Часть 1

Спецкурс «Дополнительные главы комплексного анализа и некоторые приложения»

Глава 1

Лекции, 1 семестр

§ 1.1. Комплексные числа и планиметрия

1.1.1. Стандартные преобразования в планиметрии.

Многие геометрические задачи на плоскости можно переформулировать в терминах комплексных чисел и решать их как «одномерные», сводя их к решению определенного уравнения или системы уравнений.

Для начала покажем: как с помощью линейных преобразований комплексной плоскости можно представить отображения параллельного переноса, поворота, а также гомотетии. Всюду далее $z = x + iy$, Oxy – декартова система координат.

• $T_a\colon z \mapsto z+a$ — параллельный перенос (translation) на вектор $a \in \mathbb{C}$;

• $R_{a,\alpha}\colon z \mapsto a + (z-a)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ — поворот (rotation) плоскости на угол $\alpha \in \mathbb{R}$ (в радианах) относительно точки $a \in \mathbb{C}$;

• $H_{a,k}\colon z \mapsto a + k(z-a)$ — гомотетия (homothety) с центром в точке a и коэффициентом $k > 0$.

1.1.1. Упражнение. В старом манускрипте описано местоположение древнего клада на известном острове О:

«На острове О есть дуб Д, сосна С и большой камень К. Чтобы найти клад, следует

1) идти от дуба Д к камню К; у камня повернуть строго налево и пройти удвоенное расстояние от дуба Д до камня К (т. е. 2ДК); поставить метку M_1;

2) идти от камня К к сосне С и пройти за сосну С на расстояние КС до точки Р; повернуть строго налево, пройти прямо расстояние, равное расстоянию от К до Р; поставить метку M_2;

3) клад находится в середине отрезка, соединяющего M_1 и M_2».

Понятно, что если известно нахождение дуба Д, сосны С и камня К на острове О, то клад находится однозначно. Но по прибытии на остров О удалось найти лишь дуб Д и сосну С. Можно ли в такой ситуации определить местоположение клада?

Решение. Введем декартову систему координат, связанную с островом О, в которой дуб Д находится в начале координат 0, сосна С находится в точке $1 = 1 + i0$, а камень К находится в неизвестной точке $z \in \mathbb{C}$.

Пусть z_1 и z_2 - координаты первой и второй меток, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Тогда, исходя из условия, находим: $z_1 = z + i2z$, $z_2 = z + 2(1-z) + i2(1-z)$. Поэтому клад находится в однозначно определяемой точке $(z_1 + z_2)/2 = 1 + i$. Таким образом, чтобы отыскать клад, необходимо пройти от дуба Д к сосне С, от нее повернуть строго налево и пройти расстояние, равное ДС.

1.1.2. Задача. 1. В условиях предыдущего упражнения: пусть оба раза вместо поворота на угол $+\pi/2$ требуется повернуть на угол $\alpha \in (-\pi, \pi]$. При каких значениях α клад находится однозначно?

2. Пусть в первый раз совершается поворот на угол α, а во второй раз — на угол β $(\alpha, \beta \in (-\pi, \pi])$. Для каких пар (α, β) клад находится однозначно?

1.1.2. Простейшие геометрические соотношения в комплексной форме.

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие *сопряженное ему* комплексное число $\overline{z} = x - iy$, симметричное z относительно вещественной оси Ox.

Операция сопряжения комплексного числа перестановочна с операциями сложения и умножения: $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$. При этом $\overline{\overline{a}} = a$, $a \cdot \overline{a} = |a|^2$ для любого $a \in \mathbb{C}$. Кроме того, $c \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\overline{c} = c$. Аналогично, $c \in i\mathbb{R}$ только если $\overline{c} = -c$. Комплексные числа вида $0 + i \cdot y := i \cdot y$, $y \in \mathbb{R}$, называются *чисто мнимыми.*

Напомним, что $x = (z + \overline{z})/2$, $y = (z - \overline{z})/(2i)$, и при $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}.$$

Посмотрим как записываются простейшие геометрические свойства на языке комплексных чисел.

1. *Три различные точки $a, b, c \in \mathbb{C}$ лежат на одной прямой, если и только если*

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{\overline{c} - \overline{a}}.$$

Доказательство. Для того чтобы $a, b, c \in \mathbb{C}$ лежали на одной прямой необходимо и достаточно выполнения условия $b - a = k \cdot (c - a)$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$ — условия того, что векторы $b - a$ и $c - a$ коллинеарны. Далее,

$$b - a = k \cdot (c - a) \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = \overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{\overline{c} - \overline{a}}.$$

□

2. *Прямая (ab) перпендикулярна прямой (cd), где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, $c \neq d$, если и только если*

$$\frac{\overline{d} - \overline{c}}{\overline{b} - \overline{a}} = -\frac{d - c}{b - a}.$$

Доказательство. Прямые (ab) и (cd) ортогональны, если направляющие векторы $d - c$ и $b - a$ ортогональны. Последнее в точности означает, что $(d - c)/(b - a) \in i\mathbb{R}$, что эквивалентно условию

$$\overline{(d - c)/(b - a)} = -(d - c)/(b - a).$$

$\square$

3. *Прямые (ab) и (cd), где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq b, c \neq d$, пересекаются под углом $\alpha \in (0, \pi/2)$, если и только если*

$$\left|\arg \frac{d - c}{b - a}\right| = \alpha \quad \text{или} \quad \left|\arg \frac{d - c}{b - a}\right| = \pi - \alpha.$$

4. *Прямые (ab) и (cd), где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq b, c \neq d$, параллельны, если и только если*

$$\frac{b - a}{c - d} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{\overline{c} - \overline{d}}.$$

1.1.3. Определение. *Сложным (или ангармоническим) отношением $[a, b, c, z]$* четырех точек $a, b, c, z \in \mathbb{C}^\bullet$, где a, b, c различны, называется выражение

$$\frac{z - a}{z - b} : \frac{c - a}{c - b}.$$

Форму сложного отношения $[a, b, c, z]$ можно запомнить так: она имеет вид дробно-линейного отображения, равного 0 при $z = a$, ∞ при $z = b$ и 1 при $z = c$.

1.1.4. Определение. *Дробно-линейным отображением* (ДЛО) называется всякая функция $\Lambda\colon \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}^\bullet$ вида

$$\Lambda(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ и

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Последнее условие на коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ означает, что ДЛО не должно быть константой.

В основном курсе комплексного анализа мы докажем, что ДЛО обладают следующими свойствами: переводят обобщенные окружности (т. е.

обычные окружности или прямые, дополненные точкой ∞ в $\mathbb{C}^\bullet$) в обобщенные окружности, сохраняют углы между обобщенными окружностями, переводят симметричные точки относительно обобщенной окружности в симметричные точки относительно образа этой окружности, а также сохраняют сложное отношение любой четверки точек. Чуть позже мы применим ДЛО к изучению модели Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Здесь мы установим еще одно полезное свойство сложного отношения.

5. *Четыре различные точки $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ лежат на одной обобщенной окружности, если и только если $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. $[a, b, c, d] = \dfrac{d-a}{d-b} : \dfrac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$, если и только если аргументы чисел $\dfrac{d-a}{d-b}$, $\dfrac{c-a}{c-b}$ совпадают или отличаются на π (по модулю 2π), так как при делении комплексных чисел их аргументы вычитаются, а аргумент вещественного числа сравним с 0 (по модулю π). Ограничимся рассмотрением случая, когда аргументы указанных чисел *равны* (по модулю 2π). Второй случай оставляем читателю. В этой ситуации величины углов (с учетом знака!) $\angle(bda)$ и $\angle(bca)$ совпадают. Значит отрезок $[a, b]$ виден под одним и тем же углом из точек c и d, а это возможно (как известно из школьного курса планиметрии) тогда и только тогда, когда точки a, b, c, d лежат на одной обобщенной окружности. □

В задачах на окружности удобно сводить условие к случаю единичной окружности. Далее окружность радиуса 1 с центром в начале координат будет обозначаться через S_1. Отметим, что S_1 можно задать следующими уравнениями: $|z|^2 = z\overline{z} = 1$ или $\overline{z} = 1/z$.

1.1.5. Упражнение. Пусть $a, b \in S_1$, $a \neq b$, $a \neq -b$. Найти точку пересечения z касательных к окружности S_1, проведенных в точках a и b.

Решение. Заметим, что точка пересечения z удовлетворяет следующим условиям:

$$z - b = ibk, \quad z - a = -iak$$

для некоторого ненулевого вещественного числа k. Избавляясь от неизвестного параметра k, находим

$$z = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\overline{a} + \overline{b}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big).$$

□

1.1.6. Упражнение. Заданы две прямые (ab) и (cd), где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, $c \neq d$. Найти точку пересечения z этих прямых.

Решение. В терминах комплексных чисел уравнение прямой, проходящей через точки a и b, $a \neq b$, записывается так:

$$\frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}.$$

Оно является формальной записью того факта, что для всех точек z, лежащих на прямой (ab), векторы $z-a$ и $b-a$ коллинеарны, то есть $\dfrac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Чтобы найти точку пересечения z указанных прямых, решим систему

$$\begin{cases} \dfrac{z-a}{b-a} = \dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \\ \dfrac{z-c}{d-c} = \dfrac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{d}-\overline{c}}. \end{cases}$$

Откуда

$$z = \frac{(\overline{c}d - c\overline{d})(b-a) - (\overline{a}b - a\overline{b})(c-d)}{(\overline{b}-\overline{a})(c-d) - (b-a)(\overline{c}-\overline{d})}.$$

При условии $(\overline{b}-\overline{a})(c-d) - (b-a)(\overline{c}-\overline{d}) \neq 0$ имеется ровно одна точка пересечения (когда прямые не совпадают и не являются параллельными) □

1.1.7. Задача (Теорема Брианшона). Доказать, что в любом описанном шестиугольнике большие диагонали пересекаются в одной точке.

Указание. С помощью гомотетии и параллельного переноса задача сводится к случаю, когда рассматриваемый шестиугольник описан около единичной окружности S_1.

Пусть $a, b, c, d, e, f \in S_1$ — последовательные точки касания окружности и сторон описанного шестиугольника. Тогда вершины шестиугольника — как точки пересечения касательных к S_1 — принимают вид

$$a_1 = \frac{2}{\overline{a}+\overline{b}}, \quad b_1 = \frac{2}{\overline{b}+\overline{c}}, \quad c_1 = \frac{2}{\overline{c}+\overline{d}},$$
$$d_1 = \frac{2}{\overline{d}+\overline{e}}, \quad e_1 = \frac{2}{\overline{e}+\overline{f}}, \quad f_1 = \frac{2}{\overline{a}+\overline{f}}.$$

В дальнейших выкладках целесообразно также использовать условие принадлежности точки z единичной окружности: $\overline{z} = 1/z$.

Далее, зная вершины $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ и используя результат последнего упражнения, находим точки пересечения больших диагоналей (a_1d_1), (b_1e_1) и (a_1d_1), (c_1f_1) нашего шестиугольника. Остается сравнить полученные точки пресечения – они оказываются тождественно равными (вне зависимости от параметров задачи).

1.1.3. Полярное соответствие относительно окружности.

Пусть S — окружность в $\mathbb{C}$ с радиусом $R \in (0, +\infty)$ и центром в точке c. Говорят, что прямая L является *полярой* точки $a \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ *относительно* S, если L проходит через точку a^*, симметричную (инверсную) точке a относительно S, перпендикулярно лучу ca. При этом точка a называется *полюсом* прямой L (не проходящей через точку c) *относительно* S.

В частности, если $a \in S$, то ее полярой является прямая, касающаяся S в точке a. Если $|a - c| > R$, а две точки z_1 и z_2 на S таковы, что прямые az_1 и az_2 касаются окружности S, то прямая z_1z_2 — поляра точки a относительно S (проверить!).

Будем далее для простоты считать, что $c = 0$. Тогда при $a \neq 0$ имеем $a^* = R^2/\overline{a}$.

1.1.8. Предложение. *В указанных условиях пусть $a \neq b$ — ненулевые точки, являющиеся полюсами прямых L_a и L_b соответственно. Тогда $b \in L_a$ тогда и только тогда, когда $a \in L_b$.*

Доказательство. Имеем $b \in L_a$ если и только если число $(b-a^*)/a$ чисто мнимо, что эквивалентно выполнению цепочки равенств

$$(b - a^*)/a = -(\overline{b} - \overline{a^*})/\overline{a} \Leftrightarrow b\overline{a} + a\overline{b} = a^*\overline{a} + \overline{a^*}a = 2R^2 = b^*\overline{b} + \overline{b^*}b.$$

Откуда $a \in L_b$. □

1.1.9. Следствие. *В указанных условиях пусть $a_1, \ldots, a_N$ — различные ненулевые точки. Эти точки лежат на одной прямой L, не проходящей через точку 0, если и только если соответствующие им поляры пересекаются в одной точке — полюсе прямой L.*

1.1.10. Задача. Доказать, что при полярном соответствии теорема Брианшона «переходит» в следующую *теорему Паскаля*: во вписанном шестиугольнике точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

Рассмотреть только невырожденные случаи, когда все указанные пары сторон не параллельны.

Литература. З.А. Скопец. Геометрические миниатюры. с. 152 – 192.

§ 1.2. Доказательство Х. Тверберга теоремы Жордана

1.2.1. Введение.

Обсуждается малоизвестное специалистам доказательство классической теоремы о замкнутой жордановой кривой (теоремы Жордана), полученное норвежским математиком Х. Твербергом. Это доказательство носит метрический характер и позволяет получить одно важное метрическое уточнение теоремы Жордана, представляющее самостоятельный интерес.

Следующий фундаментальный топологический факт известен как *теорема о замкнутой жордановой кривой* или как *теорема Жордана.*

1.2.1. Теорема (Жордана). *Пусть* $\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ — *единичная окружность в* $\mathbb{R}^2$ *и пусть* $\gamma\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ — *непрерывное инъективное отображение, т. е.* $\mathit{\Gamma} = \gamma(\mathbb{T})$ — *замкнутая жорданова кривая на плоскости. Тогда множество* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ *состоит в точности из двух компонент связности (непересекающихся областей).*

1.2.2. Вводные замечания и вспомогательные леммы.

Приведем некоторые элементарные факты из анализа, которые будут использованы в дальнейшем. Во-первых, заметим, что в указанных выше обозначениях отображение γ равномерно непрерывно на $\mathbb{T}$, причем обратное отображение $\gamma^{-1}\colon \mathit{\Gamma} \to \mathbb{T}$ также непрерывно. Во-вторых, если A и B — непустые непересекающиеся компакты в $\mathbb{R}^2$, то величина

$$\mathrm{d}(A, B) := \inf\{|a - b| \colon a \in A,\ b \in B\}$$

положительна. Доказательство этих утверждений основывается на теореме Вейерштрасса, которая гласит, что всякая ограниченная последовательность вещественных чисел имеет сходящуюся подпоследовательность.

Напомним также, что *областью* в $\mathbb{R}^2$ называется всякое непустое открытое множество, любые две точки которого можно соединить ломаной, не выходящей за его пределы.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что единичная окружность $\mathbb{T}$ ориентирована против часовой стрелки согласно с натуральной параметризацией $t(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Предлагаемое доказательство теоремы Жордана основано на специальной аппроксимации кривой $\mathit{\Gamma}$ замкнутыми *жордановыми* ломаными и последующем переходе к пределу. Этот естественный подход хорошо известен, так что приведенные ниже леммы 1.2.3 и 1.2.4 не новы. А вот лемма 1.2.5 и лемма 1.2.6 являются новыми и представляют самостоятельный интерес. Их цель — получить определенное *метрическое* описание указанных замкнутых жордановых ломаных, с помощью которого удается перейти к пределу. Основная трудность состоит в том, чтобы избежать ситуации, которая возникает для (нежордановой) замкнутой кривой вида ∞, являющейся (при определенном обходе) пределом замкнутых жордановых ломаных.

1.2.2. Определение. Замкнутая жорданова кривая $\Sigma = \sigma(\mathbb{T})$, где $\sigma\colon \mathbb{T} \to \Sigma$ — гомеоморфизм, называется *замкнутой жордановой ломаной*, если существует разбиение $\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N\}$ отрезка $[0, 2\pi]$, т. е. $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = 2\pi$, с условиями

$$\sigma((\cos\theta, \sin\theta)) = (a_n\theta + b_n, c_n\theta + d_n) \text{ на } [\theta_{n-1}, \theta_n], \qquad n = 1, \dots, N,$$

где a_n, b_n, c_n и d_n — вещественные постоянные.

Замечание. В соответствии с выбором разбиения Θ естественным образом определяются *вершины* и *ребра* ломаной Σ. Заметим также, что соседние ребра ломаной Σ могут лежать на одной прямой.

Пару (σ, Θ) назовем *реализацией* ломаной Σ.

1.2.3. Лемма. *Теорема Жордана справедлива для любой замкнутой жордановой ломаной.*

Доказательство. Пусть замкнутая жорданова ломаная Σ имеет вершины $v_n = \sigma((\cos\theta_n, \sin\theta_n))$ и ребра $\Sigma_n = [v_{n-1}, v_n]$, где $n = 1, \dots, N$. Пусть также $\Sigma_{N+1} = \Sigma_1$ и $v_0 = v_N$.

Докажем вначале, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ имеет *не более двух* компонент связности. Остановимся на случае $N \geqslant 4$. При $n = 1, \dots, N$ рассмотрим множества $U_n = \{z \in \mathbb{R}^2\colon \mathrm{d}(z, \Sigma_n) < \delta\}$, где

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\mathrm{d}(\Sigma_j, \Sigma_k)\},$$

а min берется по всем *несоседним* ребрам ломаной Σ. Если обозначить $\Sigma_0 = \Sigma_N$, то ясно, что

$$U_n \cap \Sigma \subset \Sigma_{n-1} \cup \Sigma_n \cup \Sigma_{n+1},$$

причем $U_n \setminus \Sigma$ состоит из двух компонент U_n' и U_n'', где, для определенности, можно предположить, что $U_n' \cap U_{n+1}' \neq \varnothing$ и $U_n'' \cap U_{n+1}'' \neq \varnothing$ при $n = 1, \dots, N-1$. Тогда множества $U' := \bigcup_{n=1}^{N} U_n'$ и $U'' := \bigcup_{n=1}^{N} U_n''$ являются областями, причем любую точку $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ можно соединить отрезком с U' или U'' вне Σ.

Докажем теперь, что имеется *не менее двух* компонент связности у множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Выберем систему координат в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы все вершины $v_n = (x_n, y_n)$ ломаной Σ имели различные абсциссы x_n.

При $z \notin \Sigma$ положим $\eta(z) = 1$, если луч L_z с вершиной в точке z, направленный вертикально вверх, пересекает Σ *нечетное* число раз. В случае четного числа пересечений L_z и Σ, положим $\eta(z) = 0$. Отметим, что если L_z содержит (ровно одну) вершину, скажем v_k, ломаной Σ, причем ребра Σ_{k-1} и Σ_k (пересекающиеся в вершине v_k) лежат по одну сторону от L_z, то мы считаем, что L_z (вблизи точки z) имеет два (или ни одного) пересечения с Σ (см. Рис. 2.1).

Нетрудно доказать, что $\eta(z)$ непрерывна в каждой точке вне Σ и, следовательно (будучи целочисленной), является локально постоянной

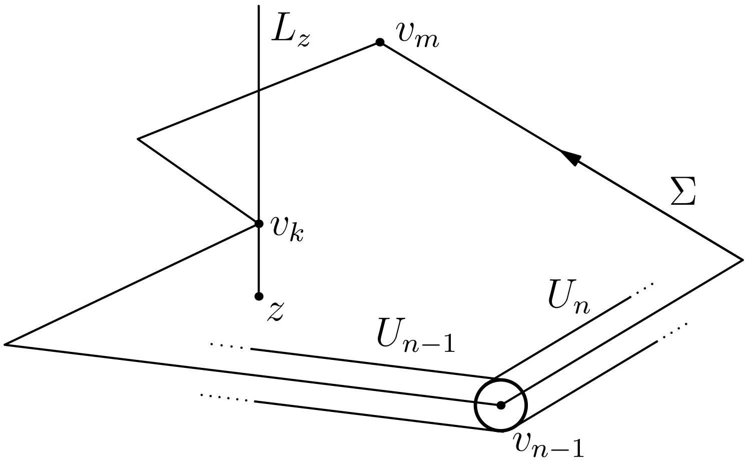

Рис. 2.1.

функцией от z вне Σ. Следовательно, $\eta(z)$ постоянна в каждой связной компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$.

Если бы у множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ была бы только одна (неограниченная) компонента связности, то, очевидно, $\eta(z)$ была бы тождественным нулем. Пусть теперь $v_m = (x_m, y_m)$ такая вершина Σ, для которой $y_m = \max\{y_n : n = 1, \ldots, N\}$. Тогда ясно, что вблизи точки v_m найдется точка z такая, что $\eta(z) = 1$. $\square$

1.2.4. Лемма. *Всякий замкнутый жорданов путь γ (напомним, что $\gamma\colon \mathbb{T} \to \Gamma$ — гомеоморфизм) можно с любой точностью равномерно на $\mathbb{T}$ приблизить замкнутым жордановым путем σ, задающим замкнутую жорданову ломаную Σ в смысле определения* 1.2.2. *При этом Σ «вписана» в Γ в том смысле, что все ее вершины лежат на Γ.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы при всех $t \in \mathbb{T}$ и $t' \in \mathbb{T}$ были верны следующие высказывания:

(1) если $|t - t'| \leqslant \varepsilon_1$, то $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \frac{\varepsilon}{2}$, и
(2) если $|\gamma(t) - \gamma(t')| \leqslant \varepsilon_2$, то $|t - t'| < \min\bigl(\varepsilon_1, \sqrt{3}\bigr)$.

Положим теперь $\delta = \min\{\varepsilon/2, \varepsilon_2\}$.

Рассмотрим стандартную решетку замкнутых квадратов диаметра δ:

$$Q_{jk} = \Big\{(x,y)\colon \Big|x - j\frac{\delta}{\sqrt{2}}\Big| \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{2}}, \Big|y - k\frac{\delta}{\sqrt{2}}\Big| \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\Big\}, \quad j,k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\{Q_s\}_{s=1}^S$ — те из квадратов решетки, которые пересекают $\varGamma$ более, чем по одной точке. Легко видеть, что всегда $2 \leqslant S < +\infty$. Так как $\delta \leqslant \varepsilon_2$, то множество $\gamma^{-1}(Q_1)$ имеет диаметр менее $\sqrt{3}$, т. е. $\gamma^{-1}(Q_1)$ содержится в (однозначно определенной) минимальной замкнутой дуге $T_1 \subset \mathbb{T}$ длины менее $2\pi/3$. Пусть $[\tau_1, \tau_1'] \subset \mathbb{R}$ такой интервал, что отображение $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ есть гомеоморфизм $[\tau_1, \tau_1']$ на T_1. Рассмотрим новый путь γ_1 на $\mathbb{T}$, который совпадает с γ на $\mathbb{T} \setminus T_1$, а при $t = (\cos\theta, \sin\theta) \in T_1$ (при $\theta \in [\tau_1, \tau_1']$) положим $\gamma_1(t) = (a_1\theta + b_1, c_1\theta + d_1)$, где постоянные a_1, b_1, c_1, d_1 выбраны так, чтобы γ_1 было непрерывно на $\mathbb{T}$. Таким образом, $\varGamma_1 = \gamma_1(\mathbb{T})$ пересекает Q_1 по отрезку $[\gamma(t_1), \gamma(t_1')]$, где $t_1 = (\cos\tau_1, \sin\tau_1)$ и $t_1' = (\cos\tau_1', \sin\tau_1')$ — начало и конец дуги T_1 соответственно. Ясно, что $\gamma_1(t_1) = \gamma(t_1)$ и $\gamma_1(t_1') = \gamma(t_1')$.

Возможны два случая.

В первом случае (i) пусть отрезок $I_1 = [\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_1')]$ лежит на одной из *сторон* квадрата Q_1. Тогда перенумеруем остальные квадраты Q_s так, чтобы I_1 лежал также на стороне квадрата Q_2. Во втором случае (ii) отрезок I_1, за исключением своих концов, лежит строго внутри Q_1 (см. Рис. 2.2).

В этом случае никакой перенумерации остальных квадратов не делаем. Таким образом, в случае (ii) для всех $s \geqslant 2$ (а в случае (i) для всех $s \geqslant 3$) имеем $\gamma_1^{-1}(Q_s) \subseteq \gamma^{-1}(Q_s)$, и для всех $s \geqslant 1$ выполнено неравенство $\operatorname{diam} \gamma_1^{-1}(Q_s) < \sqrt{3}$.

Если $\varGamma_1$ пересекает Q_2 не более, чем по одной точке (что возможно только в случае (ii)), то полагаем $\gamma_2 = \gamma_1$. Иначе найдется такая минимальная замкнутая дуга T_2 длиной менее $2\pi/3$, которая содержит $\gamma_1^{-1}(Q_2)$. Отметим, что T_1 и T_2 либо не пересекаются по своим внутренностям (случай (ii)), либо $T_1 \subseteq T_2$ (случай (i)). В обоих случаях найдется гомеоморфизм $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ некоторого отрезка $[\tau_2, \tau_2']$ на T_2 и постоянные a_2, b_2, c_2 и d_2 такие, что путь $\gamma_2(t)$, равный $\gamma_1(t)$ на $\mathbb{T} \setminus T_2$, и равный $\gamma_2(t) = (a_2\theta + b_2, c_2\theta + d_2)$ при $t = (\cos\theta, \sin\theta) \in T_2$ (при $\theta \in [\tau_2, \tau_2']$) является замкнутым жордановым путем, совпадающим с γ в начале $t_2 = (\cos\tau_2, \sin\tau_2)$ и в конце $t_2' = (\cos\tau_2', \sin\tau_2')$ дуги T_2, поскольку t_2 и t_2' не могут лежать внутри T_1.

Продолжая аналогичным образом, мы в результате получим замкнутые жордановы пути γ_s, $s = 1, \ldots, S$. Пусть $t \in \mathbb{T}$, оценим $|\gamma_S(t) - \gamma(t)|$. Если $\gamma_S(t) \neq \gamma(t)$, то найдется такое $s \in \{1, \ldots, S\}$, что $\gamma_S(t) = \gamma_s(t) \neq \gamma_{s-1}(t)$ (считаем, что $\gamma_0 = \gamma$). По построению, t лежит на дуге T_s с началом t_s и концом t_s', $\gamma_s(T_s) \subset Q_s$, $\gamma_s(t_s) = \gamma(t_s)$, $\gamma_s(t_s') = \gamma(t_s')$. Тогда

$$|\gamma_S(t) - \gamma(t)| = |\gamma_s(t) - \gamma_s(t_s) + \gamma(t_s) - \gamma(t)| \leqslant \delta + |\gamma(t) - \gamma(t_s)|.$$

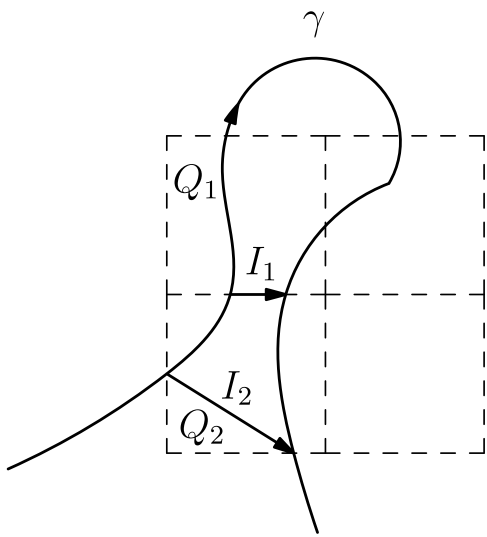

Рис. 2.2.

Но $|t - t_s| \leqslant |t'_s - t_s| \leqslant \varepsilon_1$ ввиду $|\gamma(t'_s) - \gamma(t_s)| \leqslant \delta \leqslant \varepsilon_2$. Таким образом,

$$\delta + |\gamma(t) - \gamma(t_s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откуда, окончательно, $|\gamma_S(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$.

Поскольку $\Gamma_S = \gamma_S(\mathbb{T})$ пересекает каждый квадрат решетки либо по пустому множеству, либо по одной точке, либо по «равномерно» проходимому отрезку, нетрудно видеть, что $\sigma = \gamma_S$ — искомая аппроксимация. $\square$

1.2.3. Две основные леммы.

1.2.5. Лемма. *Пусть Σ — замкнутая жорданова ломаная, с реализацией (σ, Θ). Тогда найдется открытый круг B, лежащий в ограниченной компоненте D множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, с границей C, пересекающей ломаную Σ в точках $\sigma(t)$ и $\sigma(t')$, где $t, t' \in \mathbb{T}$ такие, что $|t - t'| \geqslant \sqrt{3}$.*

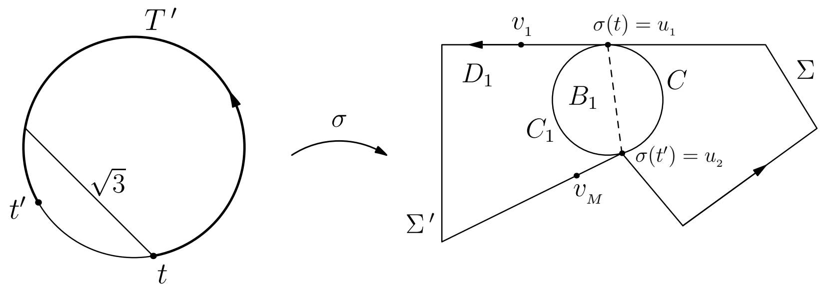

Рис. 2.3.

Доказательство. Пусть при движении вдоль Σ, соответствующем ориентации на $\mathbb{T}$ и отображению σ, область D остается слева (иначе сделаем симметрию относительно одной из осей координат). Пользуясь упомянутой выше теоремой Вейерштрасса, нетрудно показать, что найдется открытый круг B, лежащий в D, с границей C, пересекающей ломаную Σ в точках $\sigma(t)$ и $\sigma(t')$, где $t, t' \in \mathbb{T}$, для которого значение $|t - t'|$ является максимально возможным (см. Рис. 2.3; отметим, что C может пересекать Σ и в других точках).

Теперь покажем, что этот круг является искомым. Предположим, что $|t - t'| < \sqrt{3}$. Пусть T — дуга на $\mathbb{T}$, соединяющая точки t и t', имеющая длину, большую $4\pi/3$, направленная (как и $\mathbb{T}$) против часовой стрелки. Будем считать точку t — началом, а t' — концом T. Очевидно, что граница C круга B не имеет общих точек с частью $\Sigma' = \sigma(T')$ ломаной Σ, где $T' = T \setminus \{t, t'\}$. Без ограничения общности будем считать, что $v_1 = \sigma((\cos\theta_1, \sin\theta_1)), \ldots, v_M = \sigma((\cos\theta_M, \sin\theta_M))$ — все (последовательные) вершины ломаной Σ, которые принадлежат Σ', $1 \leqslant M \leqslant N$. Положим $u_1 = \sigma(t)$ и $u_2 = \sigma(t')$. Ясно (см. лемму 1.2.3), что $\Sigma' = \sigma(T')$ и отрезок $[u_1, u_2]$ (хорда ломаной Σ) ограничивают некоторую область D_1. Положим $B_1 = B \cap D_1$, $C_1 = C \cap D_1$.

Пусть, для начала, известно, что дуга C_1 касается Σ' в обеих ее точках u_1 и u_2 (т. е., окружность C касается прямых u_1v_1 и v_Mu_2). При этом вектор $\overrightarrow{u_1v_1}$ (соответственно, $\overrightarrow{v_Mu_2}$) должен с касанием «выходить» из C (соответственно, «входить» в C), оставляя B слева, а отрезки $[u_1, v_1]$ и $[v_M, u_2]$ должны лежать по одну сторону от прямой u_1u_2.

Поскольку C_1 не пересекает Σ', мы можем найти круг B', принадлежащий области $D_1 \cup B \subset D$, который касается ломаной Σ в точках u_1' и u_2', лежащих *внутри* отрезков $[u_1, v_1]$ и $[v_M, u_2]$ соответственно, причем точки u_1' и u_1 (а также u_2' и u_2) можно сделать сколь угодно близкими друг к другу. Последнее противоречит выбору B, так как $|\sigma^{-1}(u_1') - \sigma^{-1}(u_2')| > |t - t'|$.

Во втором случае, пусть известно, что C_1 касается ломаной Σ' ровно в одной точке, например, u_1 (случай касания в точке u_2 аналогичен). В этом случае $u_2 = v_{M+1}$ — вершина. Так как ребро $[v_M, v_{M+1}]$ не касается C_1, мы снова можем найти круг $B' \subset D_1 \cup B$, который касается Σ' в некоторой точке u_1' внутри $[u_1, v_1]$ (близкой к u_1), и граница которого проходит через u_2. Возникает противоречие, аналогичное предыдущему случаю.

Пусть, наконец, обе точки $u_1 = v_N$ и $u_2 = v_{M+1}$ — вершины Σ и касания C_1 и Σ' нет. Будем непрерывно «раздувать» диск B в сторону области D_1, оставляя его в области D, а его границу C проходящей через точки u_1 и u_2. Тогда в некоторый момент дуга C_1 коснется ребра $[u_1, v_1]$, или ребра $[v_M, u_2]$, или пересечет Σ'. Все эти случаи уже рассмотрены как приводящие к противоречию. $\square$

Рассмотрим теперь замкнутую жорданову ломаную Σ и выберем одну из компонент D множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Для любой хорды I в D (т. е. отрезка, соединяющего две разные точки на Σ и целиком лежащего в D за исключением концевых точек) множество $D \setminus I$ состоит из двух компонент связности (см. лемму 1.2.3). Зафиксируем точки $a \in D$ и $b \in D$ с условием $\mathrm{d}(\Sigma, \{a, b\}) \geqslant 1$. Пусть известно, что для всякой хорды I в D длины $\ell(I) < 2$ точки a и b лежат в одной и той же компоненте множества $D \setminus I$.

1.2.6. Лемма. *В указанных условиях найдется путь $\kappa\colon [0,1] \to D$, соединяющий точки a и b, т. е. $\kappa(0) = a$, $\kappa(1) = b$, причем $\mathrm{d}(\Sigma, K) \geqslant 1$, где $K = \kappa([0,1])$; см. Рис.* 2.4.

Доказательство. Пусть A_a — совокупность точек из D, которые можно соединить с точкой a путями κ_a (определенными на $[0,1]$) с условием $\mathrm{d}(\Sigma, K_a) \geqslant 1$, где $K_a = \kappa_a([0,1])$. Положим

$$\Sigma_a = \{z \in \Sigma \colon \exists\, a_z \in A_a \text{ такая, что } |z - a_z| = 1\}.$$

Аналогично определяются множества A_b и Σ_b для точки b. Требуется доказать, что $A_a \cap A_b \neq \varnothing$ (откуда сразу следует, что $A_a = A_b$). Будем считать, что при движении по Σ (согласно ориентации) область D остается слева.

Нам необходимо доказать следующее утверждение.

1.2.7. Лемма. *В указанных условиях имеет место равенство $\Sigma_a = \Sigma_b$. При этом Σ_a состоит из конечного числа связных компонент (конечного числа замкнутых промежутков и точек на Σ).*

Доказательство. Пусть $\overline{E}$ — замыкание множества $E \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $z \in \Sigma_a$ и B_z — единичный круг с центром $a_z \in A_a$, граница C_z которого

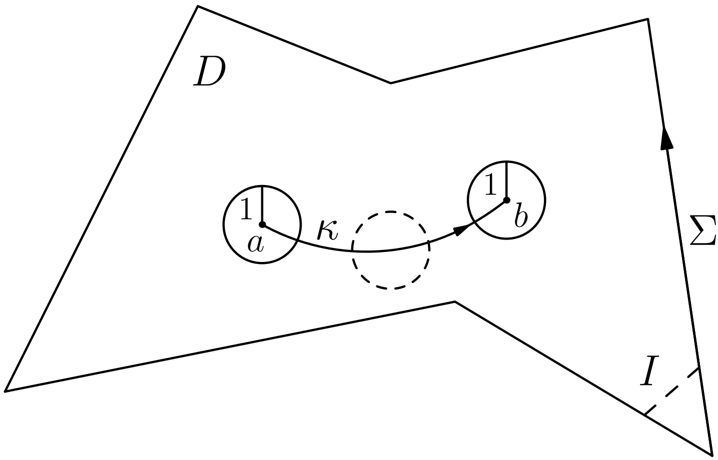

Рис. 2.4.

содержит точку z. Обозначим через C_z^+ — открытую полуокружность на C_z с началом в точке z и проходимую против часовой стрелки.

Предположим вначале, что точка z не является вершиной ломаной Σ. Тогда B_z касается некоторого ребра в Σ, содержащего точку z. При условии $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$ точку z (а вместе с ней и круг B_z) можно «двигать» вдоль по Σ (в направлении, соответствующем ориентации Σ) до того момента, когда z впервые достигнет следующей вершины, или когда впервые появится точка пересечения C_z^+ и Σ. В первом случае продолжим непрерывное «качение» круга B_z вокруг достигнутой вершины z (по часовой стрелке) до его первого положения, когда $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$, или до того момента, когда C_z станет касательной к следующему после вершины z ребру. Продолжая этот процесс мы обязательно придем к ситуации, когда впервые $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$ (в общей ситуации исходная точка $z \in \Sigma_a$ может оказаться где-то посередине описанного выше процесса). Это последнее положение точки z (обозначим его z_1) и будет «крайней» точкой компоненты из Σ_a, содержащей исходное положение точки z (см. Рис. 2.5).

Действительно, пусть z_2 — ближайшая (при движении от z_1 вдоль Σ) точка на Σ с условием $z_2 \in C_{z_1}^+ \cap \Sigma$. Докажем, что на (открытом) промежутке Σ_{12}° ломаной Σ с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 не может быть точек из Σ_a. Более того, мы сразу докажем, что на Σ_{12}° не может быть и точек из Σ_b (откуда следует, что $\Sigma_b \subset \Sigma_a$ и, по симметрии, $\Sigma_a \subset \Sigma_b$, что дает $\Sigma_a = \Sigma_b$), так что лемма 1.2.7 будет доказана.

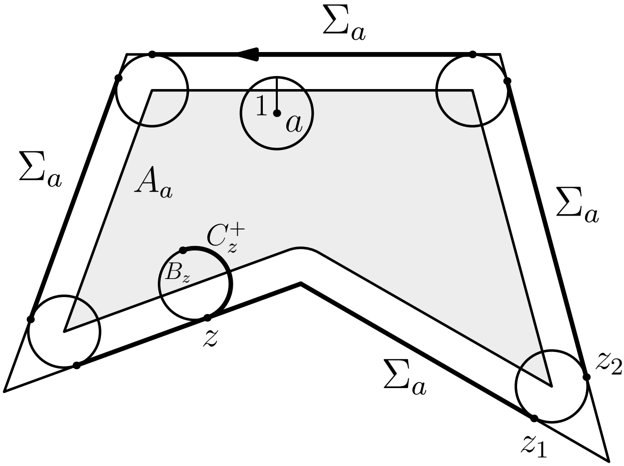

Рис. 2.5.

Пусть, от противного, найдутся точки $w \in \Sigma_{12}^\circ$ и $a_w \in A_a \cup A_b$ с условием $|a_w - w| = 1$. Тогда единичный круг B_w (с границей C_w и центром a_w) лежит целиком в области D. Пусть $I = [z_1, z_2]$ — хорда в D. Поскольку $|z_1 - z_2| < 2$, множество $A_a \cup A_b$ (и, соответственно, точка a_w) лежит в одной компоненте D_1, ограниченной ломаной $(\Sigma \setminus \Sigma_{12}^\circ) \cup [z_1, z_2]$. Так как $a_w \in D_1$, а $w \notin \overline{D}_1$, радиус $[a_w, w)$ круга B_w (не пересекая множества $\Sigma \setminus \Sigma_{12}^\circ$) обязан пересекать хорду I. Далее, B_w не содержит z_1 и z_2, поэтому C_w пересекает I в двух точках. Поскольку $a_w, a_{z_1} \in A_a$ (a_{z_1} — центр круга B_{z_1} полуокружность $C_{z_1}^+$ которого содержит z_2) лежат по одну сторону от прямой $z_1 z_2$, мы видим, что либо $a_w = a_{z_1}$ (и точка $w \in C_{z_1}^+$ предшествует z_2), либо $w \in B_{z_1}$, что невозможно (см. Рис. 2.6). $\square$

Завершим теперь доказательство леммы 1.2.6. Итак $\Sigma_a = \Sigma_b$. Докажем теперь, что $A_a = A_b$. Пусть $z \in \Sigma_a = \Sigma_b$, $a_z \in A_a$, $b_z \in A_b$ и пусть B_z^a и B_z^b — единичные круги с центрами a_z и b_z соответственно, границы C_z^a и C_z^b которых содержат точку z. Если $a_z = b_z$, то все ясно. В противном случае угол $\angle(a_z z b_z)$ — ненулевой, так что точка z — вершина ломаной Σ и, следовательно, круги B_z^a и B_z^b имеют непустое пересечение. Без ограничения общности будем считать, что непрерывное вращение круга B_z^a вокруг точки z, совмещающее B_z^a с B_z^b и осуществляемое в «ближайшую

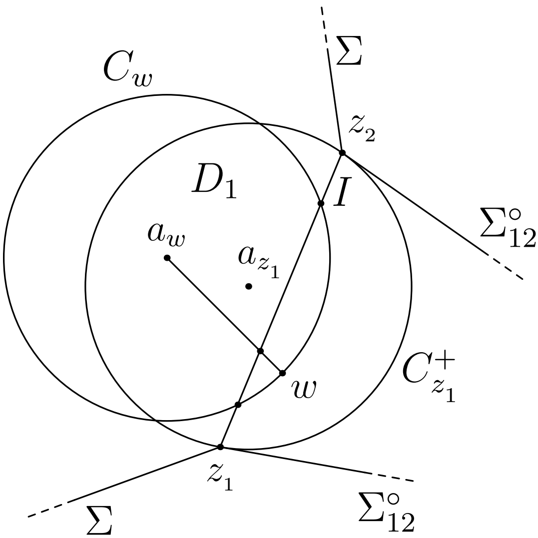

Рис. 2.6.

