ИТК для допустимых областей. Простейшие и простые области.

Упр. 1. Пусть область D является образом круга $\{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta - b| < b\}$ под действием отображения $z = \zeta^2$, где $b > 0$ фиксировано. Доказать, что ∂D — кардиоида (в полярных координатах (ρ,φ) имеет уравнение $\rho(\varphi) = 2a(1+\cos(\varphi))$, $\varphi \in [-\pi,\pi]$; здесь $a = b^2$). Дать план доказательства, что область D является простейшей относительно точки a. Найти (полагая

$0\ln(0) = 0$ по непрерывности)

$$\int_{\partial^+ D} \sin(z)\ln(z)\,dz.$$

2. ИФК и ИФК для производных.

Упр. 2. Вычислить интегралы:

$$\int_{|z-2i|=3} \frac{\cos(\pi iz)\,dz}{z^2+4}, \quad \int_{|z-2i|=5} \frac{\cos(\pi iz)\,dz}{z^2+4}, \quad \int_{|z+i|=1} \frac{\sin(\pi iz)\,dz}{(z^2+1)^2}.$$

3. Теорема о среднем и принцип максимума модуля.

Упр. 3. Доказать основную теорему алгебры с помощью принципа максимума модуля.

4. Теоремы Морера и Вейерштрасса.

Упр. 4. Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и отрезок $[a,b] \subset D$. Доказать, что если $f \in C(D) \cap \mathcal{A}(D \setminus [a,b])$, то $f \in \mathcal{A}(D)$.

Упр. 5. Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$ голоморфна в B_1.

ДЗ. 1. В условии Упр. 1 завершить доказательство, что D — простейшая.

ДЗ. 2-8. Задачи 62-68 (в зд. 63 — 3 номера; в зд. 66 перейти к полярным координатам).

Семинар 10. Степенные ряды. Теорема Коши — Тейлора.

1. Степенные ряды. Радиус сходимости. Вычисление суммы ряда.

Упр. 1. Найти круг сходимости B и сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^n z^{2n+1}$. Исследовать сходимость этого ряда на ∂B.

Указание. Выписать коэффициенты и применить формулу Коши – Адамара. (Можно непосредственно применить признак Коши).

2. Теорема Коши – Тейлора. Табличные разложения.

Упр. 2. Найти радиус сходимости ряда Маклорена функции $f(z) = \operatorname{tg}(z)$.

Упр. 3. Разложить в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 1 + i$ функцию $f(z) = iz^3/(z^2 + 2i)$ и указать область, где сумма указанного ряда совпадает с f.

Указание. Разложить исходную функцию f на целую часть и простейшие дроби. Разложить функцию $f_a(z) = 1/(z - a)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 \neq a$.

Упр. 4. Разложить в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = -1 + i$ функцию $f(z) = \ln(2iz)$ и указать область, где сумма указанного ряда совпадает с f.

Указание. Применить формулу Коши – Тейлора, или почленное дифференцирование/интегрирование.

Упр. 5. Доказать, что функция f равномерно приближается на круге $K = \{|z| \leqslant 1\}$ полиномами комплексного переменного тогда и только тогда, когда f непрерывна на K и голоморфна в его внутренности $K^\circ = \{|z| < 1\}$.

Указание. Применить теорему Вейерштрасса и метод гомотетии области.

ДЗ. Задачи 69 — 75.

Семинар 11. Нули голоморфных функций (ГФ). Теорема единственности. Особые точки на границе круга сходимости. Пространства Бергмана.

1. Порядок нуля ГФ. Теорема о нулях ГФ. Теорема единственности.

Упр. 1. Найти все нули ГФ $\sin(z^2)$ и их порядки. То же для функции $\big(\sin(z^2)\big)^{20}$.

Упр. 2. Существует ли функция f, голоморфная в круге $\{|z| < 1\}$ и при всех $n = 2, 3, \ldots$ удовлетворяющая условиям $f(\pm n^{-1}) = n^{-3}$?

Упр. 3. Если $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, причем $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, то $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

2. Особые точки на границе круга сходимости.

Упр. 4. Обсудить план решения ДЗ.90.

3. Пространство $\mathcal{A}(D)$ и его метрика. Пространства Бергмана $\mathcal{A}^p(D)$.

Упр. 5. Доказать полноту пространств Бергмана $\mathcal{A}^p(D)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Указание. Применить теоремы Вейерштрасса, о среднем по площади и неравенство Гельдера.

ДЗ. Задачи 76 — 80, 81*, 82, 83*, 90.

Семинар 12. Разложение функций в ряды Лорана. Неравенства Коши. Связь с рядами Фурье. Классификация изолированных особых точек (ИОТ) однозначного характера (начало).

1. Разложение функций в ряды Лорана. Неравенства Коши.

Упр. 1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = z^3/(z^2 + 4)$ во всех кольцах голоморфности с центром $z_0 = 3 - 2i$.

