1. Комплексные числа и планиметрия.

1.1. Стандартные преобразования в планиметрии. Многие геометрические задачи на плоскости можно переформулировать в терминах комплексных чисел и решать их как "одномерные" , сводя их к решению определенного уравнения или системы уравнений.

Для начала покажем: как с помощью линейных преобразований комплексной плоскости можно представить отображения параллельного переноса, поворота, а также гомотетии. Всюду далее $z = x + iy$, Oxy – декартова система координат.

• $T_a : z \mapsto z + a$ - параллельный перенос (translation) на вектор $a \in \mathbb{C}$;

• $R_{a,\alpha} : z \mapsto a + (z - a) \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ - поворот (rotation) плоскости на угол $\alpha \in \mathbb{R}$ (в радианах) относительно точки $a \in \mathbb{C}$;

• $H_{a,k} : z \mapsto a+k(z-a)$ - гомотетия (homothety) с центром в точке a и коэффициентом $k > 0$.

Упражнение 1.1. В старом манускрипте описано местоположение древнего клада на известном острове О:

"На острове О есть дуб Д, сосна С и большой камень К. Чтобы найти клад, следует

1) идти от дуба Д к камню К; у камня повернуть строго налево и пройти удвоенное расстояние от дуба Д до камня К (т.е. 2ДК); поставить метку №1;

2) идти от камня К к сосне С и пройти за сосну С на расстояние КС до точки Р; повернуть строго налево, пройти прямо расстояние, равное расстояние от К до Р; поставить метку №2;

3) клад находится в середине отрезка, соединяющего метки №1 и №2".

Понятно, что если известно нахождение дуба Д, сосны С и камня К на острове О, то клад находится однозначно. Но по прибытии на остров О удалось найти лишь дуб Д и сосну С. Можно ли в такой ситуации определить местоположение клада?

Решение. Введем декартову систему координат, связанную с островом О, в которой дуб Д находится в начале координат 0, сосна С находится в точке $1 = 1 + i0$, а камень К находится в неизвестной точке $z \in \mathbb{C}$. Пусть z_1 и z_2 - координаты первой и второй меток, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тогда, исходя из условия, находим: $z_1 = z + i \cdot 2z,\ z_2 = z + 2(1 - z) + i \cdot 2(1 - z)$. Поэтому клад находится в однозначно определяемой точке $(z_1 + z_2)/2 = 1 + i$. Таким образом, чтобы отыскать клад, необходимо пройти от дуба Д к сосне С, от нее повернуть строго налево и пройти расстояние, равное ДС.

Задача 1.1. 1. В условиях предыдущего упражнения: пусть оба раза вместо поворота на угол $+\pi/2$ требуется повернуть на угол $\alpha \in (-\pi, \pi]$. При каких значениях α клад находится однозначно?
2. Пусть в первый раз совершается поворот на угол α, а во второй раз - на угол β $(\alpha, \beta \in (-\pi, \pi])$. Для каких пар (α, β) клад находится однозначно?

1.2. Простейшие геометрические соотношения в комплексной форме. Каждому комплексному числу $z = x+iy$ ставится в соответствие *сопряженное ему* комплексное число $\overline{z} = x - iy$, симметричное z относительно вещественной оси Ox.

Операция сопряжения комплексного числа перестановочна с операциями сложения и умножения: $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$. При этом $\overline{\overline{a}} = a$, $a \cdot \overline{a} = |a|^2$ для любого $a \in \mathbb{C}$. Кроме того, $c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{c} = c$. Аналогично, $c \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{c} = -c$. Комплексные числа вида $0 + i \cdot y := i \cdot y$, $y \in \mathbb{R}$, называются *чисто мнимыми.*

Напомним, что $x = (z + \overline{z})/2$, $y = (z - \overline{z})/(2i)$, и при $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ имеем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\,.$$

Посмотрим как записываются простейшие геометрические свойства на языке комплексных чисел.

1. *Три различные точки $a, b, c \in \mathbb{C}$ лежат на одной прямой, если и только если*

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}\,.$$

Доказательство. Для того чтобы $a, b, c \in \mathbb{C}$ лежали на одной прямой необходимо и достаточно выполнения условия $b - a = k \cdot (c - a)$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$ - условия того, что векторы $b - a$ и $c - a$ коллинеарны. Далее,

$$b - a = k \cdot (c - a) \iff \frac{b-a}{c-a} = k \in \mathbb{R} \iff \frac{b-a}{c-a} = \overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}\,. \quad \triangleleft$$

2. *Прямая (ab) перпендикулярна прямой (cd) (где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, $c \neq d$), если и только если*

$$\frac{\overline{d}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}} = -\frac{d-c}{b-a}\,.$$

Доказательство. Прямые (ab) и (cd) ортогональны, если направляющие векторы $d - c$ и $b - a$ ортогональны. Последнее в точности означает, что $(d - c)/(b - a) \in i\mathbb{R}$, что эквивалентно условию $\overline{(d - c)/(b - a)} = -(d - c)/(b - a) \triangleleft$.

3. *Прямые (ab) и (cd) ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq b, c \neq d$) пересекаются под углом $\alpha \in (0, \pi/2)$, если и только если $|\arg \frac{d-c}{b-a}| = \alpha$ или $|\arg \frac{d-c}{b-a}| = \pi - \alpha$.*

4. *Прямые (ab) и (cd) ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq b, c \neq d$) параллельны, если и только если $\frac{b-a}{c-d} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{d}}$.*

Определение 1.1. *Сложным (или ангармоническим) отношением* $[a, b, c, z]$ четырех точек $a, b, c, z \in \mathbb{C}^\bullet$ (a, b, c различны), называется выражение $\frac{z-a}{z-b} : \frac{c-a}{c-b}$.

Форму сложного отношения $[a, b, c, z]$ можно запомнить так: она имеет вид дробно-линейного отображения, равного 0 при $z = a$, ∞ при $z = b$ и 1 при $z = c$.

Определение 1.2. *Дробно-линейным отображением* (ДЛО) называется всякая функция $\Lambda : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}^\bullet$ вида

$$\Lambda(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ и

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0\,.$$

Последнее условие на коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ означает, что ДЛО не должно быть константой.

В основном курсе комплексного анализа мы докажем, что ДЛО обладают следующими свойствами: переводят обобщенные окружности (т.е. обычные окружности или прямые, дополненные точкой ∞ в $\mathbb{C}^\bullet$) в обобщенные окружности, сохраняют углы между обобщенными окружностями, переводят симметричные точки относительно обобщенной окружности в симметричные точки относительно образа этой окружности, а также сохраняют сложное отношение любой четверки точек. Чуть позже мы применим ДЛО к изучению модели Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Здесь мы установим еще одно полезное свойство сложного отношения.

5. *Четыре различные точки $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ лежат на одной обобщенной окружности, если и только если $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. $[a, b, c, d] = \frac{d-a}{d-b} : \frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$, если и только если аргументы чисел $\frac{d-a}{d-b}$, $\frac{c-a}{c-b}$ совпадают или отличаются на π (по модулю 2π), так как при делении комплексных чисел их аргументы вычитаются, а аргумент вещественного числа сравним с 0 (по модулю π). Ограничимся рассмотрением случая, когда аргументы указанных чисел *равны* (по модулю 2π). Второй случай оставляем читателю. В этой ситуации величины углов (с учетом знака!) $\angle(bda)$ и $\angle(bca)$ совпадают. Значит отрезок $[a, b]$ виден под одним и тем же углом из точек c и d, а это возможно (как известно из школьного курса планиметрии) тогда и только тогда, когда точки a, b, c, d лежат на одной обобщенной окружности $\triangleleft$.

В задачах на окружности удобно сводить условие к случаю единичной окружности. Далее окружность радиуса 1 с центром в начале координат будет обозначаться через S_1. Отметим, что S_1 можно задать следующими уравнениями: $|z|^2 = z\overline{z} = 1$ или $\overline{z} = 1/z$.

Упражнение 1.2. Пусть $a, b \in S_1, a \neq b, a \neq -b$. Найти точку пересечения z касательных к окружности S_1, проведенных в точках a и b.

Решение. Заметим, что точка z удовлетворяет следующим условиям:

$$z - b = ibk\,, \ z - a = -iak$$

для некоторого ненулевого вещественного числа k. Избавляясь от неизвестного параметра k, находим: $z = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\overline{a}+\overline{b}}$ или $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \triangleleft$.

Упражнение 1.3. Заданы две прямые (ab) и (cd), $(a, b, c, d \in \mathbb{C}, a \neq b, c \neq d)$. Найти точку пересечения z этих прямых.

Решение. В терминах комплексных чисел уравнение прямой, проходящей через точки a и b, $a \neq b$, записывается так:

$$\frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}\,.$$

Оно является формальной записью того факта, что для всех точек z, лежащих на прямой (ab), векторы $z - a$ и $b - a$ коллинеарны, то есть $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Чтобы найти точку пересечения z указанных прямых, решим систему

$$\begin{cases} \frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \\ \frac{z-c}{d-c} = \frac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{d}-\overline{c}} \end{cases}$$

Откуда

$$z = \frac{(\overline{c}d - c\overline{d})(b-a) - (\overline{a}b - a\overline{b})(c-d)}{(\overline{b}-\overline{a})(c-d) - (b-a)(\overline{c}-\overline{d})}\,.$$

При условии $(\overline{b}-\overline{a})(c-d) - (b-a)(\overline{c}-\overline{d}) \neq 0$ имеется ровно одна точка пересечения (когда прямые не совпадают и не являются параллельными) $\triangleleft$.

Задача 1.2. *Теорема Брианшона.* Доказать, что в любом описанном шестиугольнике большие диагонали пересекаются в одной точке.

Указание. С помощью гомотетии и параллельного переноса задача сводится к случаю, когда рассматриваемый шестиугольник описан около единичной окружности S_1.

Пусть $a, b, c, d, e, f \in S_1$ – последовательные точки касания окружности и сторон описанного шестиугольника. Тогда вершины шестиугольника – как точки пересечения касательных к S_1 – принимают вид $a_1 = \frac{2}{\overline{a}+\overline{b}}, b_1 = \frac{2}{\overline{b}+\overline{c}}, c_1 = \frac{2}{\overline{c}+\overline{d}}, d_1 = \frac{2}{\overline{d}+\overline{e}}, e_1 = \frac{2}{\overline{e}+\overline{f}}, f_1 = \frac{2}{\overline{a}+\overline{f}}$. В дальнейших выкладках целесообразно также использовать условие принадлежности точки z единичной окружности: $\overline{z} = 1/z$.

Далее, зная вершины $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ и используя результат последнего упражнения, находим точки пересечения больших диагоналей (a_1d_1), (b_1e_1) и (a_1d_1), (c_1f_1) нашего шестиугольника. Остается сравнить полученные точки пресечения – они оказываются тождественно равными (вне зависимости от параметров задачи). ∇

1.3. Полярное соответствие относительно окружности. Пусть S – окружность в $\mathbb{C}$ с радиусом $R \in (0, +\infty)$ и центром в точке c. Говорят, что прямая L является *полярой* точки $a \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ *относительно* S, если L проходит через точку a^*, симметричную (инверсную) точке a относительно S, перпендикулярно лучу ca. При этом точка a называется *полюсом* прямой L (не проходящей через точку c) *относительно* S.

В частности, если $a \in S$, то её полярой является прямая, касающаяся S в точке a. Если $|a - c| > R$, а две точки z_1 и z_2 на S таковы, что прямые az_1 и az_2 касаются окружности S, то прямая z_1z_2 – поляра точки a относительно S (проверить!).

Будем далее для простоты считать, что $c = 0$. Тогда при $a \neq 0$ имеем $a^* = R^2/\bar{a}$.

Предложение 1.1. *В указанных условиях пусть $a \neq b$ – ненулевые точки, являющиеся полюсами прямых L_a и L_b соответственно. Тогда $\{b \in L_a\} \Leftrightarrow \{a \in L_b\}$.*

Доказательство. Имеем $\{b \in L_a\}$ если и только если число $(b - a^*)/a$ чисто мнимо, что эквивалентно выполнению цепочки равенств

$$(b - a^*)/a = -(\bar{b} - \bar{a^*})/\bar{a} \Leftrightarrow b\bar{a} + a\bar{b} = a^*\bar{a} + \bar{a^*}a = 2R^2 = b^*\bar{b} + \bar{b^*}b.$$

Откуда $\{a \in L_b\}$. $\square$

Следствие 1.0.1. *В указанных условиях пусть $a_1, \ldots, a_N$ – различные ненулевые точки. Эти точки лежат на одной прямой L, не проходящей через точку 0, если и только если соответствующие им поляры пересекаются в одной точке – полюсе прямой L.*

Задача 1.3. Доказать, что при полярном соответствии теорема Брианшона "переходит"в следующую *теорему Паскаля*: во вписанном шестиугольнике точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

Рассмотреть только невырожденные случаи, когда все указанные пары сторон не параллельны.

Литература. З.А. Скопец. Геометрические миниатюры. с. 152 – 192.

2. Доказательство Х. Тверберга теоремы о замкнутой жордановой кривой.

2.1. Введение. Обсуждается малоизвестное специалистам доказательство классической теоремы о замкнутой жордановой кривой (теоремы Жордана), полученное норвежским математиком Х. Твербергом. Это доказательство носит метрический характер и позволяет получить одно важное метрическое уточнение теоремы Жордана, представляющее самостоятельный интерес.

Следующий фундаментальный топологический факт известен как *теорема о замкнутой жордановой кривой* или как *теорема Жордана.*

Теорема 2.1 (Теорема Жордана). *Пусть* $\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 1\}$ *— единичная окружность в* $\mathbb{R}^2$ *и пусть* $\gamma\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ *— непрерывное инъективное отображение, т.е.* $\Gamma = \gamma(\mathbb{T})$ *— замкнутая жорданова кривая на плоскости. Тогда множество* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *состоит в точности из двух компонент связности (непересекающихся областей).*

2.2. Вводные замечания и вспомогательные леммы. Приведем некоторые элементарные факты из анализа, которые будут использованы в дальнейшем. Во-первых, заметим, что в указанных выше обозначениях отображение γ равномерно непрерывно на $\mathbb{T}$, причем обратное отображение $\gamma^{-1}\colon \Gamma \to \mathbb{T}$ также непрерывно. Во-вторых, если A и B — непустые непересекающиеся компакты в $\mathbb{R}^2$, то величина

$$\mathrm{d}(A, B) := \inf\{|a - b| \colon a \in A,\ b \in B\}$$

положительна. Доказательство этих утверждений основывается на теореме Вейерштрасса, которая гласит, что всякая ограниченная последовательность вещественных чисел имеет сходящуюся подпоследовательность.