сторону», есть вращение по часовой стрелке. При таком непрерывном вращении мы или придем в положение B_z^b без пересечения B_z^a с ломаной Σ (откуда $b_z \in A_a$ и все доказано), или $z = z_1$ будет крайней точкой компоненты Σ_a, содержащей z_1. В последнем случае пусть z_2 — следующая за z_1 точка Σ_a (как в лемме 1.2.7), $a_* \in A_a$ — центр единичного круга B_*, граница C_* которого проходит через точки z_1 и z_2, причем $a_* \neq b_z$. Таким образом, B_* — предельное положение, до которого можно вращать B_z^a без пересечения с Σ. Если луч zb_z (с вершиной в точке z), лежит между лучами za_* и z_1z_2, то круг B_z^b содержит z_2 — противоречие. Если же луч z_1z_2 лежит между лучами za_* и zb_z, то точки a_* и b_z лежат в разных компонентах $D \setminus [z_1, z_2]$, поскольку отрезок $[a_*, b_z]$, лежащий в $B_* \cup B_z^b \subset D$ пересекает отрезок $[z_1, z_2]$ один раз. Снова приходим к противоречию и, таким образом, лемма 1.2.6 доказана (см. Рис. 2.7). $\square$

1.2.4. Доказательство теоремы Жордана.

Докажем сначала, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ имеет не менее двух компонент. Достаточно установить наличие *ограниченной* компоненты у этого множества. Для этого рассмотрим достаточно большой круг B_0 с центром в нуле и границей C_0, содержащий Γ. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m, \ldots$ — замкнутые жордановы ломаные, сходящиеся к Γ в смысле леммы 1.2.4 и пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \ldots$

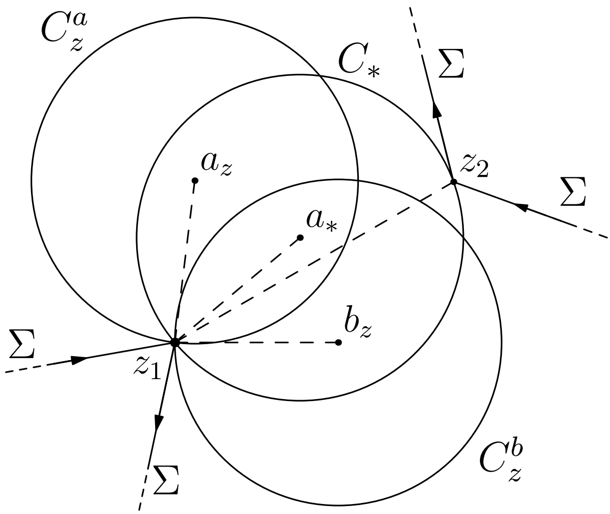

Рис. 2.7.

— пути (сходящиеся к γ), реализующие $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m \ldots$ соответственно. По лемме 1.2.5 для каждого m найдется круг B_m (с центром b_m и границей C_m), лежащий в области D_m, ограниченной ломаной Γ_m, с условием, что существуют точки $t_m \in \mathbb{T}$ и $t'_m \in \mathbb{T}$ такие, что $|t_m - t'_m| \geqslant \sqrt{3}$, а $\gamma_m(t_m) \in C_m$ и $\gamma_m(t'_m) \in C_m$. Переходя если нужно к подпоследовательности, мы можем дополнительно считать, что все Γ_m лежат в B_0 и что последовательность $\{b_m\}$ сходится к некоторой точке b при $m \to +\infty$.

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $t, t' \in \mathbb{T}$ и $|t - t'| \geqslant \sqrt{3}$ вытекает, что $|\gamma(t) - \gamma(t')| \geqslant \varepsilon$. Тогда $|\gamma(t_m) - \gamma(t'_m)| \geqslant \varepsilon$, откуда $|\gamma_m(t_m) - \gamma_m(t'_m)| > \varepsilon/2$ для всех достаточно больших m. Следовательно, $\operatorname{diam} B_m > \varepsilon/2$ и $\mathrm{d}(b_m, \Gamma_m) > \varepsilon/4$ при больших m. Таким образом, при больших m точки b_m и b лежат в одной (ограниченной) компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_m$ и, следовательно, b_m и b лежат в одной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Если b_m и b лежат в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, то найдется путь $\kappa\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, соединяющий b и C_0. Пусть $\mathrm{d}(K, \Gamma) = \delta > 0$, где $K = \kappa([0,1])$. Поскольку при больших m имеет место неравенство $|\gamma(t) - \gamma_m(t)| < \delta/2$ при всех $t \in \mathbb{T}$, мы получаем, что $\mathrm{d}(K, \Gamma_m) > \delta/2$, так что для больших m точки b_m и b должны лежать в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_m$, а это дает противоречие.

Докажем теперь, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ имеет не более двух компонент связности. Пусть, от противного, точки w_1, w_2 и w_3 лежат в различных компонентах множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$. Положим $\mathrm{d}(\mathit{\Gamma}, \{w_1, w_2, w_3\}) = \varepsilon$ и пусть жордановы ломаные $\mathit{\Gamma}_1, \ldots, \mathit{\Gamma}_m, \ldots$ сходятся к $\mathit{\Gamma}$, т. е., соответственно, $|\gamma(t) - \gamma_m(t)| \to 0$ при $m \to +\infty$ равномерно на $\mathbb{T}$. Тогда можно считать, что $\mathrm{d}(\mathit{\Gamma}_m, \{w_1, w_2, w_3\}) \geqslant \varepsilon/2$ (при всех m), так что две из трех точек w_1, w_2 и w_3 лежат в одной компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}_m$. Будем считать, что точки w_1 и w_2 лежат в одной компоненте D_m множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}_m$ при всех m. Предположим, что существуют $\delta \in (0, \varepsilon)$ и бесконечно много значений m такие, что w_1 и w_2 можно соединить путем $\kappa_m \colon [0,1] \to D_m$ с условием $\mathrm{d}(K_m, \mathit{\Gamma}_m) \geqslant \delta$, где $K_m = \kappa_m([0,1])$. Но тогда w_1 и w_2 должны лежать в одной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$. Однако, в силу сделанного ранее предположения, это не так, и мы получаем, что такого δ не существует. Применим теперь (от противного) лемму 1.2.6. Еще раз переходя к подпоследовательности, мы можем утверждать, что для каждого m найдутся точки $z_m = \gamma_m(t_m)$, $t_m \in \mathbb{T}$, и $z'_m = \gamma_m(t'_m)$, $t'_m \in \mathbb{T}$, такие, что точки w_1 и w_2 лежат в разных компонентах множества $D_m \setminus I_m$, где $I_m = [z_m, z'_m]$, причем $z_m - z'_m = \gamma_m(t_m) - \gamma_m(t'_m) \to 0$ при $m \to +\infty$. Следовательно, $t_m - t'_m \to 0$ при $m \to +\infty$. Без ограничения общности предположим, что для бесконечно многих значений m точка w_1 лежит в компоненте D'_m множества $D_m \setminus I_m$, ограниченной I_m и $\gamma(T'_m)$, где T'_m — минимальная дуга на $\mathbb{T}$, соединяющая t_m и t'_m. Ясно, что $\operatorname{diam} D'_m \to 0$ при $m \to +\infty$, так что точка w_1 обязана лежать на $\mathit{\Gamma}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Жордана. $\square$

Использованные при доказательстве теоремы Жордана аргументы и конструкции позволяют установить ряд интересных полезных следствий.

1.2.8. Следствие. *В условиях теоремы Жордана пусть*

$$\delta := \min\{|\gamma(t) - \gamma(t')| \colon t, t' \in \mathbb{T},\ |t - t'| \geqslant \sqrt{3}\}.$$

Тогда ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ содержит круг с диаметром δ.

Естественным образом модифицируя леммы 1.2.3, 1.2.4 и 1.2.6 и вторую часть доказательства теоремы Жордана, получаем следующий важный результат.

1.2.9. Теорема (Теорема Жордана для жордановых кривых). *Пусть $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное инъективное отображение, т. е. $\mathit{\Gamma} = \gamma([0,1])$ — жорданова кривая. Тогда $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ — связно.*

Кроме того, справедливо следующее утверждение.

1.2.10. Следствие. *При условиях теоремы Жордана граница каждой из компонент связности $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ совпадает с $\mathit{\Gamma}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть только случай ограниченной компоненты D множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$. Пусть, от противного, граница ∂D множества D не совпадает с $\mathit{\Gamma}$. Ясно, что $\partial D \subset \mathit{\Gamma}$, поэтому при некотором $t_0 \in \mathbb{T}$ имеем $\gamma(t_0) \notin \partial D$. Тогда найдется такая связная окрестность T_0 точки t_0 в $\mathbb{T}$, что $\partial D \cap \gamma(T_0) = \varnothing$. При этом жорданова кривая $\mathit{\Gamma}_1 = \gamma(T_1)$, где $T_1 = \mathbb{T} \setminus T_0$, содержит ∂D и не разделяет плоскость в силу теоремы Жордана для жордановой кривой. Противоречие легко получается применением принципа вложенных отрезков. □

Нам понадобится одно важное следствие из теоремы Жордана. Для его формулировки напомним некоторые определения.

1.2.11. Определение. Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — путь и φ — какая-либо непрерывная на $[\alpha,\beta]$ ветвь м-функции $\operatorname{Arg}(\gamma(t))$. Величина

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

называется *приращением (полярного) аргумента* вдоль пути γ.

Замечание. Из теоремы **??** следует, что $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z)$ определено корректно, т. е. не зависит от выбора непрерывной ветви φ м-функции $\operatorname{Arg}\gamma(t)$.

1.2.12. Определение. Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — путь, и пусть $a \notin [\gamma]$. Тогда путь $\gamma_{-a}(t) = \gamma(t) - a$, $t \in [\alpha,\beta]$, не проходит через точку 0 и определен *индекс пути* γ относительно точки a:

$$\operatorname{ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_{\gamma_{-a}} \operatorname{Arg}(z).$$

Замечание. Если путь γ замкнут, то $\operatorname{ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$ для всех $a \in \mathbb{C}\setminus[\gamma]$.

1.2.13. Упражнение. Функция $f(z) = \operatorname{ind}_\gamma(z)$ непрерывна в $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$. А в случае замкнутого пути γ функция f постоянна (и целочисленна) в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$. (Обсудить.)

Теперь докажем следующую теорему, *опираясь на доказательство теоремы Жордана.*

1.2.14. Теорема. *Пусть γ — замкнутый жорданов путь в $\mathbb{C}$. По теореме Жордана, $\mathbb{C} \setminus [\gamma] = D \sqcup \Omega$, где D — ограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, Ω — неограниченная. Тогда утверждается, что* $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ *для всех $z \in \Omega$,* $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ *(или* $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv -1$*) для всех $z \in D$.*

Доказательство. Свойство $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ для всех $z \in \Omega$ достаточно просто (обсудить).

Обсудим только второе утверждение теоремы (случай $z \in D$). Понадобится несколько шагов.

1. Сначала устанавливается следующий факт.

1.2.15. Лемма. *Пусть $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — замкнутый путь, $a \notin [\gamma]$ и $d = \mathrm{d}(a,[\gamma]) > 0$. Пусть $\gamma_1\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — замкнутый путь с условием $\|\gamma - \gamma_1\|_{[\alpha,\beta]} < d$. Тогда* $\operatorname{ind}_\gamma(a) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(a)$.

Лемма остается в качестве упражнения (обсудить).

2. Отметим, что функция $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ постоянна в D.

3. Докажем нашу теорему для замкнутой жордановой ломаной (обсудить).

3. Применим леммы 1.2.3 — 1.2.5 из приведенного выше доказательства теоремы Жордана. $\square$

В случае, когда $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ для всех $z \in D$, путь γ называется *положительно ориентированным относительно области* D. Если же $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv -1$ для всех $z \in D$, то γ *отрицательно ориентирован относительно* D.

§ 1.3. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского

1.3.1. Основные определения.

В этом разделе мы рассмотрим модель А. Пуанкаре (1882) геометрии Н. И. Лобачевского в верхней полуплоскости, которая очень наглядно излагается с помощью уже известных нам свойств ДЛО. К сожалению, у самого Н. И. Лобачевского не было реальной модели, подтверждавшей его замечательную теорию.

Обозначим через Π_+ верхнюю открытую полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} z > 0\},$$

которая и является множеством точек плоскости Лобачевского (пЛ) в модели Пуанкаре (мП).

1.3.1. Определение. *Точки* в пЛ — обычные точки из Π_+. *Прямыми* в пЛ являются либо (открытые) вертикальные лучи в Π_+ с вершиной на вещественной оси, либо (открытые) полуокружности из Π_+ с центром, лежащим на вещественной оси.

1.3.2. Предложение. *Через любые две различные точки $a, b \in \Pi^+$ в пЛ проходит единственная прямая ab_Λ в пЛ.*

Доказательство. Если точки a, b лежат на одной вертикали, то соответствующий вертикальный луч является единственной искомой прямой.

В противном случае проведем серединный перпендикуляр l_E к отрезку $[a, b]_E$ (здесь в классическом евклидовом смысле). Тогда центр искомой полуокружности, задающей подходящую нам прямую в пЛ, находится в точке пересечения l_E и вещественной оси. Единственность также очевидна. □

1.3.3. Определение. *Отрезком* $[a, b]_\Lambda$ в пЛ называется часть прямой ab_Λ в пЛ, расположенная между точками a и b. (Если $a = b$, то $[a, b]_\Lambda = \{a\}$.)

1.3.4. Определение. Если точка c принадлежит отрезку $[a, b]_\Lambda$ и не совпадает с его концами, то говорят, что c лежит *между* a и b.

На каждой прямой пЛ естественно определяется отношение порядка (2 варианта).

Мы упомянем только некоторые аксиомы планиметрии. Их проверка для случая пЛ труда не представляет.

• *Если три различные точки лежат на одной прямой пЛ, то ровно одна из них лежит между двумя другими.*

• *Для каждой прямой пЛ есть точка, принадлежащая ей, и есть точка, не лежащая на ней.*

• *Дополнение каждой прямой l на пЛ состоит из двух непересекающихся полуплоскостей Π^1_l и Π^2_l со следующим свойством: для любых двух различных точек a и b, лежащих вне l, отрезок $[a, b]_\Lambda$ пересекает* *прямую l если и только если точки a и b лежат в разных полуплоскостях Π_l^1 и Π_l^2.*

1.3.5. Определение. Пусть l_1 и l_2 — две прямые в пЛ, пересекающиеся в (одной) точке a. Проведем в этой точке касательные (прямые в геометрии Евклида) к прямым l_1 и l_2. Между этими касательными возникает четыре угла, меньший из которых (в абсолютной величине) называется углом между l_1 и l_2 в точке a. Угол между совпадающими прямыми в каждой их общей точке считается равным нулю.

Углы, как обычно, измеряются в градусах и радианах. *Аксиомы измерения и откладывания углов выполняются.*

Напомним, что для любой тройки $a, b, c \in \mathbb{C}$ различных точек существует единственное ДЛО $\Lambda_{abc}\colon \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}^\bullet$,

$$\Lambda_{abc}(z) = \frac{z-a}{z-b} : \frac{c-a}{c-b},$$

которое $a \mapsto 0$, $b \mapsto \infty$, $c \mapsto 1$. (Читателю полезно также вспомнить случаи, когда одна из указанных точек a, b, c равна ∞). Выражение $\Lambda_{abc}(d)$ называется *сложным, или ангармоническим, отношением* четверки различных точек a, b, c, d из $\mathbb{C}^\bullet$ и обозначается через $[a, b, c, d]$.

Дадим определение *расстояния* (метрики) на пЛ.

Пусть $z_1, z_2 \in \Pi_+$ — две различные точки, причем z_1 расположена не правее z_2. Проведем прямую $z_1 z_{2\Lambda}$ в пЛ. Возможны два случая:

(1) z_1, z_2 не лежат на одной вертикали, а *окружность* прямой $z_1 z_{2\Lambda}$ пересекает вещественную ось в двух вспомогательных точках α и β; α расположена «левее» β;

(2) z_1, z_2 находятся на одной вертикали, т. е. прямая $z_1 z_{2\Lambda}$ пЛ является вертикальным лучом с вершиной $\alpha \in \mathbb{R}$; полагаем $\beta = \infty$; считаем, что z_1 лежит «ниже» z_2.

1.3.6. Определение. Расстоянием между точками $z_1, z_2 \in \Pi_+$ в пЛ называется величина (метрика Лобачевского)

$$\rho_+(z_1, z_2) = \ln([\alpha, \beta, z_1, z_2]).$$

Поскольку α, β, z_1, z_2 лежат на одной обобщенной окружности в $\mathbb{C}^\bullet$, всегда имеем

$$[\alpha, \beta, z_1, z_2] = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta} : \frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} \in \mathbb{R}.$$

При этом (в нетривиальном случае (1)), поскольку z_1 лежит левее z_2, $\alpha < \beta$ и углы $\angle \alpha z_1 \beta = \angle \alpha z_2 \beta = \pi/2$ (как опирающиеся на диаметр $[\alpha, \beta]_E$), имеем

$$\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = -id_1, \quad \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta} = -id_2, \quad d_2 > d_1 > 0.$$

Следовательно, $[\alpha, \beta, z_1, z_2] = d_2/d_1 > 1$, откуда следует, что

$$\rho_+(z_1, z_2) = \ln([\alpha, \beta, z_1, z_2]) > 0.$$

Если $z_1 = z_2$, то расстояние между точками z_1 и z_2 в пЛ полагается равным нулю.

Формула для $\rho_+(z_1, z_2)$ не симметрична относительно z_1, z_2. При произвольном расположении (разных) точек z_1, z_2 полагаем

$$\rho_+(z_1, z_2) := |\ln([\alpha, \beta, z_1, z_2])|. \tag{1.3.1}$$

Симметричность последнего выражения вытекает из элементарного свойства натурального логарифма: $\ln(1/t) = -\ln t$, $t > 0$.

1.3.7. Определение. Длиной отрезка $[z_1, z_2]_\Lambda$ в пЛ называется величина $\rho_+(z_1, z_2)$.

1.3.8. Задача. Доказать неравенство треугольника для функции ρ_+:

$$\rho_+(z_1, z_3) \leqslant \rho_+(z_1, z_2) + \rho_+(z_2, z_3), \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \Pi_+,$$

причем равенство справедливо, если и только если $z_2 \in [z_1, z_3]_\Lambda$.

Так что ρ_+ действительно является метрикой, а (Π_+, ρ_+) — метрическим пространством.

1.3.2. Движения плоскости Лобачевского.

Следующее утверждение доказывается в Ч.1, Гл. 1, п. 5.

1.3.9. Предложение. *Группа всех ДЛО-автоморфизмов* Π_+ *имеет вид*

$$\Lambda(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

1.3.10. Определение. Всякое ДЛО из предыдущего предложения называется *движением* (сохраняющим ориентацию) пЛ Π_+.

Действительно ли движения пЛ сохраняют метрику ρ_+? В каком смысле следует понимать сохранение ориентации? На поставленные вопросы мы ответим чуть позже. Кроме того, оказывается, что других отображений пЛ на себя, сохраняющих ρ_+ и ориентацию (отличных от указанных выше движений пЛ), не существует.

1.3.11. Задача. Инвариантность ρ_+ при указанных выше движениях пЛ следует из свойства сохранения сложного отношения при действии любого ДЛО.

1.3.12. Задача. Пусть $z_0 \in \Pi_+$ — фиксированная точка, $R > 0$, и пусть

$$\Gamma_R(z_0) = \{z \in \Pi_+ : \rho_+(z, z_0) = R\}.$$

Описать геометрически множество точек $\Gamma_R(z_0)$.

Ответ. $\Gamma_R(z_0)$ является обычной евклидовой окружностью в плоскости $\mathbb{C}$.

1.3.13. Задача. Доказать, что для любых пар точек $z_1, z_2 \in \Pi_+$ и $w_1, w_2 \in \Pi_+$ таких, что $\rho_+(z_1, z_2) = \rho_+(w_1, w_2)$, существует, причем единственное, движение Λ пЛ Π_+ с условием $\Lambda(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2\}$.

С помощью этих двух задач доказывается *отсутствие других* (сохраняющих ориентацию) изометрий пЛ.

1.3.14. Предложение. *Метрику $\rho_+(z_1, z_2)$ можно записать в следующем виде:*

$$\rho_+(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \overline{z_2}| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \overline{z_2}| - |z_1 - z_2|}. \tag{1.3.2}$$

Доказательство этого факта несложно. Поскольку параллельные переносы $z \mapsto z + a$, $a \in \mathbb{R}$, гомотетии $z \mapsto kz$, $k > 0$, и ДЛО $z \mapsto -1/z$ (являющиеся движениями пЛ) не меняют значений правых частей в формулах (1.3.1) и (1.3.2), остается свести общую ситуацию к простому случаю, когда z_1, z_2 лежат на мнимой оси.

Отметим, что мы изначально определили метрику $\rho_+(z_1, z_2)$ по формуле (1.3.1) именно для того, чтобы доказать ее инвариантность относительно ДЛО.

Упомянутые выше движения Π_+ (ДЛО-автоморфизмы Π_+) называются движениями *1-го рода.* Существуют, естественно, и изометрии пЛ Π_+ изменяющие ориентацию (движения *2-го рода*). Примером такого движения является симметрия относительно мнимой оси $x \mapsto -x$, $y \mapsto y$, $z = x + iy \in \Pi_+$.

1.3.15. Задача. Доказать, что всякую изометрию пЛ Π_+ второго рода можно представить в виде композиции движения пЛ первого рода и симметрии относительно мнимой оси.

С учетом предыдущих рассуждений неравенство треугольника для функции ρ_+ можно доказывать в предположении, что две точки из тройки z_1, z_2, z_3 (например z_1, z_2) лежат на мнимой оси $i\mathbb{R}\cap\Pi_+$. Если z_3 также оказалась на мнимой оси, т. е. z_1, z_2, z_3 лежали на прямой пЛ, то нужное неравенство треугольника проверяется уже совсем просто, причем неравенство треугольника обращается в равенство, если и только если z_3 лежит между z_1, z_2.

Полезно напомнить следующий элементарный факт. Пусть на (евклидовой) плоскости $\mathbb{C}$ зафиксированы разные точки a и b, а также задано число $k > 1$. Тогда геометрическое место точек z таких, что $|z - a| = k|z - b|$ является окружностью с центром на прямой ab (окружность Аполлония).

1.3.16. Задача. Что представляет собой аналог окружности Аполлония в пЛ?

1.3.17. Задача. Завершить доказательство неравенства треугольника для ρ_+.

1.3.3. Геометрия Лобачевского и пятый постулат Евклида.

1.3.18. Определение. В геометрии Лобачевского две прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Настало время обсудить: чем пЛ Π_+ принципиально отличается от евклидовой плоскости. Убедимся в том, что в геометрии Лобачевского пятый постулат Евклида о параллельных не справедлив. Неверно также и привычное свойство параллельных прямых в евклидовой плоскости: если две прямые параллельны третьей, то они либо совпадают, либо параллельны между собой.

Рассмотрим в пЛ Π_+ прямую l (для наглядности не являющуюся вертикальным лучом) и точку a вне нее. Опишем совокупность всех прямых, параллельных l и проходящих через точку a (в смысле пЛ). Для их построения возьмем упомянутые выше точки $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, являющиеся «концевыми точками» прямой l ($\alpha < \beta$). Проведем прямую l_α через точку a и «оканчивающуюся» в точке α. Аналогично, проведем прямую l_β через точку a и «оканчивающуюся» в точке β. Эти две разные прямые пЛ параллельны прямой l. Более того, все прямые пЛ, лежащие в «вертикальных углах», находящихся между l_α и l_β (углах параллелелизма), тоже параллельны l.

1.3.19. Задача. Пусть D является треугольником на пЛ Π_+. Доказать, что против большего угла треугольника D лежит и большая сторона (и наоборот).

1.3.20. Задача. Какой минимальный целочисленный угол в градусах вы можете построить с помощью циркуля и линейки?

1.3.21. Задача. Какие из указанных ниже утверждений истинны в пЛ?

- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

1.3.4. Геометрия Лобачевского и анализ.

Рассмотрим следующие задачи.

1.3.22. Задача. Доказать, что для любого отрезка $[a,b]_\Lambda$ в пЛ, где $a \neq b$, прямая пЛ, проходящая через его середину и перпендикулярная этому отрезку, состоит в точности из всех точек, равноудаленных (в метрике пЛ) от a и b.

1.3.23. Задача. Доказать, что для любой прямой l на пЛ Π_+ и точки a вне l существует и единственна прямая $l_\perp$, проходящая через точку a и перпендикулярная l. Эти прямые пересекаются в единственной точке (скажем, b). Отрезок $[a,b]_\Lambda$ называется *перпендикуляром* к прямой l из точки a. Доказать, что для любой точки $c \in l$, $c \neq b$, справедливы неравенства $\rho_+(a,c) > \rho_+(a,b)$ (перпендикуляр реализует кратчайшее расстояние от точки до прямой) и $\rho_+(a,c) > \rho_+(b,c)$ (длина проекции меньше длины соответствующей наклонной).

Из этого утверждения, в частности, вытекает неравенство треугольника для метрики ρ_+.

1.3.24. Задача. Доказать, что для любой пары лучей пЛ с общей вершиной в точке a (полупрямых пЛ), прямая пЛ, делящая оба образованных этими лучами угла пополам (биссектриса этих углов в пЛ), состоит в точности из всех точек, равноудаленных от указанных лучей.

Указание. В качестве указанной прямой (в последней задаче — биссектрисы) следует брать мнимую ось.

1.3.25. Предложение. *Пусть в пЛ Π_+ зафиксирована точка z_0, и пусть dz — произвольное (бесконечно малое) комплексное число. Тогда*

$$\rho_+(z_0, z_0 + dz) = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z_0} + o(|dz|), \quad |dz| \to 0, \tag{1.3.3}$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма.

Доказательство. Воспользуемся формулой (1.3.2) для метрики Лобачевского ρ_+, а также тем фактом, что $\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда получим

$$\rho_+(z_0, z_0 + dz) = \ln \frac{|z_0 - \overline{z_0} - \overline{dz}| + |dz|}{|z_0 - \overline{z_0} - \overline{dz}| - |dz|} = \ln \frac{|2i \operatorname{Im} z_0 - \overline{dz}| + |dz|}{|2i \operatorname{Im} z_0 - \overline{dz}| - |dz|} =$$

$$= \ln \frac{1 + \frac{|dz|}{|2\operatorname{Im} z_0 - \overline{dz}|}}{1 - \frac{|dz|}{|2\operatorname{Im} z_0 - \overline{dz}|}} \sim \frac{2|dz|}{|2i \operatorname{Im} z_0 - \overline{dz}|} \sim \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z_0}$$

при $dz \to 0$. $\square$

Полученное, в частности означает, что

$$\lim_{|dz| \to 0} \frac{\rho_+(z_0, z_0 + dz)}{|dz|} = \frac{1}{\operatorname{Im} z_0},$$

и значение этого предела не зависит от направления, по которому $dz \to 0$.

Пусть $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \Pi_+$ — путь, $T = \{\alpha = t_0, \dots, t_N = \beta\}$ — разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ порядка N; $\Delta t_n = t_n - t_{n-1} > 0$, $n \in \{1, \dots N\}$. Напомним, что число $\lambda(T) = \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \Delta t_n$ называется диаметром разбиения T.

Сопоставим каждому разбиению T величину

$$l_T^+(\gamma) = \sum_{n=1}^{N} \rho_+(\gamma(t_n), \gamma(t_{n-1}))$$

— длину вписанной в γ ломаной (пЛ), соответствующей T.

1.3.26. Определение. *Длиной пути γ* в пЛ называется (конечная или бесконечная) величина

$$l^+(\gamma) = \sup_T l_T^+(\gamma).$$

Если $l^+(\gamma) < +\infty$, то путь γ называется спрямляемым.

Легко видеть, что если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, то $l^+(\gamma_1) = l^+(\gamma_2)$; в частности, пути γ_1 и γ_2 одновременно спрямляемые или нет. Поэтому корректно определено понятие спрямляемой кривой и ее длина $l^+(\{\gamma\}) := l^+(\gamma)$.

Также, как для евклидова случая, доказывается, что длина *непрерывно дифференцируемого пути* $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, в пЛ находится по формуле

$$l^+(\gamma) = \int_\alpha^\beta \frac{|\dot\gamma(t)|}{\operatorname{Im}\gamma(t)}\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}}{y(t)}\,dt.$$

Длина $l^+(\{\gamma\})$ кривой $\{\gamma\}$ в пЛ согласуется с введенной ранее длиной отрезка в пЛ (см. пример 1.3.28 ниже) и обладает всеми обычными свойствами длины, что и длина в классическом евклидовом случае.

1.3.27. Пример. Для фиксированных $p > 0$ и $q > 0$ рассмотрим горизонтальный (евклидов) отрезок γ_{pq} соединяющий точки iq и $p + iq$. Он стандартно параметризуется: $\gamma_{pq}(t) = t + iq$, $t \in [0, p]$. Длина этого пути такова:

$$l^+(\gamma_{pq}) = \int_0^p \frac{\sqrt{1+0}}{q}\,dt = p/q.$$

Так, когда $q = 1$, длина (в пЛ) пути γ_{pq} равна p. При фиксированном p и увеличении q длина $l^+(\gamma_{pq})$ непрерывно уменьшается, и при $q \to +\infty$ длина $l^+(\gamma_{pq}) \to 0$. С другой стороны, при $q \to 0$ имеем $l^+(\gamma_{pq}) \to +\infty$.

1.3.28. Пример. Теперь рассмотрим вертикальный отрезок $\sigma_{ab} = [ia, ib]_\Lambda$, $0 < a < b$. Он параметризуется так: $\sigma(t) = it$, $t \in [a, b]$. Следовательно,

$$l^+(\sigma_{ab}) = \int_a^b \sqrt{0+1}\frac{1}{t}dt = \ln\frac{b}{a},$$

что согласуется с $\rho_+(ia, ib)$. Примечательно, что $\rho_+(ia, ib) \to +\infty$ при $a \to 0+$ ($b > 0$ фиксировано).

Те же значения длин кривых и углов между ними мы получим, введя на Π_+ подходящую структуру риманова многообразия (какую?).

С учетом свойства (1.3.3) метрики ρ_+, площадь (двумерную меру Жордана или Лебега) множества E в пЛ следует искать по формуле:

$$S^+(E) = \iint_E \frac{dx\,dy}{y^2}, \tag{1.3.4}$$

где E — измеримое по Жордану или Лебегу множество соответственно (в обычном смысле).

1.3.29. Задача. Пусть $D \subset \Pi_+$ — треугольник в пЛ, т. е. множество точек, ограниченных со всех сторон тремя отрезками пЛ. Пусть α, β, γ — абсолютные величины *внутренних* углов этого треугольника (в радианах). Доказать, что $S^+(D) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Указание. Не сложно показать (обычной заменой переменных в двойном интеграле, проверить!), что при движениях плоскости Лобачевского площадь $S^+(E)$ любого измеримого (по Жордану или Лебегу) множества E сохраняется. Кроме того, при движениях плоскости Лобачевского сохраняются углы между прямыми пЛ. Движением в пЛ следует перевести наш треугольник D в треугольник D_1, у которого одна из сторон лежит на мнимой оси. Для D_1 интеграл (1.3.4) несложно считается методом повторного интегрирования.

В частности, из сформулированной задачи следует, что сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского всегда меньше π радиан.

§ 1.4. Регулярные плоские векторные поля. Теория обтекания крыла. Теоремы Чаплыгина и Жуковского

1.4.1. Регулярные плоские векторные поля. Комплексный потенциал.

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $a = \{a_1(x,y), a_2(x,y)\} := a_1 + ia_2$ — векторное поле (в.п.) в D, которое интерпретируется как поле скоростей установившегося плоского течения (в сечении D). Всегда считается, что a_1 и a_2 непрерывны в D, $z = x + iy$.

Пусть $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to D$ — кусочно-гладкий (к-г.) путь в D, который будет всегда жордановым (ж.) или замкнутым-жордановым (з-ж.). Если $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то $\dot\gamma(t) = \dot x(t) + i\dot y(t)$ — касательный вектор к γ в точке $\gamma(t)$ (если $\dot\gamma$ существует).

Вектор $n_\gamma^+(t) = -i\dot\gamma(t)/|\dot\gamma(t)| = (\dot y(t) - i\dot x(t)|)/|\dot\gamma(t)|$ — правый (единичный) нормальный вектор к γ в точке гладкости $\gamma(t)$, где $\dot\gamma(t) \neq 0$.

1.4.1. Определение. В указанных условиях *потоком в.п. a через путь γ* называется величина

$$\Pi_\gamma(a) = \int_\gamma (a, n_\gamma^+)\, ds = \int_\alpha^\beta \big(a(\gamma(t)), n_\gamma^+(t)\big)|\dot\gamma(t)|\, dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta \big(a_1(x(t), y(t))\dot y(t) - a_2(x(t), y(t))\dot x(t)\big)\, dt =$$
$$= \int_\gamma (a_1(x,y)\, dy - a_2(x,y)\, dx).$$

1.4.2. Теорема (Гаусса–Остроградского). *Если $a \in C^1(D)$, а γ — к-г. з-ж. путь в D, который ограничивает область $G = G_\gamma \subset D$, обходя ее в положительном направлении (это означает, что n_γ^+ — внешняя нормаль для G на ∂G, т. е. при движении по γ область G остается слева), то*

$$\Pi_\gamma(a) = \iint_G \operatorname{div}(a)\, dx\, dy = \iint_G \Big(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y}\Big)\, dx\, dy.$$

Величина $\operatorname{div}(a(x,y)) := \dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \dfrac{\partial a_2}{\partial y}$ *называется дивергенцией в.п. a в точке (x,y). Из непрерывности* $\operatorname{div}(a(x,y))$ *в D получаем*

$$\operatorname{div}(a(x,y)) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} \Pi_{\partial B((x,y),\delta)}(a)$$

— это плотность внутренних источников поля a в точке (x,y), где $\partial B((x,y),\delta)$ — положительно ориентированная граница круга с центром (x,y) и радиусом δ.

1.4.3. Определение. Поле $a \in C^1(D)$ называется *соленоидальным в D*, если $\operatorname{div}(a) \equiv 0$ в D.

1.4.4. Определение. *Работой в.п. $a \in C(D)$ вдоль к-г. ж. (или к-г. з-ж.) пути γ в D* называется величина

$$\int_\gamma (a, d\gamma) := \int_\gamma (a_1\,dx + a_2\,dy) = \int_\alpha^\beta \big(a_1(\gamma(t))\dot{x}(t) + a_2(\gamma(t))\dot{y}(t)\big)\,dt$$

и обозначается через $P_\gamma(a)$. Если γ является к-г. з-ж. путем, то $P_\gamma(a)$ называется *циркуляцией* в.п. a вдоль (или по) γ и часто обозначается через $\oint_\gamma (a, d\gamma)$ или $Ц_\gamma(a)$.

1.4.5. Теорема (формула Грина). *Пусть $a \in C^1(D)$, γ — к-г. з-ж. путь, определяющий положительно ориентированную границу ∂G области G, $\overline{G} \subset D$. Тогда*

$$P_\gamma(a) = \iint_G \operatorname{rot}(a)\,dx\,dy = \iint_G \Big(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\Big)\,dx\,dy.$$

Здесь $\operatorname{rot}(a(x,y)) := \dfrac{\partial a_2}{\partial x} - \dfrac{\partial a_1}{\partial y}$ *является «плотностью циркуляции» в.п. a в точке (x,y):*

$$\operatorname{rot}(a(x,y)) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} P_{\partial B((x,y),\delta)}(a).$$

1.4.6. Определение. В.п. $a \in C(D)$ называется *потенциальным* в области D, если найдется функция $u \in C^1(D)$ с условием $a = \operatorname{grad}(u) \equiv \nabla u := \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ в D.

По теореме Ньютона–Лейбница, если a потенциально в области D с потенциалом u, а γ — к-г. путь в D с началом $\gamma(\alpha)$ и концом $\gamma(\beta)$, то $P_\gamma(a) = u(\gamma(\beta)) - u(\gamma(\alpha))$.

1.4.7. Теорема. *Если D — односвязная область в $\mathbb{C}$, то в.п. $a \in C^1(D)$ является потенциальным в D в точности тогда, когда* $\operatorname{rot}(a) \equiv 0$ *в D, т. е.* $\dfrac{\partial a_2}{\partial x} = \dfrac{\partial a_1}{\partial y}$ *в D.*

1.4.8. Определение. В.п. $a \in C^1(D)$ называется *регулярным* в области D, если оно одновременно соленоидально и локально (т. е. в каждом круге в D) потенциально в D.

1.4.9. Упражнение. Пусть $a \in C^1(D)$, $a_\perp := ia = -a_2 + ia_1$ (в каждой отдельной точке (x,y) поле $a_\perp$ — поворот a на угол $\pi/2$). Доказать, что в указанных выше условиях в.п. a и $a_\perp$ регулярны (или нет) в области D одновременно.

В указанных условиях (т. е. в.п. a регулярно в области D) пусть D_1 — некоторая односвязная область, $D_1 \subset D$. Тогда найдется $u \in C^2(D_1)$

— потенциал a в D_1 (определен с точностью до аддитивной константы) и $v \in C^2(D_1)$ — потенциал $a_\perp$ в D_1. Имеем:

$$u_x = a_1, \quad u_y = a_2, \quad v_x = -a_2, \quad v_y = a_1,$$

откуда $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ всюду в D_1, так что функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является голоморфной ($\mathbb{C}$-дифференцируемой) в D_1 по теореме Коши – Римана.

1.4.10. Определение. Функция f называется *комплексным потенциалом* в.п. a в D_1.

Обратно, всякая голоморфная в области D функция $f = u+iv$ задает регулярное в.п. $a = \nabla u$ в D.

1.4.11. Упражнение. Доказать, что $a(x,y) = \overline{f'(z)}$ (откуда, по теореме **??**, $a(x,y) \in C^\infty(D)$).

1.4.12. Определение. Путь $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ на $[\alpha, \beta]$ называется *траекторией тока* в.п. a в D, если для всех $t \in [\alpha,\beta]$ имеем $\dot\gamma(t) = a(\gamma(t))$, т. е. $\dot x(t) = a_1(x(t), y(t))$, $\dot y(t) = a_2(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$.

1.4.13. Предложение. *В указанных обозначениях для любой траектории тока γ функция $v(x,y)$ является постоянной на $[\gamma]$ (т. е. траектории тока лежат на линиях уровня функции v).*

Доказательство. Для всех $t \in [\alpha,\beta]$ имеем

$$\frac{d}{dt}\big(v(x(t), y(t))\big) = \nabla v\big|_{(x(t),y(t))} \cdot \big(\dot x(t), \dot y(t)\big) = a_\perp(\gamma(t)) \cdot a(\gamma(t)) \equiv 0.$$

□

Ввиду указанного, функция v называется *функцией тока* в.п. a, а ее линии уровня — *линиями тока.*

1.4.14. Упражнение. Пусть в.п. $a(x,y) = \{p_1 x, p_2 x + q_2 y\}$, где $p_1, p_2, q_2 \in \mathbb{R}$ – константы. Когда a является регулярным? В каждом случае регулярности найти соответствующие u, v, f, линии тока, траектории тока.

Замечание. Если область D односвязна, то можно взять $D_1 = D$ и f определена глобально во всей D. Если D не односвязна, то f определена локально с точностью до константы, а функция $f'(z)$ корректно определена и голоморфна в D, при этом $a(z) = \overline{f'(z)}$. В частности, $a \in C^\infty(D)$.

1.4.15. Упражнение. Изменятся ли величины $\Pi_\gamma(a)$ и $P_\gamma(a)$, если $a \in C(D)$, а к-г. путь γ в D заменить на эквивалентный ему к-г. путь γ_1?

1.4.16. Определение. Регулярное в.п. a в D называется *вполне регулярным* в D, если всякую траекторию тока $\gamma(t)$ в D ($t \in [\alpha,\beta]$) можно продолжить с $[\alpha,\beta]$ на $(-\infty,\infty)$ и она останется траекторией тока в D на всей $(-\infty,\infty)$.

1.4.2. Модельные примеры регулярных векторных полей.

1.4.17. Пример. Рассмотрим в.п. a, определяемое комплексным потенциалом $f(z) = pz^2/2$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D = \mathbb{C}$. Тогда $a(z) = \overline{f'(z)} = p\overline{z} = \{px, -py\}$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = pxy$; линии тока — гиперболы $xy = const$ (или прямые $x = 0$ и $y = 0$). Траектории тока $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ определяются из системы

$$\begin{cases} \dot{x} = px \\ \dot{y} = -py \end{cases}$$

— «симметричное» седло. Откуда $x(t) = C_1 e^{pt}$, $y(t) = C_2 e^{-pt}$. В.п. a вполне регулярно.

1.4.18. Пример. Положим $f(z) = \dfrac{\mu \operatorname{Ln} z}{2\pi}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $f'(z) = \dfrac{\mu}{2\pi z} = \dfrac{\mu \overline{z}}{2\pi |z|^2}$. Соответственно, определяется регулярное в.п. $a(z) = \overline{f'(z)} = \dfrac{\mu z}{2\pi |z|^2}$. Это *точечный источник* (с особенностью $z_0 = 0$). Для всех $r > 0$ имеем

$$\Pi_{\partial B(0,r)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\mu\{x,y\}}{x^2+y^2} \cdot \frac{\{x,y\}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, ds = \mu \frac{2\pi r}{2\pi r} = \mu$$

— это «мощность» источника, она не зависит от r. Линии тока — лучи $\operatorname{Im} f = const$, т. е. $\mu \cdot \operatorname{Arg}(z) = const$.