Упр. 2. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \cos\Big(\frac{\pi}{4}\,\frac{z - 3i}{z + i}\Big)$$

в кольце $\{0 < |z + i| < +\infty\}$.

Упр. 3. Найти все $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ с условием $|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|} + 1/\sqrt{|z|}$ при всех $z \neq 0$.

2. Связь с рядами Фурье.

Упр. 4. Разложить функцию $f(t) = 1/(5 + 4\cos(t))$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.

3. Классификация ИОТ (начало).

Упр. 5. Найти и классифицировать все ИОТ функции $z^2 \operatorname{ctg}(z)$.

Упр. 6. Найти и классифицировать все ИОТ функции

$$f(z) = \frac{\cos(1/z)}{\big(1 + z^2\big)^2}.$$

ДЗ. Задачи 84 — 89. Обсудить планы решения.

Семинар 13. Классификация ИОТ (продолжение). Вычеты и их вычисление. Теорема Коши о вычетах (простые интегралы).

1. Классификация ИОТ (продолжение). Вычеты.

Упр. 1. Найти и классифицировать все ИОТ следующих функций и вычислить вычеты в них (ИОТ должны быть найдены в алгебраической форме):

$$\frac{z^4}{z^6+64}, \quad \frac{\operatorname{tg}(z)}{z^4}, \quad \operatorname{ctg}(z^2).$$

2. Вычисление интегралов с помощью теоремы Коши о вычетах.

Упр. 2. Вычислить следующие интегралы с помощью вычетов (обязательно наличие хорошего рисунка контура и всех ИОТ, лежащих внутри него и вблизи):

$$\int_{|z+2i|=3} \frac{z^4\,dz}{z^6+64}, \quad \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{tg}(z)\,dz}{z^4}, \quad \int_{|z-i|=2} \operatorname{ctg}(z^2)\,dz.$$

3. Теорема об устранимой особой точке и лемма Шварца.

Упр. 3. Обсудить планы решений ДЗ.92 и ДЗ.93.

ДЗ. Задачи 91 (4 задачи) — 94.

Семинар 14. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Специальные области. Функция Шварца.

1. Вычисление интегралов с помощью теоремы Коши о вычетах.

Упр. 1. Вычислить следующие интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{5-3\cos t}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^3}\,dx.$$

2. Специальные области. Функция Шварца.

Упр. 2. Вычислить интеграл:

$$\int_{|z-i|=2{,}5} \frac{|z|^2\,dz}{\ln(2-iz)}.$$

Упр. 3. Если жорданова область содержит отрезок на своей границе, то эта область не может быть специальной.

Упр. 4. Для всякого натурального $p \geqslant 2$ привести пример неванлинновской области D, у которой функция Шварца имеет в этой области одну особую точку — полюс порядка p.

*Упр. 5.** В предыдущей задаче при $p=2$ посчитать площадь найденной области.

Указание. Воспользовавшись формулой Стокса (Грина), доказать, что

$$2i\iint_D dx\,dy = \int_{\partial^+ D} \overline{z}\,dz.$$

ДЗ. Задачи 95 — 102.

Семинар 15. Лемма Жордана. Вычисление преобразований Фурье. Вычисление (vp)-интегралов с помощью вычетов (начало). Обзор.

1. Лемма Жордана. Вычисление преобразований Фурье.

Упр. 1. При фиксированном $a > 0$ найти преобразования Фурье следующих функций:

$$\frac{1}{x^2+a^2}, \quad \frac{1}{(x^2+a^2)^2}, \quad \frac{x}{(x^2+a^2)^2}.$$

2. Вычисление (vp) интегралов с помощью вычетов (начало).

Упр. 2. Вычислить (vp)-интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2+2x+5)}\, dx, \quad (vp) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{2}x}}{1-e^{2x}}\, dx.$$

Упр. 3. Пусть функция f имеет в точке 0 полюс порядка $p > 1$. При каких условиях определен $\mathrm{res}_{(0,\Pi_+)} f$? При этих f найти его.

Упр. 4. Обсудить планы решений ДЗ.104 и ДЗ.106(2).

3. Обзор перед КР 2.

ДЗ. Задачи 103 — 108.

Семинар 16. КР 2.

Примерный вариант КР 2.

Задача 1. Разложить в ряд Тейлора с центром $z_0 = -1,5 + i$ функцию

$$f(z) = \ln \frac{iz+1}{z+i}.$$

Указать область, где f представляется указанным рядом Тейлора.

Задача 2. Вычислить интеграл

$$\int_{|z-1+4i|=5} \frac{\mathrm{tg}(\pi z/2)}{z^2 \ln(1+iz)}\, dz$$

и классифицировать все изолированные особые точки подынтегральной функции.

Задача 3. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin(x)}{x^3(x^2+1)}\, dx.$$

Задача 4. Привести и обосновать пример специальной НЕневанлинновской области.