Напомним также, что *областью* в $\mathbb{R}^2$ называется всякое непустое открытое множество, любые две точки которого можно соединить ломаной, не выходящей за его пределы.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что единичная окружность $\mathbb{T}$ ориентирована против часовой стрелки согласно с натуральной параметризацией $t(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Предлагаемое доказательство теоремы Жордана основано на специальной аппроксимации кривой Γ замкнутыми *жордановыми* ломаными и последующем переходе к пределу. Этот естественный подход хорошо известен, так что приведенные ниже Леммы 2.1 и 2.2 не новы. А вот Лемма 2.3 и Лемма 2.4 являются новыми и представляют самостоятельный интерес. Их цель — получить определенное *метрическое* описание указанных замкнутых жордановых ломаных, с помощью которого удается перейти к пределу. Основная трудность состоит в том, чтобы избежать ситуации, которая возникает для (нежордановой) замкнутой кривой вида ∞, являющейся (при определенном обходе) пределом замкнутых жордановых ломаных.

Определение 2.1. Замкнутая жорданова кривая $\Sigma = \sigma(\mathbb{T})$, где $\sigma\colon \mathbb{T} \to \Sigma$ — гомеоморфизм, называется *замкнутой жордановой ломаной*, если существует разбиение $\Theta = \{\theta_0,\ \theta_1, \dots, \theta_N\}$ отрезка $[0, 2\pi]$ (т.е. $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_N = 2\pi$), с условиями $\sigma\left((\cos\theta, \sin\theta)\right) = (a_n\theta + b_n, c_n\theta + d_n)$ на отрезке $[\theta_{n-1}, \theta_n]$ при $n = 1, \dots, N$, где a_n, b_n, c_n и d_n — вещественные постоянные.

Замечание. В соответствии с выбором разбиения Θ естественным образом определяются *вершины* и *ребра* ломаной Σ. Заметим также, что соседние ребра ломаной Σ могут лежать на одной прямой.

Пару (σ, Θ) назовем *реализацией* ломаной Σ.

Лемма 2.1. *Теорема Жордана справедлива для любой замкнутой жордановой ломаной.*

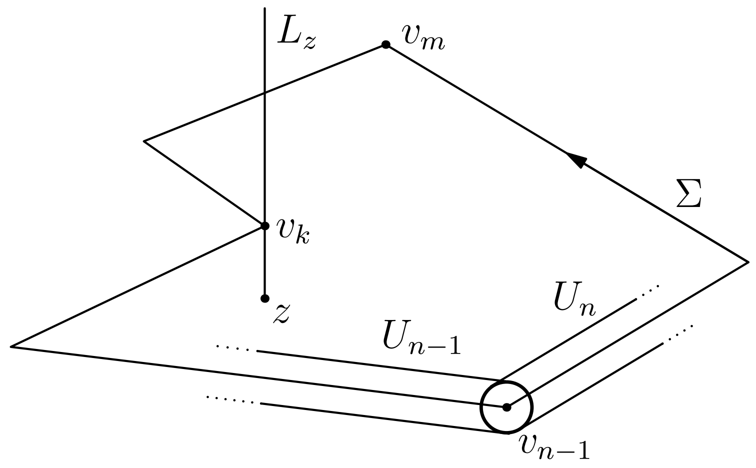

Рис. 2.1.

Доказательство. Пусть Σ — замкнутая жорданова ломаная и пусть Σ имеет вершины $v_n = \sigma((\cos\theta_n, \sin\theta_n))$ и ребра $\Sigma_n = [v_{n-1}, v_n]$, где $n = 1, \ldots, N$. Пусть также $\Sigma_{N+1} = \Sigma_1$ и $v_0 = v_N$.

Докажем вначале, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ имеет *не более двух* компонент связности. Остановимся на случае $N \geq 4$. При $n = 1, \ldots, N$ рассмотрим множества $U_n = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(z, \Sigma_n) < \delta\}$, где

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\mathrm{d}(\Sigma_j, \Sigma_k)\},$$

а min берется по всем *несоседним* ребрам ломаной Σ. Если обозначить $\Sigma_0 = \Sigma_N$, то ясно, что

$$U_n \cap \Sigma \subset \Sigma_{n-1} \cup \Sigma_n \cup \Sigma_{n+1},$$

причем $U_n \setminus \Sigma$ состоит из двух компонент U_n' и U_n'', где, для определенности, можно предположить, что $U_n' \cap U_{n+1}' \neq \varnothing$ и $U_n'' \cap U_{n+1}'' \neq \varnothing$ при $n = 1, \ldots, N-1$. Тогда множества $U' := \bigcup_{n=1}^N U_n'$ и $U'' := \bigcup_{n=1}^N U_n''$ являются областями, причем любую точку $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ можно соединить отрезком с U' или U'' вне Σ.

Докажем теперь, что имеется *не менее двух* компонент связности у множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Выберем систему координат в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы все вершины $v_n = (x_n, y_n)$ ломаной Σ имели различные абсциссы x_n.

При $z \notin \Sigma$ положим $\eta(z) = 1$, если луч L_z с вершиной в точке z, направленный вертикально вверх, пересекает Σ *нечетное* число раз. В случае четного числа пересечений L_z и Σ, положим $\eta(z) = 0$. Отметим, что если L_z содержит (ровно одну) вершину, скажем v_k, ломаной Σ, причем ребра Σ_{k-1} и Σ_k (пересекающиеся в вершине v_k) лежат по одну сторону от L_z, то мы считаем, что L_z (вблизи точки z) имеет два (или ни одного) пересечения с Σ (см. Рис. 2.1).

Нетрудно доказать, что $\eta(z)$ непрерывна в каждой точке вне Σ и, следовательно (будучи целочисленной), является локально постоянной функцией от z вне Σ. Следовательно, $\eta(z)$ постоянна в каждой связной компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$.

Если бы у множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ была бы только одна (неограниченная) компонента связности, то, очевидно, $\eta(z)$ была бы тождественным нулем. Пусть теперь $v_m = (x_m, y_m)$ такая вершина Σ, для которой $y_m = \max\{y_n \colon n = 1, \ldots, N\}$. Тогда ясно, что вблизи точки v_m найдется точка z такая, что $\eta(z) = 1$. $\square$

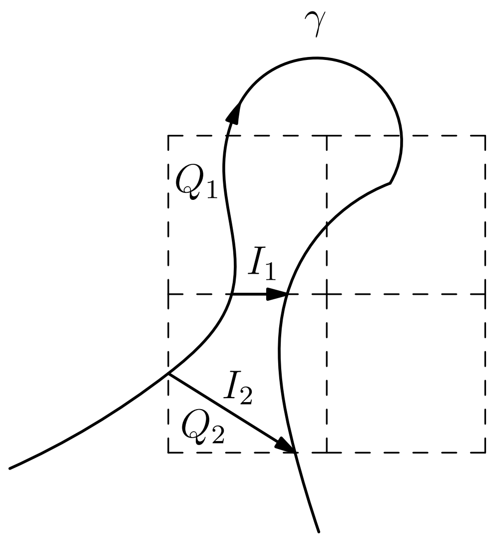

Рис. 2.2.

Лемма 2.2. *Всякий замкнутый жорданов путь γ (напомним, что $\gamma\colon \mathbb{T} \to \mathit{\Gamma}$ — гомеоморфизм) можно с любой точностью равномерно на $\mathbb{T}$ приблизить замкнутым жордановым путем σ, задающим замкнутую жорданову ломаную $\mathit{\Sigma}$ в смысле Определения 2.1. При этом $\mathit{\Sigma}$ «вписана» в $\mathit{\Gamma}$ в том смысле, что все ее вершины лежат на $\mathit{\Gamma}$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы при всех $t \in \mathbb{T}$ и $t' \in \mathbb{T}$ были верны следующие высказывания:

(1) если $|t - t'| \le \varepsilon_1$, то $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \frac{\varepsilon}{2}$, и

(2) если $|\gamma(t) - \gamma(t')| \le \varepsilon_2$, то $|t - t'| < \min\big(\varepsilon_1, \sqrt{3}\big)$.

Положим теперь $\delta = \min\{\varepsilon/2, \varepsilon_2\}$.

Рассмотрим стандартную решетку (замкнутых) квадратов диаметра δ:

$$Q_{jk} = \left\{(x, y)\colon \left|x - j\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{\delta}{2\sqrt{2}},\ \left|y - k\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right\}, \qquad j, k, \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\{Q_s\}_{s=1}^{S}$ — те из квадратов решетки, которые пересекают $\mathit{\Gamma}$ более, чем по одной точке. Легко видеть, что всегда $2 \le S < +\infty$. Так как $\delta \le \varepsilon_2$, то множество $\gamma^{-1}(Q_1)$ имеет диаметр менее $\sqrt{3}$, т.е. $\gamma^{-1}(Q_1)$ содержится в (однозначно определенной) минимальной замкнутой дуге $T_1 \subset \mathbb{T}$ длины менее $2\pi/3$. Пусть $[\tau_1, \tau_1'] \subset \mathbb{R}$ такой интервал, что отображение $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ есть гомеоморфизм $[\tau_1, \tau_1']$ на T_1. Рассмотрим новый путь γ_1 на $\mathbb{T}$, который совпадает с γ на $\mathbb{T} \setminus T_1$, а при $t = (\cos\theta, \sin\theta) \in T_1$ (при $\theta \in [\tau_1, \tau_1']$) положим $\gamma_1(t) = (a_1\theta + b_1, c_1\theta + d_1)$, где постоянные a_1, b_1, c_1, d_1 выбраны так, чтобы γ_1 было непрерывно на $\mathbb{T}$. Таким образом, $\mathit{\Gamma}_1 = \gamma_1(\mathbb{T})$ пересекает Q_1 по отрезку $[\gamma(t_1), \gamma(t_1')]$, где $t_1 = (\cos\tau_1, \sin\tau_1)$ и $t_1' = (\cos\tau_1', \sin\tau_1')$ — начало и конец дуги T_1 соответственно. Ясно, что $\gamma_1(t_1) = \gamma(t_1)$ и $\gamma_1(t_1') = \gamma(t_1')$.

Возможны два случая.

В первом случае (i) пусть отрезок $I_1 = [\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_1')]$ лежит на одной из *сторон* квадрата Q_1. Тогда перенумеруем остальные квадраты Q_s так, чтобы I_1 лежал также на стороне квадрата Q_2. Во втором случае (ii) отрезок I_1, за исключением своих концов, лежит строго внутри Q_1 (см. Рис. 2.2).

В этом случае никакой перенумерации остальных квадратов не делаем. Таким образом, в случае (ii) для всех $s \geq 2$ (а в случае (i) для всех $s \geq 3$) имеем $\gamma_1^{-1}(Q_s) \subseteq \gamma^{-1}(Q_s)$, и для всех $s \geq 1$ выполнено $\operatorname{diam} \gamma_1^{-1}(Q_s) < \sqrt{3}$.

Если Γ_1 пересекает Q_2 не более, чем по одной точке (что возможно только в случае (ii)), то полагаем $\gamma_2 = \gamma_1$. Иначе найдется такая минимальная замкнутая дуга T_2 длиной менее $2\pi/3$, которая содержит $\gamma_1^{-1}(Q_2)$. Отметим, что T_1 и T_2 либо не пересекаются по своим внутренностям (случай (ii)), либо $T_1 \subseteq T_2$ (случай (i)). В обоих случаях найдется гомеоморфизм $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ некоторого отрезка $[\tau_2, \tau_2']$ на T_2 и постоянные a_2, b_2, c_2 и d_2 такие, что путь $\gamma_2(t)$, равный $\gamma_1(t)$ на $\mathbb{T} \setminus T_2$, и равный $\gamma_2(t) = (a_2\theta + b_2, c_2\theta + d_2)$ при $t = (\cos\theta, \sin\theta) \in T_2$ (при $\theta \in [\tau_2, \tau_2']$) является замкнутым жордановым путем, совпадающим с γ в начале $t_2 = (\cos\tau_2, \sin\tau_2)$ и в конце $t_2' = (\cos\tau_2', \sin\tau_2')$ дуги T_2, поскольку t_2 и t_2' не могут лежать внутри T_1.

Продолжая аналогичным образом, мы в результате получим замкнутые жордановы пути γ_s, $s = 1, \ldots, S$. Пусть $t \in \mathbb{T}$, оценим $|\gamma_S(t) - \gamma(t)|$. Если $\gamma_S(t) \neq \gamma(t)$, то найдется такое $s \in \{1, \ldots, S\}$, что $\gamma_S(t) = \gamma_s(t) \neq \gamma_{s-1}(t)$ (считаем, что $\gamma_0 = \gamma$). По построению, t лежит на дуге T_s с началом t_s и концом t_s', $\gamma_s(T_s) \subset Q_s$, $\gamma_s(t_s) = \gamma(t_s)$, $\gamma_s(t_s') = \gamma(t_s')$. Тогда

$$|\gamma_S(t) - \gamma(t)| = |\gamma_s(t) - \gamma_s(t_s) + \gamma(t_s) - \gamma(t)| \leq \delta + |\gamma(t) - \gamma(t_s)|.$$

Но $|t - t_s| \leq |t_s' - t_s| \leq \varepsilon_1$ ввиду $|\gamma(t_s') - \gamma(t_s)| \leq \delta \leq \varepsilon_2$. Таким образом,

$$\delta + |\gamma(t) - \gamma(t_s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откуда, окончательно, $|\gamma_S(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$.

Поскольку $\Gamma_S = \gamma_S(\mathbb{T})$ пересекает каждый квадрат решетки либо по пустому множеству, либо по одной точке, либо по «равномерно» проходимому отрезку, нетрудно видеть, что $\sigma = \gamma_S$ — искомая аппроксимация. $\square$

2.3. Две основные леммы.