1.4.19. Упражнение. Каковы в последнем примере *траектории* тока? Является ли в.п. a вполне регулярным в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

1.4.20. Пример. Здесь берется комплексный потенциал

$$g(z) = \frac{-i\mu \operatorname{Ln} z}{2\pi}, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Он определяет регулярное в.п. $b = \overline{g'(z)} = \overline{\left(\dfrac{-i\mu}{2\pi z}\right)} = \dfrac{i\mu}{2\pi \overline{z}} = \dfrac{i\mu z}{2\pi |z|^2}$. Таким образом, $b = ia = a_\perp$, где в.п. a взято из предыдущего примера. В.п. b называется *точечным вихрем* (с центром $z_0 = 0$).

Для всех $r > 0$ имеем ($z = \gamma(t) = re^{it}\big|_{[0,2\pi]}$, $\dot{\gamma}(t) = iz$):

$$P_{\partial B(0,r)}(b) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{i\mu z}{2\pi |z|^2}, iz \right) dt = \frac{\mu}{2\pi} 2\pi = \mu$$

— «мощность» вихря (точкой в этих интегралах обозначается скалярное произведение). Поскольку $v(z) = -\mu \ln |z|$, окружности $|z| = const$ являются линиями тока в.п. b.

1.4.21. Упражнение. Найти траектории тока в последнем примере и доказать вполне регулярность в.п. b в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1.4.22. Пример. Рассмотрим еще один интересный пример. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \dfrac{\mu}{2\pi z}$ (это *диполь* с центром $z_0 = 0$ и моментом $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Обсудим случай $\mu > 0$. Тогда $v = \operatorname{Im} f = \dfrac{-\mu y}{2\pi(x^2+y^2)}$, так что линиями тока являются окружности $x^2 + y^2 = -\dfrac{\mu}{2\pi c}y$ (это при $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$); при $c = 0$ линиями тока являются две полуоси $y = 0(x < 0)$ и $y = 0(x > 0)$.

1.4.23. Упражнение. Выписать в этом примере уравнения для траекторий тока. Исследовать поле на вполне регулярность.

1.4.3. Регулярные векторные поля и конформные отображения.

Пусть $A(w)$ — регулярное в.п. в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с комплексным потенциалом $F(w)$; пусть $k\colon D \to \Omega$ — конформный изоморфизм области D на область Ω. Тогда функция $f(z) = F(k(z))$ локально голоморфна в D и определяет регулярное в.п. $a(z) = \overline{f'(z)} = \overline{F'(k(z))k'(z)}$. Говорят, что в.п. a *индуцировано* из в.п. A посредством (с помощью) конформного отображения $k(z)$.

1.4.24. Пример (Обтекание барьера). Пусть $\Omega = \Pi_+ = \{\operatorname{Im} w > 0\}$, $A(w) = \sigma > 0$ — горизонтальное течение со скоростью σ. При этом $F(w) = \sigma w$ — его комплексный потенциал. Рассмотрим область $D = \Pi_+ \setminus [0, hi]$, где $h > 0$. Тогда отображение $k(z) = \sqrt{z^2+h^2}_{(0,2\pi)}$ — конформный изоморфизм D на Ω — индуцирует в.п. $a(z)$ с комплексным потенциалом $f(z) = \sigma\sqrt{z^2+h^2}_{(0,2\pi)}$, т. е. $a(z) = \sigma\overline{z}/\overline{\sqrt{z^2+h^2}_{(0,2\pi)}}$.

1.4.25. Упражнение. Найти линии тока в.п. a и доказать его вполне регулярность.

1.4.4. Вычисление потока и циркуляции регулярного векторного поля.

Напомним, что в указанных ранее обозначениях, условиях на путь γ и в.п. a, по определению имеем

$$\Pi_\gamma(a) = \int_\gamma (-a_2\,dx + a_1\,dy), \quad P_\gamma(a) = \int_\gamma (a_1\,dx + a_2\,dy).$$

Пусть теперь в.п. a является регулярным в области D и имеет в этой области комплексный потенциал f. Для к-г. ж. или з.ж. пути γ в D найдем значение интеграла

$$\begin{aligned} I = \int_\gamma f'(z)\,dz = \int_\gamma \overline{a(z)}\,dz = \int_\gamma (a_1 - ia_2)\,(dx + idy) = \\ = \int_\gamma (a_1\,dx + a_2\,dy) + i\int_\gamma (-a_2\,dx + a_1\,dy) = P_\gamma(a) + i\Pi_\gamma(a), \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

откуда $P_\gamma(a) = \operatorname{Re} I$, $\Pi_\gamma(a) = \operatorname{Im} I$.

1.4.26. Пример. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = \dfrac{-i\mu \operatorname{Ln} z}{2\pi}$ — комплексный потенциал точечного вихря мощности $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ с центром $z_0 = 0$. Ему соответствует в.п. $b = \overline{g'(z)} = \dfrac{i\mu}{2\pi\overline{z}}$.

Для любого к-г. з-ж. пути γ, не проходящего через 0, имеем (если γ не обходит точку 0):

$$\int_\gamma g'(z)dz = 0 \Rightarrow P_\gamma(b) = 0, \Pi_\gamma(b) = 0,$$

и (если γ обходит точку 0 и $\operatorname{ind}_\gamma(0) = 1$):

$$\int_\gamma g'(z)dz = \mu \Rightarrow P_\gamma(b) = \mu, \Pi_\gamma(b) = 0.$$

1.4.5. Обтекание круга (цилиндра) с вихрем.

Зафиксируем $R > 0$ и при $\lambda > 0$ рассмотрим конформное отображение $k(z) = \lambda Ж(z/R)$ внешности $D = \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R$ замкнутого круга $\overline{B}_R = \{|z| \leqslant R\}$ на внешность отрезка $[-a_R, a_R]$ с условием $\lim\limits_{z\to\infty} k'(z) = 1$ (откуда находим $\lambda = a_R = 2R$).

В области $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-2R, 2R]$ определено в.п. $A(w) = \sigma + i0$, где $\sigma > 0$ — скорость потока (горизонтальная), с комплексным потенциалом $F(w) = \sigma w$.

С помощью указанного выше отображения $k(z) = z + R^2/z$ перенесем регулярное в.п. $A(w)$ на область D стандартным образом: комплексный потенциал $f_0(z) = F(k(z)) = \sigma(z + R^2/z)$ определяет в.п.

$$a_0(z) = \overline{f_0'(z)} = \sigma\Big(1 - \frac{R^2}{\overline{z}^2}\Big),$$

регулярное в D. Линии тока этого в.п. имеют вид

$$\operatorname{Im} f_0(z) = \operatorname{Im}\Big(\sigma(x+iy) + \frac{\sigma R^2}{x+iy}\Big) = \sigma\Big(y - \frac{R^2 y}{x^2+y^2}\Big) = const.$$

Можно найти и явные формулы линий тока.

1.4.27. Упражнение. Доказать, что в.п. a_0 вполне регулярно в D.

Рассмотрим теперь на $\mathbb{C}_\flat$ (и, значит, на D) вихрь с центром $z = 0$ и мощностью $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Его комплексный потенциал имеет вид

$$g_\mu(z) = \frac{-i\mu}{2\pi} \operatorname{Ln}(z).$$

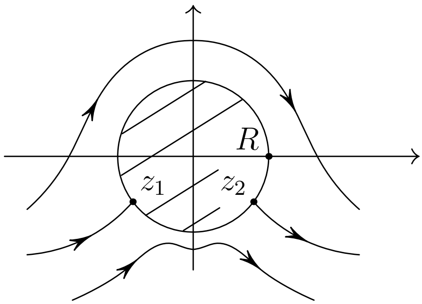

Рис. 4.8.

Определим комплексный потенциал $f_\mu(z) = f_0(z) + g_\mu(z)$, задающий регулярное в.п.

$$a_\mu(z) = \overline{f'_\mu(z)} = \sigma\Big(1 - \frac{R^2}{\overline{z}^2}\Big) + \frac{i\mu}{2\pi\overline{z}}$$

— поле обтекания круга (цилиндра) с вихрем. Можно показать, что оно вполне регулярно в D.

Найдем нули поля a_μ в $\overline{D}$:

$$\overline{z}^2 + \frac{i\mu}{2\pi\sigma}\overline{z} - R^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{i\mu}{2\pi\sigma}z - R^2 = 0, \qquad (1.4.6)$$

откуда

$$z_{1,2} = \frac{i\mu}{4\pi\sigma} \mp \sqrt{R^2 - \big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2}.$$

Рассмотрим 3 случая (всюду ниже рисуем случай $\mu < 0$):

(1) $\Delta = R^2 - \big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2 > 0$, т. е. $|\mu| < 4\pi\sigma R$; откуда $z_{1,2} = \frac{i\mu}{4\pi\sigma} \mp \sqrt{\Delta}$, $|z_{1,2}| = R$; пусть $\theta = \arcsin\frac{\mu}{4\pi\sigma R} = \arg(z_2)$, тогда $\mu = 4\pi\sigma R\sin\theta$; точка z_1 — точка разветвления потока, точка z_2 — точка отрыва (схода) потока;

(2) Случай $\Delta = R^2 - \big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2 = 0$, тогда $|\mu| = 4\pi\sigma R$, $z_1 = z_2 = \operatorname{sgn}(\mu)\cdot iR$;

(3) $\Delta = R^2 - \big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2 < 0$, $|\mu| > 4\pi\sigma R$, $z_{1,2} = \mp i\sqrt{\big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2 - R^2} + \frac{i\mu}{4\pi\sigma}$; оба корня мнимые; один лежит внутри B_R, второй – вне B_R.

Нас интересует случай (1), когда μ «мало». В этом случае z_1 и z_2 однозначно определяют μ, $\theta = \arg(z_2) = \arcsin\frac{\mu}{4\pi\sigma R}$, $\mu = 4\pi\sigma R\sin\theta$.

Приведем без доказательства следующее предложение (см. Рис. 4.8)

1.4.28. Предложение. *В условиях случая* (1)*:*

1) *линии тока начинаются и заканчиваются в ∞ (кроме сепаратрис: левая входит в z_1, правая выходит из z_2); линии тока имеют вид*

$$\operatorname{Im} f_\mu = \sigma y - \frac{\sigma R^2 y}{x^2+y^2} - \frac{\mu}{4\pi}\ln(x^2+y^2) = const;$$

2) *сепаратрисы входят в (выходят из) $\overline{B}_R$ под прямым углом к границе ∂B_R;*
3) *течение вполне регулярно в D.*

1.4.6. Компакт (крыло) Жуковского.

В общем курсе мы установили, что если $w_\delta = i\delta$, $\delta \in \mathbb{R}$ и $B_{(\delta)} = B(w_\delta, |w_\delta - 1|)$, то функция Жуковского Ж(w) конформно переводит область $\Omega_{(\delta)} = \mathbb{C} \setminus \overline{B_{(\delta)}}$ на внешность $D_{(\delta)} = \mathbb{C} \setminus \Gamma_{(\delta)}$ дуги окружности $\Gamma_{(\delta)}$, соединяющей точки ± 1 и образующей угол 2α с лучом $[1, +\infty)$, где $\alpha = \pi/2 - \operatorname{arctg}\delta = \pi/2 + \theta$, $\theta = -\operatorname{arctg}\delta$ (см. Рис. 4.9).

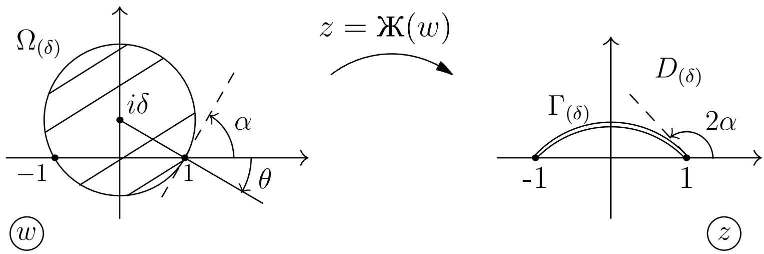

Рис. 4.9.

Зафиксируем $\beta > 1$ и рассмотрим круг B_* с границей ∂B_*, проходящей через точки $-\beta$, 1 и касающейся $\partial B_{(\delta)}$ в точке 1 (при этом $B_{(\delta)} \subset B_*$). Тогда функция Жуковского переведет область $\Omega_* = \mathbb{C} \setminus \overline{B_*}$ на внешность $D = \mathbb{C} \setminus K$ некоторого компакта K, который называется компактом (профилем крыла, крылом) Жуковского (см. Рис. 4.10).

Радиус R_* круга B_* равен $\dfrac{1+\beta}{2\cos\theta}$, а центр w_* круга B_* легко вычисляется: $w_* = 1 - R_* e^{i\theta}$.

Рассмотрим конформное отображение (см. Рис. 4.11)

$$k_*(z) = \frac{1}{2}\Big(\text{Ж}^{-1}_{(\text{в})}(z) - w_*\Big) \colon D \to \Omega_R,$$

где $R = R_*/2$, $\Omega_R = \mathbb{C}^\bullet \setminus \overline{B_R}$, $B_R = B(0, R)$.

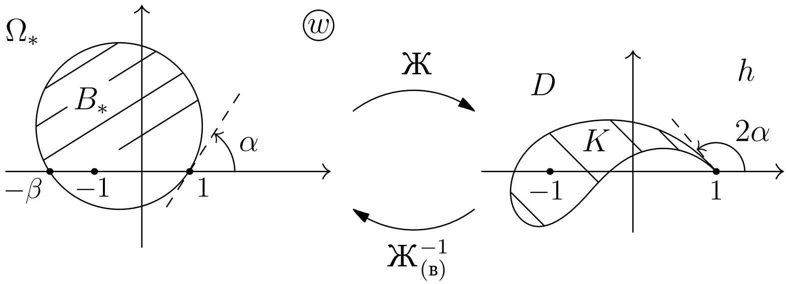

Рис. 4.10.

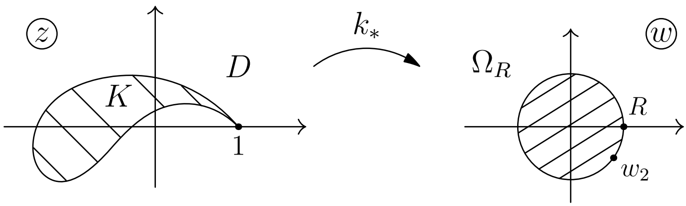

Рис. 4.11.

Наконец, определим комплексный потенциал

$$F_\mu(z) = f_\mu(k_*(z)) = \sigma\Big(k_*(z) + \frac{R^2}{k_*(z)}\Big) - \frac{i\mu}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\,k_*(z),$$

определяющий регулярное в.п. в области D, т. е. во внешности крыла K (выписывается сопряженное векторное поле $\overline{A_\mu}$):

$$\overline{A_\mu(z)} = F'_\mu(z) = \frac{\sigma k'_*(z)}{(k_*(z))^2}\Big((k_*(z))^2 - \frac{i\mu}{2\pi\sigma}k_*(z) - R^2\Big), \tag{1.4.7}$$

$z \in \overline{D}$, $z \neq 1$, $|k_*(z)| \geqslant R$ на $\overline{D}$.

Условие Чаплыгина. В указанных обозначениях при небольших σ ($\sigma < \sigma_{max}$ зависит от «условий среды») точка схода потока F_μ (на ∂K) совпадает с острием крыла $z = 1$, т. е. $k_*(1) = w_2$ — точка схода потока f_μ вне B_R, $\mu = 4\pi\sigma R\sin\theta$, $\theta = \arg(w_2)$.

Заметим, что

$$Ж^{-1}_{(в)}(z) = z + \sqrt{z^2-1}_{(в)}, \quad k_*(1) = w_2,$$

поэтому $k_*(z) - w_2 = O(|z-1|^{1/2})$ при $z \to 1$, $z \in \overline{D} \setminus \{1\}$. Далее,

$$2k'_*(z) = (\text{Ж}^{-1}_{(\text{в})}(z))' = (z + \sqrt{z^2-1}_{(\text{в})})' = O(|z-1|^{-\frac{1}{2}}), \quad z \in \overline{D} \setminus \{1\},$$

откуда из (1.4.7) и равенства $w_2^2 - i\mu w_2/(2\pi\sigma) - R^2 = 0$ (см. (1.4.6)) имеем:

$$\overline{A_\mu(z)} = F'_\mu(z) = O(|z-1|^{-1/2})O(|z-1|^{1/2}) = O(1), \quad z \to 1, z \in \overline{D} \setminus \{1\},$$

т. е. функция $A_\mu(z)$ непрерывна и равномерно ограничена на $\overline{D} \setminus \{1\}$.

Пусть γ — произвольный к-г. з-ж. путь, обходящий K один раз против часовой стрелки. Согласно (1.4.5), работа $P_\gamma(A_\mu)$ (она же циркуляция $\text{Ц}_\gamma(A_\mu)$) и поток $\Pi_\gamma(A_\mu)$ в.п. A_μ вдоль (через) γ вычисляются так (здесь также используются интегральная теорема Коши и свойства $k_*(z) = z + O(1)$, $k'_*(z) = 1 + O(1/z^2)$ при $z \to \infty$):

$$\text{Ц}_\gamma(A_\mu) + i\Pi_\gamma(A_\mu) = \int_\gamma F'_\mu(z)\,dz =$$
$$= \int_\gamma \sigma\Big(k_*(z) + \frac{R^2}{k_*(z)}\Big)' dz - \frac{i\mu}{2\pi}\int_\gamma \frac{k'_*(z)}{k_*(z)}\,dz = 0 - \frac{i\mu}{2\pi}\int_\gamma \frac{k'_*(z)}{k_*(z)}\,dz = \mu,$$

откуда $\text{Ц}_\gamma(A_\mu) = \mu$, $\Pi_\gamma(A_\mu) = 0$.

1.4.7. Уравнение движения идеальной жидкости. Закон Эйлера – Бернулли. В качестве физической интерпретации плоских векторных полей опишем некоторую *упрощенную* модель, не претендуя на полноту и строгость определений возникающих физических объектов.

Рассмотрим *установившееся плоское* течение в некотором прямоугольном цилиндре $\Omega = D \times \mathbb{R}_{x_3}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, x_3, которое реализуется *идеальной средой* (*жидкостью*) при условии отсутствия внешних сил. В нашем случае это будет означать, что векторное поле скоростей $A(x, y, x_3)$ течения не зависит от координаты x_3 и времени t, так что нам достаточно рассматривать интересующие нас объекты в сечении D цилиндра Ω плоскостью $\{x_3 = 0\}$ (отождествляемой с комплексной плоскостью $\mathbb{C}_z$, $z = x+iy$). *Идеальность* среды и отсутствие внешних сил означает, что мы пренебрегаем действием всех сил, кроме сил внутреннего давления. Основные постулаты: в.п. $A = A(x,y) = A(z)$ должно быть функцией класса C^1 в области D, а *плотность* среды $\rho = \rho(z) \geqslant 0$ — непрерывной в D.

Давление в установившемся плоском течении — это такая вещественная (скалярная) функция $p = p(x,y) = p(z)$, непрерывная в D, которая определяет общую силу действия (давления) течения на правую сторону носителя кусочно-гладкого жорданова (или к-г. з.ж.) пути $\tau\colon [\alpha,\beta] \to D$ с (переменной) правой нормалью $n^+_\tau(t) = -i\dot{\tau}(t)/|\dot{\tau}(t)|$ по формуле

$$\mathcal{F}(\tau^+) = \int_\alpha^\beta (-n^+_\tau(t))p(\tau(t))\,|d\tau(t)| = \int_\tau p(z)i\,dz \tag{1.4.8}$$

(на самом деле вместо кривой $[\tau]$ давление осуществляется на поверхность $[\tau]\times[0,1]$). Равенство (1.4.8) вытекает (при $z=\tau(t)$) из формулы $-n_\tau^+(t)\,|d\tau(t)|=i\,dz$. Сила давления на левую сторону носителя рассматриваемого пути (с нормалью $-n_\tau^+(t)$) равна $-\mathcal{F}(\tau^+)$. Кроме того, формула (1.4.8) считается справедливой и в случаях, когда $[\tau]\subset\partial D$, $n_\tau^+(t)$ — внутренняя нормаль к ∂D и давление p непрерывно (продолжается) на множество $D\cup[\tau]$.

Пусть $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ — траектория нашего течения, определенная на интервале (α,β). Дифференцируя равенство $\dot\gamma(t)=A(\gamma(t))$ по t и пользуясь формулой для производной сложной функции, получаем

$$\ddot\gamma(t)=\frac{\partial A}{\partial z}\Big|_{\gamma(t)}\dot\gamma(t)+\frac{\partial A}{\partial\overline{z}}\Big|_{\gamma(t)}\overline{\dot\gamma(t)}=\Big(\frac{\partial A}{\partial z}A+\frac{\partial A}{\partial\overline{z}}\overline{A}\Big)\Big|_{\gamma(t)},$$

т. е. вектор $\ddot\gamma(t)$ зависит только от $\gamma(t)$. Следовательно, определено *стационарное* векторное поле *ускорений*

$$\dot A(z)=\frac{\partial A}{\partial z}A(z)+\frac{\partial A}{\partial\overline{z}}\overline{A(z)},$$

обозначаемое также $\dfrac{dA}{dt}(z)$ и удовлетворяющее условию $\ddot\gamma(t)=\dot A(\gamma(t))$.

Применим второй закон Ньютона к кругу $B_\delta=B(z_0,\delta)\subset D$ (точнее к цилиндру $B_\delta\times[0,1]_{x_3}$):

$$\int_{B_\delta}\rho(x,y)\dot A(x,y)\,dx\,dy=\int_{\partial B_\delta}p(z)i\,dz.$$

Непрерывность $\dot A(x,y)$ в D очевидна. При дополнительном (априорном) условии непрерывной дифференцируемости функции $p(x,y)$, к последнему криволинейному интегралу можно применить формулу Грина (в комплексной форме $\nabla p(x,y)=\partial p/\partial x+i\partial p/\partial y$):

$$\int_{\partial B_\delta}p(z)i\,dz=\int_{\partial B_\delta}p(x,y)\,(-dy+idx)=-\int_{B_\delta}\nabla p(x,y)\,dx\,dy.$$

Деля на $\pi\delta^2$ равенство

$$\int_{B_\delta}\rho(x,y)\dot A(x,y)\,dx\,dy=-\int_{B_\delta}\nabla p(x,y)\,dx\,dy$$

и устремляя δ к 0, мы получаем $\rho(z_0)\dot A(z_0)=-\nabla p(z_0)$. Таким образом, в наших ограничениях установлено *уравнение движения* идеальной жидкости: для всех $z\in D$ имеем

$$\rho(z)\frac{dA}{dt}(z)+\nabla p(z)=0.$$

1.4.29. Теорема (Закон Эйлера–Бернулли). *При указанных выше условиях, и при дополнительном ограничении $\rho=const$ (случай несжимаемой среды), вдоль любой траектории $\gamma(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$, нашего течения* *в D справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\rho\big|A(\gamma(t))\big|^2 + p(\gamma(t)) = const.$$

Если, дополнительно, поле A является безвихревым (локально потенциальным) в D, то

$$\frac{1}{2}\rho\big|A(z)\big|^2 + p(z) \equiv const \qquad (1.4.9)$$

всюду в D.

Доказательство. В действительной форме записи

$$A = (a_1(x,y), a_2(x,y)), \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

где $z = \gamma(t)$, $(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{\gamma}(t)$, воспользуемся теоремой о производной сложной функции (напомним, что $\dot{\gamma}(t) = A(z)$):

$$\frac{dA}{dt}(z) = (a_{1x}\dot{x} + a_{1y}\dot{y}, a_{2x}\dot{x} + a_{2y}\dot{y})|_z = (a_{1x}a_1 + a_{1y}a_2, a_{2x}a_1 + a_{2y}a_2)|_z,$$

$$\begin{aligned}\frac{d\big|A(\gamma(t))\big|^2}{dt} &= (a_1^2(\gamma(t)) + a_2^2(\gamma(t)))'_t = \\ &= [2a_1(a_{1x}a_1 + a_{1y}a_2) + 2a_2(a_{2x}a_1 + a_{2y}a_2)]|_z,\end{aligned}$$

откуда нетрудно установить, что

$$\frac{d\big|A(\gamma(t))\big|^2}{dt} = 2A(\gamma(t)) \cdot \frac{dA}{dt}(\gamma(t)).$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\rho\big|A(\gamma(t))\big|^2 + p(\gamma(t))\Big) &= \rho A(\gamma(t)) \cdot \frac{dA}{dt}(\gamma(t)) + \nabla p(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \\ &= A(\gamma(t)) \cdot \Big(\rho\frac{dA}{dt}(\gamma(t)) + \nabla p(\gamma(t))\Big) = 0,\end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть теперь $A = (a_1(x,y), a_2(x,y))$ локально потенциально в D, т. е. $a_{2x} := \partial a_2/\partial x = a_{1y} := \partial a_1/\partial y$ в D. Положим $\Phi(z) = \rho|A(z)|^2/2 + p(z)$. Зафиксируем произвольную точку $z \in D$, в которой $A(z) \neq 0$ и пусть w_1 и w_2 — единичный касательный и единичный нормальный вектор к траектории $\gamma(t)$ нашего течения в точке $z = \gamma(t)$. Выше в этом доказательстве фактически установлено, что производная $\partial\Phi/\partial w_1$ функции Φ в точке z по направлению w_1 равна 0. Докажем, что производная $\partial\Phi/\partial w_2$ в точке z по направлению w_2 тоже равна 0. Непосредственно проверяется, что в условиях локальной потенциальности в.п. A справедливы равенства

$$\nabla\big(|A(z)|^2/2\big) = (a_1a_{1x} + a_2a_{2x}, a_1a_{1y} + a_2a_{2y})|_z = \frac{dA}{dt}(z),$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_2} = \nabla(\Phi) \cdot w_2 = \left(\rho \frac{dA}{dt}(z) + \nabla p(z)\right) \cdot w_2 = 0.$$

Таким образом, функция Φ постоянна в каждой компоненте внутренности множеств $\{A \neq 0\}$ и $\{A = 0\}$ (последнее очевидно из уравнения движения). Но тогда $\Phi \equiv const$ в D по непрерывности. □

Далее (дополнительно к указанным выше условиям) мы будем считать, что D — внешность компакта K (который мы будем называть *крылом*, хотя реально он играет роль *сечения* цилиндрического крыла), обтекаемого *регулярным* течением с полем скоростей A, *ограниченным* в D. Пусть $F(z)$ — комплексный потенциал в.п $A(z)$ в D. Поскольку функция $F'(z) = \overline{A(z)}$ голоморфна и ограничена в некоторой проколотой окрестности точки ∞, существует конечный $\lim_{z\to\infty} A(z) =: A_\infty$. Без ограничения общности мы предположим, что $\sigma = A_\infty \geqslant 0$. Соленоидальность (отсутствие «внутренних источников») поля A как правило не обсуждается (постулируется), а вот условие локальной потенциальности (в механике такие поля называют *безвихревыми*) является существенным ограничительным требованием, которое мы принимаем, поскольку будем использовать закон Эйлера – Бернулли. Кроме того, мы постулируем следующие естественные условия на геометрию течения (которые выполняются в модельном случае, описанном в предыдущем разделе):

(i) определены точки z_1 разветвления и z_2 схода потока; ∂K является гладкой всюду, кроме (быть может) точек z_1 и z_2;

(ii) векторное поле A непрерывно продолжается на $\overline{D} \setminus \{z_1, z_2\}$ и становится *касательным* к $\partial K \setminus \{z_1, z_2\}$.

По закону Эйлера – Бернулли, $p(z)$ непрерывно (и равномерно ограниченно) продолжается на $\overline{D} \setminus \{z_1, z_2\}$, и уравнение (1.4.9) можно считать справедливым в $\overline{D} \setminus \{z_1, z_2\}$.

1.4.8. Формулы Чаплыгина и Жуковского.

Согласно равенству (1.4.8) общая сила давления *снаружи* на крыло K равна

$$\mathcal{F}(K) = \int_{\partial^+ K} ip(z)\, dz = i \int_{\partial^+ K} \left(p_* - \frac{1}{2}\rho \big|A(z)\big|^2\right) dz = -\frac{i\rho}{2} \int_{\partial^+ K} \big|A(z)\big|^2 dz.$$

Отметим, что если $dz = |dz|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg(dz)$, то на «нижней» части крыла K (между z_1 и z_2) поле $A(z)$ сонаправлено с dz, т. е. $A(z) = |A(z)|e^{i\varphi}$, а на «верхней» части K (между z_2 и z_1) имеем равенство

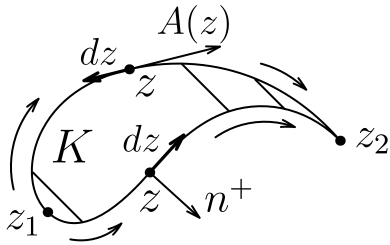

Рис. 4.12.

$A(z) = -|A(z)|e^{i\varphi}$, так что во всех случаях $|A(z)|^2 = e^{-2i\varphi}(A(z))^2$. Отсюда (ввиду равенства $d\overline{z} = e^{-i\varphi}\,|dz| = e^{-2i\varphi}\,dz$) получаем

$$\mathcal{F}(K) = -\frac{i\rho}{2}\int_{\partial^+ K} \big(A(z)\big)^2 e^{-2i\varphi}\,dz =$$
$$= -\frac{i\rho}{2}\int_{\partial^+ K} \big(\overline{F'(z)}\big)^2\,d\overline{z} = \overline{\frac{i\rho}{2}\int_{\partial^+ K} \big(F'(z)\big)^2\,dz},$$

или (как и ранее, $F(z)$ — комплексный потенциал в.п $A(z)$)

$$\overline{\mathcal{F}(K)} = \frac{i\rho}{2}\int_{\partial^+ K} \big(F'(z)\big)^2\,dz.$$

Это и есть *формула Чаплыгина.*

Поскольку $F'(z)$ голоморфна в окрестности ∞, она разлагается в свой ряд Лорана вне круга $B = B(0, R_0)$, содержащего K (сходимость абсолютная):

$$F'(z) = \sigma + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots, \quad |z| \geqslant R_0,$$

откуда

$$\big(F'(z)\big)^2 = \sigma^2 + \frac{2\sigma c_{-1}}{z} + O\Big(\frac{1}{z^2}\Big), \quad z \to \infty.$$

Но, по доказанному ранее,

$$2\pi i c_{-1} = \int_{\partial^+ B} F'(z)\,dz = \mu = \text{Ц}_{\partial^+ B}(A).$$

По интегральной теореме Коши,

$$\int_{\partial^+ K} \big(F'(z)\big)^2\,dz = \int_{\partial^+ B} \big(F'(z)\big)^2\,dz,$$

откуда

$$\overline{\mathcal{F}(K)} = \frac{i\rho}{2}\int_{\partial^+ B} \big(F'(z)\big)^2\,dz = \frac{i\rho}{2} 2\pi i 2\sigma c_{-1} = i\rho\sigma\mu.$$

Таким образом, получаем *формулу Жуковского*: $\mathcal{F}(K) = -i\rho\sigma\mu$.

Здесь важно отметить *парадокс Бертрана*: результирующая сила давления на крыло K всегда перпендикулярна скорости σ потока на ∞.

Для крыла Жуковского имеем $\mu = 4\pi\sigma R \sin\theta$, $R = \dfrac{1+\beta}{4\cos\theta}$, откуда

$$\mathcal{F}(K) = -i\pi\rho\sigma^2(1+\beta)\,\mathrm{tg}(\theta).$$

§ 1.5. Теоремы Рунге и Хартогса – Розенталя

1.5.1. Формула Помпейю.

Напомним, что если функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{C}$, то, по определению,

$$\overline{\partial} f(a) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\bigg|_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_a.$$

По теореме Коши – Римана f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{C}$, если и только если она $\mathbb{R}$-дифференцируема в этой точке и выполнено равенство $\overline{\partial} f(a) = 0$.

Оператор $\overline{\partial}\colon f \mapsto \overline{\partial} f$ называют оператором Коши – Римана.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{+\infty\}$. Положим $C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega)\colon \operatorname{supp}(f) \text{ — компакт в } \Omega\}$, где $\operatorname{supp}(f)$ — наименьшее замкнутое подмножество из Ω, вне которого f обращается в нуль (в Ω). При $k = 0$ пишем $C_0^0(\Omega) = C_0(\Omega)$.

1.5.1. Теорема (Формула Помпейю). *Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$, тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:*

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta},$$

где Λ — мера Лебега в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$ и найдем $R > 0$ с условием $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(z, R)$. Введем полярные координаты ρ, θ с центром z:

$$\zeta - z = \rho e^{i\theta}, \quad \overline{\zeta - z} = \rho e^{-i\theta}$$

при $\zeta \neq z$. Таким образом,

$$e^{2i\theta} = \frac{\zeta - z}{\overline{\zeta} - \overline{z}}, \quad \rho^2 = (\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z}).$$

Дифференцируя последние два равенства по $\overline{\zeta}$, находим

$$e^{2i\theta} 2i \frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = -\frac{\zeta - z}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}, \quad 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \zeta - z,$$

откуда

$$\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{ie^{i\theta}}{2\rho}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{e^{i\theta}}{2}.$$

Рассмотрим функцию $F(\rho, \theta) = \varphi(\zeta) = \varphi(z + \rho e^{i\theta})$, являющуюся 2π-периодической по θ при $\rho > 0$. Тогда при $\zeta \neq z$ имеем

$$\overline{\partial}\varphi(\zeta) = F'_\rho \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} + F'_\theta \frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = F'_\rho \frac{e^{i\theta}}{2} + F'_\theta \frac{ie^{i\theta}}{2\rho}.$$

Интегрируя повторно в полярных координатах и учитывая периодичность F по θ, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_\delta^R\left(F'_\rho\frac{e^{i\theta}}{2}+F'_\theta\frac{ie^{i\theta}}{2\rho}\right)\frac{1}{-\rho e^{i\theta}}\rho\,d\rho\,d\theta=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\left(\int_0^{2\pi}\int_\delta^R F'_\rho\,d\rho\,d\theta+\int_\delta^R\int_0^{2\pi}F'_\theta\,d\theta\frac{i}{\rho}\,d\rho\right)=$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(F(\delta,\theta)-F(R,\theta))\,d\theta=\varphi(z),$$

где в последнем равенстве мы пользуемся непрерывностью функции φ в точке z и условием $F(R,\theta)=0$. Отметим, что переходом к введенным выше полярным координатам легко доказывается и абсолютная сходимость исходного интеграла. □

Замечание. При $z=0$ имеем

$$\varphi(0)=\frac{-1}{\pi}\int\frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{\zeta}.$$

По определению обобщенных производных равенство выше означает, что $\overline{\partial}\left(\frac{1}{\pi\zeta}\right)$ есть δ-функция Дирака, т. е. $\frac{1}{\pi\zeta}$ есть *фундаментальное решение* уравнения Коши – Римана $\overline{\partial}f=0$.

1.5.2. Стандартное разбиение единицы.

Пусть

$$\mathbb{Z}^2=\{j=(j_1,j_2)\equiv j_1+ij_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$$

есть стандартная 1-решетка, $\delta\mathbb{Z}^2=\{a_j\equiv\delta j_1+i\delta j_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$ — стандартная δ-решетка $(\delta>0)$ в $\mathbb{C}$.

Зафиксируем функцию $\psi\in C_0^1(B(0,1))$ с условиями $0\leqslant\psi(z)\leqslant 1$ при всех z и $\psi(z)=1$ при всех $z\in B(0,1/\sqrt{2})$. Пусть $A_1=\|\overline{\partial}\psi\|$. Напомним, что $\|f\|=\|f\|_{\mathbb{C}}$.

1.5.2. Упражнение. Доказать, что можно выбрать ψ с условием $A_1\leqslant 2$.

Зафиксируем $\delta>0$. Пусть $B_j=B(a_j,\delta)$, $\psi_j(z)=\psi\left(\frac{z-a_j}{\delta}\right)$, $j\in\mathbb{Z}^2$. Наконец, при $j\in\mathbb{Z}^2$ положим

$$\varphi_j(z)=\frac{\psi_j(z)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\psi_k(z)}.$$

1.5.3. Лемма. *В указанных обозначениях*

$$\varphi_j\in C_0^1(B_j),\quad 0\leqslant\varphi_j\leqslant 1,\quad \|\overline{\partial}\varphi_j\|\leqslant\frac{5A_1}{\delta},\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\varphi_j\equiv 1\ \ \textit{на}\ \ \mathbb{C},$$

причем каждая точка z принадлежит не более чем 4 кругам B_j.

Доказательство. Это очевидно, поскольку $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\psi_k \geqslant 1$ на $\mathbb{C}$. $\square$

Семейство $\{B_j,\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ называется *стандартным δ-разбиением единицы* на $\mathbb{C}$.

1.5.3. Определения основных пространств функций.

Введем (или напомним) ряд общепринятых обозначений, важных для дальнейшего. Пусть $E\neq\varnothing$ — произвольное множество в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathcal{A}(E)$ класс функций f, каждая из которых определена и голоморфна в некоторой (своей) окрестности U_f множества E (если E открыто, то $\mathcal{A}(E)$ есть класс всех голоморфных на E функций). Как и ранее, через $C(E)$ обозначаем пространство всех комплекснозначных *непрерывных и ограниченных* на E функций f с равномерной нормой $\|f\|_E = \sup_{z\in E}|f(z)|$. Для *компакта* $X\neq\varnothing$ через $P(X)$ обозначается *замыкание* в $C(X)$ подпространства $\{P\}|_X$, где $\{P\}$ — совокупность всех полиномов комплексного переменного z. Ясно, что $f\in P(X)$, если и только если f равномерно на X приближается (с любой точностью) полиномами от z. Определим еще пространство $R(X)$ — замыкание в $C(X)$ подпространства $\{g|_X\}$, где g пробегает класс всех рациональных функций (от z) с полюсами вне X. По аналогии, $f\in R(X)$ тогда и только тогда, когда f равномерно на X приближается рациональными функциями. Наконец, положим $C_{\mathcal{A}}(X) = C(X)\cap\mathcal{A}(X^\circ)$, где E° — множество внутренних точек множества E (при $X^\circ=\varnothing$ полагаем $C_{\mathcal{A}}(X)=C(X)$). Следующие включения очевидны:

$$P(X)\subseteq R(X)\subseteq C_{\mathcal{A}}(X)\subseteq C(X).$$

Иначе говоря, приближать (с любой точностью) полиномами или рациональными функциями равномерно на X можно только функции класса $C_{\mathcal{A}}(X)$ («простейшее» необходимое условие приближаемости).

Напомним, что компонентой (связности) множества E в $\mathbb{C}$ называется всякое максимальное связное подмножество из E. Если E — открыто, то всякая его связная компонента является областью, причем E есть конечное или счетное объединение своих компонент. Поэтому, если X — компакт, то его *дополнение* состоит из неограниченной компоненты Ω и ограниченных компонент $\Omega_1,\Omega_2,\ldots$ (если они есть).

Оболочкой компакта X в $\mathbb{C}$ (обозначается через $\widehat{X}$) называется объединение компакта X и всех ограниченных компонент его дополнения.

Ясно, что $X=\widehat{X}$, если и только если множество $\mathbb{C}\setminus X$ связно.

В 1885 г. К. Вейерштрасс и К. Рунге доказали свои знаменитые теоремы о равномерных приближениях функций полиномами. Сформулируем их, используя наши обозначения.

1.5.4. Теорема (Вейерштрасс). *Если X — отрезок на вещественной оси, то $C(X)=P(X)$.*

1.5.5. Теорема (Рунге). *Пусть X — произвольный компакт в $\mathbb{C}$, тогда* (1) $\mathcal{A}(X)|_X \subset R(X)$; (2) $\{\mathcal{A}(X)|_X \subset P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

Основной целью этого раздела является доказательство теоремы Рунге.

1.5.4. Свойства потенциала Коши.

Нам неоднократно понадобится следующее утверждение.

1.5.6. Лемма. *Пусть K — компакт, $h \in L_\infty(K, \Lambda)$. Положим*

$$f(z) = \int_K \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}$$

(*интеграл абсолютно сходится при всех z, см. ниже*). *Тогда*

(а) *для любого компакта X с условием $X \cap K = \varnothing$ верно включение $f \in R(X)$, причем f равномерно на X с любой точностью приближается рациональными дробями вида*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z - a_n}, \quad \textit{где} \quad a_n \in K, \ \textit{и}\ \lambda_n \in \mathbb{C};$$

(б) *функция f голоморфна вне K, $f \in C(\mathbb{C}^\bullet)$, $f(\infty) = 0$, причем*

$$\|f\| = \|f\|_{\mathbb{C}} \leqslant 2M\sqrt{\pi \Lambda(K)},$$

где $M = \|h\|_{K,\Lambda}$ — норма h в $L_\infty(K, \Lambda)$.

Замечание. Функция f, определенная в предыдущей лемме, называется *потенциалом Коши* функции h *по мере Лебега* Λ на компакте K.

Доказательство леммы 1.5.6. (а) Пусть $d = \operatorname{dist}(X, K)$, $d > 0$. При $\mu \in (0, d/2)$ разобьем K на конечное число ($N = N(\mu)$) попарно непересекающихся борелевских множеств K_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, с условиями $\operatorname{diam}(K_n) < \mu$. Зафиксируем

$$a_n \in K_n, \quad \lambda_n = \int_{K_n} h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta),$$

тогда при $z \in X$ получаем

$$\left| \int_K \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z - a_n} \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} \int_{K_n} \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{N} \int_{K_n} \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - a_n} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} M \int_{K_n} \left| \frac{(z - a_n) - (z - \zeta)}{(z - \zeta)(z - a_n)} \right| d\Lambda(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu}{d^2} \Lambda(K_n) \leqslant \frac{\Lambda(K) M}{d^2} \mu \to 0 \quad \text{при } \mu \to 0.$$

(б) Поскольку функции $\sum_{n=1}^{N}\lambda_n(z-a_n)^{-1}$ голоморфны вне K, в силу (а) и теоремы Вейерштрасса f голоморфна вне K. Свойство $f(\infty)=0$ очевидно. Оценим $|f(z)|$ для произвольного $z\in\mathbb{C}$. Пусть $r=\sqrt{\Lambda(K)/\pi}$. Так как $\Lambda(B(z,r))=\Lambda(K)$ и функция $|\zeta-z|^{-1}$ *убывает* при удалении ζ от (фиксированного) z, мы получаем

$$|f(z)|\leqslant M\int_K\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta)\leqslant M\int_{B(z,r)}\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta)=$$
$$=M\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\rho}=2M\pi r=2M\sqrt{\pi\Lambda(K)},$$

причем вместе с нужной равномерной оценкой мы автоматически доказали абсолютную сходимость (при всех z) интеграла, определяющего f. Непрерывность f вытекает из леммы 1.5.8 ниже. □

1.5.7. Определение. Пусть $E\subset\mathbb{C}$, $\tau\in(0,1]$. Пространство $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ есть совокупность функций $g\in C(E)$, для каждой из которых найдется $c=c(g)\in[0,\infty)$ с условиями

$$|g(z_1)-g(z_2)|\leqslant c|z_1-z_2|^\tau,\quad |g(z_1)|\leqslant c$$

для всех $z_1,z_2\in E$. Банахова норма в $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ определяется так: $\|g\|_{\tau,E}=\min\{c(g)\}$, где (достигающийся) min берется по всем $c(g)$, удовлетворяющим последним двум неравенствам (проверить!).

Очевидно, что $\mathrm{Lip}_\tau(E)\subset C(E)$ при всех $\tau\in(0,1]$.

1.5.8. Лемма. *В условиях леммы* 1.5.6 *для любого* $\tau\in(0,1)$ *имеем* $f\in\mathrm{Lip}_\tau\,\mathbb{C}$, *причем* $\|f\|_{\tau,\mathbb{C}}\leqslant Mc(\tau,K)$ *(где* $c(\tau,K)$ *зависит только от* τ *и* K*). Однако найдется такой компакт* K*, что даже при* $h\equiv 1|_K$ *имеем* $f\notin\mathrm{Lip}_1(\mathbb{C})$.

Доказательство. Пусть $z_1\neq z_2$, $\delta=|z_1-z_2|/2$, $a=(z_1+z_2)/2$, $D_1=B(z_1,\delta)$, $D_2=B(z_2,\delta)$, $D_3=B(a,2\delta)\setminus(D_1\cup D_2)$, $D_4=\mathbb{C}\setminus B(a,2\delta)$. Нам нужно оценить слагаемые в правой части неравенств:

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant\sum_{s=1}^{4}\int_{D_s\cap K}|h(\zeta)|\frac{|z_1-z_2|}{|z_1-\zeta||z_2-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{4}2M\delta\int_{D_s\cap K}\frac{1}{|z_1-\zeta||z_2-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta).$$

Слагаемое, соответствующее $s=1$ ($s=2$ аналогично), оценивается сверху величиной $4\pi M\delta$ как в предыдущей лемме переходом к полярным координатам с центром z_1 и интегрированием по всему D_1. Слагаемое при $s=3$ оценивается сверху тривиально (тем же $4\pi M\delta$). Выберем $r>0$ так, что $\Lambda(B(a,r)\cap D_4)=\Lambda(K)$. При интегрировании по D_4 мы пользуемся оценкой $|z_1 - \zeta||z_2 - \zeta| \geqslant |\zeta - a|^2/4$, монотонным убыванием подынтегральной функции (от $|\zeta - a|$) и полярными координатами с центром a:

$$\int_{D_4\cap K} \frac{1}{|z_1-\zeta||z_2-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta) \leqslant \int_{D_4\cap K}\frac{4}{|\zeta-a|^2}\,d\Lambda(\zeta) \leqslant$$
$$\leqslant 8\pi\int_{2\delta}^{r}\rho^{-1}\,d\rho = 8\pi\ln\Bigl(\frac{r}{2\delta}\Bigr).$$

Теперь легко видеть, что при фиксированном $\tau \in (0,1)$ величина $|f(z_1) - f(z_2)||z_1 - z_2|^{-\tau}$ имеет оценку сверху, не зависящую от z_1 и z_2, если $\delta < 1$. Случай $\delta \geqslant 1$ оставляем читателю.

Контрпример для $\tau = 1$ строится так: берем $z_1 = 0$, $z_2 = -2\delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало, $K = \{z\colon |z| \leqslant 1, \mathrm{Re}(z) \geqslant |\operatorname{Im}(z)|\}$. □

1.5.5. Доказательство теоремы Рунге.

Доказательство теоремы 1.5.5. (1). Докажем, что для всякого компакта X верно включение $\mathcal{A}(X)|_X \subset R(X)$.

Пусть функция f голоморфна в d-окрестности U_d компакта X. Надо приблизить f равномерно на X (с любой точностью) рациональными функциями. Пусть $\delta = d/3$. Построим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}$ (см. лемму 1.5.3): $B_j = B(a_j, \delta)$, где $a_j \in \delta\mathbb{Z}^2$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\varphi_j \equiv 1$. Пусть

$$J = \{j \in \mathbb{Z}^2\colon B_j \subset U_d\}, \quad \varphi = \sum_{j\in J}\varphi_j \in C_0^1(U_d).$$

Ясно, что $\varphi = 1$ в δ-окрестности U_δ компакта X, $\varphi = 0$ вне U_d.

Положим $g = f\varphi$, $g \in C_0^1(\mathbb{C})$. По теореме 1.5.1 при $z \in X$ имеем

$$f(z) = g(z) = \frac{1}{\pi}\int_{U_d\setminus U_\delta}\frac{\overline{\partial}g(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta},$$

поскольку $\overline{\partial}g(\zeta) = \overline{\partial}f(\zeta) = 0$ в окрестности U_δ. Остается воспользоваться леммой 1.5.6 при $h(\zeta) = \overline{\partial}g(\zeta)$, $K = \overline{U_d} \setminus U_\delta$.

Следует отметить, что при доказательстве этой части теоремы Рунге как правило пользуются интегральной формулой Коши. Однако для *аккуратного* ее применения (при построении специального контура интегрирования) требуются дополнительные топологические построения, которые в контексте нашего изложения обходятся интегрированием по площади, т. е. с помощью формулы Помпейю. Предложенное здесь доказательство теоремы Рунге легко перерастает в доказательство уже не такой тривиальной теоремы Хартогса – Розенталя (см. ниже).

(2). Надо показать, что $\mathcal{A}(X) \subset P(X) \Leftrightarrow X = \widehat{X}$.

($\Rightarrow$) Пусть, от противного, $\mathcal{A}(X) \subset P(X)$, но $\mathbb{C} \setminus X$ несвязно, т. е. существует ограниченная связная компонента Ω_1 в $\mathbb{C} \setminus X$, в частности $\partial\Omega_1 \subset X$. Зафиксируем $a_1 \in \Omega_1$. Так как $f(z) = (z - a_1)^{-1}$ входит в $\mathcal{A}(X) \subset P(X)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется полином $p_\varepsilon(z)$ с условием $|(z-a_1)^{-1} - p_\varepsilon(z)| < \varepsilon$ при всех $z \in X$ и, в частности, при $z \in \partial\Omega_1$. Пусть $d = \operatorname{diam}(\Omega_1)$, тогда справедливо неравенство

$$|1 - p_\varepsilon(z)(z-a_1)| \leqslant \varepsilon d, \quad \forall z \in \partial\Omega_1.$$

При $\varepsilon < 1/d$ мы получаем противоречие с принципом максимума модуля в Ω_1, так как функция $1 - p_\varepsilon(z)(z-a_1)$ равна 1 при $z = a_1$.

($\Leftarrow$) Пусть $\Omega = \mathbb{C} \setminus X$ — связно, $f \in \mathcal{A}(X)$. Согласно (1) для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset \Omega$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что

$$\Bigl| f(z) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z-a_n} \Bigr| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in X.$$

Остается доказать, что $(z-a)^{-1}\big|_X \in P(X)$ при всех $a \in \Omega$ (потом каждую функцию $\lambda_n(z-a_n)^{-1}$ приблизим многочленом $p_{\varepsilon_n}(z)$ с точностью $\varepsilon_n = \varepsilon/(2N)$, т. е. f будет приближена с точностью ε).

Пусть $G = \{a \in \Omega\colon (z-a)^{-1}\big|_X \in P(X)\}$. Установим, что $G = \Omega$. Действительно, во-первых, $G \neq \varnothing$, так как по теореме Коши–Тейлора G содержит все точки из внешности какого-либо круга, содержащего X. Во-вторых, G замкнуто в Ω, ибо если $\{a_k\}_{k=1}^\infty \subset G$ и $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k \in \Omega$, то $a \in G$, что непосредственно вытекает из равномерной сходимости $(z-a_k)^{-1}$ к $(z-a)^{-1}$ на X при $k \to \infty$. Установим, в-третьих, что G открыто в Ω. Пусть $a \in G$, $d = \operatorname{dist}(a, X)$, $a_1 \in B(a, d)$. Докажем, что $a_1 \in G$. Из элементарных свойств геометрических прогрессий вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное L, что

$$\Bigl| \frac{1}{z-a_1} - \sum_{l=1}^{L} \frac{(a_1-a)^{l-1}}{(z-a)^l} \Bigr| < \varepsilon$$

для всех $z \in X$. Но $(z-a)^{-1} \in P(X)$, откуда $(z-a)^{-l} \in P(X)$ при всех натуральных l и, следовательно, $(z-a_1)^{-1} \in P(X)$. Теперь равенство $G = \Omega$ следует из связности Ω. □

Замечание. Определим $\mathcal{A}_C(X)$ как замыкание в $C(X)$ пространства $\mathcal{A}(X)|_X$. Тогда теорема Рунге в точности означает, что $\mathcal{A}_C(X) = R(X)$ для всякого компакта X, причем $R(X) = P(X)$ тогда и только тогда, когда $X = \widehat{X}$.

1.5.9. Задача. Пусть $f \in C^1(\mathbb{C})$, причем $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$ — компакт. Положим

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Доказать, что $f - F$ есть целая функция, причем $f \equiv F \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.

1.5.10. Задача. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, f — голоморфная в D функция. Тогда найдется последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ полиномов комплексной переменной с условием $p_n \to f$ при $n \to +\infty$ равномерно на любом компакте из D.

1.5.11. Задача. Пусть X — произвольный компакт в $\mathbb{C}$, Ω_j — его ограниченные компоненты дополнения (если есть). Зафиксируем a_j в каждой из Ω_j. Доказать, что для всякой функции $f \in \mathcal{A}(X)$ и всякого $\varepsilon > 0$, найдется такая рациональная функция R с полюсами, принадлежащими множеству $\{a_j\}_{j\geqslant 1}$, что $\|f - R\|_X < \varepsilon$.

1.5.6. Теорема Хартогса – Розенталя.

1.5.12. Теорема (Хартогс – Розенталь). *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$ лебеговой меры нуль* ($\Lambda(X) = 0$). *Тогда $C(X) = R(X)$.*

Сначала установим следующую лемму.

1.5.13. Лемма. *Пусть $X \subset \mathbb{C}$ — произвольный компакт. Для всяких функции $f \in C(X)$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется функция $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$ с условием $\|f - \varphi\|_X < \varepsilon$.*

Доказательство. Пользуясь равномерной непрерывностью функции f на X, найдем $\delta > 0$ такое, что $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ для всех z_1 и z_2 из X с условием $|z_1 - z_2| < 2\delta$. Теперь мы рассмотрим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ (см. лемму 1.5.3). Для него положим $J = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon B_j \cap X \neq \varnothing\}$. При $j \in J$ зафиксируем какую-либо точку $b_j \in X \cap B_j$. Положим $\varphi(z) = \sum_{j\in J} f(b_j)\varphi_j(z)$. Ясно, что $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$, причем для всех $z \in X$ имеем (проверить!):

$$|f(z) - \varphi(z)| = \Big|\sum_{j\in J}(f(z) - f(b_j))\varphi_j(z)\Big| < \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1.5.12. Пусть $\Lambda(X) = 0$. Нам остается показать, что $C_0^1(\mathbb{C})|_X \subset R(X)$. Зафиксируем $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Пусть $A = \|\overline{\partial}\varphi\|$ и $S = \operatorname{supp}(\varphi)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая открытая окрестность U компакта X, что $\Lambda(U) < \varepsilon$, $\Lambda(\partial U) = 0$. Пусть

$$f_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\overline{U}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}, \quad \varphi_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi}\int_{S\setminus U} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}.$$

По теореме 1.5.1 верно равенство $\varphi = \varphi_\varepsilon + f_\varepsilon$, а по лемме 1.5.6 имеем $\varphi_\varepsilon|_X \in R(X)$ и $\|f_\varepsilon\| \leqslant 2A\sqrt{\varepsilon/\pi} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. □

1.5.14. Упражнение (Пример Алисы Рот, 1938 г.). Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, полученный удалением из некоторого замкнутого круга $\overline{B_0}$

семейства попарно внешних кругов $\{B_j = B(z_j, r_j)\}_{j=1}^{+\infty}$ таких, что X является нигде не плотным и $\sum_{j=1}^{+\infty} r_j < +\infty$, где $B_j \subset B_0$. Доказать, что $C(X) \neq R(X)$, в частности $\Lambda(X) > 0$.

Указание. Доказать, что мера $d\mu(z) = dz|_{\partial^+ B_0} - \sum_{j=1}^{+\infty} dz|_{\partial^+ B_j}$ ортогональна $R(X)$ и найдется $f \in C(X)$ с условием $\displaystyle\int f(z)\, d\mu(z) \neq 0$.

§ 1.6. Формулировка теорем Мергеляна. Свойства локализационного оператора Витушкина. Теорема Брауэра

1.6.1. Формулировка теорем Мергеляна.

1.6.1. Теорема (Мергеляна). *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Для выполнения равенства $C_{\mathcal{A}}(X) = P(X)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{C} \setminus X$ было связным.*

1.6.2. Следствие (теорема Лаврентьева). $C(X) = P(X)$, *если и только если $X = \widehat{X}$ и $X^\circ = \varnothing$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $C_{\mathcal{A}}(X) = P(X)$, тогда автоматически $\mathcal{A}(X) \subset P(X)$ и по теореме Рунге $X = \widehat{X}$.

($\Leftarrow$) Пусть $X = \widehat{X}$. По теореме Рунге достаточно установить, что $C_{\mathcal{A}}(X) = \mathcal{A}_C(X)$. Мы докажем следующий более сильный результат. $\square$

1.6.3. Теорема (Мергелян). *Пусть X — компакт, Ω_s ($s \in \{1, 2, \dots\}$) — ограниченные компоненты дополнения компакта X (если они есть), Ω_0 — неограниченная компонента дополнения компакта X. Если $d = \inf_{s \geqslant 0} \operatorname{diam}(\Omega_s) > 0$, то $C_{\mathcal{A}}(X) = \mathcal{A}_C(X)$.*

Замечание. Если $\mathbb{C} \setminus X$ связно, то компоненты Ω_s при $s \geqslant 1$ отсутствуют и мы полагаем $d = +\infty$.

Доказательство теоремы 1.6.3 весьма сложно. Мы приведем его в следующем параграфе после соответствующей подготовки.

1.6.4. Следствие (интегральная теорема Коши). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, ограниченная конечным числом попарно непересекающихся спрямляемых замкнутых жордановых кривых. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ выполняется равенство*

$$\int_{\partial^+ D} f(z)\, dz = 0.$$

При этих же условиях справедлива интегральная формула Коши и формула Коши для производных.

Доказательство. Используем теорему 1.6.3 и лемму 1.5.6 (a). Детали оставляем читателю. $\square$

1.6.2. Свойства локализационного оператора Витушкина.

Напомним, что если $f \in C^1(\mathbb{C})$, то по теореме Коши–Римана множество $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$ есть множество особых точек функции f (вне него f голоморфна). Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Рассмотрим функцию

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \varphi(\zeta)}{z - \zeta}\, d\Lambda(\zeta).$$

В последней формуле интегрирование (реально) ведется по множеству $K = \operatorname{supp}(\overline{\partial} f) \cap \operatorname{supp}(\varphi)$. По лемме 1.5.6 функция $f_{(\varphi)}$ голоморфна вне K, т. е. ее особые точки лежат среди особых точек функции f и одновременно на $\operatorname{supp} \varphi$. Говорят, что оператор $f \mapsto f_{(\varphi)}$ (при фиксированном φ) *локализует* особенности f на $\operatorname{supp}(\varphi)$.

Пусть $f \in C_0^1(\mathbb{C})$ и $\{B_j, \varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ — стандартное δ-разбиение единицы (см. лемму 1.5.3). Положим

$$J = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon \overline{B_j} \cap \operatorname{supp}(\overline{\partial} f) \neq \varnothing\}.$$

Очевидно, что J — конечное множество индексов, причем функция

$$\varphi = \sum_{j \in J} \varphi_j$$

удовлетворяет условиям $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$ и $\varphi(z) = 1$ в некоторой окрестности $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$.

Пусть $f_j = f_{(\varphi_j)}$. Тогда по теореме 1.5.1 имеем

$$\sum_{j \in J} f_j(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \sum_{j \in J} \varphi_j(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta} = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta} = f(z)$$

для всех z. Тем самым f разлагается в конечную сумму функций с «локализованными» особенностями. (Для этой цели нельзя просто полагать $f_j = f\varphi_j$, так как φ_j не голоморфна в $\mathbb{C}$ и у таких f_j могут появиться новые особенности.)

Нашей ближайшей целью является получение аналогичного разложения для произвольной функции f класса $C_0(\mathbb{C})$.

Пусть пока $f \in C^1(\mathbb{C})$. Пользуясь формулой Помпейю, получаем

$$\begin{aligned} f_{(\varphi)}(z) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial}(f(\zeta)\varphi(\zeta)) - f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z - \zeta}\, d\Lambda(\zeta) = \\ &= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z - \zeta}\, d\Lambda(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \overline{\partial}\varphi(\zeta)\, d\Lambda(\zeta). \end{aligned}$$

Это уже нужная формула локализации.

1.6.5. Определение. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. *Локализационным* оператором (оператором Витушкина), соответствующим функции (индекс-функции) φ, называется оператор $f \mapsto V_\varphi f$, где $f \in C(\mathbb{C})$ и

$$\begin{aligned} V_\varphi f(z) \equiv f_{(\varphi)}(z) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \overline{\partial}\varphi(\zeta)\, d\Lambda(\zeta) = \\ &= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z - \zeta}\, d\Lambda(\zeta). \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

1.6.6. Лемма (свойства $V_\varphi f$). *Пусть $B = B(a,r)$, $\varphi \in C_0^1(B)$, т. е. $S := \operatorname{supp}(\varphi) \subset B$. При $f \in C_0(\mathbb{C})$ обозначим через $\omega(t)$ модуль непрерывности функции f на $\mathbb{C}$, $t \geqslant 0$. Тогда верно следующее:*

(а) *$V_\varphi f \equiv f_{(\varphi)} \in C(\mathbb{C}^\bullet)$, $f_{(\varphi)}(\infty) = 0$, причем имеет место оценка*

$$\|f_{(\varphi)}\| \leqslant 4\omega(r)r\|\overline{\partial}\varphi\|. \tag{1.6.11}$$

(б) *Если f голоморфна на открытом множестве U, то $f_{(\varphi)}$ голоморфна на множестве $U \cup (\mathbb{C} \setminus S)$, т. е. особенности $f_{(\varphi)}$ локализуются на носителе S функции φ.*

Пусть $U_1 = \{z\colon \varphi(z) = 1\}^\circ$, тогда $f - f_{(\varphi)} \in \mathcal{A}(U_1)$, т. е. $V_\varphi f$ «вбирает» в себя все особенности функции f на U_1.

(в) *Разложим $f_{(\varphi)}$ вне $\overline{B(a,r)}$ в ряд Лорана:*

$$f_{(\varphi)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}.$$

Тогда справедливы оценки

$$|c_n| \leqslant \omega(r)r^{n+1}\|\overline{\partial}\varphi\|. \tag{1.6.12}$$

Доказательство. Первое и второе утверждения в (а), а также голоморфность $f_{(\varphi)}$ вне S вытекают из леммы 1.5.6 (б) и локализационной формулы (1.6.10). Для доказательства (1.6.11) воспользуемся принципом максимума модуля вне B, согласно которому нам достаточно оценить $|f_{(\varphi)}(z)|$ только при $z \in \overline{B}$:

$$\begin{aligned}|f_{(\varphi)}(z)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_B \frac{|f(z)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|}|\overline{\partial}\varphi(\zeta)|\,d\Lambda(\zeta) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\omega(2r)\|\overline{\partial}\varphi\|\int_B \frac{1}{|z-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta) \leqslant 4\omega(r)r\|\overline{\partial}\varphi\|.\end{aligned}$$

При этом мы воспользовались очевидным неравенством $\omega(2r) \leqslant 2\omega(r)$ и оценкой, полученной в лемме 1.5.6:

$$\int_B \frac{1}{|z-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta) \leqslant 2\pi r.$$

(б) Пусть функция f голоморфна в $B(b,\delta) \subset U$; докажем, что верно включение $f_{(\varphi)} \in \mathcal{A}\big(B(b,\delta/2)\big)$. Выберем $\psi \in C_0^1(B(b,\delta))$ так, что $\psi(z) = 1$ в $B(b,\delta/2)$, и рассмотрим функции $g = f\psi$, $h = f(1-\psi)$, для которых $f_{(\varphi)} = g_{(\varphi)} + h_{(\varphi)}$. Для функции g класса $C_0^1(\mathbb{C})$ соответствующее утверждение доказано выше. Поскольку $h = 0$ в $B(b,\delta/2)$, голоморфность $h_{(\varphi)}$ в $B(b,\delta/2)$ вытекает из локализационной формулы и леммы 1.5.6 (б). Итак, $f_{(\varphi)} \in \mathcal{A}(U)$.

Аналогично по лемме 1.5.6 (б) и ввиду $\overline{\partial}\varphi = 0$ в U_1, имеем

$$f(z) - f_{(\varphi)}(z) = f(z)(1-\varphi(z)) + \frac{1}{\pi}\int_{S\setminus U_1} \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta) \in \mathcal{A}(U_1).$$

(в) Найдем c_n, $n \geqslant 1$. Из равенств

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{(f(z)-f(a)) - (f(\zeta)-f(a))}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta) =$$
$$= (f(z)-f(a))\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int_{B(a,r)} \frac{(f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta),$$

учитывая, что $\varphi(z) = 0$ вне $B(a,r) = B$ и используя формулу для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

(при $|z-a| > r$ ряд сходится равномерно по ζ на $\overline{B}$), получаем при $|z-a| > r$ разложение

$$f_{(\varphi)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^n}\left[-\frac{1}{\pi}\int_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\Lambda(\zeta)\right].$$

Следовательно,

$$c_n = -\frac{1}{\pi}\int_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\Lambda(\zeta). \tag{1.6.13}$$

Теперь оценка (1.6.12) тривиальна

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\| r^{n-1}\pi r^2 = \omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\| r^{n+1}.$$

□

1.6.3. Теорема Брауэра о продолжении непрерывной функции.

Завершим этот параграф кратким доказательством частного случая известной теоремы Брауэра – Титце – Урысона, необходимого для доказательства теоремы 1.6.3.

1.6.7. Теорема (Брауэр). *Если X — компакт в $\mathbb{C}$ и $f \in C(X)$, то найдется функция $F \in C_0(\mathbb{C})$ с условиями $F|_X = f$, $\|F\| \leqslant \|f\|_X$.*

Доказательство. Пусть $G_k = \{z\colon \operatorname{dist}(z,X) \in [2^{-k}, 2^{-k+1})\}$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $J(k)$ — совокупность тех индексов j в стандартном δ_k-разбиении единицы $\{B_j^k, \varphi_j^k\}$ при $\delta_k = 2^{-k-4}$, для которых $B_j^k \cap G_k$ непусто. При всех k и $j \in J(k)$ положим

$$\psi_j^k(z) = \varphi_j^k(z)\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z},\sigma\in J(l)} \varphi_\sigma^l(z)\Big)^{-1}.$$

Совокупность этих функций представляет собой локально конечное разбиение единицы на $G = \mathbb{C}\setminus X$ (проверить!). Пусть a_j^k — центр B_j^k и z_j^k — какая-либо конкретная точка на X, ближайшая к a_j^k. Теперь остается положить $F(z) = f(z)$ при $z \in X$ и

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j\in J(k)} f(z_j^k)\psi_j^k(z)$$

при $z \in G$. Окончательную проверку оставляем читателю. □

1.6.8. Упражнение. Пусть K_1 замкнуто, а K_2 — компакт в $\mathbb{C}$, причем $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Если $f \in C(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{C}\setminus(K_1 \cup K_2))$, то существуют такие функции f_1 и f_2 класса $C(\mathbb{C})$, голоморфные вне K_1 и K_2 соответственно, что $f = f_1 + f_2$. Эти функции f_1 и f_2 определены однозначно с точностью до аддитивных постоянных.

1.6.9. Упражнение. Пусть K — компакт, $\mathbb{C}\setminus K$ связно, $f \in \mathcal{A}(K)$. Тогда найдется такая последовательность полиномов $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем $p_n^{(k)} \to f^{(k)}$ при $n \to +\infty$ равномерно на K.

§ 1.7. Схема аппроксимации. Окончание доказательства теоремы Мергеляна

1.7.1. Оценка приближения при касании третьего порядка.

Доказательство теоремы 1.6.3. Зафиксируем компакт X с указанным в теореме условием и произвольную непрерывную функцию f на X, голоморфную на X°. Продолжим f по теореме Брауэра до функции $f \in C_0(\mathbb{C})$. Пусть $\omega(t) = \omega_{\mathbb{C}}(f, t)$ — модуль непрерывности функции f на $\mathbb{C}$ (тогда $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0+$). Мы докажем, что найдется такая константа $A_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует $g \in \mathcal{A}(X)$ с условием

$$\|f - g\|_X < A_0 \omega(\delta).$$

Затем останется устремить δ к 0.

Через $A_0, A_1, A_2, \ldots$ в доказательстве этой теоремы будут обозначаться положительные константы, которым, в принципе, можно придать конкретные числовые значения.

Зафиксируем произвольное число δ из $(0,1)$ и построим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ (см. лемму 1.5.3). Напомним, что $B_j = B(a_j, \delta)$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$,

$$0 \leqslant \varphi_j(z) \leqslant 1, \quad \|\overline{\partial}\varphi_j\| \leqslant \frac{A_1}{\delta}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1.$$

При каждом j положим

$$f_j(z) = V_{\varphi_j} f(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{(f(z) - f(\zeta))}{z - \zeta} \overline{\partial}\varphi_j(\zeta)\, d\Lambda(\zeta) =$$
$$= f(z)\varphi_j(z) - \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi_j(\zeta)}{z - \zeta}\, d\Lambda(\zeta).$$

Пусть

$$J_* = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon B_j \cap \operatorname{supp}(f) \neq \varnothing\}.$$

Отметим, что при $j \notin J_*$ имеем $f_j \equiv 0$, причем $\sharp J_*$ (через $\sharp E$ обозначается число элементов множества E) может иметь порядок $1/\delta^2$ (не выше), что «очень велико» при малом δ.

1.7.1. Лемма. *Каждая функция f_j обладает следующими свойствами:*

(а) $f_j \in C(\mathbb{C}^\bullet)$, $f_j(\infty) = 0$, $\|f_j\| \leqslant A_2 \omega(\delta)$;

(б) *функция f_j голоморфна на X° и вне* $\operatorname{supp}(\varphi_j)$; *в частности, если $B_j \subset X^\circ$, то $f_j \equiv 0$; наконец, $\sum_{j \in J_*} f_j \equiv f$;*

(в) *пусть*

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^j}{(z - a_j)^n}$$

есть ряд Лорана f_j вне $\overline{B_j}$. Тогда

$$|c_n^j| \leqslant A_2\omega(\delta)\delta^n.$$

Доказательство. Утверждения (а) и (в) вытекают сразу из леммы 1.6.6 при $r = \delta$. Установим (б). Рассмотрим

$$\varphi = \sum_{j\in J_*} \varphi_j,$$

где $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности $\operatorname{supp}(f)$, т. е.

$$\operatorname{supp}(f) \subset U_1 = \bigl(\varphi^{-1}(1)\bigr)^\circ.$$

Согласно утверждению (б) леммы 1.6.6, функция

$$f - \sum_{j\in J_*} f_j = f - f_{(\varphi)}$$

является целой и равной нулю в точке ∞, т. е. она — тождественный нуль. □

Пусть

$$J = \{j \in J_*\colon B_j \cap \partial X \neq \varnothing\}.$$

Если $j \notin J$, то либо $B_j \subset X^\circ$ и $f_j \equiv 0$, либо $B_j \cap X = \varnothing$ и по лемме 1.7.1(б) имеем $f_j \in \mathcal{A}(X)$, так что такие f_j не нуждаются в приближении.

Замечание. Если $\Lambda(\partial X) > 0$, то $\sharp J$ имеет порядок $1/\delta^2$, т. е. при приближении функции f с заданной точностью ε на первый взгляд мы должны бы приближать каждую f_j, $j \in J$, с точностью порядка $\varepsilon\delta^2$. Следующая лемма А. Г. Витушкина показывает, что достаточно приближать каждую f_j с точностью порядка ε, если дополнительно имеется «касание» третьего порядка на ∞.

1.7.2. Лемма (о касании третьего порядка). *Пусть существует такая постоянная $A_3 > 0$, что для каждого $j \in J$ найдется функция $g_j \in \mathcal{A}(X) \cap C(\mathbb{C})$, голоморфная вне $\overline{B_j^*} = \overline{B(a_j, 2\delta)}$, удовлетворяющая оценке $\|g_j\| \leqslant A_3\omega(\delta)$, причем*

$$f_j(z) - g_j(z) = O\Bigl(\frac{1}{z^3}\Bigr) \text{ при } z \to \infty,$$

т. е. f_j и g_j имеют касание порядка три на ∞.

Тогда найдется постоянная A_0 (выражающаяся только через постоянные A_1, A_2, A_3) с условием

$$\Bigl\|\sum_{j\in J}(f_j - g_j)\Bigr\| \leqslant A_0\omega(\delta).$$

Замечание. Смысл этой леммы таков: если ее требования выполнены при всех достаточно малых δ (где постоянная A_3 не зависит от δ), то $f \in \mathcal{A}_C(X)$, поскольку она равномерно на X (с точностью $A_0\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$) приближается функциями

$$g = \sum_{j\in J} g_j + \sum_{j\in J_*\setminus J} f_j \in \mathcal{A}(X)$$

Доказательство леммы 1.7.2. Ниже подразумевается, что встречающиеся по мере необходимости константы $A_4, \dots, A_8$ выражаются только через A_1, A_2 и A_3. Разложим каждую функцию g_j (здесь всюду $j \in J$) в ряд Лорана вне $\overline{B_j^*}$:

$$g_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^j}{(z-a_j)^n}.$$

Напомним, что вне $\overline{B_j}$ имеем разложение

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^j}{(z-a_j)^n}.$$

Условие «касания» (порядка 3) эквивалентно тому, что

$$c_1^j = b_1^j, \quad c_2^j = b_2^j,$$

т. е. у функций f_j и g_j «уравнены» первые два коэффициента Лорана.

Следующие оценки сразу следуют из свойств f_j и g_j:

$$\|f_j - g_j\| \leqslant A_4\omega(\delta) \tag{1.7.14}$$

Теперь покажем, что при $|z-a_j| > 2\delta$ (т. е. вне $\overline{B_j^*}$) справедливы неравенства

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leqslant A_5\omega(\delta)\frac{\delta^3}{|z-a_j|^3}. \tag{1.7.15}$$

Действительно, пусть

$$F_j(z) = \big(f_j(z) - g_j(z)\big)(z-a_j)^3.$$

Тогда функция F_j голоморфна вне $\overline{B_j^*}$, причем особенность ∞ устранима для F_j, ибо F_j ограничена вблизи ∞ по условиям «касания». Так как на $\overline{B_j^*}$ очевидным образом (см. (1.7.14)) выполнено неравенство

$$|F_j(z)| \leqslant A_4\omega(\delta)(2\delta)^3 = A_5\omega(\delta)\delta^3,$$

то по принципу максимума модуля вне $\overline{B_j^*}$ последняя оценка верна для всех z, что дает (1.7.15).

Зафиксируем z и оценим величину

$$\Big|\sum_{j\in J}(f_j(z) - g_j(z))\Big|.$$

Пусть

$$J_1 = \{j \in J\colon |z - a_j| \leqslant 2\delta\},$$

а при $k = 2, 3, \ldots$ положим

$$J_k = \{j \in J\colon k\delta < |z - a_j| \leqslant (k+1)\delta\}.$$

Из элементарной геометрии находим, что $\sharp J_k \leqslant A_6 k$ при всех $k \geqslant 1$. Отсюда, а также из (1.7.14) и (1.7.15) окончательно получаем

$$\Big|\sum_{j\in J}(f_j(z) - g_j(z))\Big| \leqslant \sum_{j\in J_1}|f_j(z) - g_j(z)| + \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{j\in J_k}|f_j(z) - g_j(z)| \leqslant$$

$$\leqslant A_7\omega(\delta) + \sum_{k=2}^{+\infty} A_6 k A_5 \omega(\delta)\frac{1}{k^3} = A_0\omega(\delta).$$

что завершает доказательство леммы. □

Отметим, что ввиду замечания, сделанного перед доказательством леммы 1.7.2, нам остается для всех достаточно малых $\delta \in (0,1)$ найти функции g_j, удовлетворяющие условиям этой леммы.

1.7.2. Окончание доказательства теоремы Мергеляна.

Завершим доказательство теоремы 1.6.3.

1.7.3. Предложение. *При условиях теоремы* 1.6.3 *и обозначениях леммы* 1.7.2, *для любого* $\delta < \min\{1, d/3\}$ *существуют соответствующие функции* g_j, $j \in J$.

Доказательство. Зафиксируем δ, $0 < \delta < \min\{1, d/3\}$, $j \in J$. Тогда найдется такое $s \geqslant 0$, что $\Omega_s \cap B_j \neq \varnothing$ и, следовательно, имеется жорданова ломаная $\Gamma_1\colon [0,1] \to \Omega_s \cap B_j^*$ с условием $\operatorname{diam}([\Gamma_1]) = \delta$, где $B_j^* = B(a_j, 2\delta)$. Поскольку функция $\operatorname{diam}(\Gamma_1([t_0, t]))$ непрерывна по t ($0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant 1$), нетрудно показать, что существуют t_1 и t_2 ($0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$) такие, что ломаная $\Gamma = \Gamma_1|_{[t_1,t_2]}$ с началом $\Gamma(t_1) = \alpha$ и концом $\Gamma(t_2) = \beta$ обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{diam}(\Gamma) = |\beta - \alpha| = \delta, \quad \Gamma \subset \Omega_s \cap B_j^*.$$

В частности, Γ лежит вне X (здесь и далее мы отождествляем ломаную Γ и ее носитель).

Положим

$$G_1 = B(\alpha, \delta) \cap B(\beta, \delta),$$

так что $\Gamma \subset \overline{G_1}$. Пусть I — замкнутый луч с вершиной в точке α, идущий в направлении $(\alpha - \beta)$. Нетрудно доказать, что в области $\mathbb{C} \setminus I$ существует голоморфная ветвь $V_1(z)$ многозначной функции $\sqrt{z-\alpha}$, а в $\mathbb{C} \setminus (I \cup \Gamma)$ — голоморфная ветвь $V_2(z)$ многозначной функции $\sqrt{z-\beta}$.

Положим

$$h_0(z) = V_1(z)V_2(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (I \cup \Gamma).$$

Так как при переходе через I функции V_1 и V_2 меняют только свой знак, то h_0 непрерывно продолжается на область $G = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, а из теоремы Мореры сразу следует, что $h_0 \in \mathcal{A}(G)$. Меняя, при необходимости, знак у V_1, мы дополнительно можем считать, что $h_0(z) = z + O(1)$ при $z \to \infty$. Теперь положим

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \frac{8}{\delta}\Big(h_0(z) - z + \frac{\alpha+\beta}{2}\Big) = \\ &= \frac{8}{\delta}\frac{(z-\alpha)(z-\beta) - \big(z - (\alpha+\beta)/2\big)^2}{h_0(z) + (z - (\alpha+\beta)/2)} = \\ &= \frac{8}{\delta}\frac{\alpha\beta - (\alpha+\beta)^2/4}{2z + O(1)} = -\frac{(\beta-\alpha)^2}{\delta(z + O(1))}. \end{aligned}$$

Следовательно, разложение Лорана функции h_1 вне B_j^* имеет вид:

$$h_1(z) = \frac{\delta e^{i\theta}}{z - a_j} + \frac{d_2}{(z-a_j)^2} + \cdots$$

(напомним, что $|\beta - \alpha| = \delta$, т. е. указанное $\theta \in \mathbb{R}$ существует).

По принципу максимума вне $\overline{G_1}$ (полагаем $h_1 = 0$ на Γ) имеем

$$\|h_1\| \leqslant \|h_1\|_{\overline{G_1}} \leqslant \frac{8}{\delta}(\delta + \delta) \leqslant 16,$$

откуда

$$|d_2| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a_j|=3\delta} h_1(\zeta)(\zeta - a_j)\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}16 \cdot 3\delta \cdot 2\pi 3\delta = 144\delta^2.$$

Пусть $\mu = \operatorname{dist}(X, \Gamma)$, U — открытая $\mu/2$-окрестность ломаной Γ. По теореме Брауэра продолжим h_1 из $\mathbb{C} \setminus (U \cap B_j^*)$ до функции $h \in C(\mathbb{C})$ с сохранением sup-нормы (вне B_j^* функция h_1 не меняется). При этом функция h голоморфна вне $\overline{U}$, т. е. в окрестности X.

Наконец, будем искать g_j в виде

$$g_j(z) = \lambda_1 h(z) + \lambda_2 (h(z))^2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Напомним, что

$$f_j(z) = \frac{c_1^j}{z - a_j} + \frac{c_2^j}{(z-a_j)^2} + \cdots, \quad |c_1^j| \leqslant A_2\delta\omega(\delta), \quad |c_2^j| \leqslant A_2\delta^2\omega(\delta).$$

Нужные условия «касания» имеют вид

$$c_1^j = \lambda_1 \delta e^{i\theta}, \quad c_2^j = \lambda_1 d_2 + \lambda_2 \delta^2 e^{2i\theta},$$

откуда λ_1 и λ_2 однозначно находятся, причем очевидны оценки

$$|\lambda_1| \leqslant A_8\omega(\delta), \quad |\lambda_2| \leqslant A_8\omega(\delta).$$

Таким образом, $\|g_j\| \leqslant A_3\omega(\delta)$. □

Теорема 1.6.3 полностью доказана. □

1.7.4. Упражнение. Привести пример такого компакта K, что его внутренность K° связна, односвязна и плотна в K, но $C_{\mathcal{A}}(K) \neq R(K)$.

1.7.5. Упражнение. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Доказать, что оператор Витушкина $V_\varphi\colon f \mapsto V_\varphi f$, действующий по формуле (1.6.10), непрерывен в следующих пространствах: (1) $\mathrm{Lip}_\tau(\mathbb{C})$, $\tau \in (0,1)$; (2) $C^1(\mathbb{C})$.

1.7.6. Упражнение. Привести пример банахова подпространства в пространстве $C(\mathbb{C})$, разделяющего точки из $\mathbb{C}$, но не инвариантного относительно оператора Витушкина (указать кроме этого соответствующую индекс-функцию φ).

Программа спецкурса «Дополнительные главы комплексного анализа и некоторые приложения, 1 семестр»

1. Комплексные числа и планиметрия.

2. Метрическое доказательство Теоремы Жордана (о замкнутой жордановой кривой на плоскости) и ее следствия (по работе [2]).

(1) Доказательство, что всегда есть ограниченная компонента дополнения.
(2) Доказательство, что их не более одной.

3. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Выполнение всех аксиом, кроме параллельности. Анализ в пЛ.

4. Регулярные векторные поля на плоскости. Теория обтекания крыла: теоремы Чаплыгина и Жуковского (см. также [3], гл. III, §2).

(1) До обтекания цилиндра с вихрем (искл).
(2) Обтекание цилиндра с вихрем. Крыло Жуковского. Условие Чаплыгина.
(3) Уравнения движения для идеальной жидкости. Закон Эйлера—Бернулли.
(4) Формулы Чаплыгина и Жуковского.

5. Формула Помпейю. Свойства потенциала Коши ограниченной функции на компакте.

6. Определение основных пространств функций. Доказательство теоремы Рунге.

7. Локализационный оператор Витушкина и его свойства.

8. Стандартное разбиение единицы и оценочная лемма при касании третьего порядка на ∞.

9. Доказательство теорем Мергеляна о приближении полиномами и рациональными функциями комплексного переменного.

10. Следствия теоремы Мергеляна: уточненные варианты интегральной теоремы и формулы Коши, формулы Коши для производных и теоремы о вычетах.

11. Примеры Рот и Долженко об отсутствии равномерной рациональной аппроксимации (см. также [4], гл. II: с. 41-42; гл. VIII: с. 285-287).

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Парамонов П.В. Конспект лекций (ПДФ) по спецкурсу, 2024.

[2] Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. *Доказательство Х. Тверберга теоремы о замкнутой жордановой кривой.*// Алгебра и анализ. Изд. Наука (СПб.). 2015, т. 27:5, с. 207-220.

[3] Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М. “Наука”, 1965.

[4] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М., “Мир”, 1973.

Задачи к экзамену по спецкурсу, 1 семестр

Задача 1. Доказать теорему Брианшона или теорему Паскаля о шестиугольниках.

Задача 2. Пусть γ — замкнутый жорданов путь в $\mathbb{C}$. По теореме Жордана, $\mathbb{C} \setminus [\gamma] = D \sqcup \Omega$, где D — ограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, Ω — неограниченная. Доказать, что $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ для всех $z \in \Omega$, $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ (или $\mathrm{ind}_\gamma(z) \equiv -1$) для всех $z \in D$.

Задача 3. Доказать неравенство треугольника для метрики Лобачевского в модели Пуанкаре.

Задача 4. Верна ли в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского теорема о медианах треугольника?