Лемма 2.3. *Пусть Σ — замкнутая жорданова ломаная, с реализацией (σ, Θ). Тогда найдется открытый круг B, лежащий в ограниченной компоненте D множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, с границей C, пересекающей ломаную Σ в точках $\sigma(t)$ и $\sigma(t')$, где $t, t' \in \mathbb{T}$ такие, что $|t - t'| \geq \sqrt{3}$.*

Доказательство. Пусть при движении вдоль Σ, соответствующем ориентации на $\mathbb{T}$ и отображению σ, область D остается слева (иначе сделаем симметрию относительно одной из осей координат). Пользуясь упомянутой выше теоремой Вейерштрасса, нетрудно показать, что найдется открытый круг B, лежащий в D, с границей C, пересекающей ломаную Σ в точках $\sigma(t)$ и $\sigma(t')$, где $t, t' \in \mathbb{T}$, для которого значение $|t - t'|$ является максимально возможным (см. Рис. 2.3; отметим, что C может пересекать Σ и в других точках).

Покажем, что этот круг является искомым. Предположим, что $|t - t'| < \sqrt{3}$. Пусть T — дуга на $\mathbb{T}$, соединяющая точки t и t', имеющая длину, большую $4\pi/3$, направленная (как и $\mathbb{T}$) против часовой стрелки. Будем считать точку t — началом, а t' — концом T. Очевидно, что граница C круга B не имеет общих точек с частью $\Sigma' = \sigma(T')$ ломаной Σ, где $T' = T \setminus \{t, t'\}$. Без ограничения общности будем считать, что $v_1 = \sigma((\cos\theta_1, \sin\theta_1)), \ldots, v_M = \sigma((\cos\theta_M, \sin\theta_M))$ — все (последовательные) вершины ломаной Σ, которые принадлежат Σ', $1 \leq M \leq N$. Положим $u_1 = \sigma(t)$ и $u_2 = \sigma(t')$. Ясно (см. Лемму 2.1), что $\Sigma' = \sigma(T')$ и отрезок $[u_1, u_2]$ (хорда ломаной Σ) ограничивают некоторую область D_1. Положим $B_1 = B \cap D_1$, $C_1 = C \cap D_1$.

Пусть, для начала, известно, что дуга C_1 касается Σ' в обеих ее точках u_1 и u_2 (т.е., окружность C касается прямых u_1v_1 и v_Mu_2). При этом вектор $\overrightarrow{u_1v_1}$ (соответственно,

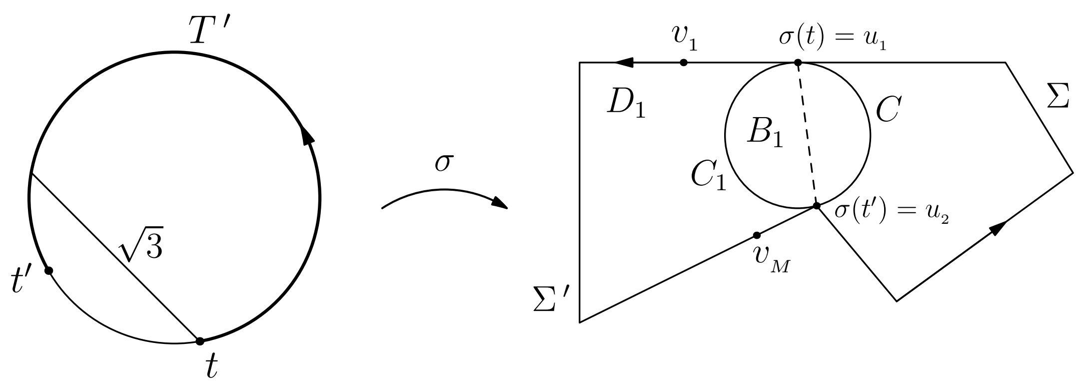

Рис. 2.3.

$\overrightarrow{v_M u_2}$) должен с касанием «выходить» из C (соответственно, «входить» в C), оставляя B слева, а отрезки $[u_1, v_1]$ и $[v_M, u_2]$ должны лежать по одну сторону от прямой $u_1 u_2$.

Поскольку C_1 не пересекает Σ', мы можем найти круг B', принадлежащий области $D_1 \cup B \subset D$, который касается ломаной Σ в точках u_1' и u_2', лежащих *внутри* отрезков $[u_1, v_1]$ и $[v_M, u_2]$ соответственно, причем точки u_1' и u_1 (а также u_2' и u_2) можно сделать сколь угодно близкими друг к другу. Последнее противоречит выбору B так как $|\sigma^{-1}(u_1') - \sigma^{-1}(u_2')| > |t - t'|$.

Во втором случае, пусть известно, что C_1 касается ломаной Σ' ровно в одной точке, например, u_1 (случай касания в точке u_2 аналогичен). В этом случае $u_2 = v_{M+1}$ — вершина. Так как ребро $[v_M, v_{M+1}]$ не касается C_1, мы снова можем найти круг $B' \subset D_1 \cup B$, который касается Σ' в некоторой точке u_1' внутри $[u_1, v_1]$ (близкой к u_1), и граница которого проходит через u_2. Возникает противоречие, аналогичное предыдущему случаю.

Пусть, наконец, обе точки $u_1 = v_N$ и $u_2 = v_{M+1}$ — вершины Σ и касания C_1 и Σ' нет. Будем непрерывно «раздувать» диск B в сторону области D_1, оставляя его в области D, а его границу C проходящей через точки u_1 и u_2. Тогда в некоторый момент дуга C_1 коснется ребра $[u_1, v_1]$, или ребра $[v_M, u_2]$, или пересечет Σ'. Все эти случаи уже рассмотрены как приводящие к противоречию. $\square$

Рассмотрим теперь замкнутую жорданову ломаную Σ и выберем одну из компонент D множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Для любой хорды I в D (т.е. отрезка, соединяющего две разные точки на Σ и целиком лежащего в D за исключением концевых точек) множество $D \setminus I$ состоит из двух компонент связности (см. Лемму 2.1). *Фиксируем* точки $a \in D$ и $b \in D$ с условием $\mathrm{d}(\Sigma, \{a, b\}) \geq 1$. *Пусть известно*, что для всякой хорды I в D длины $\ell(I) < 2$ точки a и b лежат в одной и той же компоненте множества $D \setminus I$.

Лемма 2.4. *В указанных условиях найдется путь $\kappa : [0,1] \to D$, соединяющий точки a и b (т.е. $\kappa(0) = a$, $\kappa(1) = b$) с условием $\mathrm{d}(\Sigma, K) \geq 1$, где $K = \kappa([0,1])$; см. Рис. 2.4.*

Доказательство. Пусть A_a — совокупность точек из D, которые можно соединить с точкой a путями κ_a (определенными на $[0,1]$) с условием $\mathrm{d}(\Sigma, K_a) \geq 1$, где $K_a = \kappa_a([0,1])$. Положим

$$\Sigma_a = \{z \in \Sigma \colon \exists\, a_z \in A_a \text{ такая, что } |z - a_z| = 1\}.$$

Аналогично определяются множества A_b и Σ_b для точки b. Требуется доказать, что $A_a \cap A_b \neq \varnothing$ (откуда сразу следует, что $A_a = A_b$). Будем считать, что при движении по Σ (согласно ориентации) область D остается слева.

Нам необходимо доказать следующее утверждение.

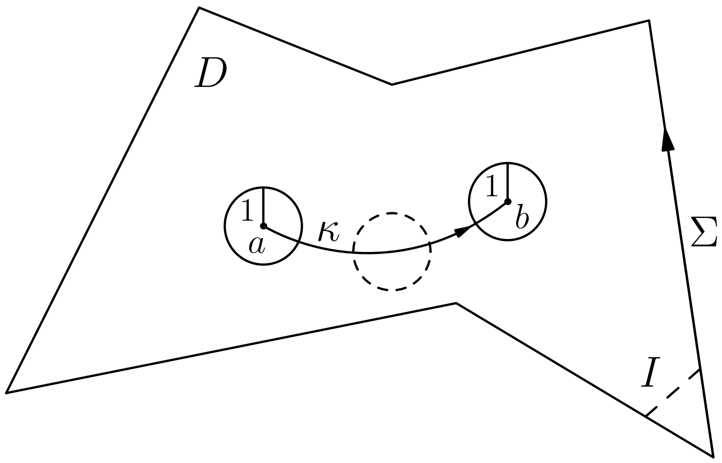

Рис. 2.4.

Лемма 2.5. *В указанных условиях имеет место равенство $\Sigma_a = \Sigma_b$. При этом Σ_a состоит из конечного числа связных компонент (конечного числа замкнутых промежутков и точек на Σ).*

Доказательство. Пусть $\overline{E}$ — замыкание (непустого) множества $E \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $z \in \Sigma_a$ и B_z — единичный круг с центром $a_z \in A_a$, граница C_z которого содержит точку z. Обозначим через C_z^+ — открытую полуокружность на C_z с началом в точке z и проходимую против часовой стрелки.

Предположим вначале, что точка z не является вершиной ломаной Σ. Тогда B_z касается некоторого ребра в Σ, содержащего точку z. При условии $C_z^+ \cap \Sigma = \varnothing$ точку z (а вместе с ней и круг B_z) можно «двигать» вдоль по Σ (в направлении, соответствующем ориентации Σ) до того момента, когда z впервые достигнет следующей вершины, или когда впервые появится точка пересечения C_z^+ и Σ. В первом случае продолжим непрерывное «качение» круга B_z вокруг достигнутой вершины z (по часовой стрелке) до его первого положения, когда $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$, или до того момента, когда C_z станет касательной к следующему после вершины z ребру. Продолжая этот процесс мы обязательно придем к ситуации, когда впервые $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$ (в общей ситуации исходная точка $z \in \Sigma_a$ может оказаться где-то посередине описанного выше процесса). Это последнее положение точки z (обозначим его z_1) и будет «крайней» точкой компоненты из Σ_a, содержащей исходное положение точки z (см. Рис. 2.5).

Действительно, пусть z_2 — ближайшая (при движении от z_1 вдоль Σ) точка на Σ с условием $z_2 \in C_{z_1}^+ \cap \Sigma$. Докажем, что на (открытом) промежутке Σ_{12}° ломаной Σ с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 не может быть точек из Σ_a. Более того, мы сразу докажем, что на Σ_{12}° не может быть и точек из Σ_b (откуда следует, что $\Sigma_b \subset \Sigma_a$ и, по симметрии, $\Sigma_a \subset \Sigma_b$, что дает $\Sigma_a = \Sigma_b$), так что Лемма 2.5 будет доказана.

Пусть, от противного, найдутся точки $w \in \Sigma_{12}^\circ$ и $a_w \in A_a \cup A_b$ с условием $|a_w - w| = 1$. Тогда единичный круг B_w (с границей C_w и центром a_w) лежит целиком в области D. Пусть $I = [z_1, z_2]$ — хорда в D. Поскольку $|z_1 - z_2| < 2$, множество $A_a \cup A_b$ (и, соответственно, точка a_w) лежит в одной компоненте D_1, ограниченной ломаной $(\Sigma \setminus \Sigma_{12}^\circ) \cup [z_1, z_2]$. Так как $a_w \in D_1$, а $w \notin \overline{D}_1$, радиус $[a_w, w)$ круга B_w (не пересекая множества $\Sigma \setminus \Sigma_{12}^\circ$) обязан пересекать хорду I. Далее, B_w не содержит z_1 и z_2, поэтому C_w пересекает I в двух точках. Поскольку a_w и $a_{z_1} \in A_a$ (a_{z_1} — центр круга B_{z_1} полуокружность

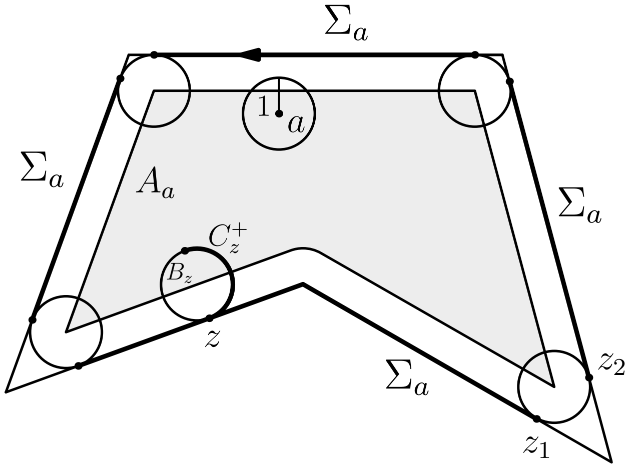

Рис. 2.5.

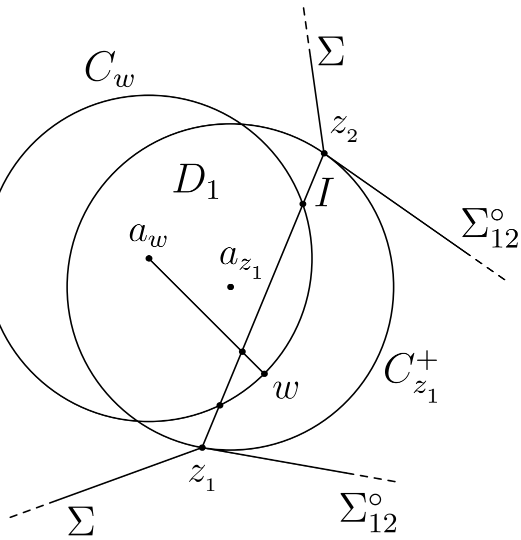

Рис. 2.6.

$C_{z_1}^+$ которого содержит z_2) лежат по одну сторону от прямой $z_1 z_2$, мы видим, что либо $a_w = a_{z_1}$ (и точка $w \in C_{z_1}^+$ предшествует z_2), либо $w \in B_{z_1}$, что невозможно (см. Рис. 2.6). $\square$

Завершим теперь доказательство Леммы 2.4. Итак $\Sigma_a = \Sigma_b$. Докажем теперь, что $A_a = A_b$. Пусть $z \in \Sigma_a = \Sigma_b$, $a_z \in A_a$, $b_z \in A_b$ и пусть B_z^a и B_z^b — единичные круги с центрами a_z и b_z соответственно, границы C_z^a и C_z^b которых содержат точку z. Если $a_z = b_z$, то все ясно. В противном случае угол $\angle(a_z z b_z)$ — ненулевой, так что точка z — вершина ломаной Σ и, следовательно, круги B_z^a и B_z^b имеют непустое пересечение. Без ограничения общности будем считать, что непрерывное вращение круга B_z^a вокруг точки z, совмещающее B_z^a с B_z^b и осуществляемое в «ближайшую сторону», есть вращение по часовой стрелке. При таком непрерывном вращении мы или придем в положение B_z^b без пересечения B_z^a с ломаной Σ (откуда $b_z \in A_a$ и все доказано), или $z = z_1$ будет крайней

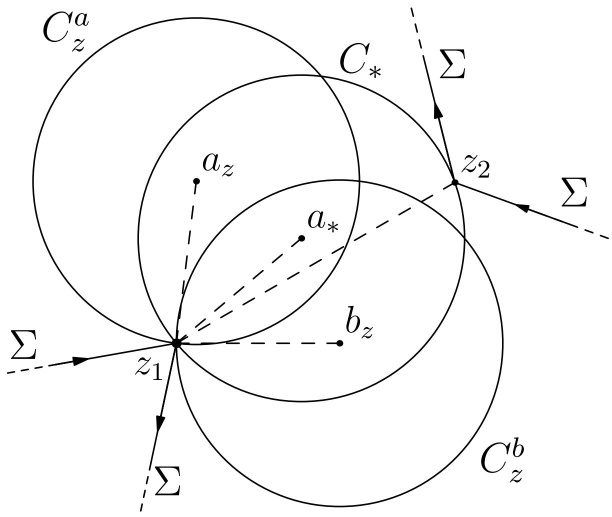

Рис. 2.7.