Задача 5. Пусть $D \subset \Pi_+$ — треугольник в пЛ, т. е. множество точек, ограниченных со всех сторон тремя отрезками пЛ. Пусть α, β, γ — абсолютные величины *внутренних* углов этого треугольника (в радианах). Доказать, что $S^+(D) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Задача 6. Доказать, что модельное обтекание барьера $(0, i]$ регулярным течением в верхней полуплоскости (конформный образ горизонтального течения) является вполне регулярным. Доказать отсутствие вполне регулярности для течения, определяемого каким-либо стандартным диполем.

Задача 7. Для диполя с параметром $\mu = 4\pi$ и центром в нуле найти время движения частицы по каждой своей замкнутой траектории.

Задача 8. Для внешности симметричного крыла Жуковского с параметрами $\theta = 0$, $\beta = 3$ найти функцию Шварца и ее особые точки.

Задача 9. Доказать следующий вариант теоремы Рунге. Если область D односвязна в $\mathbb{C}$, то пространство всех полиномов комплексной переменной плотно в пространстве $\mathcal{A}(D)$.

Задача 10. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Доказать, что оператор Витушкина V_φ непрерывен в пространстве $\mathrm{Lip}_\tau(\mathbb{C})$, $\tau \in (0, 1)$.

Задача 11. Привести пример компакта K, у которого K° связна, односвязна и плотна в K, но $C_{\mathcal{A}}(K) \neq R(K)$ (пример Долженко).

Задача 12. Пусть K_1 замкнуто, а K_2 — компакт в $\mathbb{C}$, причем $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Если $f \in C(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2))$, то существуют такие функции f_1 и f_2 класса $C(\mathbb{C})$, голоморфные вне K_1 и K_2 соответственно, что $f = f_1 + f_2$. Эти функции f_1 и f_2 определены однозначно с точностью до аддитивных постоянных.

Задача 13. Пусть $K = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, и пусть $f \in C(K)$. Верно ли, что если $f^2 \in P(K)$, то и $f \in P(K)$?

Задача 14. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ со связным дополнением, и пусть $f \in C(K)$. Доказать, что если $f^2 \in P(K)$, то и $f \in P(K)$.

Глава 2

Лекции, 2 семестр

§ 2.1. Аналитические емкости γ и α. Устранимые особенности голоморфных функций

2.1.1. Определение и простейшие свойства аналитической емкости γ.

Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$, $\Omega = \Omega(K)$ — неограниченная компонента множества $\mathbb{C}^\bullet \setminus K$. Через $\mathcal{A}1(\Omega)$ обозначим класс функций

$$\{f \in \mathcal{A}(\Omega)\colon \|f\|_\Omega \leqslant 1, f(\infty) = 0\}.$$

2.1.1. Определение. *Аналитической емкостью* компакта K называется величина

$$\gamma(K) = \sup\{|f'(\infty)|\colon f \in \mathcal{A}1(\Omega(K))\},$$

где $f'(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} zf(z)$ — старший коэффициент c_1 в разложении Лорана функции f в окрестности ∞:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n},$$

где z_0 — центр разложения, а коэффициент c_1 не зависит от z_0.

Нетрудно видеть, что γ — монотонная функция компактных множеств, т. е. $\gamma(K_1) \leqslant \gamma(K_2)$ для любых компактов K_1 и K_2 с условием $K_1 \subseteq K_2$.

Следующее утверждение тривиально (проверить!).

2.1.2. Предложение. *Пусть $L(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Тогда $\gamma(L(K)) = |a|\gamma(K)$.*

Пусть K — связный компакт, содержащий более одной точки. Нетрудно установить (проверить!), что тогда компакт $\widehat{K}$ тоже связен и, следовательно, область $\Omega = \Omega(K) = \mathbb{C}^\bullet \setminus \widehat{K}$ односвязна в $\mathbb{C}^\bullet$. По теореме Римана найдется единственное конформное отображение h области Ω на единичный круг $B_1 = \{w \in \mathbb{C}\colon |w| < 1\}$ с условиями $h(\infty) = 0$, $h'(\infty) > 0$.

2.1.3. Предложение. *В указанных условиях имеем $\gamma(K) = h'(\infty)$.*

Доказательство. Так как $h \in \mathcal{A}1(\Omega)$, имеем $\gamma(K) \geqslant h'(\infty)$. Пусть теперь $f \in \mathcal{A}1(\Omega)$ — произвольная функция. Функция $f(h^{-1}(w))$ удовлетворяет в B_1 условиям леммы Шварца, поэтому $|f(h^{-1}(w))| \leqslant |w|$ для всех $w \in B_1$. Отсюда $|f(z)| \leqslant |h(z)|$ всюду в Ω и, следовательно, $|f'(\infty)| \leqslant h'(\infty)$, так что $\gamma(K) \leqslant h'(\infty)$. □

2.1.4. Следствие. *Емкость замкнутого круга равна его радиусу. Емкость отрезка равна четверти его длины.*

Доказательство. Для кругов по предложению 2.1.2 достаточно установить, что $\gamma(\overline{B(0,1)}) = 1$. Для этого надо только заметить, что соответствующая функция h имеет вид $h(z) = 1/z$. Для случая отрезков, соответственно, достаточно рассмотреть случай $K = [-1, 1]$, и в качестве функции h взять обратную функцию Жуковского из $\Omega(K)$ на B_1. □

2.1.5. Упражнение. В условиях предложения 2.1.3 функция g класса $\mathcal{A}1(\Omega)$ с условием $g'(\infty) = \gamma(K)$ существует и единственна.

На самом деле последнее утверждение справедливо для любого компакта K. Функция g с указанными условиями называется функцией Альфорса (Ahlfors) компакта K. Здесь мы докажем только ее существование.

2.1.6. Предложение. *Для любого компакта K существует функция $g \in \mathcal{A}1(\Omega(K))$ с условием $g'(\infty) = \gamma(K)$.*

Доказательство. По определению емкости $\gamma(K)$ найдется последовательность функций $f_n \in \mathcal{A}1(\Omega(K))$ с условиями

$$f_n'(\infty) = (1 - 1/n)\gamma(K), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку семейство $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничено в $\Omega = \Omega(K)$, по теореме Монтеля оно предкомпактно в Ω. Следовательно, найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ в $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, которая сходится к некоторой функции g равномерно внутри Ω. Пусть $R > 0$ таково, что $K \subset B(0, R)$. Тогда

$$f_{n_k}'(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} f_{n_k}(z)\,dz \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} g(z)\,dz = g'(\infty) = \gamma(K)$$

при $k \to +\infty$. Ясно, что $g \in \mathcal{A}1(\Omega(K))$ по теореме Вейерштрасса. □

2.1.7. Предложение. *Пусть $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — невозрастающее семейство компактов и $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Тогда $\gamma(K) = \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma(K_n)$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.1.6. Легко установить, что $\Omega(K) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega(K_n)$. При каждом $N \in \mathbb{N}$ для семейства $\{g_n\}_{n>N}$, где g_n — функция Альфорса компакта K_n, следует применить теорему Монтеля в области $\Omega(K_N)$ и затем использовать метод диагональной последовательности. □

В приложениях очень полезен следующий факт.

2.1.8. Предложение. *Для всякого связного непустого компакта K имеем*

$$\frac{1}{15}\operatorname{diam}(K) \leqslant \gamma(K) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{diam}(K).$$

Доказательство. Оценка сверху вытекает из монотонности емкости γ и следствия 2.1.4 (проверить, поместив K в надлежащий круг). Докажем оценку снизу, пользуясь уже знакомой выкладкой из конца доказательства теоремы Мергеляна. Ввиду предложения 2.1.2 нам достаточно рассмотреть случай, когда $\operatorname{diam}(K) = 1$, а одной из пар диаметрально противоположных точек в K является пара $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$. Поскольку компакт K связен, то его оболочка $\widehat{K}$ также связна и содержится в множестве $E = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant 1, |z-1| \leqslant 1\}$, а область $\Omega = \Omega(K)$ односвязна в $\mathbb{C}^\bullet$. Как уже не раз обсуждалось в более общем контексте, в области Ω существует голоморфная ветвь $f_1(z)$ многозначной функции $\sqrt{1-1/z}$, принимающая положительные значения на $(1,+\infty)$. Тогда по теореме единственности функция $zf_1(z)$ имеет вне $\overline{B_1}$ разложение Лорана

$$z\Big(1 - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + \cdots\Big) = z - \frac{1}{2} - \frac{1}{8z} + \cdots .$$

Функция

$$f_2(z) = zf_1(z) - z + \frac{1}{2}$$

голоморфна в Ω и по принципу максимума ограничена в Ω величиной

$$A = \|\sqrt{|z(z-1)|} + |z - 1/2|\|_E \leqslant 1 + \sqrt{3}/2.$$

Поскольку $f_2/A \in \mathcal{A}1(\Omega)$ и $(f_2)'(\infty) = -1/8$, получаем

$$\gamma(K) \geqslant \frac{1}{8A} \geqslant \frac{1}{15}.$$

Отметим, что на самом деле точная нижняя оценка в указанных условиях имеет вид $4^{-1}\operatorname{diam}(K) \leqslant \gamma(K)$. Она достигается в случае, когда K есть отрезок. □

2.1.9. Упражнение. Доказать, что если компакт K лежит на прямой, то

$$\frac{\Lambda_1(K)}{4} \leqslant \gamma(K) \leqslant \frac{\Lambda_1(K)}{\pi},$$

где Λ_1 — длина на прямой.

На самом деле, в условиях этого упражнения всегда имеет место равенство $\gamma(K) = \Lambda_1(K)/4$.

Замечание. В предыдущем упражнении можем считать, что K есть подмножество в $\mathbb{R}$. Для получения нижней оценки (верхняя — достаточно проста) нужно рассмотреть функцию

$$f(z) = \int_K \frac{i}{z-t}\,dt, \quad z \in \Omega(K)$$

и оценить ее вещественную часть ($\|\operatorname{Re} f\|_{\Omega(K)} \leqslant \pi$). Функция $\operatorname{tg}(f/4)$ принадлежит классу $\mathcal{A}1(\Omega(K))$.

Установим еще одну оценку для емкости γ.

2.1.10. Предложение. *Пусть Λ — мера Лебега на плоскости. Тогда для любого компакта K справедлива оценка*

$$\gamma(K) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\Lambda(K)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \int_K \frac{d\,\Lambda(\zeta)}{z-\zeta}.$$

По лемме 1.5.6 о потенциале Коши (Гл. 3) функция f всюду определена и непрерывна, голоморфна вне K и

$$\|f\|_{\mathbb{C}} \leqslant 2\sqrt{\pi\Lambda(K)} =: A\,.$$

Остается учесть, что функция $f/A \in \mathcal{A}1(\Omega(K))$ и

$$\frac{f'(\infty)}{A} = \frac{\Lambda(K)}{A} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\Lambda(K)}.$$

Отметим, что точной здесь является оценка $\gamma(K) \geqslant \sqrt{\Lambda(K)/\pi}$, которая реализуется на кругах. □

Пусть теперь E — произвольное ограниченное множество в $\mathbb{C}$. Тогда, по определению, *аналитической емкостью* множества E называется величина

$$\gamma(E) = \sup\{\gamma(K)\colon K \subset E\},$$

где указанный sup берется по всем компактам K, содержащимся в E.

При этом емкость γ остается монотонной функцией множеств, а из предложения 2.1.7 непосредственно вытекает, что для всякого компакта K имеем $\gamma(K) = \inf\{\gamma(U)\colon K \subset U\}$, где указанный inf берется по всем ограниченным открытым множествам U, содержащим компакт K.

2.1.2. Множества голоморфно-устранимых особенностей для класса ограниченных функций.

Аналитическая емкость γ напрямую приспособлена к описанию множеств т.н. голоморфно-устранимых особенностей для класса ограниченных функций.

2.1.11. Определение. Компакт K в $\mathbb{C}$ называется *голоморфно-устранимым для класса ограниченных функций* (ГУОФ-компактом), если всякая функция f, голоморфная и равномерно ограниченная вне K, совпадает вне K с некоторой целой функцией, и, следовательно, является константой.

2.1.12. Предложение. *Компакт K является ГУОФ-компактом, если и только если $\gamma(K)=0$.*

Доказательство. Сначала заметим, что если K является ГУОФ-компактом, или если $\gamma(K)=0$, то K не разделяет плоскость, т. е. $\Omega = \Omega(K) = \mathbb{C}^\bullet \setminus K$, что эквивалентно условию $K=\widehat{K}$.

Если K является ГУОФ-компактом, то всякая функция $f\in\mathcal{A}1(\Omega)$ является постоянной (по теореме Лиувилля) и, следовательно, тождественно нулевой. Отсюда, по определению, $\gamma(K)=0$.

Обратно, пусть, от противного, $\gamma(K)=0$, но на Ω есть непостоянная ограниченная голоморфная функция f. Пусть $c_k z^{-k}+c_{k+1}z^{-k-1}+\cdots$ — разложение Лорана функции $f(z)-f(\infty)$ в окрестности ∞, где $k\in\mathbb{N}$ — минимальный номер с условием $c_k\neq 0$. Но тогда функция $f_\varepsilon(z) = \varepsilon z^{k-1}(f(z)-f(\infty))$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ принадлежит классу $\mathcal{A}1(\Omega)$. При этом имеем $f'_\varepsilon(\infty)=\varepsilon c_k\neq 0$, что противоречит условию $\gamma(K)=0$. □

Справедливо следующее более информативное (чем указанное в определении 2.1.11) свойство ГУОФ-компактов.

2.1.13. Предложение. *Пусть K является ГУОФ-компактом. Тогда для всякого открытого множества U в $\mathbb{C}$, содержащего K, и всякой функции f, голоморфной и равномерно ограниченной в $U\setminus K$, найдется функция $F\in\mathcal{A}(U)$ такая, что $F=f$ в $U\setminus K$.*

Доказательство. Пусть $d=\operatorname{dist}(K,\mathbb{C}\setminus U)$, тогда $d>0$. При фиксированном $\delta\in(0,d/3)$ пусть $\{B_j,\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ — стандартное δ-разбиение единицы на $\mathbb{C}$ класса $C^1(\mathbb{C})$, и пусть $J=\{j\in\mathbb{Z}^2\colon B_j\cap K\neq\varnothing\}$. Тогда функция $\varphi=\sum_{j\in J}\varphi_j$ принадлежит классу $C^1_0(U)$ и $\varphi(z)=1$ в некоторой окрестности V компакта K, $V\subset U$. Положим $f_{(\varphi)}=V_\varphi(f)$ — действие оператора Витушкина с индекс-функцией φ на f. Ровно также, как в лемме 1.5.6 доказывается, что $f_{(\varphi)}$ равномерно ограничена и голоморфна вне K (и, следовательно, $f_{(\varphi)}(z)=0$ вне K), а функция $F=f-f_{(\varphi)}$ голоморфна в $(U\setminus K)\cup V=U$. Что и требовалось. □

2.1.14. Упражнение. Доказать, что в условиях предложения 2.1.13 открытое множество U можно взять произвольным (не обязательно содержащим K).

2.1.3. Аналитическая C-емкость α и множества голоморфно-устранимых особенностей для класса непрерывных функций.

Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$, $K_c^\bullet=\mathbb{C}^\bullet\setminus K$ и

$$\mathcal{A}_C1(K_c^\bullet)=\{f\in C(\mathbb{C}^\bullet)\cap\mathcal{A}(K_c^\bullet)\colon \|f\|_{\mathbb{C}^\bullet}\leqslant 1, f(\infty)=0\}.$$

2.1.15. Определение. *Аналитической C-емкостью* компакта K называется величина

$$\alpha(K)=\sup\{|f'(\infty)|\colon f\in\mathcal{A}_C1(K_c^\bullet)\}.$$

Для произвольного ограниченного множества $E \subset \mathbb{C}$ полагаем

$$\alpha(E) = \sup\{\alpha(K) \colon K \subset E\}, \quad \mathcal{A}_C 1(E_c^\bullet) = \bigcup_{K \subset E} \mathcal{A}_C 1(K_c^\bullet),$$

где супремум и объединение берутся по всем компактам K, содержащимся в E.

Ясно, что α является монотонной функцией ограниченных множеств в $\mathbb{C}$ и что $\alpha(E) \leqslant \gamma(E)$ для любого ограниченного множества E.

Упражнение ниже совсем не сложно по модулю предложения 2.1.8 и теоремы Брауэра о продолжении непрерывных функций.

2.1.16. Упражнение. Доказать, что для всякого ограниченного открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ имеем $\alpha(U) = \gamma(U)$. В частности, для любой ограниченной области G имеем

$$\frac{1}{15}\operatorname{diam}(G) \leqslant \alpha(G) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{diam}(G).$$

2.1.17. Определение. Компакт K называется *голоморфно-устранимым для класса непрерывных функций* (ГУНФ-компактом), если всякая функция f, непрерывная на $\mathbb{C}^\bullet$ и голоморфная вне K является константой.

2.1.18. Упражнение. (i) Доказать, что предложения 2.1.2, 2.1.10, 2.1.12, 2.1.13, естественным образом переносятся на α-емкость.

(ii) Доказать, что α-емкость отрезка равна 0.

(iii) Если K — замыкание жордановой области, то $\gamma(K) = \alpha(K)$.

Переносятся ли на α-емкость другие свойства γ-емкости?

2.1.4. Аналитические емкости γ и α. Продолжение.

Ниже мы приведем без доказательства ряд «продвинутых» свойств аналитических емкостей γ и α.

Напомним определение p-мерного *обхвата по Хаусдорфу ограниченного* множества E в $\mathbb{C}$ ($p \in [0,2]$):

$$\mathcal{M}^p(E) = \inf \sum_j r_j^p,$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям $\{B_j\}$ множества E открытыми кругами (каждое $\{B_j\}$ есть не более чем счетное покрытие множества E кругами B_j в $\mathbb{C}$ с радиусами r_j).

Легко видеть, что если $\mathcal{M}^p(E) = 0$ при некотором $p \in [0,2)$, то $\mathcal{M}^q(E) = 0$ при всех $q \in (p,2]$. Величина

$$\dim_H(E) = \sup\{p \in [0,2] \colon \mathcal{M}^p(E) > 0\}$$

называется *размерностью по Хаусдорфу* множества E.

2.1.19. Упражнение. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ с условием $\mathcal{M}^1(K) = 0$. Тогда $\gamma(K) = 0$. В частности, это так при $\dim_H(K) < 1$.

2.1.20. Упражнение. Пусть K — компакт Дж. Гарнетта (1/4-себеподобный «квадрат»). Доказать, что $\mathcal{M}^1(K) > 0$ и $\dim_H(K) = 1$.

Гарнетт доказал (1970), что для его компакта $\gamma(K) = 0$.

2.1.21. Теорема. *Если K — компакт и $\dim_H(K) > 1$, то $\alpha(K) > 0$.*

Отметим, что при каждом фиксированном $p \in [0, 2]$ функция множеств $\mathcal{M}^p$ конечна и полуаддитивна, т. е.

$$\mathcal{M}^p(E_1 \cup E_2) \leqslant \mathcal{M}^p(E_1) + \mathcal{M}^p(E_2)$$

для всех ограниченных множеств E_1 и E_2. Утверждение о том, что это же свойство верно для емкостей γ и α, остается под вопросом (проблема полуаддитивности).

В этом смысле пока не существует адекватного метрического описания аналитических емкостей. Приведем известное *интеграл-геометрическое* описание емкостей γ и α (К. Толса, 2003-2004).

Для произвольной тройки точек $z, w, \zeta \in \mathbb{C}$ пусть $R(z, w, \zeta)$ — радиус окружности, проходящей через эти точки (полагаем $R(z, w, \zeta) = +\infty$, если эти точки лежат на одной прямой). Кривизной Менгера для тройки z, w, ζ называют величину $c(z, w, \zeta) = 1/R(z, w, \zeta)$.

Пусть μ — неотрицательная конечная борелевская мера в $\mathbb{C}$. *Кривизной* этой меры называется величина

$$c^2(\mu) = \iiint \big(c(z, w, \zeta)\big)^2 \, d\mu(z) \, d\mu(w) \, d\mu(\zeta) \, .$$

Это понятие ввел М. С. Мельников в 1995 г. при изучении дискретной версии аналитической емкости γ.

Для произвольного ограниченного множества E положим

$$\mathcal{M}_c1(E) = \{\mu\colon \operatorname{supp}(\mu) \subset E, c^2(\mu) \leqslant \mu(E), \mu(B(z, r)) \leqslant r \ \forall z \in \mathbb{C}, r > 0\};$$

$$\kappa(E) = \sup\left\{ \int d\mu\colon \mu \in \mathcal{M}_c1(E) \right\};$$

$$\kappa_c(E) = \sup\left\{ \int d\mu\colon \mu \in \mathcal{M}_c1(E), \frac{\mu(B(z, r))}{r} \to 0 \text{ при } r \to 0+ \ \ \forall z \in \mathbb{C} \right\}.$$

2.1.22. Теорема (К. Толса). *Найдется такая абсолютная константа $A > 1$, что справедливы неравенства*

$$A^{-1}\kappa(E) \leqslant \gamma(E) \leqslant A\kappa(E), \quad A^{-1}\kappa_c(E) \leqslant \alpha(E) \leqslant A\kappa_c(E)$$

для всех ограниченных множеств E.

Отсюда вытекает субаддитивность емкостй γ и α: найдется абсолютная константа $A_1 \geqslant 1$ такая, что

$$\gamma(E_1 \cup E_2) \leqslant A_1(\gamma(E_1) + \gamma(E_2)), \quad \alpha(E_1 \cup E_2) \leqslant A_1(\alpha(E_1) + \alpha(E_2))$$

для всех ограниченных борелевских множеств E_1, E_2.

До сих пор не известно: верно ли, что в последних двух неравенствах (о субаддитивности емкостей) можно взять $A_1 = 1$, т. е. что эти емкости полуаддитивны?

§ 2.2. Критерии А. Г. Витушкина равномерной приближаемости рациональными дробями для классов функций

2.2.1. Постановка задачи и теорема Бишопа о локальности класса $R(X)$.

Наша основная задача (о *индивидуальной* рациональной аппроксимации) состоит в следующем. Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, f — непрерывная комплекснозначная функция на X.

Задача 1. *Каковы условия на f и X, необходимые и достаточные для того, чтобы f можно было с любой точностью равномерно на X приблизить рациональными функциями с полюсами вне X?*

Класс всех функций на X, приближаемых в указанном смысле, обозначается через $R(X)$. Очевидно, что

$$R(X) \subset C_{\mathcal{A}}(X) := C(X) \cap \mathcal{A}(X^\circ),$$

где E° — множество внутренних точек множества E (при $X^\circ = \varnothing$ полагаем $C_{\mathcal{A}}(X) = C(X)$), а $C(E)$ (при произвольном $E \subset \mathbb{C}^\bullet$) — пространство всех комплекснозначных *непрерывных и ограниченных* на E функций f с равномерной нормой $\|f\|_E = \sup\{|f(z)|\colon z \in E\}$.

Напомним, что через $\mathcal{A}_C(X)$ обозначается замыкание в $C(X)$ пространства $\mathcal{A}(X)|_X$, где $\mathcal{A}(X)$ — класс всех функций, голоморфных (каждая в своей) окрестности компакта X. По теореме Рунге $\mathcal{A}_C(X) = R(X)$ для всякого компакта X, т. е. $f \in R(X)$, если и только если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $g \in \mathcal{A}(X)$ с условием $\|f - g\|_X < \varepsilon$. В этом случае, если функция f продолжена до функции класса $C_0(\mathbb{C})$, то g тоже можно выбрать с дополнительными условиями $g \in C_0(\mathbb{C})$ и $\|f - g\|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$ (доказать!).

В этом разделе обсуждается следующая проблема равномерной рациональной аппроксимации для классов функций.

Задача 2. *Для каких компактов X справедливо равенство $R(X) = C_{\mathcal{A}}(X)$?*

Иными словами: для каких X простейшее необходимое условие приближаемости является одновременно достаточным?

Сначала установим следующую теорему Бишопа о *локальности* класса $R(X)$.

2.2.1. Теорема. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$ и $f \in C(X)$. Тогда если найдется конечное покрытие $\{U_j\}_{j\in J}$ компакта X открытыми множествами U_j с условиями $f|_{X\cap\overline{U_j}} \in R(X\cap\overline{U_j})$ для всех $j \in J$, то $f \in R(X)$.*

Доказательство. Выберем такие функции $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$, $j \in J$, что функция $\varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j$ равна 1 в некоторой окрестности U компакта X. Пусть $X_j = X \cap \overline{U_j}$. Будем считать, что $f \in C_0(\mathbb{C})$, $f|_{X_j} \in R(X_j)$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $j \in J$ найдутся открытое множество W_j, содержащее X_j, и такая функция $g_j \in C_0(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}(W_j)$, что $\|f - g_j\| < \varepsilon$.

Положим $f_j = V_{\varphi_j} f$ и $h_j = V_{\varphi_j} g_j$. Тогда по лемме 1.6.6 функции f_j и h_j принадлежат $C(\mathbb{C})$ и $\|f_j - h_j\| \leqslant A_j \varepsilon$, где константы $A_j = A(\varphi_j)$ зависят только от φ_j. Более того, $h_j \in \mathcal{A}(W_j \cup (\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\varphi_j)))$, причем множество $Q_j = W_j \cup (\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\varphi_j))$ является открытой окрестностью компакта X.

Пусть $f_* = \sum_{j \in J} f_j = V_\varphi f$, $h_* = \sum_{j \in J} h_j$. Тогда $h_* \in C(\mathbb{C})$, h_* голоморфна в окрестности $\cap_{j \in J} Q_j$ компакта X и $\|f_* - h_*\| \leqslant A_* \varepsilon$, где $A_* = \sum_{j \in J} A_j$. По лемме 1.6.6 функция $f - f_* = f - V_\varphi f$ голоморфна в окрестности U компакта X. Таким образом, функция $h = h_* + f - f_*$ голоморфна в некоторой окрестности компакта X и справедлива оценка $\|f - h\| = \|h_* - f_*\| \leqslant A_* \varepsilon$. Остается ε устремить к нулю. □

2.2.2. Упражнение. Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, $f \in C(X)$ и $f \neq 0$ на X. Если $f^2 \in R(X)$, то $f \in R(X)$.

2.2.2. Критерий А. Г. Витушкина рациональной аппроксимации для классов функций.

Следующий критерий установлен А. Г. Витушкиным (1967).

2.2.3. Теорема. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Следующие условия эквивалентны:*

(a) $C_{\mathcal{A}}(X) = R(X)$;

(b) $\alpha(D \setminus X^\circ) = \alpha(D \setminus X)$ для любой ограниченной области D;

(c) найдутся такие $A > 0$, $\delta_0 > 0$ и $k \geqslant 1$, что

$$\alpha(B(a, \delta) \setminus X^\circ) \leqslant A \alpha(B(a, k\delta) \setminus X) \tag{2.2.1}$$

для каждого круга $B(a, \delta)$ с радиусом $\delta < \delta_0$;

(d) для каждой точки $a \in \partial X$ найдется такое $k \geqslant 1$, что

$$\varlimsup_{\delta \to 0} \frac{\alpha(B(a, \delta) \setminus X^\circ)}{\alpha(B(a, k\delta) \setminus X)} < +\infty. \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Докажем $(a) \Rightarrow (b)$. Пусть выполнено (a). Зафиксируем ограниченную область D с условием $D \cap \partial X \neq \varnothing$, иначе доказывать нечего. Положим $E = D \setminus X^\circ$. Тогда $\alpha = \alpha(E) > 0$ и, по определению $\alpha(E)$, для любого $\varepsilon \in (0, \alpha)$ найдутся компакт $K \subset E$ и функция $h \in \mathcal{A}_C 1(K_c^\bullet)$ с условием $h'(\infty) = c_1(h) > \alpha - \varepsilon$. Поскольку $h|_X \in C_{\mathcal{A}}(X) = R(X)$, найдется последовательность функций $\{h_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C(\mathbb{C}^\bullet)$, каждая h_n голоморфна в своей окрестности компакта X, с условием $h_n \rightrightarrows h$ на $\mathbb{C}^\bullet$ при $n \to +\infty$. Выберем функцию $\varphi \in C_0^1(D)$ с условием $\varphi(z) = 1$ в некоторой окрестности компакта K. По лемме 1.6.6 каждая функция $f_n = V_\varphi h_n$ голоморфна вне некоторого компактного подмножества $K_n \subset D \setminus X$, причем

$$\|h - f_n\| = \|V_\varphi(h - h_n)\| \leqslant A_\varphi \|h - h_n\| \to 0, |c_1(h) - c_1(f_n)| \leqslant A_\varphi \|h - f_n\| \to 0$$

при $n \to +\infty$, где $A_\varphi \in (0, +\infty)$ зависит только от φ. Таким образом, при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$f_n \in (1+\varepsilon)\mathcal{A}_C 1(K^\bullet_{nc}) \text{ и } |c_1(f_n)| > \alpha - \varepsilon,$$

т. е. $(1+\varepsilon)\alpha(D \setminus X) > \alpha - \varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем неравенство $\alpha(D \setminus X^\circ) \leqslant \alpha(D \setminus X)$, что и требовалось.

Включение $(b) \Rightarrow (c)$ очевидно.

Доказательство $(c) \Rightarrow (a)$ составляет основное содержание теоремы 2.2.3. Технически оно весьма сложно, поэтому мы разобьем его на несколько *этапов.*

Этап 1 (подготовительный).

Рассмотрим произвольный компакт X с условием (c) и любую непрерывную функцию f на X, голоморфную на X°. Продолжим f по теореме Брауэра до функции $f \in C_0(\mathbb{C})$. Пусть $\omega(t) = \omega_{\mathbb{C}}(f, t)$ — модуль непрерывности функции f на $\mathbb{C}$ (тогда $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0+$).

Мы докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $f_\varepsilon \in C_0(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}(X)$ с условием $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$. Затем останется устремить ε к 0.

Через $A, A_0, A_1, \ldots$ будут обозначаться положительные константы, которые могут менять свои значения в разных соотношениях.

Зафиксируем произвольное число $\delta \in (0, \delta_0)$ и построим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ (см. лемму 1.5.3). Напомним, что при $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$ мы полагаем $a_j = \delta j_1 + i\delta j_2$ и $B_j = B(a_j, \delta)$. При этом

$$\varphi_j \in C^1_0(B_j), \quad 0 \leqslant \varphi_j(z) \leqslant 1, \quad \|\overline{\partial}\varphi_j\| \leqslant \frac{A_1}{\delta}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1.$$

При каждом j положим

$$f_j(z) = V_{\varphi_j} f(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{(f(z) - f(\zeta))}{z - \zeta} \overline{\partial}\varphi_j(\zeta)\, d\Lambda(\zeta) =$$
$$= f(z)\varphi_j(z) - \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi_j(\zeta)}{z - \zeta}\, d\Lambda(\zeta).$$

Пусть

$$J_* = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon B_j \cap \operatorname{supp}(f) \neq \varnothing\}.$$

При $j \notin J_*$ имеем $f_j \equiv 0$, причем множество J_* конечно. При $j \in J_*$ положим $E_j = B_j \setminus X^\circ$.

Напомним лемму 1.7.1.

2.2.4. Лемма. *Каждая функция f_j, $j \in J_*$ обладает следующими свойствами:*

(i) $f_j \in C(\mathbb{C}^\bullet)$, $f_j(\infty) = 0$, $\|f_j\| \leqslant A_2\omega(\delta)$;

(ii) *функция f_j голоморфна на X° и вне* $\operatorname{supp}(\varphi_j)$; *таким образом,*

$$f_j \in A_2\omega(\delta)\mathcal{A}_C 1(E^\bullet_{jc}), \quad |f'_j(\infty)| \leqslant A_2\omega(\delta)\alpha(E_j);$$

в частности, если $B_j \subset X^\circ$, то $f_j \equiv 0$, а при $B_j \cap X = \varnothing$ имеем включение $f_j \in \mathcal{A}(X) \subset R(X)$; наконец, $\sum_{j \in J_*} f_j \equiv f$.

Нам понадобится следующая техническая лемма.

2.2.5. Лемма. *Пусть $E \neq \varnothing$ — произвольное ограниченное множество в $\mathbb{C}$ и $h \in \mathcal{A}_C 1(E^\bullet_c)$. Тогда для всех $z \notin \hat{\overline{E}}$ справедливы оценки*

$$|h(z)| \leqslant \frac{\alpha(E)}{\mathrm{d}(z, E)}, \tag{2.2.3}$$

$$|h'(z)| \leqslant \frac{4\alpha(E)}{(\mathrm{d}(z, E))^2}, \tag{2.2.4}$$

причем вторая оценка верна и при всех $z \notin \overline{E}$.

Доказательство. Будем считать, что $\alpha(E) > 0$, иначе утверждение тривиально. По определению $\mathcal{A}_C 1(E^\bullet_c)$, найдется компакт $K \subset E$ с условием $h \in \mathcal{A}_C 1(K^\bullet_c)$, поэтому достаточно провести доказательство для *компактных* множеств E.

Зафиксируем $z \notin E$ и пусть U_z — компонента связности множества E_c, содержащая точку z. Пусть сначала $|h(z)| < 1$. Тогда по принципу максимума модуля $|h(\zeta)| < 1$ для всех $\zeta \in U_z$ (в частности, это всегда так, если U_z неограничена). При $\rho = \mathrm{d}(z, E)$ рассмотрим функцию

$$H(\zeta) = \frac{\rho}{\zeta - z} \frac{h(\zeta) - h(z)}{1 - \overline{h(z)}h(\zeta)}.$$

Поскольку $\|h\| \leqslant 1$, легко видеть, что $\|H\| \leqslant 1$. Кроме того, $H(\infty) = 0$. Поэтому $H \in \mathcal{A}_C 1(E^\bullet_c)$ (особенность в точке $\zeta = z$ устранима), так что $|H'(\infty)| = \rho|h(z)| \leqslant \alpha(E)$ и (2.2.3) установлена.

Для получения оценки (2.2.4) достаточно применить формулу Коши для первой производной и оценку (2.2.3):

$$|h'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, \rho/2)} \frac{h(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \leqslant \frac{4\alpha(E)}{\rho^2}.$$

Если же $|h(z)| = 1$, то h постоянна в U_z, и тогда $h'(z) = 0$. □

Пусть в условиях предыдущей леммы $E \subset \overline{B(a, r)}$. Разложим функцию h вне $\overline{B(a, r)}$ в ряд Лорана с центром в точке a:

$$h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n(h, a)}{(z - a)^n},$$

где (при любом $\varepsilon > 0$)

$$c_n(h,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r+\varepsilon)} h(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\, d\zeta. \tag{2.2.5}$$

В частности, $c_1(h,a) = c_1(h)$ не зависит от точки a. Так как $c_2(h,b) = c_2(h,a) + (a-b)c_1(h)$, то при $c_1(h) = 0$ второй коэффициент $c_2(h,a)$ также не зависит от a.

По определению емкости α имеем $|c_1(h)| \leqslant \alpha(E)$. Оценим остальные коэффициенты $c_n(h,a)$. Пусть $n \geqslant 2$. Подставляя оценку (2.2.3) в равенство (2.2.5) при $\varepsilon = r/(n-1)$ (т. е. $|\zeta - a| = r(1 + 1/(n-1)) = rn/(n-1)$) и учитывая, что $[n/(n-1)]^{n-1} < e$, получаем

$$|c_n(h,a)| \leqslant enr^{n-1}\alpha(E). \tag{2.2.6}$$

Пользуясь (2.2.6) и стандартной оценкой ряда Лорана функции h через геометрическую прогрессию, при $|z-a| > 2r$ получаем неравенства

$$|h(z)| \leqslant \frac{A\alpha(E)}{|z-a|}, \tag{2.2.7}$$

$$\left| h(z) - \frac{c_1(h)}{z-a} \right| \leqslant \frac{Ar\alpha(E)}{|z-a|^2}, \tag{2.2.8}$$

$$\left| h(z) - \frac{c_1(h)}{z-a} - \frac{c_2(h,a)}{(z-a)^2} \right| \leqslant \frac{Ar^3}{|z-a|^3}. \tag{2.2.9}$$

Этап 2. Схема приближения.

Изложим схему приближения функции $f = \sum_{j \in J_*} f_j$.

Пусть

$$J = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon B_j \cap \partial X \neq \varnothing\}.$$

Если $j \notin J$ то согласно лемме 2.2.4 имеем $f_j \in \mathcal{A}(X) \subset \mathbb{R}(X)$, так что такие f_j в приближении не нуждаются.

Пусть теперь $j \in J$. Положим $G_j = B(a_j, k\delta) \setminus X$. По определению емкости $\alpha(G_j)$ и согласно (c) теоремы 2.2.3, мы можем подобрать функции $f_j^* \in A\omega(\delta)\mathcal{A}_C 1(G_{jc}^\bullet) \subset R(X)$ с условием $c_1(f_j^*) = c_1(f_j)$. Положим $g_j = f_j - f_j^*$ ($f_j^* = f_j$, $g_j \equiv 0$ при $j \notin J$), тогда

$$\|g_j\| \leqslant A\omega(\delta), \quad c_1(g_j) = 0. \tag{2.2.10}$$

Далее, ввиду (2.2.6) при $E = E_j$, $E = G_j$ и $h = f_j$, $h = f_j^*$ соответственно (берем $n = 2$), имеем

$$|c_2(g_j)| \leqslant A\omega(\delta)\delta\alpha(G_j). \tag{2.2.11}$$

Применяя (2.2.10), (2.2.11) и (2.2.9) для $h = g_j$ и $E = B(a_j, k\delta)$, при $|z - a_j| > 2k\delta$ получаем:

$$|g_j(z)| \leqslant \frac{A\omega(\delta)\delta\alpha(G_j)}{|z-a_j|^2} + \frac{A\omega(\delta)\delta^3}{|z-a_j|^3}. \tag{2.2.12}$$

Отметим, что в случае $X^\circ = \varnothing$ доказательство можно завершить ровно по схеме (окончания) доказательства теоремы Мергеляна: коэффициенты $c_2(g_j)$ можно «уравнять» с помощью подходящих функций $\lambda_j(h_j^*)^2$, где $\lambda_j \in \mathbb{C}$ и $h_j \in \mathcal{A}_C 1(G_{jc}^\bullet)$ (проверить нужные оценки на $|\lambda_j|$!).

Основная идея дальнейшего доказательства состоит в том, что на самом деле нет необходимости уравнивать все вторые коэффициенты $c_2(g_j)$ функций g_j, $j \in J$, достаточно уравнять (с надлежащими оценками) только суммарные коэффициенты $\sum_{j\in\Gamma_{ms}} c_2(g_j)$ для специального разбиения $\{\Gamma_{ms}\}$ множества J на непересекающиеся «группы» Γ_{ms}.

Нам понадобятся следующие сокращенные обозначения. При $I \subset J$ и $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\begin{aligned}
\alpha_I &= \sum_{j\in I} \alpha(G_j), \quad G_I = \bigcup_{j\in I} G_j,\\
g_I &= \sum_{j\in I} g_j, \quad I'(z) = \{j \in I\colon |z-a_j| > 2k\delta\},\\
L'_I(z) &= \sum_{j\in I'(z)} \left(\frac{\delta\alpha_j}{|z-a_j|^2} + \frac{\delta^3}{|z-a_j|^3}\right).
\end{aligned}$$

Кроме того, пусть $L_I(z) = L'_I(z)$ при $I = I'(z)$, и $L_I(z) = 1 + L'_I(z)$ в противном случае. Ввиду (2.2.10) и (2.2.12) при любом $I \subset J$ справедлива оценка

$$|g_I(z)| \leqslant \sum_{j\in I} |g_j(z)| \leqslant A\omega(\delta) L_I(z). \tag{2.2.13}$$

Мы хотим разбить совокупность индексов J на непересекающиеся «группы» $\{\Gamma_{ms}\colon m \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant s \leqslant s_m\}$ и приблизить сумму локализованных функций в каждой группе как единое целое.

2.2.6. Определение. Подмножество Γ в J назовем «полной группой» индексов если выполняются следующие условия:

(1) Γ является «вертикальной и связной» в J. Это означает, что существует индекс $j^\Gamma = (j_1^\Gamma, j_2^\Gamma) \in \Gamma$ («вершина» группы Γ) такой, что для всех $j = (j_1, j_2) \in \Gamma$ имеем $j_1 = j_1^\Gamma$ и $j_2 \geqslant j_2^\Gamma$. Более того, для всех $j \in \Gamma$ и $j' \in J$ с условием $j'_1 = j_1^\Gamma$ и $j_2^\Gamma \leqslant j'_2 \leqslant j_2$ выполняется включение $j' \in \Gamma$.

(2) Γ можно представить в виде $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3$ таким образом, что для всех $j^\theta \in \Gamma^\theta$, $\theta = 1, 2, 3$, имеют место неравенства

$$j_2^1 < j_2^2 < j_2^3, \quad \left|a_{j^1} - a_{j^3}\right| \geqslant k'\delta, \tag{2.2.14}$$

где $k' \geqslant 4k$, зависящее только от k, будет выбрано позже, причем при $\theta = 1$ и $\theta = 3$ справедливы неравенства

$$\delta \leqslant \alpha_{\Gamma^\theta} < \delta + k\delta.$$

Опишем подробно процедуру разбиения множества J на «группы». Сначала мы разобьем множество J на «вертикальные» составляющие

$J_m = \{j \in J\colon j_1 = m\}$, $m \in \mathbb{Z}$ (число тех m, для которых $J_m \neq \varnothing$, конечно), а затем разделим каждое J_m на конечное число непересекающихся групп Γ_{ms}, $s = 1, \dots, s_m$, по следующей схеме. Начиная с самого нижнего индекса j в J_m (вершины группы Γ_{m1} в J_m), мы включаем в Γ_{m1} (двигаясь вверх без пропусков в J_m) все индексы $j \in J_m$ до тех пор, пока не наберем минимальную по числу элементов полную группу Γ_{m1}. Затем мы повторяем то же самое для $J_m \setminus \Gamma_{m1}$ и т. д. После построения нескольких полных групп $\Gamma_{m1}, \dots, \Gamma_{ms_{m-1}}$ (возможно даже пустого их семейства) может остаться последняя часть $\Gamma_{ms_m} = J_m \setminus \Gamma_{m1} \setminus \dots \Gamma_{ms_{m-1}}$ индексов в J_m, которая уже не содержит никакой полной группы. Эту часть Γ_{ms_m} мы назовем «неполной группой» (ясно, что для каждого m может возникнуть не более одной неполной группы). Фиксируем полученное разбиение $\{\Gamma_{ms}\}$ множества J.

Заметим, что каждая полная группа Γ_{ms} минимальна по построению, поэтому для ее второй части Γ^2_{ms} должно выполняться неравенство $\alpha_{\Gamma^2_{ms}} \leqslant k'k\delta$. Таким образом, по определению 2.2.6, ввиду (2.2.11) и (2.2.13), мы можем утверждать, что для каждой группы $\Gamma = \Gamma_{ms}$ (как полной, так и неполной) имеют место соотношения

$$\alpha_\Gamma \leqslant A\delta, \quad c_1(g_\Gamma) = 0, \tag{2.2.15}$$

$$|c_2(g_\Gamma)| \leqslant A\omega(\delta)\delta^2, \tag{2.2.16}$$

$$|g_\Gamma(z)| \leqslant A\omega(\delta)L_\Gamma(z), \quad \|g_\Gamma\| \leqslant A\omega(\delta). \tag{2.2.17}$$

Второе неравенство в (2.2.17) непосредственно вытекает из первого с учетом оценки

$$\|L_\Gamma\| \leqslant \|L_{J_m}\| \leqslant A, \tag{2.2.18}$$

которая, в свою очередь, следует из определения L_I, $I \subset J$, и сходимости соответствующего мажорирующего ряда:

$$A\sum_{l=1}^{+\infty}\bigl(l^{-2} + l^{-3}\bigr).$$

2.2.7. Лемма (Основная). *Для каждой полной группы* $\Gamma = \Gamma_{ms}$ *найдется функция* $h_\Gamma \in A\omega(\delta)\mathcal{A}_C 1(G^\bullet_{\Gamma c}) \subset R(X)$ *такая, что*

$$c_1(h_\Gamma) = 0, \quad c_2(h_\Gamma) = c_2(g_\Gamma),$$

причем для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|h_\Gamma(z)| \leqslant A\omega(\delta)L_\Gamma(z). \tag{2.2.19}$$

Доказательство. Вначале мы построим «заготовки» для функции h_Γ. Для каждого $j \in \Gamma$ выберем $h_j \in 2\mathcal{A}_C 1(G^\bullet_{jc}) \subset R(X)$ с условием $c_1(h_j) = \alpha(G_j) \equiv \alpha_j$. Разложим нашу группу Γ по определению 2.2.6: $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3$. Зафиксируем прозвольные $j^1 \in \Gamma^1$ и $j^3 \in \Gamma^3$ и положим $h^\theta = h_{j^\theta}$, $a^\theta = a_{j^\theta}$, $G^\theta = G_{j^\theta}$, $\alpha^\theta = \alpha(G^\theta)$ при $\theta = 1$ и $\theta = 3$.

Пусть $\lambda^\theta \in (0,1]$, $\theta = 1$ и $\theta = 3$, таковы, что $\alpha^1\lambda^1 = \alpha^3\lambda^3$. Положим $l = |a^1 - a^3|/\delta$ и рассмотрим функцию

$$h^{13}(z) = h^{13}(j^1, j^3, \lambda^1, \lambda^3, z) = \frac{\lambda^3 h^3(z) - \lambda^1 h^1(z)}{l}. \tag{2.2.20}$$

При $|z - a^\theta| > k\delta$, $\theta = 1$ и $\theta = 3$, пусть

$$h^\theta(z) = \frac{\alpha^\theta}{z - a^\theta} + \frac{\beta^\theta}{(z - a^\theta)^2} + \cdots$$

есть разложение Лорана функции h^θ с центром в точке a^θ.

Ввиду (2.2.6) при $h = h^\theta/2$ и $E = G^\theta$ имеем

$$|\beta^\theta| \leqslant A_0\delta\alpha^\theta, \tag{2.2.21}$$

где $A_0 > 0$ зависит только от k. Ясно, что $c_1(h^{13}) = 0$, причем

$$c_2(h^{13}) = c_2(h^{13}, a^1) = \lambda^1\alpha^1 i\delta + \frac{\lambda^3\beta^3 - \lambda^1\beta^1}{l}.$$

Таким образом, (2.2.21) дает неравенство

$$|c_2(h^{13}) - \lambda^\theta\alpha^\theta i\delta| \leqslant \frac{2A_0\delta\lambda^\theta\alpha^\theta}{l}.$$

Теперь зададим k' в (2.2.14) по формуле $k' = \max\{4A_0, 4k\}$. Поскольку $l \geqslant k'$ (см. (2.2.14)), мы получаем

$$|c_2(h^{13}) - \lambda^\theta\alpha^\theta i\delta| \leqslant \frac{\lambda^\theta\alpha^\theta\delta}{2}. \tag{2.2.22}$$

Используя (2.2.8) для $r = k\delta$, $E = G^\theta$ и $h = h^\theta$ ($\theta = 1$ и $\theta = 3$), применяя (2.2.21), получим, что при условии $|z - a^\theta| > 2k\delta$ (для обеих θ) справедлива оценка

$$\begin{aligned}|h^{13}(z)| &\leqslant \frac{1}{l}\left(\left|\lambda^3h^3(z) - \frac{\lambda^3\alpha^3}{z-a^3}\right| + \left|\lambda^1h^1(z) - \frac{\lambda^1\alpha^1}{z-a^1}\right| + \left|\frac{\lambda^3\alpha^3}{z-a^3} - \frac{\lambda^1\alpha^1}{z-a^1}\right|\right)\\ &\leqslant \frac{A\lambda^3\alpha^3\delta}{|z-a^3|^2} + \frac{A\lambda^1\alpha^1\delta}{|z-a^1|^2} + \frac{\lambda^1\alpha^1|a^3-a^1|/l}{|z-a^3||z-a^1|}\\ &\leqslant A_2\left(\frac{\lambda^1\alpha^1\delta}{|z-a^1|^2} + \frac{\lambda^3\alpha^3\delta}{|z-a^3|^2}\right).\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Из (2.2.14) и неравенства $|a^1 - a^3| \geqslant k'\delta \geqslant 4k\delta$ при $|z - a^\theta| \leqslant 2k\delta$ имеем $|z - a^{4-\theta}| > 2k\delta$, так что согласно (2.2.7) (при $h = h^{4-\theta}/2$),

$$|h^{13}(z)| \leqslant 2\lambda^\theta + \frac{A\lambda^{4-\theta}\alpha^{4-\theta}}{|z - a^{4-\theta}|}\,. \tag{2.2.24}$$

Мы построим функцию h_Γ как линейную комбинацию функций $h^{13} = h^{13}(j^1, j^3, \lambda^1, \lambda^3, \cdot)$. Элементарно проверяется, что для каждого $j \in \Gamma^1 \cup \Gamma^3$ найдутся $\lambda(j,p)$ ($p = 1, \ldots, p_j$) со следующими свойствами:

(1) $\lambda(j,p)>0$, $\sum_{p=1}^{p_j}\lambda(j,p)\leqslant 1$ для всех j;
(2) между множествами индексов

$$\Phi^\theta=\{(j,p)\colon j\in\Gamma^\theta, 1\leqslant p\leqslant p_j\},\quad \theta=1 \text{ и } \theta=3,$$

существует взаимно однозначное соответствие

$$\Phi^1\ni(j^1,p^1)\longleftrightarrow(j^3,p^3)\in\Phi^3,$$

для которого $\lambda(j^1,p^1)\alpha_{j^1}=\lambda(j^3,p^3)\alpha_{j^3}$;
(3) при $\theta=1$ и $\theta=3$

$$\sum_{(j,p)\in\Phi^\theta}\lambda(j,p)\alpha_j=\delta. \tag{2.2.25}$$

Положим

$$h=\sum_{(j^1,p^1)\in\Phi^1}\frac{\delta}{|a_{j^3}-a_{j^1}|}\bigl(\lambda(j^3,p^3)h_{j^3}-\lambda(j^1,p^1)h_{j^1}\bigr), \tag{2.2.26}$$

где (j^3,p^3) соответствует (j^1,p^1) в вышеуказанном смысле. Каждое слагаемое суммы (2.2.26) в точности имеет вид (2.2.20) при $\lambda^\theta=\lambda(j^\theta,p^\theta)$. Ясно, что $c_1(h)=0$, а ввиду (2.2.22) и (2.2.25) имеем

$$|c_2(h)|\geqslant\frac{1}{2}\sum_{(j,p)\in\Phi^1}\lambda(j,p)\alpha_j\delta=\frac{\delta^2}{2}. \tag{2.2.27}$$

Подставляя в (2.2.26) неравенства (2.2.23), (2.2.24) и (2.2.25), для всех $z\in\mathbb{C}$ получаем

$$|h(z)|\leqslant AL_\Gamma(z).$$

Остается взять $h_\Gamma=c_2(g_\Gamma)h/c_2(h)$ и воспользоваться (2.2.16), (2.2.27), а также последним неравенством. Лемма 2.2.7 доказана. □

Этап 3. Продолжение доказательства теоремы 2.2.3. Оценки.

Нам остается показать, что функция $f=\sum_j f_j$ равномерно на $\mathbb{C}$ с точностью $A\omega(\delta)$ приближается функцией

$$F=\sum_{j\notin J}f_j+{\sum_{m,s}}'\Biggl(\sum_{j\in\Gamma_{ms}}f_j^*+h_{\Gamma_{ms}}\Biggr)+{\sum_{m,s}}''\sum_{j\in\Gamma_{ms}}f_j^*,$$

где ${\sum\limits_{m,s}}'$ и ${\sum\limits_{m,s}}''$ означают суммирования по всем полным и неполным группам соответственно. Иными словами, достаточно установить, что для всех $z\in\mathbb{C}$ верна оценка

$$|F(z)-f(z)|\leqslant{\sum_{m,s}}'|g_{\Gamma_{ms}}(z)-h_{\Gamma_{ms}}(z)|+{\sum_{m,s}}''|g_{\Gamma_{ms}}(z)|\leqslant A\omega(\delta),$$

после чего остается δ устремить к 0.

С этого момента мы фиксируем $z \in \mathbb{C}$, причем без ограничения общности мы предполагаем, что $|z| < \delta$ (при параллельном переносе плоскости, оставляющем на месте нашу δ-решетку, конструкция построения групп не меняется).

Пусть $\Gamma_m = \Gamma_{ms_m}$ является неполной группой в J_m (таких не более одной). Нетрудно видеть, что при $|m| \geqslant 2$ имеем

$$\sum_{j\in J_m} \frac{\delta^3}{|z-a_j|^3} \leqslant A_2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(m^2+l^2\right)^{3/2}} \leqslant A_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(m^2+t^2\right)^{3/2}} \leqslant \frac{A}{m^2}, \tag{2.2.28}$$

откуда из (2.2.15) и (2.2.17) при всех $m \in \mathbb{Z}$ получаем

$$|g_{\Gamma_m}(z)| \leqslant A\omega(\delta)\frac{1}{m^2+1}.$$

Поэтому

$$\sum_{m,s}'' |g_{\Gamma_{ms}}(z)| = \sum_m |g_{\Gamma_m}(z)| \leqslant A\omega(\delta) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m^2+1},$$

что и требовалось.

Для каждой полной группы Γ_{ms} положим $\Psi_{ms} = g_{\Gamma_{ms}} - h_{\Gamma_{ms}}$. Остается доказать, что

$$\sum_{m,s}' |\Psi_{ms}(z)| \leqslant A\omega(\delta), \tag{2.2.29}$$

где $z \in B(0,\delta)$.

Для всех m с условием $|m| \leqslant 4k$ нам достаточно иметь оценку

$$\sum_{s}' |\Psi_{ms}(z)| \leqslant A\omega(\delta), \tag{2.2.30}$$

которая непосредственно вытекает из (2.2.17) и (2.2.19).

Фиксируем m с условием $|m| > 4k$ и обозначим через d_{ms} диаметр множества $E_{ms} = \bigcup_{j\in\Gamma_{ms}} B(a_j, k\delta)$, т. е.

$$d_{ms} = \max_{j,j'\in\Gamma_{ms}} |a_j - a_{j'}| + 2k\delta.$$

Пусть S'_m — множество индексов s, для которых $d_{ms}/\delta \leqslant |m|^{1/4}$, а S''_m — совокупность остальных индексов (здесь и далее группы Γ_{ms} являются полными).

Пусть $s \in S'_m$. Положим $a = a_{ms} = a_{j_{ms}}$, где j_{ms} — вершина группы Γ_{ms}, $r = d_{ms}$, $E = E_{ms}$. Применим (2.2.9) при $g = \Psi_{ms}$. Последнее возможно, поскольку $\|\Psi_{ms}\| \leqslant A\omega(\delta)$ и $|z-a| > (|m|-1)\delta \geqslant 3|m|^{1/4}\delta \geqslant 3r$.

Ввиду $c_1(\Psi_{ms}) = c_2(\Psi_{ms}) = 0$, получаем

$$|\Psi_{ms}(z)| \leqslant \frac{A\omega(\delta)(\delta|m|^{1/4})^3}{|z-a_{ms}|^3}.$$

Так как все a_{ms} различны, то также как в (2.2.28):

$$\sum_{s\in S'_m} |\Psi_{ms}(z)| \leqslant A_2\omega(\delta)|m|^{3/4} \sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m^2+q^2)^{3/2}} \leqslant \frac{A_3\omega(\delta)}{|m|^{5/4}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{|m|>4k} \sum_{s\in S'_m} |\Psi_{ms}(z)| \leqslant \sum_{|m|>4k} \frac{A_3\omega(\delta)}{|m|^{5/4}} \leqslant A\omega(\delta). \tag{2.2.31}$$

Пусть теперь $|m|>4k$, $s\in S''_m$. Обозначим через b_{ms} точку из множества $\{a_j\colon j\in\Gamma_{ms}\}$, ближайшую к точке z. Ввиду (2.2.15), (2.2.17) и (2.2.19) получаем

$$|\Psi_{ms}(z)| \leqslant \sum_{j\in\Gamma_{ms}} \frac{A\omega(\delta)\delta\alpha_j}{|z-a_j|^2} + \sum_{j\in\Gamma_{ms}} \frac{A\omega(\delta)\delta^3}{|z-a_j|^3} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A_2\omega(\delta)\delta^2}{|z-b_{ms}|^2} + \sum_{j\in\Gamma_{ms}} \frac{A\omega(\delta)\delta^3}{|z-a_j|^3}. \tag{2.2.32}$$

Заметим, что для всех $s\in S''_m$ имеем $d_{ms}/\delta > m^{1/4}$, поэтому на каждом отрезке длины $\delta m^{1/4}$, принадлежащем прямой $\{\zeta\colon \operatorname{Re}\zeta = m\delta\}$, лежит не более трех различных точек b_{ms}, $s\in S''$.

Поэтому из (2.2.32) и (2.2.28) следует, что

$$\sum_{s\in S''_m} |\Psi_{ms}(z)| \leqslant A_3\omega(\delta) \sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{\delta^2}{m^2\delta^2+(q|m|^{1/4}\delta)^2} + \sum_{j\in J_m} \frac{A\omega(\delta)\delta^3}{|z-a_j|^3} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A_4\omega(\delta)}{|m|^{5/4}} + \frac{A_4\omega(\delta)}{m^2} \leqslant \frac{A_5\omega(\delta)}{|m|^{5/4}},$$

и, окончательно,

$$\sum_{|m|>4k} \sum_{s\in S''_m} |\Psi_{ms}(z)| \leqslant \sum_{|m|>4k} \frac{A_5\omega(\delta)}{|m|^{5/4}} = A\omega(\delta).$$

Чтобы получить (2.2.29) остается просуммировать (2.2.30), (2.2.31) и последнее неравенство. Утверждение $(c)\Rightarrow(a)$ доказано.

Поскольку, очевидно, $(c)\Rightarrow(d)$, остается доказать, что нарушение любого из эквивалентных условий (a), (b) или (c) влечет нарушение условия (d).

Пусть (a) не выполняется, тогда (из отрицания (c)) найдутся $\delta_1>0$ и $a_1\in\mathbb{C}$ такие, что

$$\alpha\big(B(a_1,\delta_1)\setminus X^\circ\big) > 3\alpha\big(B(a_1,3\delta_1)\setminus X\big).$$

Положим $X_1 = X\cap\overline{B(a_1,2\delta_1)}$. Из монотонности α и последнего неравенства получаем

$$\alpha\big(B(a_1,\delta_1)\setminus X_1^\circ\big) > 3\alpha\big(B(a_1,\delta_1)\setminus X_1\big).$$

Поскольку условие (b) нарушается для X_1, имеем $C_{\mathcal{A}}(X_1) \neq R(X_1)$. Тогда найдутся $\delta_2 > 0$ и $a_2 \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\alpha\big(B(a_2, \delta_2) \setminus X_1^\circ\big) > 3^2 \alpha\big(B(a_2, 3^2\delta_2) \setminus X_1\big).$$

В частности, $3^2\alpha\big(B(a_2, 3^2\delta_2) \setminus X_1\big) < \delta_2$, поэтому $B(a_2, 3^2\delta_2) \setminus X_1$ не может содержать никакого диска радиуса δ_2. Но тогда

$$B(a_2, 3^2\delta_2) \subset B(a_1, 2\delta_1 + 2\delta_2), \quad \overline{B(a_2, 2\delta_2)} \subset B(a_1, 2\delta_1).$$

При этом $B(a_2, \delta_2) \setminus X_1 = B(a_2, \delta_2) \setminus X$ и

$$\alpha\big(B(a_2, \delta_2) \setminus X^\circ\big) > 3^2\alpha\big(B(a_2, 3^2\delta_2) \setminus X_1\big) \geqslant 3^2\alpha\big(B(a_2, 3^2\delta_2) \setminus X\big).$$

Кроме того, из условия $3^2\delta_2 \leqslant 2\delta_1 + 2\delta_2$ следует, что $\delta_2 < \delta_1/2$.

Повторяя это построение, т. е. полагая

$$X_n = \overline{B(a_n, 2\delta_n)} \cap X_{n-1} = \overline{B(a_n, 2\delta_n)} \cap X,$$

найдем такие $a_{n+1} \in \mathbb{C}$ и $\delta_{n+1} > 0$, что

$$\alpha\big(B(a_{n+1}, \delta_{n+1}) \setminus X_n^\circ\big) > 3^{n+1}\alpha\big(B(a_{n+1}, 3^{n+1}\delta_{n+1}) \setminus X_n\big), \tag{2.2.33}$$

откуда следует, что $\delta_{n+1} < \delta_n/2$ и $\overline{B(a_{n+1}, 2\delta_{n+1})} \subset B(a_n, 2\delta_n)$.

Таким образом, при $m > n$ имеем

$$|a_m - a_n| \leqslant \sum_{s=n}^{m-1} |a_{s+1} - a_s| \leqslant \sum_{s=n}^{m-1} 2\delta_s \leqslant 4\delta_n,$$

так что $\{a_n\}$ сходится к некоторой точке a с условием

$$|a_n - a| \leqslant 4\delta_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В частности,

$$B(a_n, \delta_n) \subset B(a, 5\delta_n), \quad B(a, (3^n - 4)\delta_n) \subset B(a_n, 3^n\delta_n), \quad n \geqslant 2.$$

Из (2.2.33) и монотонности α находим, что

$$\alpha\big(B(a, 5\delta_n) \setminus X^\circ\big) > 3^n\alpha\big(B(a, (3^n - 4)\delta_n) \setminus X\big),$$

так что условие (d) нарушается в точке a. Ясно, что $a \in \partial X$. Теорема доказана. $\square$

До сих пор открыта следующая проблема.

Пусть X — произвольный компакт в $\mathbb{C}$, $f \in C(X)$. Верно ли, что из условия $f^2 \in R(X)$ следует, что и $f \in R(X)$?

2.2.3. Топологические и метрические условия совпадения классов $C_{\mathcal{A}}(X)$ и $R(X)$.

Поскольку всегда

$$\alpha\big(B(a,\delta)\setminus X^{\circ}\big)\leqslant\delta \text{ и } \alpha\big(B(a,\delta)\setminus X\big)=\gamma\big(B(a,\delta)\setminus X\big),$$

при $k=1$ в (2.2.2) из теоремы 2.2.3 получаем следующие результаты.

2.2.8. Следствие. *Если компакт X удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{\delta\to 0}\frac{\gamma(B(a,\delta)\setminus X)}{\delta}>0$$

для каждой точки $a\in\partial X$, то $C_{\mathcal{A}}(X)=R(X)$.

2.2.9. Следствие. *Если каждая точка границы компакта X принадлежит границе некоторой компоненты дополнения этого компакта, то $C_{\mathcal{A}}(X)=R(X)$.*

Доказательство. Если точка $a\in\partial X$ принадлежит границе некоторой компоненты Ω дополнения к X, то при $\delta<\operatorname{diam}(\Omega)/3$ множество $B(a,\delta)\setminus X$ содержит жорданову дугу с диаметром, большим δ. Тогда из предложения 2.1.8 имеем $\gamma(B(a,\delta)\setminus X)>\delta/15$ и остается применить следствие 2.2.8. □

2.2.10. Следствие. *Если компакт X таков, что для всякой точки $a\in\partial X$ выполнено условие (на т.н нижнюю лебегову плотность множества $\mathbb{C}\setminus X$ в точке a)*

$$\varliminf_{\delta\to 0}\frac{\Lambda(B(a,\delta)\setminus X)}{\pi\delta^2}>0$$

то $C_{\mathcal{A}}(X)=R(X)$.

Доказательство. Утверждение вытекает из предложения 2.1.10 и следствия 2.2.8. □

2.2.4. Примеры отсутствия аппроксимации.

Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$ и $\{\Omega_j\}_{j\in J}$ — компоненты дополнения к X (множество J непусто и не более чем счетно). Множество

$$\partial_i X=\partial X\setminus\cup_{j\in J}\partial\Omega_j$$

называется *внутренней границей* компакта X.

Следующий пример компакта X с условием $C_{\mathcal{A}}(X)\neq R(X)$ основан на известном уже примере А. Рот.

2.2.11. Предложение. *Пусть $\overline{B_0}$ — замыкание некоторого открытого круга B_0, K — носитель (образ) жордановой кривой с условиями $\alpha(K)>0$, $K\setminus\{a\}\subset B_0$, где $a\in\partial B_0$ является концевой точкой K. Пусть $\{B_n=B(a_n,r_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ — семейство попарно внешних, т. е. с непересекающимися замыканиями, открытых кругов в B_0 со следующими* *условиями: для всякого $n \in \mathbb{N}$ замкнутый круг $\overline{B_n}$ касается K в одной точке b_n, каждая точка $b \in K$ является предельной для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и, наконец, $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n < +\infty$.*

Пусть $X = \overline{B_0} \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} B(a_n, r_n)$. Тогда $C_{\mathcal{A}}(X) \neq R(X)$.

Доказательство. Отметим, что здесь $\partial_i X = K \setminus \{a, b_1, b_2, \dots\}$ (построить такой компакт и проверить это условие). При этом мера

$$d\mu_z = dz|_{\partial^+ B_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} dz|_{\partial^+ B_n}$$

ортогональна $R(X)$. Пусть $f \in \mathcal{A}_C 1(K_c^\bullet)$, $f'(\infty) > 0$. Тогда $f \in C_{\mathcal{A}}(X)$, но $\int f(z)\, d\mu_z \neq 0$, т. е. $f \notin R(X)$. $\square$

2.2.12. Задача. Восстановить пропущенные детали в этом доказательстве.

Отметим, что в последнем примере компакт X имеет связную и односвязную внутренность. С помощью этого примера можно построить два *гомеоморфных* компакта X_1 и X_2 такие, что $C_{\mathcal{A}}(X_1) = R(X_1)$, но $C_{\mathcal{A}}(X_2) \neq R(X_2)$.

§ 2.3. Теорема М. С. Мельникова об оценке интеграла Коши

В этом параграфе доказывается теорема М. С. Мельникова об оценке интеграла Коши, имеющая важные приложения в теории рациональных аппроксимаций. Сначала установим несколько предварительных фактов.

2.3.1. Лемма. *Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$, $a \geqslant 0$. Если функция $f \in C(\mathbb{C}^\bullet)$ голоморфна вне K и $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant a$ для всех z, то*

$$|f'(\infty)| \leqslant \frac{8a}{\pi}\alpha(K).$$

Доказательство. Считаем, что $a > 0$, ибо иначе все просто. Так как $|\operatorname{Re}(f - f(\infty))| \leqslant 2a$, то для функции

$$g(z) = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi(f(z) - f(\infty))}{8a}\Big)$$

имеем $\|g\| \leqslant 1$. Поэтому $g \in \mathcal{A}_C 1(K_c^\bullet)$ и из определения $\alpha(K)$ получаем $|g'(\infty)| = |\pi f'(\infty)|/8a \leqslant \alpha(K)$, что и требовалось. □

Мы будем использовать симметрию $z \mapsto z^* = 1/\overline{z}$ относительно ∂B_1. Образ множества E относительно этой симметрии обозначим через E^*. Если функция f голоморфна на некотором непустом открытом множестве U, то функция $\overline{f(z^*)}$ будет голоморфной на U^*. Отметим, что $z^* = z$ на ∂B_1.

2.3.2. Лемма. *При $r \in (0, 1)$ пусть K — компактное подмножество кольца $\{r < |z| < 1\}$. Тогда*

$$\alpha(K^*) \leqslant \frac{8\alpha(K)}{r^2}, \quad \alpha(K) \leqslant 8\alpha(K^*).$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{A}_C 1(K_c^{*\bullet})$. Положим

$$g(z) = \frac{\overline{f(z^*)} - \overline{f(0)}}{2}.$$

Тогда $g \in \mathcal{A}_C 1(K_c^\bullet)$ и $g'(0) = \overline{f'(\infty)}/2$. Используя оценку (2.2.4) леммы 2.2.5, мы получаем неравенство $|f'(\infty)| = 2|g'(0)| \leqslant 8\alpha(K)/r^2$, откуда $\alpha(K^*) \leqslant 8\alpha(K)/r^2$. Оценка $\alpha(K) \leqslant 8\alpha(K^*)$ получается из (2.2.4) таким же способом. □

Пусть функция $h \in C(\mathbb{C}^\bullet)$ голоморфна в некоторой окрестности замкнутого кольца $\{r \leqslant |z| \leqslant 1\}$. Используя метод доказательства теоремы Лорана, мы можем представить функцию h в виде $h(z) = h_0(z) + h_1(z)$, где функция $h_0(z)$ голоморфна при $|z| \leqslant 1$, функция $h_1(z)$ голоморфна при $|z| \geqslant r$ и $h_1(\infty) = 0$, причем функции h_0 и h_1 непрерывны и ограничены всюду и голоморфны там, где голоморфна h. Такое представление единственно:

$$h_0(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial^+ B_1} \dfrac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, & |z| < 1, \\ h(z) + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial^+ B_r} \dfrac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, & |z| > r. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Из первого равенства и простой оценки получаем, что

$$|h_0(z)| \leqslant \frac{\|h\|_{B_1}}{1-r}, \quad |z| \leqslant r,$$

откуда $|h_1(z)| \leqslant 2\|h\|_{B_1}/(1-r)$ при $|z| \leqslant r$. Тогда по принципу максимума модуля (вне B_r) имеем

$$\|h_1\| \leqslant \frac{2\|h\|_{B_1}}{1-r}.$$

Предположим дополнительно, что функция h вещественна на ∂B_1. Выражая первый интеграл в (2.3.1) параметрически ($\zeta = e^{i\theta}$), перепишем его в виде

$$h_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} + 1 \right] h(e^{i\theta})\, d\theta, \quad |z| < 1.$$

Теперь заметим, что функция

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

является в точности ядром Пуассона. Следовательно,

$$|\operatorname{Re} h_0(z)| \leqslant \|h\|_{\partial B_1} \text{ при } |z| < 1.$$

Из равенства $h_1 = h - h_0$ и принципа максимума тогда следует, что

$$\|\operatorname{Re} h_1\| \leqslant 2\|h\|_{B_1}$$

и, кроме того,

$$\|\operatorname{Re} h_0\| \leqslant 3\|h\|.$$

2.3.3. Лемма. *Пусть $r \in (0,1)$ и K — компактное подмножество в кольце $\{r < |z| < 1\}$. Тогда*

$$\alpha(K \cup K^*) \leqslant \frac{134\alpha(K)}{r^2}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$|g'(\infty)| \leqslant \frac{67\alpha(K)}{r^2}$$

для всякой функция $g \in \mathcal{A}_C 1((K \cup K^*)^\bullet_c)$ с условием $g(z^*) = \overline{g(z)}$. Общий случай сводится к этому, поскольку всякую функцию $f \in \mathcal{A}_C 1((K \cup K^*)^\bullet_c)$

можно представить в виде $f = f_1 + if_2$, где

$$f_1(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z^*)}}{2}, \quad f_2(z) = \frac{f(z) - \overline{f(z^*)}}{2i},$$

а затем воспользоваться уже полученной оценкой отдельно для f_1 и f_2.

Итак, пусть функция g такова, как сказано выше, тогда она вещественна на ∂B_1. Положим $g = g_0 + g_1$, где g_0 голоморфна на B_1, а g_1 голоморфна вне B_1 и $g_1(\infty) = 0$ (при этом g_0 и g_1 голоморфны там, где голоморфна g, т. е. вне $K \cup K^*$). В силу предыдущих замечаний имеем $\|\operatorname{Re} g_0\| \leqslant 3$ и $\|\operatorname{Re} g_1\| \leqslant 2$. Используя леммы 2.3.1 и 2.3.2, мы получаем

$$|g'(\infty)| \leqslant |g_0'(\infty)| + |g_1'(\infty)| \leqslant \frac{16}{\pi}\alpha(K) + \frac{24}{\pi}\alpha(K^*) \leqslant \frac{16r^2 + 192}{\pi r^2}\alpha(K),$$

что и требуется с учетом $0 < r < 1$. □

2.3.4. Теорема (Мельников). *Существует такая абсолютная константа $A_0 \in (0, +\infty)$, что если B — открытый круг, K — произвольный компакт в $\overline{B}$, а функция $f \in C(\overline{B})$ является голоморфной на множестве $B \setminus K$, то*

$$\left| \int_{\partial^+ B} f(z)\, dz \right| \leqslant A_0 \|f\|_B \alpha(K \cap B).$$

Доказательство. Линейной заменой переменных мы можем свести задачу к случаю $B = B_1$. Кроме того, мы можем предположить, что функция f голоморфна в некоторой окрестности окружности ∂B_1. Действительно, из доказательства теоремы Мергеляна следует, что функцию f можно с любой точностью равномерно на $\overline{B_1}$ приблизить функциями, одновременно голоморфными как на области голоморфности функции f, так и в окрестности окружности ∂B_1. Из этих же соображений мы можем считать, что K — компакт в B_1. Наконец, мы можем положить $\|f\|_{B_1} = 1$.

Рассмотрим отдельно два частных случая.

Пусть сначала $K \subset B(0, 2/3) = B_{2/3}$. Положим $f = f_0 + f_1$, где функция f_0 голоморфна в B_1, а функция f_1 голоморфна вне K, причем $f_1(\infty) = 0$. Используя оценки, следующие за леммой 2.3.2, и полагая там $r = 2/3$, мы получаем $\|f_1\| \leqslant 6\|f\|_{B_1} = 6$, откуда

$$\int_{\partial B_1} f(z)\, dz = \int_{\partial B_1} f_1(z)\, dz = 2\pi i f_1'(\infty)$$

и, следовательно,

$$\left| \int_{\partial B_1} f(z)\, dz \right| \leqslant 2\pi |f_1'(\infty)| \leqslant 12\pi\alpha(K).$$

Во втором случае предположим, что K есть компактное подмножество кругового кольца $\{1/3 < |z| < 1\}$. Пусть

$$g(z) = z^2 f(z) - \frac{1}{\pi i} \int_{\partial B_1} \frac{\operatorname{Re}(\zeta^2 f(\zeta))}{\zeta - z}\, d\zeta = \\ = z^2 f(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} + 1\right] \operatorname{Re}(\zeta^2 f(\zeta))\, d\theta,$$

где $\zeta = e^{i\theta}$ и $|z| < 1$. Беря вещественные части и замечая, что функция $\operatorname{Re}(e^{i\theta} + z)/(e^{i\theta} - z)$ есть ядро Пуассона, мы получаем, что функция $\operatorname{Re} g$ принимает на ∂B_1 постоянное значение

$$a = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\zeta^2 f(\zeta))\, d\theta.$$

Функция g непрерывно продолжается на $\mathbb{C}^\bullet$ по формуле

$$g(z) = -\overline{g(z^*)} + 2a, \quad |z| \geqslant 1,$$

причем g голоморфна вне $K \cup K^*$ (по теореме Морера вблизи ∂B_1).

Ясно, что $|\operatorname{Re} g| \leqslant 3$ на B_1, откуда $|a| \leqslant 3$ и $|\operatorname{Re} g| \leqslant 9$ на $\mathbb{C}^\bullet$. Кроме того,

$$\overline{g'(\infty)} = -g'(0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial B_1} \frac{\operatorname{Re}(\zeta^2 f(\zeta))}{\zeta^2}\, d\zeta.$$

В силу лемм 2.3.1 и 2.3.3 имеем

$$\left| \int_{\partial B_1} \frac{\operatorname{Re}(\zeta^2 f(\zeta))}{\zeta^2}\, d\zeta \right| = \pi |g'(\infty)| \leqslant 72\alpha(K \cup K^*) \leqslant 10^5 \alpha(K).$$

Заменяя f на if, мы получаем оценку

$$\left| \int_{\partial B_1} \frac{\operatorname{Im}(\zeta^2 f(\zeta))}{\zeta^2}\, d\zeta \right| \leqslant 10^5 \alpha(K).$$

Суммируя эти неравенства, мы находим

$$\left| \int_{\partial B_1} f(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant 2 \cdot 10^5 \alpha(K).$$

Теперь завершим доказательство общего случая. Пусть K — произвольное компактное подмножество в B_1. Положим $K_1 = K \cap \overline{B_{2/3}}$ и $K_2 = K \cap \{1/3 \leqslant |z| < 1\}$. Найдется $\varphi \in C_0^1(B_{2/3})$ с условиями $\varphi(z) = 1$ в $\overline{B_{1/3}}$ и $\|\partial\varphi/\partial\overline{z}\| \leqslant 2$. Пусть

$$F(z) = V_\varphi f(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}\, d\Lambda(\zeta).$$

Функция F голоморфна вне K_1, $f - F$ голоморфна на $B_1 \setminus K_2$, причем обе эти функции непрерывны на $\overline{B_1}$. Из свойств оператора Витушкина имеем $\|F\| \leqslant 8\|f\|_{B_1} = 8$, откуда $\|f - F\|_{B_1} \leqslant 9$. Применяя уже полученные оценки к функциям F и $f - F$, мы получаем

$$\left|\int_{\partial B_1} f(z)\,dz\right| \leqslant \left|\int_{\partial B_1} F(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial B_1} (f(z) - F(z))\,dz\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|F\|\alpha(K_1) + \|f - F\|_{B_1} 2\cdot 10^5 \alpha(K_2) \leqslant (8 + 18\cdot 10^5)\alpha(K).$$

Теорема доказана. $\square$

2.3.1. Следствия из теоремы М. С. Мельникова.

2.3.5. Предложение. *Существует абсолютная константа $A > 0$ такая, что если K — произвольный компакт в $\overline{V}$, где $V = \{1 < |z| < R\}$, $R \in [2, +\infty)$, и $f \in C(\overline{V}) \cap \mathcal{A}(V \setminus K)$, то*

$$\left|\int_{\partial^+ V} f(z)\,dz\right| \leqslant A\|f\|_{\overline{V}}\alpha(K \cap V).$$

Доказательство. Продолжим функцию f непрерывно из $\overline{V}$ на $\mathbb{C}^\bullet$ с условием $\|f\| \leqslant \|f\|_{\overline{V}}$. Пусть $B = B(0, R)$ и $\varphi \in C_0^1(B)$ такова, что $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности $\overline{B_1}$, $\varphi \equiv 0$ вне B и $\|\overline{\partial}\varphi\| \leqslant 2$. Пусть $f_1 = V_\varphi(f)$ и $f_2 = f - f_1$, тогда $\|f_1\| + \|f_2\| \leqslant A_1\|f\|$. Как и в доказательстве теоремы 2.3.4 можно считать, что $K \subset V$. Достаточно установить нужную оценку для f_1 и f_2 (вместо f). Поскольку $f_2 \in \mathcal{A}(B \setminus K)$ имеем

$$\int_{\partial^+ V} f_2(z)\,dz = \int_{\partial^+ B} f_2(z)\,dz,$$

и нужная оценка вытекает из теоремы 2.3.4 для f_2 и B.

В случае f_1 можем считать, что $R = 2$. Положим $K_1 = K \cap \operatorname{supp}\varphi \subseteq \{1 < |z| < 2\}$. Функция f_1 голоморфна на $\overline{B_{1c}^\bullet} \setminus K_1$. Пусть $g(z) = \overline{f_1(z^*)}$. Тогда $g \in C(\overline{B_1}) \cap \mathcal{A}(B_1 \setminus K_1^*)$, где $K_1^* \subset B_1 \setminus B_{1/2}$. Полагая $g(z) = g(0) + g'(0)z + z^2 h(z)$, снова имеем $h \in C(\overline{B_1}) \cap \mathcal{A}(B_1 \setminus K_1^*)$. Кроме того,

$$|g'(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1/2} \frac{g(z)}{z^2}\,dz\right| \leqslant 2\|g\|_{B_1},$$

откуда

$$\|h\|_{B_1} = \sup_{1/2 \leqslant |z| \leqslant 1} |h(z)| \leqslant 16\|g\|_{B_1} = 16\|f_1\|_{B_{1c}^\bullet}.$$

Следовательно (сравнить разложения Лорана для f_1 и $g(z)/z^2$ в соответствующих кольцах),

$$\left|\int_{|z|=2} f_1(z)\,dz - \int_{|z|=1} f_1(z)\,dz\right| = \left|\int_{|z|=1/2} \frac{g(z)}{z^2}\,dz - \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^2}\,dz\right| =$$
$$\left|\int_{|z|=1} h(z)\,dz\right| \leqslant A_2\|h\|_{B_1}\alpha(K_1^*) \leqslant A_3\|f_1\|_{B_{1c}^\bullet}\alpha(K_1) \leqslant A\|f\|_{\overline{V}}\alpha(K \cap V),$$

что и требовалось. $\square$

В качестве еще одного следствия из теоремы 2.3.4 мы получаем частный случай субаддитивности емкости α.

2.3.6. Предложение. *Пусть K — произвольный компакт в $\mathbb{C}$. Тогда для любого открытого круга B имеем*

$$\alpha(K) \leqslant A(\alpha(K \cap B) + \alpha(K \setminus \overline{B})),$$

где $A \in (0, +\infty)$ — абсолютная константа.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $B = B_1$. Пусть $f \in \mathcal{A}_C 1(K_c^{\bullet})$, $f'(\infty) = \alpha(K)/2$ и $K \subset B(0, R)$, $R \geqslant 2$. Тогда

$$\pi\alpha(K) = 2\pi|f'(\infty)| = \left|\int_{|z|=R} f(z)\,dz\right| \leqslant \left|\int_{|z|=R} f(z)\,dz - \int_{|z|=1} f(z)\,dz\right| + \\ + \left|\int_{|z|=1} f(z)\,dz\right| \leqslant A\alpha(K \setminus \overline{B_1}) + A\alpha(K \cap B_1)$$

по предложению 2.3.5 и теореме 2.3.4. $\square$

§ 2.4. Критерии равномерной приближаемости рациональными дробями для индивидуальных функций

2.4.1. Критерий типа Витушкина для индивидуальной приближаемости.

Здесь и далее для $\lambda > 0$ и открытого круга $B = B(a, r)$ с центром в точке a и радиусом $r > 0$ через λB обозначается круг $B(a, \lambda r)$. Кроме того, пусть $B_r = B(0, r)$. Напомним обозначение

$$\overline{\partial}\varphi(a) = \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\bigg|_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\bigg|_a.$$

Зафиксируем неотрицательную функцию φ_1 класса $C^1(\overline{B_1}) \cap C(\mathbb{C})$ с условиями $\varphi_1(z) = 0$ вне $B(0,1)$ и $\displaystyle\int \varphi_1(z)\, d\Lambda(z) = 1$. Пусть $\|\overline{\partial}\varphi_1\|_{B_1} = A_1$. Положим

$$\varphi_\delta^a(z) = \frac{\varphi_1((z-a)/\delta)}{\delta^2}, \quad \varphi_\delta = \varphi_\delta^0. \tag{2.4.1}$$

Ясно, что $\|\overline{\partial}\varphi_\delta^a\|_{B(a,\delta)} = A_1/\delta^3$ и $\operatorname{supp}(\varphi_\delta^a) \subset \overline{B(a,\delta)}$.

Основной целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы (см. [4]).