точкой компоненты Σ_a, содержащей z_1. В последнем случае пусть z_2 — следующая за z_1 точка Σ_a (как в Лемме 2.5), $a_* \in A_a$ — центр единичного круга B_*, граница C_* которого проходит через точки z_1 и z_2, причем $a_* \neq b_z$. Таким образом, B_* — предельное положение, до которого можно вращать B_z^a без пересечения с Σ. Если луч zb_z (с вершиной в точке z), лежит между лучами za_* и z_1z_2, то круг B_z^b содержит z_2 — противоречие. Если же луч z_1z_2 лежит между лучами za_* и zb_z, то точки a_* и b_z лежат в разных компонентах $D \setminus [z_1, z_2]$, поскольку отрезок $[a_*, b_z]$, лежащий в $B_* \cup B_z^b \subset D$ пересекает отрезок $[z_1, z_2]$ один раз. Снова приходим к противоречию и, таким образом, Лемма 2.4 доказана (см. Рис. 2.7).

□

2.4. Доказательство теоремы Жордана. Докажем сначала, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ имеет не менее двух компонент. Достаточно установить наличие *ограниченной* компоненты у этого множества. Для этого рассмотрим достаточно большой круг B_0 с центром в нуле и границей C_0, содержащий Γ. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m, \ldots$ — замкнутые жордановы ломаные, сходящиеся к Γ в смысле Леммы 2.2 и пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \ldots$ — пути (сходящиеся к γ), реализующие $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m \ldots$ соответственно. По Лемме 2.3 для каждого m найдется круг B_m (с центром b_m и границей C_m), лежащий в области D_m, ограниченной ломаной Γ_m, с условием, что существуют точки $t_m \in \mathbb{T}$ и $t'_m \in \mathbb{T}$ такие, что $|t_m - t'_m| \geq \sqrt{3}$, а $\gamma_m(t_m) \in C_m$ и $\gamma_m(t'_m) \in C_m$. Переходя если нужно к подпоследовательности, мы можем дополнительно считать, что все Γ_m лежат в B_0 и что последовательность $\{b_m\}$ сходится к некоторой точке b при $m \to +\infty$.

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $t, t' \in \mathbb{T}$ и $|t - t'| \geq \sqrt{3}$ вытекает, что $|\gamma(t) - \gamma(t')| \geq \varepsilon$. Тогда $|\gamma(t_m) - \gamma(t'_m)| \geq \varepsilon$, откуда $|\gamma_m(t_m) - \gamma_m(t'_m)| > \varepsilon/2$ для всех достаточно больших m. Следовательно, $\operatorname{diam} B_m > \varepsilon/2$ и $\mathrm{d}(b_m, \Gamma_m) > \varepsilon/4$ при больших m. Таким образом, при больших m точки b_m и b лежат в одной (ограниченной) компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_m$ и, следовательно, b_m и b лежат в одной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Если b_m и b лежат в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, то найдется путь $\kappa \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, соединяющий b и C_0. Пусть $\mathrm{d}(K, \Gamma) = \delta > 0$, где $K = \kappa([0, 1])$. Поскольку при больших m имеет место неравенство $|\gamma(t) - \gamma_m(t)| < \delta/2$ при всех $t \in \mathbb{T}$, мы получаем, что $\mathrm{d}(K, \Gamma_m) > \delta/2$, так что для больших m точки b_m и b должны лежать в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_m$, а это дает противоречие.

Докажем теперь, что $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ имеет не более двух компонент связности. Пусть, от противного, точки w_1, w_2 и w_3 лежат в различных компонентах множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$. Положим $\mathrm{d}(\mathit{\Gamma}, \{w_1, w_2, w_3\}) = \varepsilon$ и пусть жордановы ломаные $\mathit{\Gamma}_1, \ldots, \mathit{\Gamma}_m, \ldots$ сходятся к $\mathit{\Gamma}$, т.е., соответственно, $|\gamma(t) - \gamma_m(t)| \to 0$ при $m \to +\infty$ равномерно на $\mathbb{T}$. Тогда можно считать, что $\mathrm{d}(\mathit{\Gamma}_m, \{w_1, w_2, w_3\}) \geq \varepsilon/2$ (при всех m), так что две из трех точек w_1, w_2 и w_3 лежат в одной компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}_m$. Будем считать, что точки w_1 и w_2 лежат в одной компоненте D_m множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}_m$ при всех m. Предположим, что существуют $\delta \in (0, \varepsilon)$ и бесконечно много значений m такие, что w_1 и w_2 можно соединить путем $\kappa_m \colon [0,1] \to D_m$ с условием $\mathrm{d}(K_m, \mathit{\Gamma}_m) \geq \delta$, где $K_m = \kappa_m([0,1])$. Но тогда w_1 и w_2 должны лежать в одной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$. Однако, в силу сделанного ранее предположения, это не так, и мы получаем, что такого δ не существует. Применим теперь (от противного) Лемму 2.4. Еще раз переходя к подпоследовательности, мы можем утверждать, что для каждого m найдутся точки $z_m = \gamma_m(t_m)$, $t_m \in \mathbb{T}$, и $z'_m = \gamma_m(t'_m)$, $t'_m \in \mathbb{T}$, такие, что точки w_1 и w_2 лежат в разных компонентах множества $D_m \setminus I_m$, где $I_m = [z_m, z'_m]$, причем $z_m - z'_m = \gamma_m(t_m) - \gamma_m(t'_m) \to 0$ при $m \to +\infty$. Следовательно, $t_m - t'_m \to 0$ при $m \to +\infty$. Без ограничения общности предположим, что для бесконечно многих значений m точка w_1 лежит в компоненте D'_m множества $D_m \setminus I_m$, ограниченной I_m и $\gamma(T'_m)$, где T'_m — минимальная дуга на $\mathbb{T}$, соединяющая t_m и t'_m. Ясно, что $\operatorname{diam} D'_m \to 0$ при $m \to +\infty$, так что точка w_1 обязана лежать на $\mathit{\Gamma}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Жордана. □

Использованные при доказательстве теоремы Жордана аргументы и конструкции позволяют установить ряд интересных полезных следствий.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы Жордана пусть* $\delta := \min\{|\gamma(t) - \gamma(t')| \colon t, t' \in \mathbb{T},\ |t - t'| \geq \sqrt{3}\}$. *Тогда ограниченная компонента множества* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ *содержит круг с диаметром* δ.

Естественным образом модифицируя Леммы 2.1, 2.2 и 2.4 и вторую часть доказательства теоремы Жордана, получаем следующий важный результат.

Теорема 2.2 (Теорема Жордана для жордановых кривых). *Пусть* $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *— непрерывное инъективное отображение, т.е.* $\mathit{\Gamma} = \gamma([0,1])$ *— жордановы кривая. Тогда* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ *— связно.*

Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.2. *В условиях теоремы Жордана граница каждой из компонент связности множества* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$ *совпадает с* $\mathit{\Gamma}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай ограниченной компоненты D множества $\mathbb{R}^2 \setminus \mathit{\Gamma}$. Пусть, от противного, граница ∂D множества D не совпадает с $\mathit{\Gamma}$. Ясно, что $\partial D \subset \mathit{\Gamma}$, поэтому при некотором $t_0 \in \mathbb{T}$ имеем $\gamma(t_0) \notin \partial D$. Тогда найдется такая связная окрестность T_0 точки t_0 в $\mathbb{T}$, что $\partial D \cap \gamma(T_0) = \varnothing$. При этом жорданова кривая $\mathit{\Gamma}_1 = \gamma(T_1)$, где $T_1 = \mathbb{T} \setminus T_0$, содержит ∂D и не разделяет плоскость в силу теоремы Жордана для жордановой кривой. Противоречие легко получается применением принципа вложенных отрезков. □

Нам понадобится также следующее утверждение (в обозначениях лекций 5 и 6 главы 1).

Определение 2.2. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – путь и φ – какая-либо непрерывная на $[\alpha, \beta]$ ветвь м-функции $\operatorname{Arg}(\gamma(t))$. Величина

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

называется *приращением (полярного) аргумента* вдоль пути γ.

Замечание. Из теоремы 5.1 лекций следует, что $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z)$ определено корректно, т.е. не зависит от выбора непрерывной ветви φ м-функции $\operatorname{Arg}\gamma(t)$.

Определение 2.3. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – путь, и пусть $a \notin [\gamma]$. Тогда путь $\gamma_{-a}(t) = \gamma(t) - a$, $t \in [\alpha, \beta]$, не проходит через точку 0 и определен *индекс пути* γ относительно точки a:

$$\operatorname{ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_{\gamma_{-a}} \operatorname{Arg}(z).$$

Замечание. Если путь γ замкнут, то $\operatorname{ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$ для всех $a \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

Упражнение 2.1. Функция $f(z) = \operatorname{ind}_\gamma(z)$ непрерывна в $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$. А в случае замкнутого пути γ функция f постоянна (и целочисленна) в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$. (Обсудить.)

Докажем следующую теорему, *опираясь на доказательство теоремы Жордана.*

Теорема 2.3. *Пусть γ – замкнутый жорданов путь в $\mathbb{C}$. По теореме Жордана, $\mathbb{C} \setminus [\gamma] = D \sqcup \Omega$, где D – ограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, Ω – неограниченная. Тогда утверждается, что* $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ *для всех $z \in \Omega$,* $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ *(или* $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv -1$*) для всех $z \in D$.*

Доказательство. Свойство $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 0$ для всех $z \in \Omega$ достаточно просто (обсудить).

Докажем второе утверждение теоремы (случай $z \in D$). Понадобится несколько шагов.

1. Сначала устанавливается следующий факт.

Лемма 2.6. *Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – замкнутый путь, $a \notin [\gamma]$ и $d = \mathrm{d}(a, [\gamma])$ $(d > 0)$. Пусть $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – замкнутый путь с условием $||\gamma - \gamma_1||_{[\alpha,\beta]} < d$. Тогда* $\operatorname{ind}_\gamma(a) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(a)$.

Лемма остается в качестве упражнения (обсудить).

2. Отметим, что функция $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ постоянна в D.

3. Докажем нашу теорему для замкнутой жордановой ломаной (обсудить).

3. Применим леммы 2.1 – 2.3 из приведенного выше доказательства теоремы Жордана.

$\square$

В случае, когда $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv 1$ для всех $z \in D$, путь γ называется *положительно ориентированным относительно области D*. Если же $\operatorname{ind}_\gamma(z) \equiv -1$ для всех $z \in D$, то *γ отрицательно ориентирован относительно D.*

3. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости.

3.1. Основные определения. На этой лекции мы рассмотрим модель А. Пуанкаре (1882) геометрии Н.И. Лобачевского в верхней полуплоскости, которая очень наглядно излагается с помощью уже известных нам свойств ДЛО. К сожалению, у самого Н.И. Лобачевского не было реальной модели, подтверждавшей его замечательную теорию.

Обозначим через Π_+ верхнюю открытую полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\} ,$$

которая и является множеством точек плоскости Лобачевского (пЛ) в модели Пуанкаре (мП).

Определение 3.1. *Точки* в пЛ - обычные точки из Π_+. *Прямыми* в пЛ являются либо (открытые) вертикальные лучи в Π_+ с вершиной на вещественной оси, либо (открытые) полуокружности из Π_+ с центром, лежащим на вещественной оси.

Предложение 3.1. *Через любые две различные точки $a, b \in \Pi^+$ в пЛ проходит единственная прямая ab_Λ (в пЛ).*

Доказательство. Если точки a, b лежат на одной вертикали, то соответствующий вертикальный луч является единственной искомой прямой.

В противном случае проведем серединный перпендикуляр l_E к отрезку $[a, b]_E$ (здесь в классическом евклидовом смысле). Тогда центр искомой полуокружности, задающей подходящую нам прямую в пЛ, находится в точке пересечения l_E и вещественной оси. Единственность также очевидна. □

Определение 3.2. *Отрезком* $[a, b]_\Lambda$ в пЛ называется часть прямой ab_Λ в пЛ, расположенная между точками a и b. (Если $a = b$, то $[a, b]_\Lambda = \{a\}$.)

Определение 3.3. Если точка c принадлежит отрезку $[a, b]_\Lambda$ и не совпадает с его концами, то говорят, что c лежит *между* a и b.

На каждой прямой пЛ естественно определяется отношение порядка (2 варианта).

Мы упомянем только некоторые аксиомы планиметрии. Их проверка для случая пЛ труда не представляет.

• *Если три различные точки лежат на одной прямой пЛ, то ровно одна из них лежит между двумя другими.*

• *Для каждой прямой пЛ есть точка, принадлежащая ей, и есть точка, не лежащая на ней.*

• *Дополнение каждой прямой l на пЛ состоит из двух непересекающихся полуплоскостей Π_l^1 и Π_l^2 со следующим свойством: для любых двух различных точек a и b, лежащих вне l, отрезок $[a, b]_\Lambda$ пересекает прямую l если и только если точки a и b лежат в разных полуплоскостях Π_l^1 и Π_l^2.*

Определение 3.4. Пусть l_1 и l_2 – две прямые в пЛ, пересекающиеся в (одной) точке a. Проведем в этой точке касательные (прямые в геометрии Евклида) к прямым l_1 и l_2. Между этими касательными возникает четыре угла, меньший из которых (в абсолютной величине) называется углом между l_1 и l_2 в точке a. Угол между совпадающими прямыми в каждой их общей точке считается равным 0.