2.4.1. Теорема. *Для произвольных компакта X и функции $f \in C_0(\mathbb{C})$ следующие условия эквивалентны:*

(a) $f|_X \in R(X)$;

(b) для всех $a \in \mathbb{C}$ и $\delta > 0$

$$\left|\int_{B(a,\delta)} f(z)\overline{\partial}\varphi_\delta^a(z)\, d\Lambda(z)\right| \leqslant AA_1\delta^{-2}\omega(f,\delta)\alpha(B(a,\delta)\setminus X), \tag{2.4.2}$$

где $A > 0$ — абсолютная константа;

(c) найдутся $k \geqslant 1$, $\delta_0 > 0$ и $\omega(t) \searrow 0$ при $t \searrow 0$ такие, что для всех $a \in \mathbb{C}$ и $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\left|\int_{B(a,\delta)} f(z)\overline{\partial}\varphi_\delta^a(z)\, d\Lambda(z)\right| \leqslant \delta^{-2}\omega(\delta)\alpha(B(a,k\delta)\setminus X). \tag{2.4.3}$$

2.4.2. Пример. В качестве простейшего примера можно взять функцию $\varphi_1(z) = 2(1 - z\overline{z})/\pi$ при $|z| \leqslant 1$, $\varphi_1(z) = 0$ для остальных z. Тогда $\|\partial\varphi_1/(\partial\overline{z})\|_{B_1} = A_1 = 2/\pi$, а соответствующие интегралы в формулировке теоремы 2.4.1 имеют вид:

$$\int_{B(a,\delta)} f(z)\overline{\partial}\varphi_\delta^a(z)\, d\Lambda(z) = -\frac{2}{\pi\delta^4}\int_{B(a,\delta)} f(z)(z-a)\, d\Lambda(z).$$

Доказательство теоремы 2.4.1. Докажем $(a) \Rightarrow (b)$. Зафиксируем круг $B(a,\delta)$. Поскольку $f|_X \in R(X)$, то по теореме Рунге (в форме $\mathcal{A}_C(X) = R(X)$) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется функция $g \in C_0(\mathbb{C})$, голоморфная в некоторой окрестности U компакта X, с условием $\|f - g\| < \varepsilon$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\varphi_1 \in C_0^1(B_1)$, т. е. $\varphi_\delta^a \in C_0^1(B(a,\delta))$. Положим

$$g_\delta^a(z) = V_{\varphi_\delta^a}(g)(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}\frac{\partial\varphi_\delta^a}{\partial\overline{\zeta}}\,d\Lambda(\zeta).$$

По свойствам локализационного оператора Витушкина имеем

$$\|g_\delta^a\| \leqslant 4\omega(g,\delta)\delta\|\overline{\partial}\varphi_\delta^a\| \leqslant 4(\omega(f,\delta)+2\varepsilon)\delta A_1\delta^{-3} := M$$

и функция g_δ^a голоморфна вне компакта $K = \operatorname{supp}(\varphi_\delta^a)\setminus U$, лежащего в $B(a,\delta)\setminus X$, т. е. $g_\delta^a/M \in \mathcal{A}_C 1(K_c^\bullet)$. Отсюда, по определению,

$$|(g_\delta^a)'(\infty)| \leqslant M\alpha(K) \leqslant M\alpha(B(a,\delta)\setminus X).$$

Поскольку

$$|(g_\delta^a)'(\infty)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{B(a,\delta)} g(\zeta)\overline{\partial}\varphi_\delta^a(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)\right| \leqslant M\alpha(B(a,\delta)\setminus X),$$

остается ε устремить к нулю, и мы получаем неравенство (2.4.2), т. е. свойство (b).

Чтобы установить оценку (2.4.2) в общей ситуации, при $n\in\mathbb{N}$ рассмотрим функции $\psi_{1n}(z) = (\varphi_1((n+1)z/n))^{(n+1)/n}$ и $\varphi_{1n} = \lambda_n\psi_{1n} \in C_0^1(B_1)$, где λ_n определяется условием $\int_{B_1}\varphi_{1n}(z)\,d\Lambda(z) = 1$. Поскольку, очевидно, $\psi_{1n} \rightrightarrows \varphi_1$ при $n\to+\infty$, имеем $\lambda_n \to 1$ при $n\to+\infty$.

Пусть $A_0 = \|\varphi_1\|$ и, как ранее, $A_1 = \|\overline{\partial}\varphi_1\|_{B_1}$. Тогда

$$\overline{\partial}\varphi_{1n}(z) = \lambda_n((n+1)/n)^2\,(\varphi_1((n+1)z/n))^{1/n}\,\overline{\partial}\varphi_1((n+1)z/n),$$

откуда $\overline{\partial}\varphi_{1n}(z) \to \overline{\partial}\varphi_1(z)$ при $n\to+\infty$ для всех $z\in\mathbb{C}\setminus\partial B_1$ и

$$\|\overline{\partial}\varphi_{1n}(z)\| \leqslant \lambda_n((n+1)/n)^2 A_0^{1/n}A_1 \to A_1$$

при $n\to+\infty$. Пусть теперь

$$\varphi_{\delta n}^a(z) = \frac{\varphi_{1n}((z-a)/\delta)}{\delta^2}.$$

Тогда

$$\overline{\partial}\varphi_{\delta n}^a(z) = \frac{\overline{\partial}\varphi_{1n}((z-a)/\delta)}{\delta^3}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\partial B(a,\delta),$$

и, следовательно, $\overline{\partial}\varphi_{\delta n}^a(z) \to \overline{\partial}\varphi_\delta^a(z)$ при $n\to+\infty$ для всех $z\in\mathbb{C}\setminus\partial B(a,\delta)$. Для функций φ_{1n} (вместо φ_1) оценка (2.4.2) установлена. Остается применить предельный переход (теорему Лебега о мажорируемой сходимости) при $n\to+\infty$.

Отметим, что мы допустили разрыв градиента у функции φ_1 на ∂B_1 для того (в частности), чтобы в примере 2.4.2 получить функцию

$$\overline{\partial}\varphi_\delta^a(z) = -\frac{2}{\pi\delta^4}(z-a), \quad z\in B(a,\delta),$$

наиболее простой и естественной формы.

Ввиду тривиальности $(b) \Rightarrow (c)$, нам остается установить $(c) \Rightarrow (a)$. Последнее утверждение и составляет наиболее важную часть данной теоремы.

Нетрудно видеть, что вместо рациональных аппроксимаций в данном контексте достаточно рассматривать аппроксимации функциями, голоморфными в окрестностях компакта X (каждая приближающая функция голоморфна в своей окрестности X). Выберем $R > 0$ так, чтобы $X \subset B(0, R)$. Кроме того мы предполагаем, что $f(z) = 0$ при $|z| > R$ и что в (2.4.3) имеет место $\omega(\delta) \geqslant \omega(f, \delta)$.

Зафиксируем $\delta \in (0, \delta_0)$ и построим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ класса C^∞ в $\mathbb{C}$. Последнее означает, что $B_j = B(a_j, \delta)$, $a_j = j_1\delta + ij_2\delta \in \mathbb{C}$, $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$, $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$,

$$0 \leqslant \varphi_j(z) \leqslant 1, \quad \|\overline{\partial}\varphi_j\| \leqslant \frac{A_1}{\delta}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1.$$

Здесь и далее через $A, A_1, A_2, \ldots$ обозначаются положительные константы (определяемые только параметром k и функцией ω), которые могут менять свои значения в разных соотношениях.

Построим новое разбиение единицы $\{(B'_j, \psi_j)\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$, где

$$\psi_j = \varphi_\delta * \varphi_\delta * \varphi_j, \quad B'_j = B(a_j, 3\delta).$$

Напомним, что $\varphi_\delta = \varphi_\delta^0$ и для двух непрерывных финитных функций g и h в $\mathbb{C}$ по определению

$$g * h(z) = \int g(z - \zeta)h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta).$$

Легко показать, что $\psi_j \in C_0^\infty(B'_j)$ и $\|\overline{\partial}\psi_j\| \leqslant A_1/\delta$. Введем «локализованные» функции

$$f_j(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial\psi_j}{\partial\overline{\zeta}}\, d\Lambda(\zeta).$$

Для произвольного класса функций $\mathcal{F}$ и числа $\tau \geqslant 0$ обозначим через $\tau\mathcal{F}$ класс функций $\{\tau g \colon g \in \mathcal{F}\}$.

Нам потребуется следующая лемма.

2.4.3. Лемма. *Функции f_j удовлетворяют следующим условиям:*

(1) $f_j \in A\omega(f, \delta)\mathcal{A}_C 1((B'_j \setminus X^\circ)_c^\bullet)$; *в частности, $f_j \equiv 0$, если $B'_j \subset X^\circ$;*

(2) $f = \sum_j f_j$ *и последняя сумма конечна, причем $f_j = 0$ при условии $B'_j \cap B(0, R) = \varnothing$;*

(3) *если $f_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^j (z - a_j)^{-n}$ — разложение Лорана функции f_j вне B'_j с центром a_j, то*

$$c_n^j = -\frac{1}{\pi} \int f(\zeta)(\zeta - a_j)^{n-1} \frac{\partial\psi_j}{\partial\overline{\zeta}}\, d\Lambda(\zeta). \tag{2.4.4}$$

Доказательство. Все утверждения этой леммы вытекают из леммы 1.6.6. Надо только проверить, что из условий (c) теоремы 2.4.1 при $X^\circ \neq \varnothing$ следует свойство $f \in \mathcal{A}(X^\circ)$. Докажем это. Возьмем произвольную точку $a \in X^\circ$. Пусть $B(a, 2r) \subset X^\circ$, $r > 0$. Докажем, что $f \in \mathcal{A}(B(a, r))$.

Пусть сначала известно, что $f \in C^1(B(a, 2r))$. Тогда из (c) для каждой точки $b \in B(a, r)$ и для всех $\mu > 0$ с условием $B(b, k\mu) \subset X^\circ$ интегрированием по частям получаем

$$\left|\int_{B(b,\mu)} f(z)\overline{\partial}\varphi_\mu^b(z)\,d\Lambda(z)\right| = \left|\int_{B(b,\mu)} \overline{\partial} f(z)\varphi_\mu^b(z)\,d\Lambda(z)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mu^{-2}\omega(\mu)\alpha(B(b, k\mu) \setminus X) = 0.$$

Из непрерывности функции $\overline{\partial} f(z)$ в $B(a, 2r)$ и неотрицательности функций φ_μ^b, устремляя μ к 0, получаем, что $\overline{\partial} f(b) = 0$, что и требовалось.

В общем случае применим к f *метод регуляризации.* Зафиксируем функцию χ_1 с теми же условиями, что и φ_1, но дополнительно потребуем, чтобы $\chi_1 \in C_0^\infty(B(0, 1))$. Положим $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2}\chi(z/\varepsilon)$ и введем регуляризованные функции $f_\varepsilon = f * \chi_\varepsilon$. Тогда $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{C})$ и $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ при $\varepsilon \to 0$ на $\mathbb{C}$. Наконец, при $\varepsilon < r/2$ и $k\mu < r/2$ при всех $b \in B(a, r)$ получаем

$$\int_{B(b,\mu)} f_\varepsilon(z)\overline{\partial}\varphi_\mu^b(z)\,d\Lambda(z) =$$
$$= \int_{B(0,\varepsilon)} \chi_\varepsilon(\zeta)\,d\Lambda(\zeta) \int_{B(b,\mu)} f(z-\zeta)\overline{\partial}\varphi_\mu^b(z)\,d\Lambda(z) = 0,$$

поскольку из (c) имеем

$$\left|\int_{B(b,\mu)} f(z-\zeta)\overline{\partial}\varphi_\mu^b(z)\,d\Lambda(z)\right| \leqslant \mu^{-2}\omega(\mu)\alpha(B(b+\zeta, k\mu) \setminus X) = 0.$$

Из предыдущих рассуждений получаем, что $f_\varepsilon \in \mathcal{A}(B(a, r))$. Остается применить теорему Вейерштрасса. □

Пусть $k' = k + 2$ и $G'_j = B(a_j, k'\delta) \setminus X$.

2.4.4. Лемма. *Для всех j справедливы оценки*

$$|c_1^j| \leqslant 4\omega(\delta)\alpha(G'_j), \tag{2.4.5}$$

$$|c_2^j| \leqslant A\omega(\delta)\delta\alpha(G'_j). \tag{2.4.6}$$

Доказательство. Вначале установим (2.4.5). Пусть $\varphi_j^* = \varphi_\delta * \varphi_j$. Тогда

$$\varphi_j^* \in C_0^\infty\big(B(a_j, 2\delta)\big) \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \varphi_j^* \leqslant 1. \tag{2.4.7}$$

Пользуясь (2.4.4), (2.4.7), (2.4.3) и теоремой Фубини, получаем (учитывая, что $\varphi_\delta(\zeta - w) = \varphi_\delta^w(\zeta)$):

$$\begin{aligned}
|c_1^j| &= \frac{1}{\pi}\left|\int f(\zeta)\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\Bigl(\int \varphi_\delta(\zeta - w)\varphi_j^*(w)\,d\Lambda(w)\Bigr)\,d\Lambda(\zeta)\right| = \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int \varphi_j^*(w)\Bigl(\int f(\zeta)\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\bigl(\varphi_\delta(\zeta - w)\bigr)\,d\Lambda(\zeta)\Bigr)\,d\Lambda(w)\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int \varphi_j^*(w)\delta^{-2}\omega(\delta)\alpha\bigl(B(w,k\delta)\setminus X\bigr)\,d\Lambda(w)\right| \leqslant \\
&\leqslant \delta^{-2}\omega(\delta)\alpha\bigl(B(a_j,(k+2)\delta)\setminus X\bigr)\frac{1}{\pi}\int_{B(a_j,2\delta)}\varphi_j^*(w)\,d\Lambda(w) \leqslant 4\omega(\delta)\alpha(G_j').
\end{aligned}$$

Для получения оценки $|c_2^j|$ в (2.4.6) мы поступаем аналогично. Нужно только проверить, что в формуле

$$c_2^j = -\frac{1}{\pi}\int f(\zeta)(\zeta - a_j)\frac{\partial\psi_j}{\partial\overline{\zeta}}\,d\Lambda(\zeta)$$

функция $(\zeta - a_j)\dfrac{\partial\psi_j}{\partial\overline{\zeta}} = \dfrac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}((\zeta - a_j)\psi_j(\zeta))$ опять имеет вид $\dfrac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}(\varphi_\delta * \chi_j)$, где $\chi_j \in C_0^\infty\bigl(B(a_j,2\delta)\bigr)$ и $\|\chi_j\| \leqslant A\delta$. Чтобы это доказать, применим преобразование Фурье (действующее в классе $\mathcal{S}$ быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций):

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\xi\cdot x}u(x)\,d\Lambda(x), \quad \xi = (\xi_1,\xi_2),\\
\widehat{v}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int e^{ix\cdot\xi}v(\xi)\,d\Lambda(\xi), \quad x = (x_1,x_2),\\
\xi_l\widetilde{u}(\xi) &= -i\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_l}u(x)\Bigr)^{\sim}, \quad l = 1 \text{ и } l = 2,\\
(\widetilde{u})\widehat{\ } &= (\widehat{u})^{\sim} = u.
\end{aligned}$$

Пусть $u = \widehat{\psi}_j$, $\widetilde{u} = \psi_j = \varphi_\delta * \varphi_\delta * \varphi_j$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$, $z = x_1 + ix_2$. Тогда

$$\begin{aligned}
\zeta\psi_j(\zeta) &= (\xi_1 + i\xi_2)\psi_j(\xi) = \zeta\widetilde{u}(\zeta) = -i\Bigl(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial u}{\partial x_2}\Bigr)^{\sim} = \\
&= -2i\Bigl(\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}\Bigr)^{\sim} = -2i\Bigl[\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\bigl((\varphi_\delta * \varphi_\delta * \varphi_j)\widehat{\ }\bigr)\Bigr]^{\sim} = \\
&= -2i\Bigl[\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\bigl((\widehat{\varphi}_\delta)^2\widehat{\varphi}_j\bigr)\Bigr]^{\sim} = -2i\Bigl[2\widehat{\varphi}_\delta\frac{\partial\widehat{\varphi}_\delta}{\partial\overline{z}}\widehat{\varphi}_j + (\widehat{\varphi}_\delta)^2\frac{\partial\widehat{\varphi}_j}{\partial\overline{z}}\Bigr]^{\sim} = \\
&= -2i\Bigl[2\varphi_\delta * \Bigl(\frac{\partial\widehat{\varphi}_\delta}{\partial\overline{z}}\Bigr)^{\sim} * \varphi_j + \varphi_\delta * \varphi_\delta * \Bigl(\frac{\partial\widehat{\varphi}_j}{\partial\overline{z}}\Bigr)^{\sim}\Bigr] = \\
&= \varphi_\delta * \bigl[\bigl(2\zeta\varphi_\delta(\zeta)\bigr) * \varphi_j + \varphi_\delta * \bigl(\zeta\varphi_j(\zeta)\bigr)\bigr].
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\zeta - a_j)\psi_j(\zeta) = \varphi_\delta * \big[\big(2\zeta\varphi_\delta(\zeta)\big) * \varphi_j + \varphi_\delta * \big((\zeta - a_j)\varphi_j(\zeta)\big)\big] \equiv \varphi_\delta * \chi_j.$$

Ясно, что $\chi_j \in C_0^\infty\big(B(a_j, 2\delta)\big)$ и $\|\chi_j\| \leqslant A\delta$. Отметим, что формально в последних рассуждениях сначала следовало применить (рассмотренный чуть выше) метод регуляризации для функций φ_δ, т. е. вместо φ_δ взять функции $\varphi_{\delta\varepsilon} = \varphi_\delta * \chi_\varepsilon$ и затем ε устремить к 0.

Наконец,

$$\begin{aligned}
|c_2^j| &= \frac{1}{\pi}\left|\int f(\zeta)\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\int \varphi_\delta(\zeta - w)\chi_j(w)\,d\Lambda(w)\right)d\Lambda(\zeta)\right| = \\
&= \left|\int \chi_j(w)\left(\int f(\zeta)\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\varphi_\delta(\zeta - w)\,d\Lambda(\zeta)\right)d\Lambda(w)\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int \chi_j(w)\omega(\delta)\delta^{-2}\alpha\big(B(w, k\delta)\setminus X\big)\,d\Lambda(w)\right| \leqslant \\
&\leqslant \omega(\delta)\delta^{-2}\alpha\big(B\big(a_j, (k+2)\delta\big)\setminus X\big)\frac{1}{\pi}\int_{B(a_j, 2\delta)} |\chi_j(w)|\,d\Lambda(w) \leqslant \\
&\leqslant A\omega(\delta)\delta\alpha(G_j').
\end{aligned}$$

Лемма 2.4.4 доказана. □

Изложим схему приближения функции f. Пусть

$$J^* = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon B_j' \cap B(0, R) \neq \varnothing\}.$$

Тогда $f = \sum_{j\in J_*} f_j$. Пусть теперь

$$J' = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon B_j' \cap \partial X \neq \varnothing\}.$$

Поскольку при $j \in J^* \setminus J'$ все функции f_j голоморфны в окрестности компакта X, нам достаточно надлежащим образом приблизить $\sum_{j\in J'} f_j$. Пусть далее $j \in J'$. Напомним, что $G_j' = B(a_j, (k+2)\delta)\setminus X$. По определению $\alpha(G_j')$ и согласно (2.4.5) леммы 2.4.4, мы можем подобрать функции $f_j^* \in A\omega(\delta)\mathcal{A}_C 1((G_j')_c^\bullet) \subset R(X)$ с условием $c_1(f_j^*) = c_1(f_j) = c_1^j$. Положим $g_j = f_j - f_j^*$ ($f_j^* = f_j$, $g_j \equiv 0$ при $j \notin J'$). Тогда $\|g_j\| \leqslant A\omega(\delta)$ и $c_1(g_j) = 0$. Далее, ввиду (2.2.6) для $h = f_j^*$ и $E = G_j'$, а также (2.4.6) леммы 2.4.4, получаем оценку $|c_2(g_j)| \leqslant A\omega(\delta)\delta\alpha(G_j')$. Следовательно, при $|z - a_j| > 2k'\delta$ справедлива оценка

$$|g_j(z)| \leqslant \frac{A\omega(\delta)\delta\alpha(G_j')}{|z - a_j|^2} + \frac{A\omega(\delta)\delta^3}{|z - a_j|^3},$$

т. е. имеем полный аналог оценки (2.2.12).

Остается дословно повторить доказательство $(c) \Rightarrow (a)$ теоремы 2.2.3, где вместо B_j надо взять B_j', вместо k берем $k' = k + 2$ (не путать с параметром k' в указанном доказательстве), а вместо $G_j = B(a_j, k\delta) \setminus X$ берем G'_j.

Теорема 2.4.1 доказана. $\square$

2.4.2. Еще один критерий индивидуальной приближаемости.

Теперь мы можем доказать аналог критерия А. Г. Витушкина (в котором вместо кругов из следующей теоремы были квадраты).

2.4.5. Теорема. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, $f \in C_0(\mathbb{C})$. Следующие условия эквивалентны:*

(*a*) $f|_X \in R(X)$;

(*b*) *для любого открытого круга $B = B(a, \delta)$ справедлива оценка*

$$\left| \int_{\partial B} f(z)\, dz \right| \leqslant A\omega(f, \delta)\alpha(B \setminus X),$$

где $A \in (0, +\infty)$ — некоторая абсолютная константа;

(*c*) *найдутся такие $k \geqslant 1$, $\delta_0 > 0$ и неотрицательная функция ω с условием $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0+$, что для всякого открытого круга $B = B(a, \delta)$ при $0 < \delta < \delta_0$ справедлива оценка*

$$\left| \int_{\partial B} f(z)\, dz \right| \leqslant \omega(\delta)\alpha(B(a, k\delta) \setminus X).$$

Доказательство. Из условия (*a*) следует существование такой последовательности $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что каждая функция $f_n \in C(\mathbb{C}^\bullet)$ голоморфна в некоторой окрестности U_n компакта X и $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to +\infty$. Зафиксируем круг $B = B(a, \delta)$. Применим теорему Мельникова к каждой функции f_n и компакту $K_n = \overline{B} \setminus U_n$:

$$\left| \int_{\partial B} f_n(z)\, dz \right| \leqslant A_0\omega(f_n, \delta)\alpha(B \cap K_n) \leqslant A_0\omega(f_n, \delta)\alpha(B \setminus X).$$

Теперь включение (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) получается из предыдущей оценки переходом к пределу при $n \to +\infty$.

Поскольку (*b*) $\Rightarrow$ (*c*) очевидно, остается установить (*c*) $\Rightarrow$ (*a*). Для этого достаточно доказать, что из условия (*c*) следует условие (*c*) теоремы 2.4.1 с функцией $\varphi_1(z) = 2(1 - z\overline{z})/\pi$ при $|z| \leqslant 1$, $\varphi_1(z) = 0$ для остальных z. Таким образом, из нашего условия (*c*) надо получить оценку (см. пример 2.4.2):

$$\left| \int_{B(a,\delta)} f(z)\overline{\partial}\varphi^a_\delta(z)\, d\Lambda(z) \right| = \left| \frac{2}{\pi\delta^4} \int_{B(a,\delta)} f(z)(z-a)\, d\Lambda(z) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \delta^{-2}\omega(\delta)\alpha(B(a, k\delta) \setminus X),$$

или

$$\left| \int_{B(a,\delta)} f(z)(z-a)\, d\Lambda(z) \right| \leqslant \delta^2\omega(\delta)\alpha(B(a, k\delta) \setminus X).$$

Но требуемое сразу следует из теоремы Фубини в полярных координатах (с центром в точке a):

$$\int_{B(a,\delta)} f(z)(z-a)\,d\Lambda(z) = \int_0^\delta (-ir)\left[\int_{\partial B(a,r)} f(\zeta)\,d\zeta\right] dr.$$

□

Из теоремы 2.2.3 и предложения 2.3.6 можно установить еще одно геометрическое достаточное условие совпадения $C_{\mathcal{A}}(X)$ и $R(X)$. Напомним, что $\partial_i X$ обозначает внутреннюю границу компакта X.

2.4.6. Теорема. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$ с условием $\partial_i X \subset S$, где S — некоторое конечное объединение непересекающихся окружностей. Тогда $C_{\mathcal{A}}(X) = R(X)$.*

Доказательство. В условиях нашей теоремы достаточно проверить выполнение утверждения (c) теоремы 2.2.3 при $k = 1$. Выбирая достаточно малое δ_0, мы можем считать, что каждый круг $B = B(a,\delta)$ при $\delta < \delta_0$ пересекает не более одной окружности из S. Теперь зафиксируем круг $B = B(a,\delta)$, $\delta < \delta_0$. Если $B \cap \partial_i X = \varnothing$, то компакт $X_1 = X \cap \overline{B}$ не имеет внутренней границы, откуда по следствию 2.2.9 имеем $C_{\mathcal{A}}(X_1) = R(X_1)$, так что по теореме 2.2.3 (из (a) для X_1) получаем условие (b) для X_1 и, следовательно, (b) для X.

Пусть теперь $B \cap \partial_i X \neq \varnothing$. Без ограничения общности считаем, что $\overline{B} \cap \partial_i X \subset \partial B_1$. Напомним обозначение $B_r = B(0,r)$.

Пусть $E = B \setminus X^\circ$. По определению $\alpha(E)$ найдется компакт $K \subset E$ с условием $\alpha(E) \leqslant 2\alpha(K)$. Тогда по предложению 2.3.6 имеем

$$\alpha(E) \leqslant 2\alpha(K) \leqslant 2A_2(\alpha(K\cap B_1)+\alpha(K\setminus\overline{B_1})) \leqslant 2A_2(\alpha(E\cap B_1)+\alpha(E\setminus\overline{B_1})). \tag{2.4.8}$$

Из свойств емкости α найдутся $p \in (0,1)$ и $q > 1$ такие, что

$$\alpha(E \cap B_1) \leqslant 2\alpha(E \cap B_p), \quad \alpha(E \setminus \overline{B_1}) \leqslant 2\alpha(E \setminus \overline{B_q}). \tag{2.4.9}$$

Положим $X_p = X \cap \overline{B_p} \cap \overline{B}$, $X_q = (X \setminus B_q) \cap \overline{B}$. Оба эти компакта не имеют внутренней границы, поэтому

$$C_{\mathcal{A}}(X_p) = R(X_p), \quad C_{\mathcal{A}}(X_q) = R(X_q). \tag{2.4.10}$$

Далее, $E \cap B_p = (B \setminus X^\circ) \cap B_p = B \cap B_p \setminus X_p^\circ$, откуда по теореме 2.2.3 (a), из (2.4.10) находим

$$\alpha(E \cap B_p) = \alpha(B \cap B_p \setminus X_p^\circ) = \alpha(B \cap B_p \setminus X_p) = \alpha(B \cap B_p \setminus X) \leqslant \alpha(B \setminus X).$$

Аналогично,

$$\alpha(E\setminus\overline{B_q}) = \alpha((B\setminus\overline{B_q})\setminus X_q^\circ) = \alpha((B\setminus\overline{B_q})\setminus X_q) = \alpha((B\setminus\overline{B_q})\setminus X) \leqslant \alpha(B\setminus X).$$

Учитывая соотношения (2.4.8), (2.4.9) и последние две цепочки равенств, окончательно получаем: $\alpha(B \setminus X^\circ) \leqslant A\alpha(B \setminus X)$, что и требовалось. □

2.4.7. Упражнение.* Доказать существование двух гомеоморфных компактов X_1 и X_2 в $\mathbb{C}$ таких, что $C_{\mathcal{A}}(X_1) = R(X_1)$, но $C_{\mathcal{A}}(X_2) \neq R(X_2)$.

§ 2.5. Равномерные приближения с касанием мероморфными и целыми функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$

Пусть $\omega(z) = 1 + |z|$, $z \in \mathbb{C}$. Для неограниченного замкнутого множества $X \subset \mathbb{C}$ пусть $C_{loc}(X)$ — пространство всех непрерывных (не обязательно ограниченных) функций на X. Кроме того, пусть

$$C^t(X) = \{f \in C_{loc}(X)\colon \|f\|_X^t := \|\omega f\|_X = \sup_{z\in X} |\omega(z)f(z)| < +\infty\}.$$

При каких условиях на $f \in C_{loc}(X)$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдется мероморфная функция F_ε с полюсами вне X такая, что $\|f - F_\varepsilon\|_X^t < \varepsilon$? Класс таких функций f обозначим через $\mathcal{M}_{loc}^t(X)$.

В указанных условиях для всякого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|f(z) - F_\varepsilon(z)| < \frac{\varepsilon}{1+|z|}, \quad z \in X,$$

поэтому говорят, что f приближается на X (с любой точностью) функциями F_ε *равномерно с касанием* первого порядка на ∞.

Справедлива следующая теорема (А. Нерсесян, 1972).

2.5.1. Теорема. *Пусть X — неограниченное замкнутое множество в $\mathbb{C}$, $f \in C_{loc}(X)$. Следующие условия эквивалентны:*

(a) $f \in \mathcal{M}_{loc}^t(X)$;

(b) для любого открытого круга B имеем $f|_{X\cap\overline{B}} \in R(X \cap \overline{B})$;

(c) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется функция $G_\varepsilon \in C_{loc}(\mathbb{C})$, голоморфная в окрестности X (кратко $G_\varepsilon \in \mathcal{A}(X)$) такая, что $\|f - G_\varepsilon\|_X^t < \varepsilon$.

Доказательство. Утверждения $(a) \Rightarrow (b)$ и $(a) \Rightarrow (c)$ очевидны.

Установим $(b) \Rightarrow (c)$. Продолжим f с X до функции класса $C_{loc}(\mathbb{C})$. Зафиксируем стандартное 1-разбиение единицы $\{(B_j, \varphi_j)\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ класса C^1 в $\mathbb{C}$.Напомним, что $B_j = B(a_j, 1)$, $a_j = j_1 + ij_2$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$,

$$0 \leqslant \varphi_j(z) \leqslant 1, \quad \|\overline{\partial}\varphi_j\| \leqslant A_1, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и последовательность положительных чисел ν_j с условием $\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \nu_j \leqslant 1$. Пусть $f_j = V_{\varphi_j} f$, $j \in \mathbb{Z}^2$. Зафиксируем произвольное j. Из условия (b) для $B = B_j$ следует, что для каждого $\delta > 0$ найдется такая функция $h_\delta \in \mathcal{A}(X \cap \overline{B_j}) \cap C(\overline{B_j})$, что $\|f - h_\delta\|_{\overline{B_j}} < \delta$. Положим $h_{j\delta} = V_{\varphi_j}(h_\delta)$ ($h_{j\delta}$ не зависит от значений h_δ вне $\overline{B_j}$). По лемме 1.6.6 (Гл. 3) функция $h_{j\delta} \in C(\mathbb{C})$ голоморфна в окрестности X и вне B_j, причем $\|f_j - h_{j\delta}\| \leqslant A_2\|f - h_\delta\|_{\overline{B_j}} \leqslant A_2\delta$. Тогда по принципу максимума модуля вне B_j имеем $\|(f_j(z) - h_{j\delta}(z))(z - a_j)\| < A_2\delta$, откуда

$$\|(f_j(z) - h_{j\delta}(z))(|z|+1)\| \leqslant \|(f_j(z) - h_{j\delta}(z))(|z-a_j|+|a_j|+1)\| \leqslant A_2(2+|a_j|)\delta.$$

Следовательно, мы можем выбрать достаточно малое $\delta = \delta_j$ (полагая $h_j = h_{j\delta_j}$) с условием $\|f_j - h_j\|_X^t < \varepsilon\nu_j$. Функция $G = f + \sum_j (h_j - f_j)$ удовлетворяет условиям $G \in \mathcal{A}(X) \cap C_{loc}(\mathbb{C})$ и $\|f - G\|_X^t < \varepsilon$ (проверить!).

Осталось доказать $(c) \Rightarrow (a)$. Зафиксируем произвольные число $\varepsilon > 0$ и функцию $G_\varepsilon \in C_{loc}(\mathbb{C})$, голоморфную в окрестности X, с условием $\|f - G_\varepsilon\|_X^t < \varepsilon/2$. Пусть разбиение единицы $\{(B_j, \varphi_j)\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ класса C^1 и числа $\{\nu_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ такие же как выше. Положим $G_j = V_{\varphi_j} G_\varepsilon$, $j \in \mathbb{Z}^2$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{Z}^2$. Найдется компакт K_j в $B_j \setminus X$, вне которого функция G_j голоморфна. Выберем функцию $\psi_j \in C_0^1(B_j \setminus X)$, $\psi_j = 1$ в некоторой окрестности K_j. Пусть $g_j = G_j(1 - \psi_j)$. Тогда функция $g_j \in C^1(\mathbb{C})$ голоморфна вне некоторого компакта $Y_j \subset B_j \setminus X$. По формуле Помпейю (проверить справедливость!) имеем

$$g_j(z) = \frac{1}{\pi} \int_{Y_j} \frac{\overline{\partial} g_j(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Аналогично доказательству леммы 1.5.6 (Гл. 3), приближая последний интеграл частичными суммами Римана при $z \in X \cup (\mathbb{C} \setminus B_j)$, найдем рациональную функцию F_j с простыми полюсами на Y_j, для которой имеем

$$\|G_j - F_j\|_X^t = \|g_j - F_j\|_X^t < \varepsilon\nu_j/2,$$

поскольку $g_j = G_j$ на $X \cup (\mathbb{C} \setminus B_j)$. В качестве искомого приближения берем функцию $F_\varepsilon = G_\varepsilon + \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} (F_j - G_j)$. □

Нам потребуется следующая теорема о касательных приближениях *целыми* функциями (Н. Аракелян, 1968).

2.5.2. Теорема. *Пусть X — неограниченное замкнутое множества в $\mathbb{C}$ такое, что множество $X_c^\bullet = \mathbb{C}^\bullet \setminus X$ является связным и локально связным. Тогда для всякой функции $f \in C_{loc}(X) \cap \mathcal{A}(X^\circ)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется целая функция H_ε такая, что $\|f - H_\varepsilon\|_X^t < \varepsilon$.*

Доказательство. Мы не будем вдаваться в подробности определения локальной связности в общем контексте топологических пространств. В нашем случае нам потребуется только следующее его следствие (условие Келдыша–Лаврентьева, коротко (К–Л)).

Условие (К–Л). Неограниченное замкнутое множество X в $\mathbb{C}$ удовлетворяет условию (К–Л), если найдется функция $\rho_X : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ с условием $\rho_X(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ такая, что всякую точку $z \in X_c = \mathbb{C} \setminus X$ можно соединить с точкой ∞ путем в $X_c^\bullet \setminus \overline{B(0, \rho_X(|z|))}$.

Пусть $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ — класс всех мероморфных в $\mathbb{C}$ функций. При $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ через $Pol(F)$ обозначим множество полюсов функции F.

2.5.3. Лемма. *Пусть $X \neq \mathbb{C}$ — непустое замкнутое множество в $\mathbb{C}$, U — некоторая компонента связности множества X_c, $z_1 \neq z_2$ — произвольные точки из U. Пусть $F_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $Pol(F_1) \subset X_c$, $z_1 \in$*

$Pol(F_1)$. Тогда для всякого $\delta > 0$ найдется такая функция $F_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, для которой $Pol(F_2) \subset (Pol(F_1) \cup \{z_2\}) \setminus \{z_1\}$ и $\|F_1 - F_2\|_X^t < \delta$.

Доказательство. Легко проверить следующее утверждение. Пусть $G_1(z)$ — (конечная) главная часть разложения Лорана функции F_1 в проколотой окрестности ее полюса z_1. Пусть точка $a \in U$ такова, что при некотором $d \in (0, \operatorname{dist}(a, X))$ имеем включение $z_1 \in B(a, d)$. Пусть также $G_a = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k (z-a)^{-k}$ — разложение Лорана функции G_1 вне $B(a, d)$. Тогда для всякого $\mu > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|G_1 - G_a^N\|_X^t < \mu$, где $G_a^N(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k (z-a)^{-k}$. Здесь, как и в доказательстве теоремы 2.5.1 следует воспользоваться принципом максимума модуля вне $B(a,d)$ для функции $(G_1(z) - G_a^N(z))(z-a)$.

Пусть теперь точки $a_0 = z_1, a_1, \ldots, a_M = z_2$, $M \in \mathbb{N}$, таковы, что при каждом $m \in \{1, \ldots, M\}$ найдется $d_m \in (0, \operatorname{dist}(a_m, X))$ такое, что $a_{m-1} \in B(a_m, d_m)$. Для доказательства леммы 2.5.3 остается применить M раз утверждение выше при $\mu = \delta/M$. Для случая $M = 1$ ($z_1 = a_0$, $z_2 = a_1 = a$ из этого же утверждения) следует взять $F_2 = F_1 + G_a^N - G_1$. В этом заключается *метод движения полюсов*, предложенный еще Рунге. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 2.5.2. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме 2.5.1 и теореме Мергеляна (для любого круга B множество $X \cap \overline{B}$ имеет связное дополнение) найдется функция $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ с множеством полюсов $Pol(g) \subset X_c$ такая, что $\|f - g\|_X^t < \varepsilon/2$. Занумеруем полюса $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ функции g в порядке неубывания их модулей (считаем $z_1 \neq 0$). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $\gamma_n \colon [0,1] \to X_c^\bullet$ — путь с условиями $\gamma_n(0) = z_n$, $\gamma_n(1) = \infty$, $\gamma_n([0,1)) \subset X_c$, причем $[\gamma_n] \cap \overline{B(0, \rho_X(|z_n|))} = \varnothing$. При $r > 0$ положим $B_r = B(0, r)$.

В условиях (К–Л) для X зафиксируем число $r_1 > 0$ с условием $\rho_X(r_1) \geqslant 1$. Опишем подробно первый шаг индукции. Пусть $I_1 \subset \mathbb{N}$ — совокупность индексов n (их конечное число) с условием $z_n \in \overline{B(0, r_1)}$ или $[\gamma_n] \cap \overline{B(0, r_1)} \neq \varnothing$. Пусть m — минимальный индекс в I_1 (если их нет — переходим к следующему шагу индукции), и пусть $t_m \in [0,1]$ — максимальное число с условием $|\gamma_m(t_m)| = r_1$. Пользуясь леммой 2.5.3, двигаем полюс z_m в точку $z_m^* = \gamma((t_m + 1)/2)$ вдоль $[\gamma_m]$ за конечное число шагов и заменяем путь γ_m на путь

$$\gamma_m^*(t) = \gamma_m(t(1 - t_m)/2 + (1 + t_m)/2), \quad t \in [0,1].$$

В результате найдем функцию $f_m \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ с условиями

$$Pol(f_m) = (Pol(g) \setminus \{z_m\}) \cup \{z_m^*\}, \quad \|g - f_m\|_X^t < \frac{\varepsilon}{2^2(|I_1| + 1)},$$

где $|I_1|$ — число элементов в I_1. Теперь то же проделаем с функцией f_m и следующим по очереди полюсом в I_1, и так далее, пока не пройдем по всем полюсам в I_1. В результате мы получим функцию $g_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ с условиями

$$Pol(g_1) = (Pol(g) \setminus \{z_n\}_{n\in I_1}) \cup \{z_n^*\}_{n\in I_1} \subset X_c \setminus \overline{B(0,r_1)}, \quad \|g - g_1\|_X^t < \frac{\varepsilon}{2^2},$$

причем все пути (γ_n^* при $n \in I_1$ или γ_n для остальных n), соединяющие полюса функции g_1 с ∞, не пересекают $\overline{B(0,r_1)}$.

Положим $Y_1 = X \cup \overline{B_1}$ и пусть $X_1 = \widehat{Y_1}$ — объединение Y_1 со всеми его ограниченными компонентами дополнения. Тогда из условия (К – Л) следует, что $X_1 \subset X \cup \overline{B(0,r_1)}$, так что $Pol(g_1) \subset X_{1c} = \mathbb{C} \setminus X_1$. Компакт X_1 удовлетворяет условию (К – Л) с некоторой функцией ρ_{X_1}.

На втором шаге индукции мы повторяем процедуру первого шага для компакта X_1, функции g_1, круга B_2 (вместо B_1), круга $B(0,r_2)$ (вместо $B(0,r_1)$, где фиксируется $r_2 > r_1$ с условием $\rho_{X_1}(r_2) \geqslant 2$), а также новой точности приближения $\varepsilon/2^3$ (вместо $\varepsilon/2^2$). Далее, вроде, ясно.

Искомая целая функция имеет вид (проверить!)

$$H_\varepsilon = \lim_{k\to+\infty} g_k = g + (g_1 - g) + \sum_{k=2}^{+\infty} (g_k - g_{k-1})\,.$$

$\square$

2.5.4. Упражнение. Доказать существование целой функции f, у которой $f(\mathbb{R})$ всюду плотно в $\mathbb{C}$.

2.5.5. Упражнение.* Доказать, что в теореме 2.5.2 условие (К – Л) на множество X является также необходимым для наличия указанных аппроксимаций.

§ 2.6. Радиальные предельные значения целых функций

Пусть f — такая целая функция ($f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$), для которой при всяком $\varphi \in (-\pi, \pi]$ существует конечный или бесконечный предел

$$F_f(e^{i\varphi}) := \lim_{r \to +\infty} f(re^{i\varphi}). \qquad (2.6.1)$$

Класс всех таких функций f обозначим через REF (радиально-предельные целые функции, или функции класса Алисы Рот). Примером функции этого класса является $(e^z-1)/z$ (но не e^z). Целью настоящего раздела является описание всех *предельных функций* F_f, соответствующих всем $f \in REF$.

Здесь мы увидим как применяется аппарат теории голоморфных аппроксимаций к изучению предельного поведения целых функций (A. Roth, 1938).

Напомним, что при $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$ через $V_{(\alpha,\beta)}$ обозначается открытый угол $\{z = re^{i\varphi} \colon \varphi \in (\alpha, \beta), 0 < r < +\infty\}$. Сначала установим следующую вспомогательную лемму.

2.6.1. Лемма. *Пусть $f \in REF$. Тогда в каждом угле $V = V_{(\alpha,\beta)}$ найдутся угол $V' = V_{(\alpha',\beta')}$, $\alpha \leqslant \alpha' < \beta' \leqslant \beta$, и $R > 0$ такие, что либо f, либо $1/f$ ограничена в $V' \cap \{|z| > R\}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется последовательность вложенных отрезков $I_n = [\varphi_n - \varepsilon_n, \varphi_n + \varepsilon_n] \subset (\alpha, \beta)$ (где $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$) и возрастающая последовательность чисел $r_n \geqslant n$ таких, что $|f(z)| \geqslant n$ на дуге $\Gamma_n = \{z = r_n e^{i\varphi} \colon \varphi \in I_n\}$ при всех нечетных n и $|f(z)| \leqslant 1/n$ на Γ_n для всех четных n (проверить!). Пусть φ_0 — общая точка всех отрезков I_n. Получаем противоречие с наличием предела у f в направлении $\varphi = \varphi_0$. $\square$

Следующая теорема описывает (необходимые) свойства всех предельных функций F_f, рассматриваемых как функции на окружности $C = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.