Углы, как обычно, измеряются в градусах и радианах. *Аксиомы измерения и откладывания углов выполняются.*

Напомним, что для любой тройки $a, b, c \in \mathbb{C}$ различных точек существует единственное ДЛО $\Lambda_{abc} : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}^\bullet$,

$$\Lambda_{abc}(z) = \frac{z-a}{z-b} : \frac{c-a}{c-b} ,$$

которое $a \mapsto 0, b \mapsto \infty, c \mapsto 1$. (Читателю полезно также вспомнить случаи, когда одна из указанных точек a, b, c равна ∞). Выражение $\Lambda_{abc}(d)$ называется *сложным, или ангармоническим, отношением* четверки различных точек a, b, c, d из $\mathbb{C}^\bullet$ и обозначается $[a, b, c, d]$.

Дадим определение *расстояния* (метрики) на пЛ.

Пусть $z_1, z_2 \in \Pi_+$ – две различные точки, причем z_1 расположена не правее z_2. Проведем прямую $z_1 z_{2\Lambda}$ в пЛ. Возможны два случая:

(1) z_1, z_2 не лежат на одной вертикали, а *окружность* прямой $z_1 z_{2\Lambda}$ пересекает вещественную ось в двух вспомогательных точках α и β; α расположена "левее"β;

(2) z_1, z_2 находятся на одной вертикали, т.е. прямая $z_1 z_{2\Lambda}$ пЛ является вертикальным лучом с вершиной $\alpha \in \mathbb{R}$; полагаем $\beta = \infty$; считаем, что z_1 лежит "ниже"z_2.

Определение 3.5. Расстоянием между точками $z_1, z_2 \in \Pi_+$ в пЛ называется величина (метрика Лобачевского)

$$\rho_+(z_1, z_2) = \ln([\alpha, \beta, z_1, z_2]) \ .$$

Поскольку α, β, z_1, z_2 лежат на одной обобщенной окружности в $\mathbb{C}^\bullet$, всегда имеем

$$[\alpha, \beta, z_1, z_2] = \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta} : \frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} \in \mathbb{R} \ .$$

При этом (в нетривиальном случае (1)), поскольку z_1 лежит левее z_2, $\alpha < \beta$ и углы $\angle \alpha z_1 \beta = \angle \alpha z_2 \beta = \pi/2$ (как опирающиеся на диаметр $[\alpha, \beta]_E$), имеем

$$\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} = -id_1 \ , \quad \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta} = -id_2 \ , \ d_2 > d_1 > 0 \ .$$

Следовательно, $[\alpha, \beta, z_1, z_2] = d_2/d_1 > 1$, откуда $\rho_+(z_1, z_2) = \ln([\alpha, \beta, z_1, z_2]) > 0$.

Если $z_1 = z_2$, то расстояние между точками z_1, z_2 в пЛ полагается равным 0.

Формула для $\rho_+(z_1, z_2)$ не симметрична относительно z_1, z_2. При произвольном расположении (разных) точек z_1, z_2 полагаем

$$\rho_+(z_1, z_2) := |\ln([\alpha, \beta, z_1, z_2])| \, . \tag{3.1}$$

Симметричность последнего выражения вытекает из элементарного свойства натурального логарифма: $\ln(1/t) = -\ln t \, , \ t > 0$.

Определение 3.6. Длиной отрезка $[z_1, z_2]_\Lambda$ в пЛ называется величина $\rho_+(z_1, z_2)$.

Задача 3.1. Доказать *неравенство треугольника* для функции ρ_+:

$$\rho_+(z_1, z_3) \le \rho_+(z_1, z_2) + \rho_+(z_2, z_3) \ , \ \forall z_1, z_2, z_3 \in \Pi_+ \ ,$$

причем равенство здесь справедливо если и только если $z_2 \in [z_1, z_3]_\Lambda$.

Так что ρ_+ действительно является метрикой, а (Π_+, ρ_+) – метрическим пространством.

3.2. Движения плоскости Лобачевского. Следующее утверждение доказывается в Ч.1, Гл. 1, п. 5.

Предложение 3.2. *Совокупность (группа) всех ДЛО-автоморфизмов* Π_+ *имеет вид*

$$\Lambda(z) = \frac{az + b}{cz + d} \ , \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \ .$$

Определение 3.7. *Движением* (сохраняющим ориентацию) пЛ Π_+ называется всякое ДЛО из предыдущей теоремы.

Действительно ли движения пЛ сохраняют метрику ρ_+? В каком смысле следует понимать сохранение ориентации? На поставленные вопросы мы ответим чуть позже. Кроме того, оказывается, что других отображений пЛ на себя, сохраняющих ρ_+ и ориентацию (отличных от указанных выше движений пЛ), не существует.

Задача 3.2. *Инвариантность ρ_+ при указанных выше движениях пЛ следует из свойства сохранения сложного отношения при действии любого ДЛО.* (Проверить!)

Задача 3.3. Пусть $z_0 \in \Pi_+$ – фиксированная точка, $R > 0$, и пусть

$$\Gamma_R(z_0) = \{z \in \Pi_+ \mid \rho_+(z, z_0) = R\}\,.$$

Описать геометрически множество точек $\Gamma_R(z_0)$.

Ответ. $\Gamma_R(z_0)$ является обычной евклидовой окружностью в плоскости $\mathbb{C}$.

Задача 3.4. Доказать, что $\forall z_1, z_2 \in \Pi_+$ и $\forall w_1, w_2 \in \Pi_+$ таких, что $\rho_+(z_1, z_2) = \rho_+(w_1, w_2)$, существует, причем единственное, движение Λ пЛ Π_+ с условием $\Lambda(z_j) = w_j\ ,\ j \in \{1, 2\}$.

С помощью этих двух задач доказывается *отсутствие других* (сохраняющих ориентацию) изометрий пЛ.

Предложение 3.3. *Метрику $\rho_+(z_1, z_2)$ можно записать в следующем виде:*

$$\rho_+(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \overline{z_2}| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \overline{z_2}| - |z_1 - z_2|}\,. \tag{3.2}$$

Доказательство этого факта несложно. Поскольку параллельные переносы $z \to z + a$ $(a \in R)$, гомотетии $z \to kz$ $(k > 0)$ и ДЛО $z \to -1/z$ (являющиеся движениями пЛ) не меняют значений правых частей в формулах (3.1) и (3.2), остается свести общую ситуацию к простому случаю, когда z_1, z_2 лежат на мнимой оси.

Отметим, что мы изначально определили метрику $\rho_+(z_1, z_2)$ по формуле (3.1) именно для того, чтобы доказать ее инвариантность относительно ДЛО.

Упомянутые выше движения Π_+ (ДЛО-автоморфизмы Π_+) называются движениями *1го рода.* Существуют, естественно, и изометрии пЛ Π_+ изменяющие ориентацию (движения *2-го рода*). Примером такого движения является симметрия относительно мнимой оси $x \mapsto -x\,,\ y \mapsto y\ ,\ z = x + iy \in \Pi_+$.

Задача 3.5. Доказать, что всякую изометрию пЛ Π_+ второго рода можно представить в виде композиции движения пЛ первого рода и симметрии относительно мнимой оси.

С учетом предыдущих рассуждений неравенство треугольника для ρ_+ можно доказывать в предположении, что две точки из тройки z_1, z_2, z_3 (например z_1, z_2) лежат на мнимой оси $i\mathbb{R} \cap \Pi_+$. Если z_3 также оказалась на мнимой оси (т.е. z_1, z_2, z_3 лежали на прямой пЛ), то нужное неравенство треугольника проверяется уже совсем просто, причем неравенство треугольника обращается в равенство, если и только если z_3 лежит между z_1, z_2.

Полезно напомнить следующий элементарный факт. Пусть на (евклидовой) плоскости $\mathbb{C}$ фиксированы разные точки a и b, а также задано число $k > 1$. Тогда геометрическое место точек z таких, что $|z - a| = k|z - b|$ является окружностью с центром на прямой ab (окружность Аполлония).

Задача 3.6. Что представляет собой аналог окружности Аполлония в пЛ?

Задача 3.7. Завершить доказательство неравенства треугольника для ρ_+.

3.3. Геометрия Лобачевского и пятый постулат Евклида.

Определение 3.8. В геометрии Лобачевского две прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Настало время обсудить: чем пЛ Π_+ принципиально отличается от евклидовой плоскости. Убедимся в том, что в геометрии Лобачевского пятый постулат Евклида о параллельных не справедлив. Неверно также и привычное свойство параллельных прямых в евклидовой плоскости: если две прямые параллельны третьей, то они либо совпадают, либо параллельны между собой.

Рассмотрим в пЛ Π_+ прямую l (для наглядности не являющуюся вертикальным лучом) и точку a вне нее. Опишем совокупность всех прямых, параллельных l и проходящих через точку a (в смысле пЛ). Для их построения возьмем упомянутые выше точки $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, являющиеся "концевыми точками"прямой l ($\alpha < \beta$). Проведем прямую l_α через точку a и "оканчивающуюся"в точке α. Аналогично, проведем прямую l_β через точку a и "оканчивающуюся"в точке β. Эти две разные прямые пЛ параллельны прямой l. Более того, все прямые пЛ, лежащие в "вертикальных углах" , находящихся между l_α и l_β (углах параллелелизма), тоже параллельны l.

Задача 3.8. Пусть D является треугольником на пЛ Π_+. Доказать, что против большего угла треугольника D лежит и большая сторона (и наоборот).

Задача 3.9. Какой минимальный целочисленный угол в градусах вы можете построить с помощью циркуля и линейки?

Задача 3.10. Какие из указанных ниже утверждений истинны в пЛ?

- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

3.4. Геометрия Лобачевского и анализ. Рассмотрим следующие задачи.

Задача 3.11. Доказать, что для любого отрезка $[a,b]_\Lambda$ в пЛ ($a \neq b$), прямая пЛ, проходящая через его середину и перпендикулярная этому отрезку, состоит в точности из всех точек, равноудаленных (в метрике пЛ) от a и b.

Задача 3.12. Доказать, что для любой прямой l на пЛ Π_+ и точки a вне l существует и единственна прямая $l_\perp$, проходящая через точку a и перпендикулярная l. Эти прямые пересекаются в единственной точке (скажем, b). Отрезок $[a,b]_\Lambda$ называется *перпендикуляром* к прямой l из точки a. Доказать, что для любой точки $c \in l$, $c \neq b$, справедливы неравенства $\rho_+(a,c) > \rho_+(a,b)$ (перпендикуляр реализует кратчайшее расстояние от точки до прямой) и $\rho_+(a,c) > \rho_+(b,c)$ (длина проекции меньше длины соответствующей наклонной).

Из этого утверждения, в частности, вытекает неравенство треугольника для метрики ρ_+.

Задача 3.13. Доказать, что для любой пары лучей пЛ с общей вершиной в точке a (полупрямых пЛ), прямая пЛ, делящая оба образованных этими лучами угла пополам (биссектриса этих углов в пЛ), состоит в точности из всех точек, равноудаленных от указанных лучей.

Указание. В качестве указанной прямой (в последней задаче – биссектрисы) следует брать мнимую ось.

Предложение 3.4. *Пусть в пЛ* Π_+ *фиксирована точка* z_0*, а* dz *– произвольное (бесконечно малое) комплексное число. Доказать, что*

$$\rho_+(z_0, z_0+dz) = \frac{|dz|}{Im(z_0)} + o(|dz|)\ ,\ |dz| \to 0\ ,$$

где $|\cdot|$ *– евклидова норма.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (3.2) для метрики Лобачевского ρ_+, а также тем фактом, что $\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$, $t \in \mathbb{R}$. Имеем:

$$\rho_+(z_0, z_0+dz) = \ln\frac{|z_0 - \overline{z_0} - \overline{dz}| + |dz|}{|z_0 - \overline{z_0} - \overline{dz}| - |dz|} = \ln\frac{|2i\mathrm{Im}z_0 - \overline{dz}| + |dz|}{|2i\mathrm{Im}z_0 - \overline{dz}| - |dz|} =$$

$$= \ln\frac{1 + \frac{|dz|}{|2\mathrm{Im}z_0 - \overline{dz}|}}{1 - \frac{|dz|}{|2\mathrm{Im}z_0 - \overline{dz}|}} \sim \frac{2|dz|}{|2i\mathrm{Im}z_0 - \overline{dz}|} \sim \frac{|dz|}{\mathrm{Im}(z_0)} \tag{3.3}$$

при $dz \to 0$. □

Полученное, в частности означает, что

$$\lim_{|dz|\to 0}\frac{\rho_+(z_0, z_0+dz)}{|dz|} = \frac{1}{\mathrm{Im}z_0}\ ,$$

и значение этого предела не зависит от направления, по которому $dz \to 0$.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Pi_+$ – путь, $T = \{\alpha = t_0, \ldots, t_N = \beta\}$ – разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ порядка N; $\Delta t_n = t_n - t_{n-1} > 0\,(n \in \{1, \ldots N\})$. Число $\lambda(T) = \max_{1\le n\le N}\Delta t_n$ называется диаметром разбиения T.

Сопоставим каждому разбиению T величину $l_T^+(\gamma) = \sum_{n=1}^N \rho_+(\gamma(t_n), \gamma(t_{n-1}))$ – длину вписанной в γ ломаной (пЛ), соответствующей T.

Определение 3.9. *Длиной пути* γ в пЛ называется (конечная или бесконечная) величина

$$l^+(\gamma) = \sup_T l_T^+(\gamma)\,.$$

Если $l^+(\gamma) < +\infty$, то путь γ называется спрямляемым.

Легко видеть, что если $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, то $l^+(\gamma_1) = l^+(\gamma_2)$; в частности, γ_1 и γ_2 одновременно спрямляемые или нет. Поэтому корректно определено понятие спрямляемой кривой и ее длина $l^+(\Gamma) := l^+(\gamma)$, где $\Gamma = \{\gamma\}$.

Также, как для евклидова случая, доказывается, что длина *непрерывно дифференцируемого пути* $\gamma(t) = x(t) + iy(t)\ ,\ t \in [\alpha, \beta]$, в пЛ находится по формуле

$$l^+(\gamma) = \int_\alpha^\beta \frac{|\dot\gamma(t)|}{\mathrm{Im}\,\gamma(t)}dt = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}}{y(t)}dt\,.$$

Длина $l^+(\{\gamma\})$ кривой $\{\gamma\}$ в пЛ согласуется с введенной ранее длиной отрезка в пЛ (см. Пример 2 ниже) и обладает всеми обычными свойствами длины, что и длина в классическом евклидовом случае.

Пример 1. Для фиксированных $p > 0, q > 0$ рассмотрим горизонтальный (евклидов) отрезок γ_{pq} соединяющий точки iq и $p + iq$. Он стандартно параметризуется: $\gamma_{pq}(t) = t + iq$, $t \in [0, p]$. Длина этого пути такова:

$$l^+(\gamma_{pq}) = \int_0^p \frac{\sqrt{1+0}}{q}dt = p/q\,.$$

Так, когда $q = 1$, длина (в пЛ) пути γ_{pq} равна p. При фиксированном p и увеличении q длина $l^+(\gamma_{pq})$ непрерывно уменьшается, и при $q \to +\infty$ длина $l^+(\gamma_{pq}) \to 0$. С другой стороны, при $q \to 0$ имеем $l^+(\gamma_{pq}) \to +\infty$.

Пример 2. Теперь рассмотрим вертикальный отрезок $\sigma_{ab} = [ia, ib]_\Lambda$, $0 < a < b$. Он параметризуется так: $\sigma(t) = it$, $t \in [a, b]$. Следовательно,

$$l^+(\sigma_{ab}) = \int_a^b \sqrt{0+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \ln \frac{b}{a}\,,$$

что согласуется с $\rho_+(ia, ib)$. Примечательно, что $\rho_+(ia, ib) \to +\infty$ при $a \to 0+$ ($b > 0$ фиксировано).

Те же значения длин кривых и углов между ними мы получим, введя на Π_+ подходящую структуру риманова многообразия (какую?).

С учетом свойства (3.3) метрики ρ_+, площадь (двумерную меру Жордана или Лебега) множества E в пЛ следует искать по формуле:

$$S^+(E) = \iint\limits_E \frac{dx\,dy}{y^2} \tag{3.4}$$

где E – измеримое по Жордану или Лебегу множество соответственно (в обычном смысле).

Задача 3.14. Пусть $D \subset \Pi_+$ – треугольник в пЛ, т.е. множество точек, ограниченных со всех сторон тремя отрезками пЛ. Пусть α, β, γ – абсолютные величины *внутренних* углов этого треугольника (в радианах). Доказать, что $S^+(D) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Указание. Не сложно показать (обычной заменой переменных в двойном интеграле, проверить!), что при движениях плоскости Лобачевского площадь $S^+(E)$ любого измеримого (по Жордану или Лебегу) множества E сохраняется. Кроме того, при движениях плоскости Лобачевского сохраняются углы между прямыми пЛ. Движением в пЛ следует перевести наш треугольник D в треугольник D_1, у которого одна из сторон лежит на мнимой оси. Для D_1 интеграл (3.4) несложно считается методом повторного интегрирования.

В частности, из сформулированной задачи следует, что сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского всегда меньше π радиан.

4. Регулярные плоские векторные поля. Теория обтекания крыла: теоремы Чаплыгина и Жуковского.

4.1. Регулярные плоские векторные поля. Комплексный потенциал. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $a = \{a_1(x,y), a_2(x,y)\} := a_1 + ia_2$ – векторное поле (в.п.) в D, которое интерпретируется как поле скоростей установившегося плоского течения (в сечении D). Всегда считается, что a_1 и a_2 непрерывны в D, $z = x + iy$.

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ – кусочно-гладкий (к-г.) путь в D, который будет всегда жордановым (ж.) или замкнутым-жордановым (з-ж.). Если $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то $\dot\gamma(t) = \dot x(t) + i\dot y(t)$ – касательный вектор к γ в точке $\gamma(t)$ (если $\dot\gamma$ существует).

Вектор $n^+_\gamma(t) = \dfrac{\dot{\gamma(t)}}{|\dot\gamma(t)|} \cdot (-i) = \dfrac{\dot y(t) - i\dot x(t)}{|\dot\gamma(t)|}$ – правый (единичный) нормальный вектор к γ в точке гладкости $\gamma(t)$ (где $\dot\gamma(t) \neq 0$).

Определение 4.1. В указанных условиях, *потоком в.п. a через путь γ* называется величина

$$\Pi_\gamma(a) = \int_\gamma (a, n^+_\gamma) ds = \int_\alpha^\beta \big(a(\gamma(t)), n^+_\gamma(t)\big)|\dot\gamma(t)|dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(a_1(x(t), y(t))\dot y(t) - a_2(x(t), y(t))\dot x(t)\big)dt = \int_\gamma (a_1(x,y)dy - a_2(x,y)dx)\,.$$

Теорема 4.1 (Гаусса – Остроградского). *Если $a \in C^1(D)$, а γ – к-г. з-ж. путь в D, который ограничивает область $G = G_\gamma \subset D$, обходя её в положительном направлении (это когда n^+_γ – внешняя нормаль для G на ∂G, т.е. при движении по γ область G остается слева), то*

$$\Pi_\gamma(a) = \iint_G \operatorname{div}(a) dxdy = \iint_G \Big(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y}\Big) dxdy\,.$$

Величина $\operatorname{div}(a(x,y)) := \dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \dfrac{\partial a_2}{\partial y}$ *называется дивергенцией в.п. a в точке (x,y). Из непрерывности* $\operatorname{div}(a(x,y))$ *в D получаем:*

$$\operatorname{div}(a(x,y)) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi\delta^2}\Pi_{\partial B((x,y),\delta)}(a)$$

– плотность внутренних источников поля a в точке (x,y), где $\partial B((x,y),\delta)$ – положительно ориентированная граница круга с центром (x,y) и радиусом δ.

Определение 4.2. Поле $a \in C^1(D)$ называется *соленоидальным в D*, если $\operatorname{div}(a) \equiv 0$ в D.

Определение 4.3. *Работой в.п. $a \in C(D)$ вдоль к-г. ж. (или к-г. з-ж.) пути γ в D* называется величина

$$P_\gamma(a) = \int_\gamma (a, d\gamma) := \int_\gamma (a_1 dx + a_2 dy) = \int_\alpha^\beta \big(a_1(\gamma(t))\dot x(t) + a_2(\gamma(t))\dot y(t)\big)dt.$$

Если γ является к-г. з-ж. путем, то $P_\gamma(a)$ называется *циркуляцией* в.п. a вдоль (или по) γ и часто обозначается как $\oint_\gamma (a, d\gamma)$ или $\text{Ц}_\gamma(a)$.

Теорема 4.2 (формула Грина). *Пусть $a \in C^1(D)$, γ – к-г. з-ж. путь, определяющий положительно ориентированную границу ∂G области G, $\overline{G} \subset D$, тогда*

$$P_\gamma(a) = \iint\limits_G \operatorname{rot}(a)\, dxdy = \iint\limits_G \Big(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\Big) dxdy.$$

Здесь $\operatorname{rot}(a(x,y)) := \dfrac{\partial a_2}{\partial x} - \dfrac{\partial a_1}{\partial y}$ *является "плотностью циркуляции" в.п. a в точке (x,y):*

$$\operatorname{rot}(a(x,y)) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} P_{\partial B((x,y),\delta)}(a).$$

Определение 4.4. В.п. $a \in C(D)$ называется *потенциальным* в области D, если найдётся функция $u \in C^1(D)$ с условием $a = \operatorname{grad}(u) \equiv \nabla u := \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ в D.

По теореме Ньютона – Лейбница, если a потенциально в области D с потенциалом u, а γ – к-г. путь в D с началом $\gamma(\alpha)$ и концом $\gamma(\beta)$, то $P_\gamma(a) = u(\gamma(\beta)) - u(\gamma(\alpha))$.

Теорема 4.3. *Если D – односвязна в $\mathbb{C}$, то в.п. $a \in C^1(D)$ является потенциальным в D если и только если* $\operatorname{rot}(a) \equiv 0$ *в D, т.е.* $\dfrac{\partial a_2}{\partial x} = \dfrac{\partial a_1}{\partial y}$ *в D.*

Определение 4.5. В.п. $a \in C^1(D)$ называется *регулярным* в области D, если оно одновременно соленоидально и локально (т.е. в каждом круге в D) потенциально в D.

Упражнение 4.1. Пусть $a \in C^1(D)$, $a_\perp := ia = -a_2 + ia_1$ (в каждой отдельной точке (x,y) поле $a_\perp$ – поворот a на угол $\pi/2$). Доказать, что в указанных выше условиях в.п. a и $a_\perp$ регулярны (или нет) в области D одновременно.

В указанных условиях (т.е. в.п. a регулярно в области D) пусть D_1 – некоторая односвязная область, $D_1 \subset D$. Тогда найдётся $u \in C^2(D_1)$ – потенциал a в D_1 (определен с точностью до аддитивной константы) и $v \in C^2(D_1)$ – потенциал $a_\perp$ в D_1. Имеем:

$$u_x = a_1,\ u_y = a_2,\ v_x = -a_2,\ v_y = a_1,$$

откуда $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ всюду в D_1, так что функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является голоморфной ($\mathbb{C}$-дифференцируемой) в D_1 по теореме Коши – Римана (и, следовательно, бесконечно-дифференцируемой).

Определение 4.6. Функция f называется *комплексным потенциалом* в.п. a в D_1.

Обратно, всякая голоморфная в области D функция $f = u + iv$ задает регулярное в.п. $a = \nabla u$ в D.

Упражнение 4.2. Доказать, что $a(x,y) = \overline{f'(z)} \in C^\infty(D)$.

Определение 4.7. Путь $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ на $[\alpha,\beta]$ называется *траекторией тока* в.п. a в D, если $\forall\, t \in [\alpha,\beta]$ имеем $\dot\gamma(t) = a(\gamma(t))$, т.е. $\dot x(t) = a_1(x(t),y(t))$, $\dot y(t) = a_2(x(t),y(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$.

Предложение 4.1. *В указанных обозначениях для любой траектории тока γ функция $v(x,y)$ является постоянной на $[\gamma]$ (т.е. траектории тока лежат на линиях уровня функции v).*

Доказательство. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\big(v(x(t),y(t))\big) = \nabla v\big|_{(x(t),y(t))} \cdot \big(\dot x(t), \dot y(t)\big) = a_\perp(\gamma(t)) \cdot a(\gamma(t)) \equiv 0,\ t \in [\alpha,\beta].$$

□

Ввиду указанного, функция v называется *функцией тока* в.п. a, а её линии уровня – *линиями тока.*

Упражнение 4.3. Пусть в.п. $a(x,y)=\{p_1x, p_2x+q_2y\}$, где $p_1,p_2,q_2\in\mathbb{R}$ – константы. Когда a является регулярным? В каждом случае регулярности найти соответствующие u,v,f, линии тока, траектории тока.

Замечание. Если область D односвязна, то можно взять $D_1=D$ и f определена глобально во всей D. Если D не односвязна, то f определена локально с точностью до константы, а функция $f'(z)$ корректно определена и голоморфна в D, при этом $a(z)=\overline{f'(z)}$. В частности, $a\in C^\infty(D)$.

Упражнение 4.4. Изменятся ли величины $\Pi_\gamma(a)$ и $P_\gamma(a)$, если $a\in C(D)$, а к-г. путь γ в D заменить на эквивалентный ему к-г. путь γ_1?

Определение 4.8. Регулярное в.п. a в D называется *вполне регулярным* в D, если всякую траекторию тока $\gamma(t)$ в D $(t\in[\alpha,\beta])$ можно продолжить с $[\alpha,\beta]$ на $(-\infty,\infty)$ и она останется траекторией тока в D на всей $(-\infty,\infty)$.

4.2. Модельные примеры регулярных векторных полей.

Пример 4.1. Рассмотрим в.п. a, определяемое комплексным потенциалом $f(z)=\dfrac{pz^2}{2}, p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, D=\mathbb{C}$. Тогда $a(z)=\overline{f'(z)}=p\overline{z}=\{px,-py\}$, $v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)=pxy$; линии тока – гиперболы $xy=const$ (или прямые $x=0$ и $y=0$). Траектории тока $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ определяются из системы

$$\begin{cases}\dot{x}=px\\ \dot{y}=-py\end{cases}$$

– "симметричное"седло. Откуда $x(t)=C_1e^{pt}$, $y(t)=C_2e^{-pt}$. В.п. a вполне регулярно.

Пример 4.2. Положим $f(z)=\dfrac{\mu\operatorname{Ln}z}{2\pi}, \mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Тогда $f'(z)=\dfrac{\mu}{2\pi z}=\dfrac{\mu\overline{z}}{2\pi|z|^2}$. Соответственно, определяется регулярное в.п. $a(z)=\overline{f'(z)}=\dfrac{\mu z}{2\pi|z|^2}$. Это *точечный источник* (с особенностью $z_0=0$). Имеем $\forall r>0$:

$$\Pi_{\partial B(0,r)}(a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B(0,r)}\frac{\mu\{x,y\}}{x^2+y^2}\cdot\frac{\{x,y\}}{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\mu\cdot\frac{2\pi r}{2\pi r}=\mu$$

– это "мощность" источника, она не зависит от r. Линии тока – лучи $\operatorname{Im}f=const$, т.е. $\mu\cdot\operatorname{Arg}(z)=const$.

Упражнение 4.5. Каковы в последнем примере *траектории* тока? Является ли в.п. a вполне регулярным в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$?

Пример 4.3. Здесь берется комплексный потенциал $g(z)=\dfrac{-i\mu\operatorname{Ln}z}{2\pi}$, $\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Он определяет регулярное в.п. $b=\overline{g'(z)}=\overline{\left(\dfrac{-i\mu}{2\pi z}\right)}=\dfrac{i\mu}{2\pi\overline{z}}=\dfrac{i\mu z}{2\pi|z|^2}$. Таким образом, $b=ia=a_\perp$, где в.п. a взято из предыдущего примера. В.п. b называется *точечным вихрем* (с центром $z_0=0$).

Имеем $\forall r>0$ $(z=\gamma(t)=re^{it}\big|_{[0,2\pi]}, \dot{\gamma}(t)=iz)$:

$$P_{\partial B(0,r)}(b)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{i\mu z}{2\pi|z|^2}\cdot rie^{it}dt=\int\limits_0^{2\pi}\frac{i\mu z}{2\pi|z|^2}\cdot iz\,dt=\frac{\mu}{2\pi}\cdot 2\pi=\mu$$

– "мощность"вихря (точкой в этих интегралах обозначается скалярное произведение). Поскольку $v(z) = -\mu \ln |z|$, окружности $|z| = const$ являются линиями тока в.п. b.