2.6.2. Теорема. *Пусть $F = F_f$ при $f \in REF$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *F принадлежит первому классу Бэра на C;*

(2) *на C существует открытое множество $W = \sqcup_{j \in J} C_j$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(2*a*) *W всюду плотно в C и каждое множество C_j является компонентой связности множества W в C, т. е. J нумерует эти компоненты, которых конечное или счетное множество;*

(2*b*) *$F(e^{i\varphi}) \equiv c_j$ при $e^{i\varphi} \in C_j$, где $c_j \in \mathbb{C}^\bullet$;*

(2*c*) *для каждой замкнутой дуги I_j в C_j имеем $f(re^{i\varphi}) \to c_j$ равномерно по $\varphi \in I_j$ при $r \to +\infty$.*

Доказательство. Утверждение (1) вытекает из определения функций первого класса Бэра (т. е. F является поточечным пределом последовательности непрерывных функций на C):

$$F(e^{i\varphi}) = \lim_{n\to+\infty} f(ne^{i\varphi}).$$

Докажем (2). Пусть V' — любой угол, указанный в лемме 2.6.1. Положим $C' = V' \cap C$. Если f ограничена в V', то последовательность функций $\mathcal{F} = \{f_n(z) = f(2^n z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ является равномерно ограниченной в V', поточечно сходящейся к константе $F(e^{i\varphi})$ на луче $\{re^{i\varphi}\colon r \in (0, +\infty)\}$ при любом фиксированном $e^{i\varphi} \in C'$. Из теоремы единственности и теоремы Монтеля (семейство $\mathcal{F}$ предкомпактно внутри V') вытекает, что $\mathcal{F}$ сходится равномерно внутри V' к единой константе $c' \in \mathbb{C}$, что означает условие (2b) для C'. Аналогично (с элементарными дополнениями) рассматривается случай, когда функция $1/f$ ограничена на $V' \cap \{|z| > R\}$. Следовательно, $F_f \equiv c'$ на V'.

Пусть W — объединение всех таких дуг C'. Тогда W — открытое и плотное множество в C. Причем, если две из указанных дуг V_1' и V_2' пересекаются, то утверждения (2b) и (2c) верны для $V' = V_1' \cup V_2'$ (проверить!). Поэтому в качестве C_j можно брать компоненты связности множества W, что доказывает (2). □

Нам остается доказать, что условия, перечисленные в теореме 2.6.2, полностью характеризуют F_f.

2.6.3. Теорема. *Пусть $W = \sqcup_{j\in J} C_j$ — произвольное открытое всюду плотное множество на C с компонентами связности $\{C_j\}_{j\in J}$. Пусть $F\colon C \to \mathbb{C}^\bullet$ — такая функция первого класса Бэра, что $F \equiv c_j \in \mathbb{C}^\bullet$ на каждом C_j. Тогда найдется функция $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *при всяком $e^{i\varphi} \in C$ имеем $\lim\limits_{r\to+\infty} f(re^{i\varphi}) = F(e^{i\varphi})$;*

(2) *этот предел является равномерным на всяком компакте из C_j для каждого $j \in J$.*

Доказательство. Пусть $S_1 = C \setminus W$. Тогда S_1 — это замкнутое нигде не плотное множество в C. Положим $S = \{z = re^{i\varphi}\colon r \geqslant 1, e^{i\varphi} \in S_1\}$. Заметим, что S замкнуто и нигде не плотно в $\mathbb{C}$. Поскольку F является функцией первого класса Бэра на C, найдется последовательность непрерывных на C функций $h_n\colon C \to \mathbb{C}$ с условием $h_n(e^{i\varphi}) \to F(e^{i\varphi})$ при каждом $e^{i\varphi} \in C$. Определим непрерывную функцию $h\colon \mathbb{C} \setminus B_1 \to \mathbb{C}$ так, что $h(ne^{i\varphi}) = h_n(e^{i\varphi})$ при $n \in \mathbb{N}$, а на каждом луче $\{re^{i\varphi}\colon r \geqslant 1\}$ сделаем простую кусочно-линейную интерполяцию. Тогда при любом $e^{i\varphi} \in C$ имеем $\lim\limits_{r\to+\infty} h(re^{i\varphi}) = F(e^{i\varphi})$.

При каждом $j \in J$ рассмотрим в угле $V_j = \{z = re^{i\varphi}\colon r > 0, e^{i\varphi} \in C_j\}$ замкнутое множество $X_j = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus V_j) \geqslant 1\}$ (это множество будет углом со сторонами, параллельными сторонам угла V_j, если величина угла V_j не превосходит π радиан, а таковы все V_j, кроме, быть может, одного).

Пусть теперь $X = S \cup \cup_{j \in J} X_j$. Множество X замкнуто в $\mathbb{C}$ и удовлетворяет условию (К–Л) (проверить!; учесть, что X_j неограниченно удаляется от 0 при стремлении к 0 величины угла V_j). Наконец, положим $g(z) \equiv c_j$ на X_j при всех $j \in J$, для которых $c_j \in \mathbb{C}$ (в противном случае полагаем $g(z) = z$ на X_j). На S положим $g(z) = h(z)$. Нетрудно проверить, что $g \in C_{loc}(X) \cap \mathcal{A}(X^\circ)$. Остается применить теорему 2.5.2 для X и g. $\square$

2.6.4. Упражнение. Доказать существование такой целой функции f класса REF, для которой $F_f(C)$ всюду плотно в $\mathbb{C}$.

§ 2.7. Явный вид фундаментальных решений для эллиптических уравнений второго порядка в $\mathbb{R}^N$

Приведенные выше методы равномерных приближений голоморфными функциями получили естественное распространение на задачи C^m-аппроксимаций функций решениями эллиптических уравнений весьма широкого класса. Мы завершим этот спецкурс изложением наших совсем недавних результатов [6] (2023), основной целью которых является получение явной формы для фундаментальных решений произвольных однородных эллиптических уравнений второго порядка в $\mathbb{R}^N$ с постоянными комплексными коэффициентами (теорема 2.7.9). Хотя для большого класса таких уравнений явные формулы были получены ранее (см., например, [7]), авторам не удалось найти в литературе соответствующих ссылок для общего случая. Мы приводим свои доказательства (достаточно простые и краткие) всех нужных нам утверждений.

2.7.1. Эллиптические квадратичные формы в $\mathbb{R}^N$ с комплексными коэффициентами.

Пусть $N \geqslant 2$ — фиксированное целое число, а C — симметричная $N \times N$-матрица с комплексными элементами $c_{mn} = c_{nm}$, $1 \leqslant m, n \leqslant N$. Пусть Q — квадратичная форма в $\mathbb{R}^N$, определенная матрицей C, т. е.

$$Q(x) = x^t C x = \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} x_m x_n$$

при $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, где символ $(\cdot)^t$ означает операцию матричного транспонирования. В дальнейшем мы будем также использовать обозначение Q_N вместо Q, чтобы подчеркнуть размерность N пространства, в котором действует Q.

2.7.1. Определение. Скажем, что квадратичная форма Q_N является *эллиптической*, если $Q_N(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^N_*$.

Здесь и всюду далее $\mathbb{R}^N_* = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ и $\mathbb{C}^n_* = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Обсудим понятие эллиптичности квадратичной формы более подробно, так как это будет существенно для наших дальнейших конструкций. К сожалению, не смотря на серьезные усилия, авторам не удалось найти в литературе нужных ссылок. Например, в классической монографии Л. Хёрмандера [7], § 6.2, при построении фундаментальных решений свойства соответствующих квадратичных форм, установленные в наших леммах 2.7.6 и 2.7.7 ниже, просто постулируются (т. е. требуются заранее) без каких либо обсуждений. Поэтому далее мы приводим доказательства всех нужных нам утверждений, тем более, что они основаны на очень простых идеях.

Начнем со случая $N = 2$. Здесь определение эллиптичности можно переформулировать следующим образом. Квадратичная форма

$$Q_2((x_1, x_2)^t) = c_{11} x_1^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2$$

в $\mathbb{R}^2$ является эллиптической в том и только том случае, когда корни λ_1 и λ_2 соответствующего характеристического уравнения

$$c_{11}\lambda^2 + 2c_{12}\lambda + c_{22} = 0$$

не являются вещественными. При этом форма Q_2 называется *сильно эллиптической*, если λ_1 и λ_2 лежат в разных полуплоскостях

$$\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\} \text{ и } \Pi_- = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z < 0\}$$

комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В двумерном случае удобно понимать Q_2 как функцию комплексного переменного z, т. е. $Q_2(z) = Q_2((\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)^t)$.

Пусть $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ — единичная окружность в $\mathbb{C}$ со стандартной параметризацией $\mathbb{T} = \{\Gamma_1(t) = e^{2\pi i t}\colon t \in [0,1]\}$.

2.7.2. Лемма. *Пусть Q_2 — эллиптическая квадратичная форма в $\mathbb{R}^2$. Тогда форма Q_2 является сильно эллиптической в том и только том случае, когда $\Delta_{\mathbb{T}} \operatorname{Arg} Q_2 = 0$. Последнее условие эквивалентно тому, что множество $Q_2(\mathbb{T})$ лежит в некоторой открытой полуплоскости в $\mathbb{C}$, граница которой содержит начало координат.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda_1 \in \Pi_+$ и $\lambda_2 \in \Pi_-$. Легко проверяется, что $\Delta_{\mathbb{T}} \operatorname{Arg}(x_1 - \lambda_1 x_2) = -2\pi$ и $\Delta_{\mathbb{T}} \operatorname{Arg}(x_1 - \lambda_2 x_2) = 2\pi$. Так как $Q_2(z) = c_{11}(x_1 - \lambda_1 x_2)(x_1 - \lambda_2 x_2)$ при $z = x_1 + ix_2$, то $\Delta_{\mathbb{T}} \operatorname{Arg} Q_2 = 0$. Обратно, если оба характеристических корня λ_1 и λ_2 лежат в Π_+ или в Π_-, то $\Delta_{\mathbb{T}} \operatorname{Arg} Q_2 = \pm 4\pi$. Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\begin{aligned} &Q_2((\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))^t) = \\ &\qquad = c_{11}\cos^2(2\pi t) + 2c_{12}\sin(2\pi t)\cos(2\pi t) + c_{22}\sin^2(2\pi t) = \\ &\qquad\qquad = \frac{c_{11} + c_{22}}{2} + \frac{c_{11} - c_{22}}{2}\cos(4\pi t) + c_{12}\sin(4\pi t), \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Если $c_{11} = c_{22}$ или $c_{12} = \tau(c_{11} - c_{22})$ при некотором $\tau \in \mathbb{R}$ (обе эти ситуации могут иметь место в сильно эллиптическом случае), то последнее параметрическое выражение задает точку прямолинейного отрезка (который не содержит начало координат и проходится четыре раза). В других случаях это выражение задает дважды проходимый эллипс, который охватывает или не охватывает начало координат в случае не сильной эллиптичности или сильной эллиптичности соответственно. Это непосредственно вытекает из рассуждений, использованных в доказательстве первой части леммы. Лемма 2.7.2 доказана. $\square$

2.7.3. Следствие. *В случае не сильно эллиптической формы Q_2 в $\mathbb{R}^2$ (и только в этом случае) выполнено равенство $\Delta_{\mathbb{T}} \operatorname{Arg} Q_2 = \pm 4\pi$ и существуют две точки $x \in \mathbb{R}^2_*$ и $y \in \mathbb{R}^2_*$ такие, что $Q_2(x) = -Q_2(y)$.*

В качестве еще одного следствия леммы 2.7.2 заметим, что свойства эллиптичности и сильной эллиптичности квадратичных форм сохраняются при невырожденных линейных преобразованиях в $\mathbb{R}^2$.

Пусть $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1^1 + \cdots + x_N^2 = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^N$. Так, $\mathbb{T}$ совпадает с $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ как множество, но определение $\mathbb{T}$ содержит дополнительное требование о фиксированной ориентации (определенной параметризацией Γ_1).

2.7.4. Лемма. *Пусть Q_2 — эллиптическая квадратичная форма в $\mathbb{R}^2$, а $N \in \{3, 4, \dots\}$. Для существования эллиптической квадратичной формы Q_N в $\mathbb{R}^N$ такой, что $Q_N((x_1, x_2, 0, \dots, 0)^t) = Q_2((x_1, x_2)^t)$, $(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы форма Q_2 была сильно эллиптической.*

Доказательство. Пусть Q_2 — сильно эллиптическая квадратичная форма в $\mathbb{R}^2$ и пусть $V = \{tz : t \in \mathbb{R}_+ := (0, +\infty), z \in Q_2(\mathbb{S}^1)\}$. Возьмем произвольные $c_{nn} \in V$, $n \in \{3, \dots, N\}$. Тогда из леммы 2.7.2 непосредственно вытекает, что форма Q_N в $\mathbb{R}^N$, определенная по формуле

$$Q_N((x_1, x_2, \dots, x_N)^t) = Q_2((x_1, x_2)^t) + c_{33}x_3^2 + \cdots + c_{NN}x_N^2,$$

является эллиптической в $\mathbb{R}^N$.

Обратно, возьмем не сильно эллиптическую форму Q_2 в $\mathbb{R}^2$ и предположим, что она является ограничением на $\mathbb{R}^2$ некоторой эллиптической квадратичной формы Q_N в $\mathbb{R}^N$, $N > 2$. Пусть Γ — это гомотопия на сфере $\mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$, которая переводит окружность $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)^t}$ (см. выше) в некоторую точку $a \in \mathbb{S}^{N-1}$ (здесь мы отождествляем Γ_1 с множеством $\{x \in \mathbb{S}^{N-1} : x_3 = \cdots = x_N = 0\}$). Тогда композиция $Q_N \circ \Gamma$ является гомотопией в $\mathbb{R}^2_*$, которая переводит цикл $\Gamma_2 = Q_N \circ \Gamma_1 = Q_2 \circ \Gamma_1$ в точку $Q_N(a)$. Но такая гомотопия не существует, так как $\Delta_{\Gamma_2} \operatorname{Arg}(z) = \Delta_{\Gamma_1} \operatorname{Arg}(Q_2) = \pm 4\pi$ в силу следствия 2.7.3. Лемма 2.7.4 доказана. $\square$

2.7.5. Лемма. *Пусть Q_N — квадратичная форма в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$. Форма Q_N является эллиптической если и только если множество $Q_N(\mathbb{S}^{N-1}) \subset \mathbb{C}_*$ лежит в некоторой открытой полуплоскости в $\mathbb{C}$, граница которой содержит начало координат. Последнее эквивалентно тому, что множество $V_N = Q_N(\mathbb{R}^N_*)$ — это замкнутый угол величины $\vartheta_{Q_N} < \pi$ в $\mathbb{C}_*$ с выколотой вершиной в начале координат.*

Доказательство. Пусть форма Q_N является эллиптической. Достаточно показать, что не существует пары точек $x \in \mathbb{R}^N_*$ и $y \in \mathbb{R}^N_*$ таких, что $Q_N(x) = -Q_N(y)$. В самом деле, если (от противного) такие точки x и y существуют, то ограничение формы Q_N на плоскость, проходящую через x, y и через начало координат, не является сильно эллиптической в силу следствия 2.7.3, что противоречит утверждению леммы 2.7.4. Обратное очевидно. $\square$

Из леммы 2.7.5 вытекает, что для любой эллиптической квадратичной формы Q_N в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, существуют такие число $\tau \in (0,1)$ и угол $\vartheta \in (-\pi, \pi]$, что форма $Q(x) = e^{i\vartheta} Q_N(x)$ удовлетворяет условию

$$|\arg(Q(x))| \leqslant \vartheta_{Q_N}/2 < \pi/2, \quad \operatorname{Re}(Q(x)) \geqslant \tau |Q(x)| \geqslant \tau^2 |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^N_*. \tag{2.7.1}$$

В дальнейшем мы будет предполагать, что Q_N — это эллиптическая квадратичная форма в $\mathbb{R}^N$, заданная матрицей $C = A + iB$, где $A = \operatorname{Re} C$ и $B = \operatorname{Im} C$.

Отметим, что условия, указанные в лемме 2.7.5, особенно просто проверяются для «диагональных» форм $Q_N(x) = \sum_{n=1}^N c_{nn} x_n^2$ (когда матрица C диагональна).

2.7.6. Лемма. *Пусть $N \geqslant 3$, Q_N и C такие, как указано выше. Тогда* $\det C \neq 0$.

Доказательство. Рассуждая «от противного» предположим, что $\det C = 0$. Тогда найдется такая точка $z \in \mathbb{C}^N$, $z \neq 0$, что $Cz = 0$. Пусть $z = x + iy$. Условие $Cz = (A + iB)(x + iy) = 0$ эквивалентно одновременному выполнению условий $Ax = By$ и $Ay = -Bx$, откуда

$$Q_N(x) = x^t (A + iB) x = x^t B y - i x^t A y$$
$$Q_N(y) = y^t (A + iB) y = -y^t B x + i y^t A x.$$

Из этих соотношений ввиду симметричности матриц A и B получаем, что $Q_N(y) = -Q_N(x)$ (в частности, $x \neq 0$ и $y \neq 0$), что противоречит лемме 2.7.5. □

Заметим, что условие $N \geqslant 3$ в лемме 2.7.6 является существенным, так как в $\mathbb{R}^2$ есть эллиптическая квадратичная форма $Q_2((x_1, x_2)^t) = (x_1 + ix_2)^2/4$ с матрицей

$$C_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix},$$

для которой $\det C_2 = 0$.

2.7.7. Лемма. *Пусть $N \geqslant 3$, Q_N и C такие, как определено выше, и пусть Q'_N — это квадратичная форма, определенная матрицей C^{-1}. Тогда форма Q'_N также является эллиптической.*

Доказательство. Из леммы 2.7.6 следует, что $\det C \neq 0$. Рассуждая «от противного», предположим, что найдется $a \in \mathbb{R}^N_*$ такое, что $a^t C^{-1} a = 0$. Определим $z = C^{-1} a$, так, что $z \in \mathbb{C}^N_*$. Тогда $a = Cz$, а $0 = a^t C^{-1} a = (Cz)^t z = z^t C^t z = z^t C z$, так как матрица C является симметричной.

Как и ранее положим $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $A = \operatorname{Re} C$ и $B = \operatorname{Im} C$. Так как $Cz = a$, то $\operatorname{Im}((A + iB)(x + iy)) = 0$, откуда вытекает, что $Bx = -Ay$.

Далее, так как

$$0 = z^t C z = (x^t + iy^t)(A + iB)(x + iy) = (x^t + iy^t)(Ax - By),$$

то выполнены два равенства: $x^t Ax = x^t By$ и $y^t Ax = y^t By$. Из трех полученных равенств получаем, что

$$x^t Bx = (Bx)^t x = (-Ay)^t x = -y^t Ax = -y^t By$$
$$y^t Ay = (Ay)^t y = (-Bx)^t y = -x^t By = -x^t Ax.$$

Но тогда

$$Q_N(y) = y^t Cy = y^t Ay + iy^t By = -x^t Ax - ix^t Bx = -Q_N(x),$$

что противоречит лемме 2.7.5. □

2.7.2. Эллиптические уравнения второго порядка в $\mathbb{R}^N$ и их фундаментальные решения.

Пусть $N \geqslant 2$ — фиксированное целое число, а Q — эллиптическая квадратичная форма в $\mathbb{R}^N$, определенная симметричной матрицей C с комплексными элементами c_{mn}, $1 \leqslant m, n \leqslant N$. Эта форма определяет эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами

$$\mathcal{L} = \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n},$$

который мы будет называть оператором, *ассоциированным* с Q. В свою очередь, форма Q называется *символом* оператора $\mathcal{L}$.

Рассмотрим основные примеры. Первый из них — оператор Лапласа

$$\Delta_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

в $\mathbb{R}^N$. Он ассоциирован с квадратичной формой

$$x_1^2 + \cdots + x_N^2.$$

Второй пример — оператор Бицадзе (квадрат оператора Коши – Римана) в $\mathbb{R}^2$, который определяется по формуле

$$\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2 = \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2}.$$

Его ассоциированная квадратичная форма $Q_2(x) = (x_1 + ix_2)^2/4$ уже встречалась ранее.

Как отмечалось выше, все эллиптические квадратичные формы в $\mathbb{R}^2$ делятся на два класса: класс сильно эллиптических форм и класс форм, не являющихся сильно эллиптическими. В соответствии с этой классификацией мы скажем, что эллиптический оператор $\mathcal{L}$ второго порядка в $\mathbb{R}^2$ является *сильно эллиптическим*, если его символ является сильно эллиптической формой (и не сильно эллиптическим в противном случае).

Так, оператор Лапласа Δ_2 в $\mathbb{R}^2$ является сильно эллиптическим, а оператор Бицадзе нет. Таким образом, последний оператор не может быть «поднят» до эллиптического оператора в $\mathbb{R}^N$ ни при каком $N > 2$. Заметим, что квадратичная форма, являющаяся символом оператора Бицадзе, определяется матрицей

$$C_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix},$$

которая возникала в предыдущем параграфе в качестве примера вырожденной матрицы эллиптической квадратичной формы.

Заметим, что разделение эллиптических операторов второго порядка в $\mathbb{R}^2$ на классы сильно эллиптических и не сильно эллиптических операторов носит не формальный характер, а обусловлено существенно разными свойствами этих операторов. Глубокое различие свойств сильно эллиптических и не сильно эллиптических операторов проявляется в задачах об описании множеств устранимых особенностей для решений соответствующих уравнений $\mathcal{L}f = 0$, в задачах об аппроксимации функций решениями таких уравнений, в условиях разрешимости и единственности решения классических краевых задач для этих уравнений. Лемма 2.7.4, установленная выше, также представляет собой интересный пример существенного различия между двумя обсуждаемыми классами операторов.

В этом параграфе мы получим явную формулу для фундаментального решения произвольного эллиптического оператора $\mathcal{L}$ второго порядка в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ (точнее, для уравнения $\mathcal{L}u = 0$). Пусть оператор $\mathcal{L}$ ассоциирован с квадратичной формой Q, определяемой матрицей C. Как было показано в лемме 2.7.6, эта матрица является невырожденной, т. е. $\det C \neq 0$. Рассмотрим матрицу $D = C^{-1}$ и определим соответствующую квадратичную форму

$$\varLambda(x) = x^t D x, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.7.2}$$

В силу леммы 2.7.7 форма $\varLambda$ является эллиптической. Пусть $\vartheta_\varLambda$ — величина угла $\varLambda(\mathbb{R}^N_*)$, так что $\vartheta_\varLambda < \pi$.

Пусть теперь $S(z)$ — это «главная» ветвь многозначной функции $\sqrt{z}$, определенная в $\{z \in \mathbb{C}\colon\ -\pi < \arg z < \pi\}$ так, что

$$S(z) = \sqrt{|z|}e^{i\arg(z)/2}.$$

В силу леммы 2.7.5 найдется $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ такое, что $|\arg(e^{i\vartheta}\Lambda(x))| \leqslant \vartheta_\varLambda/2 < \pi/2$, откуда $\mathrm{Re}(e^{i\vartheta}\Lambda(x)) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^N_*$. Таким образом, функция

$$\Psi(x) = S(e^{i\vartheta}\varLambda(x))$$

является вещественно аналитической в $\mathbb{R}^N_*$, однородной порядка 1, и, более того,

$$|\arg(\Psi(x))| < \vartheta_\varLambda/4 < \pi/4, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N_*. \tag{2.7.3}$$

2.7.8. Предложение. *Пусть $\mathcal{L}$, Q, C, D, $\varLambda$, и Ψ таковы, как определено выше и пусть*

$$\varPhi(x) = \Psi(x)^{2-N} \tag{2.7.4}$$

при $x \in \mathbb{R}^N_*$. Тогда $\mathcal{L}\varPhi(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^N_*$.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $\theta = 0$. Пусть $p = (2-N)/2$, так что $\varPhi(x) = \varLambda(x)^p_*$, где $\varLambda(\cdot)$ определена в (2.7.2), а символ $*$ означает, что мы имеем дело с соответствующей главной ветвью $w^p_* = \exp(p \ln_* w)$ многозначной функции w^p в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (здесь $\ln_*(w) = \ln|w| + i\arg(w)$ — главная ветвь многозначного логарифма в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$).

Так как $(w^p_*)'_w = \big(\exp(p \ln_* w)\big)'_w = p w^p_*/w$, то

$$\frac{\partial \varPhi(x)}{\partial x_m} = p \frac{\varPhi(x)}{\varLambda(x)} \frac{\partial \varLambda(x)}{\partial x_m},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \varPhi(x)}{\partial x_m \partial x_n} = p \frac{\varPhi(x)}{\varLambda(x)^2} \left((p-1) \frac{\partial \varLambda(x)}{\partial x_m} \frac{\partial \varLambda(x)}{\partial x_n} + \varLambda(x) \frac{\partial^2 \varLambda(x)}{\partial x_m \partial x_n} \right),$$

при $1 \leqslant m, n \leqslant N$.

Так как $p - 1 = -N/2$, то для доказательства равенства $\mathcal{L}\varPhi(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^N_*$ нам достаточно показать, что

$$R(x) = \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} \left(-\frac{N}{2} \frac{\partial \varLambda(x)}{\partial x_m} \frac{\partial \varLambda(x)}{\partial x_n} + \varLambda(x) \frac{\partial^2 \varLambda(x)}{\partial x_m \partial x_n} \right) = 0 \tag{2.7.5}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^N_*$, где c_{mn} — это (как и раньше) элементы матрицы C. Обозначая через d_{mn}, $1 \leqslant m, n \leqslant N$, элементы матрицы D и учитывая ее симметричность, получаем

$$\frac{\partial \varLambda(x)}{\partial x_m} = 2 \sum_{j=1}^{N} d_{jm} x_j, \quad \frac{\partial^2 \varLambda(x)}{\partial x_m \partial x_n} = 2 d_{mn}.$$

Далее, легко видеть, что имеет место равенство

$$\frac{\partial \varLambda(x)}{\partial x_m} \frac{\partial \varLambda(x)}{\partial x_n} = 4 \sum_{j,k=1}^{N} d_{mj} d_{nk} x_j x_k.$$

Величина $R(x)$ из (2.7.5) теперь представляется в следующем виде:

$$R(x) = \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} \left(-2N \sum_{j,k=1}^{N} d_{mj} d_{nk} x_j x_k + 2 d_{mn} \sum_{j,k=1}^{N} d_{jk} x_j x_k \right).$$

Обозначим коэффициенты квадратичной формы $R(x)$ через r_{jk}, где $1 \leqslant j, k \leqslant N$, тогда (ввиду симметричности матрицы D)

$$r_{jk} = \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn}\bigl(-2N d_{mj} d_{nk} + 2 d_{mn} d_{jk}\bigr) =$$

$$= -2N(d_{j1}, \dots, d_{jN}) C (d_{1k}, \dots, d_{Nk})^t + 2 d_{jk} \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} d_{mn}.$$

Остается заметить, что $(d_{j1}, \dots, d_{jN}) C (d_{1k}, \dots, d_{Nk})^t$ — это элемент d_{jk} матрицы $D = DCD$, а $\sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} d_{mn} = N$ так как $DC = I$ (единичная матрица). Таким образом, $r_{jk} = -2N d_{jk} + 2N d_{jk} = 0$, что завершает доказательство. $\square$

Теперь мы может получить явную формулу фундаментального решения для $\mathcal{L}$. Напомним, что распределение (обобщенная функция) $\varPhi_{\mathcal{L}}$ называется фундаментальным решением для $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}\varPhi_{\mathcal{L}} = \delta_0$, где δ_0 — это дельта-функция Дирака с носителем в начале координат.

2.7.9. Теорема. *В обозначениях предложения* 2.7.8 *функция*

$$\varPhi_{\mathcal{L}}(x) = \alpha_{\mathcal{L}} \varPhi(x) \tag{2.7.6}$$

с некоторой подходящей константой $\alpha_{\mathcal{L}} \in \mathbb{C}_*$ *является фундаментальным решением для* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{N} c_{nj} \frac{\partial \varPhi}{\partial x_j}, \quad n \in \{1, \dots, N\},$$

где указанное равенство понимается как в обычном (при $x \neq 0$), так и в обобщенном смысле (во всем $\mathbb{R}^N$). При этом каждая f_n является локально интегрируемой, нечетной, однородной порядка $-N+1$ функцией класса $C^\infty(\mathbb{R}^N_*)$. Тогда (в обобщенном смысле)

$$\chi(x) \equiv \mathcal{L}\varPhi(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

$\chi(x) = 0$ в $\mathbb{R}^N_*$ и по определению обобщенных производных для любой функции $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (с носителем в некотором шаре $B_r = B(0, r)$) имеем

$$\langle \mathcal{L}\varPhi, g \rangle =$$

$$= -\sum_{n=1}^{N} \Bigl\langle f_n, \frac{\partial g}{\partial x_n} \Bigr\rangle = -\int_{B_r} \sum_{n=1}^{N} f_n \frac{\partial g}{\partial x_n}\, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_r \setminus B_\varepsilon} \sum_{n=1}^{N} f_n \frac{\partial g}{\partial x_n}\, dx.$$

Применим к последнему интегралу (полагая $D = B_r \setminus B_\varepsilon$) формулу Гаусса – Остроградского (интегрирования по частям):

$$-\int_D \sum_{n=1}^N f_n \frac{\partial g}{\partial x_n}\, dx = \int_D g(x)\chi(x)\, dx - \int_{\partial D} (gF, \nu)\, d\sigma = \int_{\partial B_\varepsilon} (gF, \nu_+)\, d\sigma,$$

где $F = \{f_1, \dots, f_N\}$ — векторное поле, ν — внешняя единичная нормаль на ∂D ($\nu_+ = -\nu$ — внешняя единичная нормаль на ∂B_ε) и σ — поверхностная мера на ∂D. Поскольку поле F однородно порядка $-N+1$, интеграл

$$\int_{\partial B_\varepsilon} (g(0)F, \nu_+)\, d\sigma = g(0)\int_{\partial B_1} (F, \nu_+)\, d\sigma =: d_{\mathcal{L}} g(0)$$

не зависит от ε. При этом ясно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} ((g - g(0))F, \nu_+)\, d\sigma = 0,$$

откуда окончательно получаем

$$\langle \mathcal{L}\varPhi, g\rangle = d_{\mathcal{L}} g(0).$$

Свойство $d_{\mathcal{L}} \neq 0$ следует из известной леммы Вейля (без комментариев). Откуда $\alpha_{\mathcal{L}} = 1/d_{\mathcal{L}}$, что завершает доказательство теоремы 2.7.9. □

В частности, при $\mathcal{L} = \Delta_N$ (оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$) имеем $\varLambda(x) = Q(x) = |x|^2$, $\varPhi(x) = |x|^{2-N}$, $F(x) = \nabla(\varPhi(x)) = -(N-2)x/|x|^N$. Откуда $d_{\mathcal{L}} = -(N-2)\sigma_N$ и

$$\varPhi_\Delta(x) = -\frac{1}{\sigma_N (N-2)|x|^{N-2}},$$

где σ_N — поверхностная ($(N-1)$-мерная) мера Лебега сферы $\partial B(\mathbf{0}, 1)$ в $\mathbb{R}^N$.

Следующее утверждение вытекает из (2.7.3) и (2.7.4).

2.7.10. Следствие. *Пусть $N = 3$ или $N = 4$. Тогда для любого рассматриваемого оператора $\mathcal{L}$ найдутся $\lambda = \lambda_{\mathcal{L}} \in (-\pi, \pi]$ и $A = A_{\mathcal{L}} \geqslant 1$ такие, что*

$$\frac{1}{A|x|^{N-2}} \leqslant \operatorname{Re}\bigl(e^{i\lambda}\varPhi_{\mathcal{L}}(x)\bigr) \leqslant |\varPhi_{\mathcal{L}}(x)| \leqslant \frac{A}{|x|^{N-2}}, \tag{2.7.7}$$

при всех $x \in \mathbb{R}^N_*$.

Аналогичный результат имеет место и для операторов $\mathcal{L}$ в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 5$, которые удовлетворяют дополнительному условию

$$(N-2)\vartheta_\varLambda < 2\pi. \tag{2.7.8}$$

При этом непосредственно из (2.7.4) следует, что при $N \geqslant 3$ оценка

$$\frac{1}{A|x|^{N-2}} \leqslant |\varPhi_{\mathcal{L}}(x)| \leqslant \frac{A}{|x|^{N-2}},$$

справедлива для всех рассматриваемых операторов $\mathcal{L}$.

2.7.3. Эллиптические уравнения второго порядка в $\mathbb{R}^2$ и их фундаментальные решения.

Здесь для полноты изложения мы приведем простые явные формулы фундаментальных решений для эллиптических операторов $\mathcal{L}$ в $\mathbb{R}^2$.

Пусть $Q_2((x_1,x_2)^t) = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2$ — эллиптическая квадратичная форма в $\mathbb{R}^2$ и λ_1, λ_2 — ее характеристические корни. Условие эллиптичности эквивалентно тому, что $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$. Положим

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad \text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

или

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad \text{при } \lambda_1 = \lambda_2.$$

Тогда соответствующий индуцированный оператор $\mathcal{L}$ имеет вид:

$$\mathcal{L}u = \begin{cases} c_{11}\partial_1(\partial_2(u)), & \text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ c_{11}\partial_1^2(u), & \text{при } \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases} \tag{2.7.9}$$

Введем следующие координаты:

$$z_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big(x_1 + \frac{1}{\lambda_2}x_2\Big), \quad z_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\Big(x_1 + \frac{1}{\lambda_1}x_2\Big) \text{ при } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

или

$$z_1 = \frac{1}{2}\Big(x_1 - \frac{1}{\lambda_1}x_2\Big), \quad z_2 = \frac{1}{2}\Big(x_1 + \frac{1}{\lambda_1}x_2\Big) \text{ при } \lambda_1 = \lambda_2,$$

которые удовлетворяют условиям «ортогональности» :

$$\begin{matrix} \partial_1 z_1 & = 1 & \qquad \partial_1 z_2 & = 0 \\ \partial_2 z_1 & = 0 & \qquad \partial_2 z_2 & = 1. \end{matrix} \tag{2.7.10}$$

Наконец мы «отождествим» $z = x_1 + ix_2$ в $\mathbb{C}$ и $x = (x_1,x_2)^t$ в $\mathbb{R}^2$ в том смысле, что $f(x)$ или $f(z)$ есть одно и то же для любой рассматриваемой функции f. Заметим, что при $s = 1$ и $s = 2$ линейные преобразования $\Lambda_s(z) = z_s$ в $\mathbb{R}^2$ являются невырожденными.

Справедливы следующие утверждения.

2.7.11. Предложение. *В предыдущих обозначениях пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда в области $\mathbb{C}_\flat$ найдутся такая аналитическая ветвь $\log(z_1 z_2^\nu)$ многозначной функции $\mathrm{Ln}(z_1 z_2^\nu)$ и такая константа $k = k(\mathcal{L}) \in \mathbb{C}_\flat$, что функция*

$$\varPhi_{\mathcal{L}}(z) = k \log(z_1 z_2^\nu)$$

является фундаментальным решением для $\mathcal{L}$, где $\nu = 1$ для сильно эллиптического случая и $\nu = -1$ иначе.

При $\lambda_1 = \lambda_2$ фундаментальным решением для $\mathcal{L}$ является функция

$$\varPhi_{\mathcal{L}}(z) = k\frac{z_1}{z_2}\,,$$

где $k = k(\mathcal{L}) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Из теоремы о производной сложной функции, формул (2.7.9) и условий ортогональности (2.7.10) следует, что в условиях последнего предложения $\mathcal{L}\Phi_{\mathcal{L}}(x) = 0$ при $x \neq 0$. Окончание доказательства — как в доказательстве теоремы 2.7.9. □

Так, для лапласиана Δ в $\mathbb{R}^2$ имеем $\Phi_\Delta(z) = (2\pi)^{-1}\ln(|z|)$, а для оператора Бицадзе $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2}$ имеем $\Phi_{\mathcal{L}}(z) = \overline{z}/(\pi z)$. Последние два факта нетрудно установить с помощью формулы Помпейю, из которой следует, что функция $1/(\pi z)$ является фундаментальным решением для оператора Коши–Римана $\partial/(\partial\overline{z})$.

В заключении отметим, что изложенный выше локализационный метод Витушкина (для равномерных приближений голоморфными функциями) естественным образом обобщается на задачи аппроксимации (во всех классических, невесовых нормах C^m и W^p) решениями эллиптических уравнений второго порядка $\mathcal{L}u = 0$ с рассмотренными выше операторами $\mathcal{L}$. Так, локализационный оператор, соответствующий оператору $\mathcal{L}$ и индекс-функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, имеет вид $V_{\mathcal{L},\varphi}(f) = \Phi_{\mathcal{L}} * (\varphi\mathcal{L}f)$. При этом $\mathcal{L}(V_{\mathcal{L}\varphi}(f)) = \varphi\mathcal{L}f$ в обобщенном смысле.

Ряды Лорана (с центром в начале координат) для решений эллиптического уравнения $\mathcal{L}u = 0$ в окрестности ∞ в $\mathbb{R}^N$ имеют вид

$$\sum_{|\beta|=0}^{+\infty} c_\beta \partial^\beta \Phi_{\mathcal{L}}(x)/\partial x^\beta.$$

Программа спецкурса «Дополнительные главы комплексного анализа и некоторые приложения, 2 семестр»

1. Аналитическая емкость γ: ее свойства и связь с устранимыми особенностями в классе ограниченных голоморфных функций (см. также [2], гл. VIII).

2. Аналитическая емкость α. Оценки емкостей γ и α (см. также [2], гл. VIII).

3. Локализационная теорема Бишопа. Топологические и метрические условия совпадения $C_{\mathcal{A}}(X)$ и $R(X)$. Примеры отсутствия аппроксимации (см. также [3], гл. III).

4. Критерий Витушкина о приближении рациональными функциями для классов функций: доказательство необходимых условий приближаемости и предварительные оценки (см. также [2], гл. VIII; [4]).

5. Критерий Витушкина для классов функций: построение групп индексов и доказательство основных оценок приближения (по работе [4]).

6. Теорема Мельникова об оценке интеграла Коши (см. также [2], гл. VIII, п. 12).

7. Критерии равномерной приближаемости рациональными дробями для индивидуальных функций (по работе [4]).

8. Равномерные приближения с касанием мероморфными и целыми функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$ (см. также [3], Гл. 4, § 2; [5]).

9. Некоторые приложения: радиальные предельные значения целых функций (см. также [3], Гл. 4, § 5).

10. Эллиптические квадратичные формы; невырожденность (по работе [6]).

11. Фундаментальные решения для однородных эллиптических уравнений второго порядка (по работе [6], см. также [7], пп. 3.3 и 6.2).

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Парамонов П.В. Конспект лекций (ПДФ) по спецкурсу, 2024.

[2] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М., “Мир”, 1973.

[3] Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М., “Мир”, 1986.

[4] Парамонов П.В. *Некоторые новые критерии равномерной приближаемости функций рациональными дробями.*// Матем. сб. 1995, т. 186:9, с. 97-112.

[5] Парамонов П.В., Boivin A. *Аппроксимация мероморфными и целыми решениями эллиптических уравнений в банаховых пространствах распределений.* // Матем. сб. 1998, т. 189:4, с. 3-24.

[6] Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. *Явный вид фундаментальных решений некоторых эллиптических уравнений и связанные с ними* B*- и* C*-емкости.* // Матем. сб. 2023, т. 214:4, с. 114–131.

[7] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, том. 1, Теория распределений и анализ Фурье. М.: “Мир”, 1986, 464 с.

Задачи к экзамену по спецкурсу, 2 семестр

Задача 1. Доказать, что если Λ_1 — длина на прямой, а компакт K лежит на прямой, то
$$\frac{\Lambda_1(K)}{4} \leqslant \gamma(K) \leqslant \frac{\Lambda_1(K)}{\pi}.$$

Задача 2. Если K — замыкание жордановой области, то $\gamma(K) = \alpha(K) \asymp \mathrm{diam}(K)$.

Задача 3. (Нерешенная проблема). Верно ли, что для любых компактов K_1 и K_2 в $\mathbb{C}$ справедливо неравенство $\gamma(K_1 \cup K_2) \leqslant \gamma(K_1) + \gamma(K_2)$?

Задача 4. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ с условием $\mathcal{M}^1(K) = 0$. Тогда $\gamma(K) = 0$. В частности, это так при $\dim_H(K) < 1$.

Задача 5. Пусть K является ГУНФ-компактом. Тогда для всякой области D в $\mathbb{C}$ всякая функция f, голоморфная в $D \setminus K$ и непрерывная в D, голоморфна в D.

Задача 6. Доказать критерий Витушкина для классов функций в случае $X^\circ = \varnothing$ (план, сведение к доказательству теоремы Мергеляна).

Задача 7. Пусть X_1 и X_2 — компакты в $\mathbb{C}$ с условиями $C(X_1) = R(X_1)$ и $C(X_2) = R(X_2)$. Доказать, что тогда $C(X_1 \cup X_2) = R(X_1 \cup X_2)$.

Задача 8. Привести примеры двух компактов X_1 и X_2 в $\mathbb{C}$ с условиями $C_{\mathcal{A}}(X_1) = R(X_1)$ и $C_{\mathcal{A}}(X_2) = R(X_2)$, но $C_{\mathcal{A}}(X_1 \cup X_2) \neq R(X_1 \cup X_2)$.

Задача 9. Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, $f \in C(X)$ и $f \neq 0$ на X. Доказать, что если $f^2 \in R(X)$, то $f \in R(X)$.

Нерешенная проблема: остается ли верным указанный факт, если убрать условие $f \neq 0$ на X?

Задача 10. Доказать усиленный вариант принципа аргумента и его основных следствий.

Задача 11. Доказать существование двух *гомеоморфных* компактов X_1 и X_2 в $\mathbb{C}$ таких, что $C_{\mathcal{A}}(X_1) = R(X_1)$, но $C_{\mathcal{A}}(X_2) \neq R(X_2)$.

Задача 12. Доказать, что в теореме Аракеляна условие (К – Л) на множество X является также необходимым для наличия указанных аппроксимаций.

Задача 13. Доказать существование целой функции f, у которой образ $f(\mathbb{R})$ всюду плотен в $\mathbb{C}$.

Задача 14. Доказать формулы фундаментальных решений для уравнений Лапласа и Бицадзе в $\mathbb{R}^2$.