Упражнение 4.6. Найти траектории тока в последнем примере и доказать вполне регулярность в.п. b в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Пример 4.4. Ещё один интересный пример, когда $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \dfrac{\mu}{2\pi z}$ (это *диполь* с центром $z_0 = 0$ и моментом μ, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Обсудим случай $\mu > 0$. Тогда $v = \operatorname{Im} f = \dfrac{-\mu y}{2\pi(x^2 + y^2)}$, так что линиями тока являются окружности $x^2 + y^2 = -\dfrac{\mu}{2\pi c} y$ (это при $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$); при $c = 0$ линиями тока являются две полуоси $y = 0\,(x < 0)$ и $y = 0\,(x > 0)$.

Упражнение 4.7. Выписать в этом примере уравнения для траекторий тока. Исследовать поле на вполне регулярность.

4.3. Регулярные векторные поля и конформные отображения. Пусть $A(w)$ – регулярное в.п. в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с комплексным потенциалом $F(w)$; пусть $k : D \to \Omega$ – конформный изоморфизм области $D \subset \mathbb{C}$ на область Ω. Тогда функция $f(z) = F(k(z))$ локально голоморфна в D и определяет регулярное в.п. $a(z) = \overline{f'(z)} = \overline{F'(k(z)) \cdot k'(z)}$. Говорят, что в.п. a *индуцировано* из в.п. A посредством (с помощью) конформного отображения $k(z)$.

Пример 4.5. Обтекание барьера. Пусть $\Omega = \Pi_+ = \{\operatorname{Im} w > 0\}$, $A(w) = \sigma > 0$ – горизонтальное течение со скоростью σ. При этом $F(w) = \sigma w$ – его комплексный потенциал. Рассмотрим область $D = \{z \in \Pi_+ \setminus [0, hi]\}$, где $h > 0$. Тогда отображение $k(z) = \sqrt{z^2 + h^2}_{(0,2\pi)}$ – конформный изоморфизм D на Ω – индуцирует в.п. $a(z)$ с комплексным потенциалом $f(z) = \sigma\sqrt{z^2 + h^2}_{(0,2\pi)}$, т.е. $a(z) = \sigma \bar{z} \,/\, \overline{\sqrt{z^2 + h^2}_{(0,2\pi)}}$.

Упражнение 4.8. Найти линии тока в.п. a и доказать его вполне регулярность.

4.4. Вычисление потока и циркуляции регулярного векторного поля. Напомним, что в указанных ранее обозначениях и условиях на путь γ и в.п. a по определению имеем:

$$\Pi_\gamma(a) = \int\limits_\gamma (-a_2 dx + a_1 dy),\ \ P_\gamma(a) = \int\limits_\gamma (a_1 dx + a_2 dy).$$

Пусть теперь в.п. a является регулярным в области D и имеет в этой области комплексный потенциал f. Для к-г. ж. или з.ж. пути γ в D найдём значение интеграла

$$\begin{aligned} I = \int\limits_\gamma f'(z)dz = \int\limits_\gamma \overline{a(z)}dz = \int\limits_\gamma (a_1 - ia_2)(dx + idy) = \\ = \int\limits_\gamma (a_1 dx + a_2 dy) + i \int\limits_\gamma (-a_2 dx + a_1 dy) = P_\gamma(a) + i\Pi_\gamma(a), \end{aligned} \tag{4.5}$$

откуда $P_\gamma(a) = \operatorname{Re} I$, $\Pi_\gamma(a) = \operatorname{Im} I$.

Пример 4.6. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = \dfrac{-i\mu \operatorname{Ln} z}{2\pi}$ – комплексный потенциал точечного вихря мощности $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ с центром $z_0 = 0$. Ему соответствует в.п. $b = \overline{g'(z)} = \dfrac{i\mu}{2\pi \bar{z}}$.

Для любого к-г. з-ж. пути γ, не проходящего через 0, имеем (если γ не обходит точку 0):

$$\int\limits_\gamma g'(z)dz = 0 \Rightarrow P_\gamma(b) = 0,\, \Pi_\gamma(b) = 0\,,$$

и (если γ обходит точку 0 и $\operatorname{ind}_\gamma(0) = 1$):

$$\int\limits_\gamma g'(z)dz = \mu \Rightarrow P_\gamma(b) = \mu,\, \Pi_\gamma(b) = 0\,.$$

4.5. Обтекание круга (цилиндра) с вихрем. Зафиксируем $R > 0$ и при $\lambda > 0$ рассмотрим конформное отображение $k(z) = \lambda Ж(z/R)$ внешности $D = \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R$ замкнутого круга $\overline{B}_R = \{|z| \le R\}$ на внешность отрезка $[-a_R,\, a_R]$ с условием $k'(\infty) = 1$ (откуда находим $\lambda = a_R = 2R$).

В области $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-2R,\, 2R]$ определено в.п. $A(w) = \sigma + i0$, где $\sigma > 0$ – скорость потока (горизонтальная), с комплексным потенциалом $F(w) = \sigma w$.

С помощью указанного выше отображения $k(z) = z + R^2/z$ перенесем регулярное в.п. $A(w)$ на область D стандартным образом: комплексный потенциал $f_0(z) = F(k(z)) = \sigma(z + R^2/z)$ определяет в.п.

$$a_0(z) = \overline{f_0'(z)} = \sigma\big(1 - \frac{R^2}{\overline{z}^2}\big),$$

регулярное в D. Линии тока этого в.п. имеют вид

$$\operatorname{Im} f_0(z) = \operatorname{Im}\big(\sigma(x+iy) + \frac{\sigma R^2}{x+iy}\big) = \sigma\big(y - \frac{R^2 y}{x^2+y^2}\big) = const.$$

Можно найти и явные формулы линий тока.

Упражнение 4.9. Доказать, что в.п. a_0 вполне регулярно в D.

Рассмотрим теперь на $\mathbb{C}_\flat$ (и, значит, на D) вихрь с центром $z = 0$ и мощностью $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Его комплексный потенциал имеет вид

$$g_\mu(z) = \frac{-i\mu}{2\pi}\operatorname{Ln}(z).$$

Определим комплексный потенциал $f_\mu(z) = f_0(z) + g_\mu(z)$, задающий регулярное в.п.

$$a_\mu(z) = \overline{f_\mu'(z)} = \sigma \cdot \big(1 - \frac{R^2}{\overline{z}^2}\big) + \frac{i\mu}{2\pi\overline{z}}$$

– поле обтекания круга (цилиндра) с вихрем. Можно показать, что оно вполне регулярно в D.

Найдём нули поля a_μ в $\overline{D}$:

$$\overline{z}^2 + \frac{i\mu}{2\pi\sigma}\overline{z} - R^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{i\mu}{2\pi\sigma}z - R^2 = 0, \tag{4.6}$$

откуда

$$z_{1,2} = \frac{i\mu}{4\pi\sigma} \mp \sqrt{R^2 - \big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2}.$$

Рассмотрим 3 случая (всюду ниже рисуем случай $\mu < 0$):

(1) $\Delta = R^2 - \big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2 > 0$, т.е. $|\mu| < 4\pi\sigma R$; откуда $z_{1,2} = \frac{i\mu}{4\pi\sigma} \mp \sqrt{\Delta}$, $|z_{1,2}| = R$; пусть $\theta = \arcsin\frac{\mu}{4\pi\sigma R} = \arg(z_2)$, тогда $\mu = 4\pi\sigma R\sin\theta$; точка z_1 – точка разветвления потока, точка z_2 – точка отрыва (схода) потока;

(2) Случай $\Delta = R^2 - \big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2 = 0$, тогда $|\mu| = 4\pi\sigma R$, $z_1 = z_2 = \operatorname{sgn}(\mu)\cdot iR$;

(3) $\Delta = R^2 - \big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2 < 0$, $|\mu| > 4\pi\sigma R$, $z_{1,2} = \mp i\sqrt{\big(\frac{\mu}{4\pi\sigma}\big)^2 - R^2} + \frac{i\mu}{4\pi\sigma}$; оба корня мнимые; один лежит внутри B_R, второй – вне B_R.

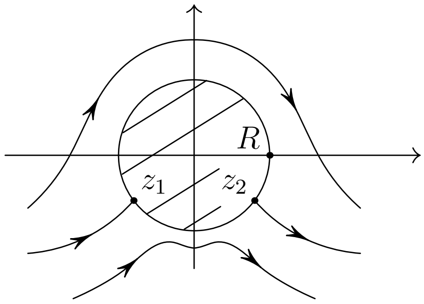

Рис. 4.8.

Нас интересует случай (1), когда μ "мало". В этом случае z_1 и z_2 однозначно определяют μ, $\theta = \arg(z_2) = \arcsin \dfrac{\mu}{4\pi\sigma R}$, $\mu = 4\pi\sigma R \sin\theta$.

Приведем без доказательства следующее предложение (см. Рис. 4.8)

Предложение 4.2. *В условиях случая* (1)*:*

1) *линии тока начинаются и заканчиваются в* ∞ *(кроме сепаратрис: левая входит в* z_1*, правая выходит из* z_2*); линии тока имеют вид*

$$\operatorname{Im} f_\mu = \sigma y - \frac{\sigma R^2 y}{x^2 + y^2} - \frac{\mu}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) = const;$$

2) *сепаратрисы входят в (выходят из)* $\overline{B}_R$ *под прямым углом к* ∂B_R*;*
3) *течение вполне регулярно в* D.

4.6. Компакт (крыло) Жуковского. В общем курсе мы установили, что если $w_\delta = i\delta$, $\delta \in \mathbb{R}$, и $B_{(\delta)} = B(w_\delta, |w_\delta - 1|)$, то функция Жуковского Ж(w) конформно переводит область $\Omega_{(\delta)} = \mathbb{C} \setminus \overline{B_{(\delta)}}$ на внешность $D_{(\delta)} = \mathbb{C} \setminus \Gamma_{(\delta)}$ дуги окружности $\Gamma_{(\delta)}$, соединяющей точки ± 1 и образующей угол 2α с лучом $[1, +\infty)$, где $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan\delta = \frac{\pi}{2} + \theta$, $\theta = -\arctan\delta$ (см. Рис. 4.9).

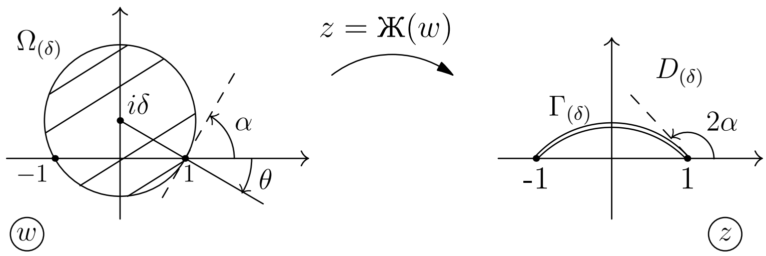

Рис. 4.9.

Зафиксируем $\beta > 1$ и рассмотрим круг B_* с границей ∂B_*, проходящей через точки $-\beta$, 1 и касающейся $\partial B_{(\delta)}$ в точке 1 (при этом $B_{(\delta)} \subset B_*$). Тогда функция Жуковского переведет область $\Omega_* = \mathbb{C} \setminus \overline{B_*}$ на внешность $D = \mathbb{C} \setminus K$ некоторого компакта K, который называется компактом (профилем крыла, крылом) Жуковского (см. Рис. 4.10).

Радиус R_* и центр w_* круга B_* легко вычисляются: $R_* = \dfrac{1+\beta}{2\cos\theta}$, $w_* = 1 - R_* e^{i\theta}$.

Рассмотрим конформное отображение (см. Рис. 4.11)

$$k_*(z) = \frac{1}{2}\big(Ж^{-1}_{(в)}(z) - w_*\big) : D \to \Omega_R,$$

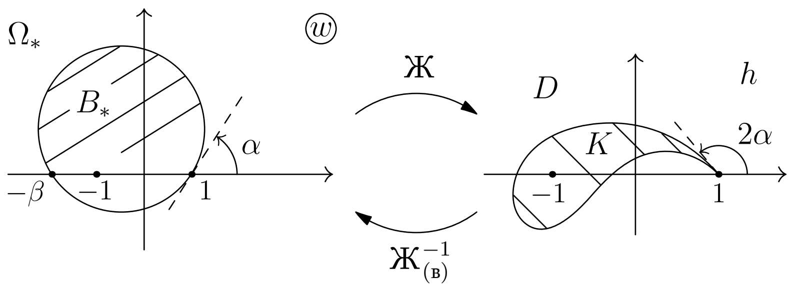

Рис. 4.10.

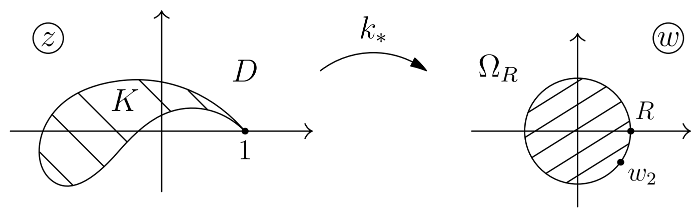

Рис. 4.11.

где $R = \dfrac{R_*}{2}$, $\Omega_R = \mathbb{C}^\bullet \setminus \overline{B_R}$, $B_R = B(0,R)$.

Наконец, определим комплексный потенциал

$$F_\mu(z) = f_\mu(k_*(z)) = \sigma \cdot \big(k_*(z) + \frac{R^2}{k_*(z)}\big) - \frac{i\mu}{2\pi} \operatorname{Ln} k_*(z),$$

определяющий регулярное в.п. в области D, т.е. во внешности крыла K (выписывается сопряженное векторное поле $\overline{A_\mu}$):

$$\overline{A_\mu(z)} = F'_\mu(z) = \frac{\sigma k'_*(z)}{(k_*(z))^2}\big((k_*(z))^2 - \frac{i\mu}{2\pi\sigma}k_*(z) - R^2\big), \tag{4.7}$$

$z \in \overline{D}$, $z \neq 1$, $|k_*(z)| \geq R$ на $\overline{D}$.

<u>Условие Чаплыгина</u>. В указанных обозначениях при небольших σ ($\sigma < \sigma_{max}$ зависит от "условий среды") точка схода потока в.п. A_μ (на ∂K) совпадает с острием крыла $z = 1$, т.е. $k_*(1) = w_2$ – точка схода потока в.п. a_μ на ∂B_R, $\mu = 4\pi\sigma R \sin\theta$, $\theta = \arg(w_2)$.

Заметим, что $Ж^{-1}_{(\text{в})}(z) = z + \underset{(\text{в})}{\sqrt{z^2-1}}$, $k_*(1) = w_2$, поэтому $k_*(z) - w_2 = O(|z-1|^{1/2})$ при $z \to 1$, $z \in \overline{D} \setminus \{1\}$. Далее, $2k'_*(z) = (Ж^{-1}_{(\text{в})}(z))' = (z + \underset{(\text{в})}{\sqrt{z^2-1}})' = O(|z-1|^{-\frac{1}{2}})$ при $z \in \overline{D} \setminus \{1\}$, откуда из (4.7) и равенства $w_2^2 - i\mu w_2/(2\pi\sigma) - R^2 = 0$ (см. (4.6)) имеем:

$$\overline{A_\mu(z)} = F'_\mu(z) = O(|z-1|^{-1/2})\, O(|z-1|^{1/2}) = O(1),\ z \to 1,\ z \in \overline{D} \setminus \{1\},$$

т.е $A_\mu(z)$ – непрерывная и равномерно ограниченная функция на $\overline{D} \setminus \{1\}$.

Пусть γ – произвольный к-г. з-ж. путь, обходящий K один раз против часовой стрелки. Согласно (4.5), работа $P_\gamma(A_\mu)$ (она же циркуляция $Ц_\gamma(A_\mu)$) и поток $\Pi_\gamma(A_\mu)$ в.п. A_μ

вдоль (через) γ вычисляются так (здесь также используются интегральная теорема Коши и свойства $k_*(z) = z + O(1)$, $k'_*(z) = 1 + O(1/z^2)$ при $z \to \infty$):

$$\text{Ц}_\gamma(A_\mu) + i\Pi_\gamma(A_\mu) = \int\limits_\gamma F'_\mu(z)dz = \int\limits_\gamma \sigma \cdot (k_*(z) + \frac{R^2}{k_*(z)})'dz - \frac{i\mu}{2\pi}\int\limits_\gamma \frac{k'_*(z)}{k_*(z)}dz =$$

$$= 0 - \frac{i\mu}{2\pi}\int\limits_\gamma \frac{k'_*(z)}{k_*(z)}dz = \mu,$$

откуда $\text{Ц}_\gamma(A_\mu) = \mu$, $\Pi_\gamma(A_\mu) = 0$.

4.7. Уравнение движения идеальной жидкости. Закон Эйлера – Бернулли. В качестве физической интерпретации плоских векторных полей опишем некоторую *упрощенную* модель, не претендуя на полноту и строгость определений возникающих физических объектов.

Рассмотрим *установившееся плоское* течение в некотором прямоугольном цилиндре $\Omega = D \times \mathbb{R}_{x_3}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, x_3, которое реализуется *идеальной средой (жидкостью)* при отсутствии внешних сил. В нашем случае это будет означать, что векторное поле скоростей $A(x, y, x_3)$ течения не зависит от координаты x_3 и времени t, так что нам достаточно рассматривать интересующие нас объекты в сечении D цилиндра Ω плоскостью $\{x_3 = 0\}$ (отождествляемой с комплексной плоскостью $\mathbb{C}_z$, $z = x + iy$). *Идеальность* среды и отсутствие внешних сил означает, что мы пренебрегаем действием всех сил, кроме сил внутреннего давления. Основные постулаты: в.п. $A = A(x, y) = A(z)$ должно быть функцией класса C^1 в области D, а *плотность* среды $\rho = \rho(z) \geq 0$ – непрерывной в D.

Давление в установившемся плоском течении — это такая вещественная (скалярная) функция $p = p(x, y) = p(z)$, непрерывная в D, которая определяет общую силу действия (давления) течения на правую сторону носителя кусочно-гладкого жорданова (или к-г. з.ж.) пути $\tau : [\alpha, \beta] \to D$ с (переменной) правой нормалью $n^+_\tau(t) = \dfrac{-i\dot\tau(t)}{|\dot\tau(t)|}$ по формуле

$$\mathcal{F}(\tau^+) = \int_\alpha^\beta (-n^+_\tau(t))p(\tau(t))|d\tau(t)| = \int_\tau p(z)idz \tag{4.8}$$

(реально вместо кривой $[\tau]$ давление осуществляется на поверхность $[\tau] \times [0, 1]$). Равенство (4.8) вытекает (при $z = \tau(t)$) из формулы $-n^+_\tau(t)|d\tau(t)| = idz$. Сила давления на левую сторону носителя рассматриваемого пути (с нормалью $-n^+_\tau(t)$) равна $-\mathcal{F}(\tau^+)$. Кроме того, формула (4.8) считается справедливой и в случаях, когда $[\tau] \subset \partial D$, $n^+_\tau(t)$ — внутренняя нормаль к ∂D и давление p непрерывно (продолжается) на $D \cup [\tau]$.

Пусть $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ – траектория нашего течения, определенная на интервале (α, β). Дифференцируя равенство $\dot\gamma(t) = A(\gamma(t))$ по t и пользуясь формулой для производной сложной функции, получаем:

$$\ddot\gamma(t) = \frac{\partial A}{\partial z}|_{\gamma(t)}\dot\gamma(t) + \frac{\partial A}{\partial \overline{z}}|_{\gamma(t)}\overline{\dot\gamma(t)} = (\frac{\partial A}{\partial z}A + \frac{\partial A}{\partial \overline{z}}\overline{A})|_{\gamma(t)},$$

т.е. вектор $\ddot\gamma(t)$ зависит только от $\gamma(t)$. Следовательно, определено *стационарное* векторное поле *ускорений*

$$\dot A(z) = \frac{\partial A}{\partial z}A(z) + \frac{\partial A}{\partial \overline{z}}\overline{A(z)},$$

обозначаемое также $\frac{dA}{dt}(z)$ и удовлетворяющее условию $\ddot\gamma(t) = \dot A(\gamma(t))$.

Применим второй закон Ньютона к кругу $B_\delta = B(z_0, \delta) \subset D$ (точнее к цилиндру $B_\delta \times [0, 1]_{x_3}$):

$$\int_{B_\delta} \rho(x, y)\dot A(x, y)dxdy = \int_{\partial B_\delta} p(z)idz.$$

Непрерывность $\dot{A}(x,y)$ в D очевидна. При дополнительном (априорном) условии непрерывной дифференцируемости функции $p(x,y)$, к последнему криволинейному интегралу можно применить формулу Грина (в комплексной форме $\nabla p(x,y) = \partial p/\partial x + i\partial p/\partial y$):

$$\int_{\partial B_\delta} p(z)idz = \int_{\partial B_\delta} p(x,y)(-dy + idx) = -\int_{B_\delta} \nabla p(x,y)dxdy.$$

Деля на $\pi\delta^2$ равенство

$$\int_{B_\delta} \rho(x,y)\dot{A}(x,y)dxdy = -\int_{B_\delta} \nabla p(x,y)dxdy$$

и устремляя δ к 0, мы получаем $\rho(z_0)\dot{A}(z_0) = -\nabla p(z_0)$. Таким образом, в наших ограничениях установлено *уравнение движения* идеальной жидкости: для всех $z \in D$ имеем

$$\rho(z)\frac{dA}{dt}(z) + \nabla p(z) = 0.$$

Теорема 4.4 (Закон Эйлера – Бернулли). *В указанных выше условиях, и при дополнительном ограничении $\rho = const$ (случай несжимаемой среды), вдоль любой траектории $\gamma(t)$, $t \in (\alpha,\beta)$, нашего течения в D справедливо равенство:*

$$\frac{1}{2}\rho\big|A(\gamma(t))\big|^2 + p(\gamma(t)) = const.$$

Если, дополнительно, поле A является безвихревым (локально потенциальным) в D, то

$$\frac{1}{2}\rho\big|A(z)\big|^2 + p(z) \equiv const \tag{4.9}$$

всюду в D.

Доказательство. В действительной форме записи $A = (a_1(x,y), a_2(x,y))$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (полагаем $z = \gamma(t)$, $(\dot{x},\dot{y}) = \dot{\gamma}(t)$) воспользуемся теоремой о производной сложной функции (напомним, что $\dot{\gamma}(t) = A(z)$):

$$\frac{dA}{dt}(z) = (a_{1x}\dot{x} + a_{1y}\dot{y}, a_{2x}\dot{x} + a_{2y}\dot{y})|_z = (a_{1x}a_1 + a_{1y}a_2, a_{2x}a_1 + a_{2y}a_2)|_z,$$

$$\frac{d\big|A(\gamma(t))\big|^2}{dt} = (a_1^2(\gamma(t)) + a_2^2(\gamma(t)))'_t = [2a_1(a_{1x}a_1 + a_{1y}a_2) + 2a_2(a_{2x}a_1 + a_{2y}a_2)]|_z,$$

откуда нетрудно установить, что

$$\frac{d\big|A(\gamma(t))\big|^2}{dt} = 2A(\gamma(t)) \cdot \frac{dA}{dt}(\gamma(t)).$$

Следовательно

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\rho\big|A(\gamma(t))\big|^2 + p(\gamma(t))\Big) = \rho A(\gamma(t)) \cdot \frac{dA}{dt}(\gamma(t)) + \nabla p(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) =$$
$$= A(\gamma(t)) \cdot \Big(\rho\frac{dA}{dt}(\gamma(t)) + \nabla p(\gamma(t))\Big) = 0,$$

что и требовалось.

Пусть теперь $A = (a_1(x,y), a_2(x,y))$ локально потенциально в D, т.е. $a_{2x} := \partial a_2/\partial x = a_{1y} := \partial a_1/\partial y$ в D. Положим $\Phi(z) = \dfrac{1}{2}\rho\big|A(z)\big|^2 + p(z)$. Фиксируем произвольную точку $z \in D$, в которой $A(z) \neq 0$ и пусть w_1 и w_2 — единичный касательный и единичный нормальный вектор к траектории $\gamma(t)$ нашего течения в точке $z = \gamma(t)$. Выше в этом доказательстве фактически установлено, что производная $\partial\Phi/\partial w_1$ функции Φ в точке z по направлению w_1 равна 0. Докажем, что производная $\partial\Phi/\partial w_2$ в точке z по направлению

w_2 тоже равна 0. Непосредственно проверяется, что в условиях локальной потенциальности в.п. A справедливы равенства

$$\nabla\big(|A(z)|^2/2\big) = (a_1 a_{1x} + a_2 a_{2x}, a_1 a_{1y} + a_2 a_{2y})|_z = \frac{dA}{dt}(z)$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_2} = \nabla(\Phi) \cdot w_2 = (\rho \frac{dA}{dt}(z) + \nabla p(z)) \cdot w_2 = 0.$$

Таким образом, функция Φ постоянна в каждой компоненте внутренности множеств $\{A \neq 0\}$ и $\{A = 0\}$ (последнее очевидно из уравнения движения). Но тогда $\Phi \equiv const$ в D по непрерывности. $\square$

Далее (дополнительно к указанным выше условиям) мы будем считать, что D — внешность компакта K (который мы будем называть *крылом*, хотя реально он играет роль *сечения* цилиндрического крыла), обтекаемого *регулярным* течением с полем скоростей A, *ограниченным* в D. Пусть $F(z)$ – комплексный потенциал в.п $A(z)$ в D. Поскольку функция $F'(z) = \overline{A(z)}$ голоморфна и ограничена в некоторой проколотой окрестности точки ∞, существует конечный $\lim_{z\to\infty} A(z) =: A_\infty$. Без ограничения общности мы предположим, что $\sigma = A_\infty \geq 0$. Соленоидальность (отсутствие "внутренних источников") поля A как правило не обсуждается (постулируется), а вот условие локальной потенциальности (в механике такие поля называют *безвихревыми*) является существенным ограничительным требованием, которое мы принимаем, поскольку будем использовать закон Эйлера – Бернулли. Кроме того, мы постулируем следующие естественные условия на геометрию течения (которые выполняются в модельном случае, описанном в предыдущем разделе):

(i) определены точки z_1 разветвления и z_2 схода потока; ∂K является гладкой всюду, кроме (быть может) точек z_1 и z_2;

(ii) векторное поле A непрерывно продолжается на $\overline{D} \setminus \{z_1, z_2\}$ и становится *касательным* к $\partial K \setminus \{z_1, z_2\}$.

По закону Эйлера – Бернулли, $p(z)$ непрерывно (и равномерно ограниченно) продолжается на $\overline{D} \setminus \{z_1, z_2\}$, и уравнение (4.9) можно считать справедливым в $\overline{D} \setminus \{z_1, z_2\}$.

4.8. Формулы Чаплыгина и Жуковского. Согласно равенству (4.8) общая сила давления *снаружи* на крыло K равна

$$\mathcal{F}(K) = \int\limits_{\partial^+ K} ip(z)dz = i \int\limits_{\partial^+ K} \big(p_* - \frac{1}{2}\rho\big|A(z)\big|^2\big)dz = -\frac{i\rho}{2} \int\limits_{\partial^+ K} \big|A(z)\big|^2 dz.$$

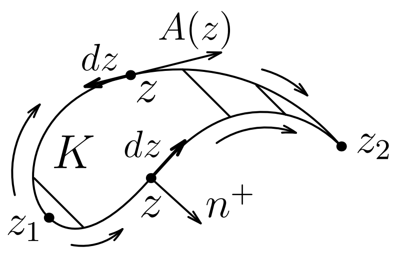

Рис. 4.12.

Отметим, что если $dz = |dz|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg(dz)$, то на "нижней"части крыла K (между z_1 и z_2) поле $A(z)$ сонаправлено с dz, т.е. $A(z) = \big|A(z)\big|e^{i\varphi}$, а на "верхней"части K (между

z_2 и z_1) имеем $A(z) = -\bigl|A(z)\bigr|e^{i\varphi}$, так что во всех случаях $\bigl|A(z)\bigr|^2 = e^{-2i\varphi}\bigl(A(z)\bigr)^2$. Отсюда (ввиду $d\overline{z} = |dz|e^{-i\varphi} = dz\, e^{-2i\varphi}$) получаем:

$$\mathcal{F}(K) = -\frac{i\rho}{2}\int\limits_{\partial^+ K} \bigl(A(z)\bigr)^2 e^{-2i\varphi} dz = -\frac{i\rho}{2}\int\limits_{\partial^+ K} \bigl(\overline{F'(z)}\bigr)^2 d\overline{z} = \overline{\frac{i\rho}{2}\int\limits_{\partial^+ K} \bigl(F'(z)\bigr)^2 dz}\,,$$

или (как и ранее, $F(z)$ – комплексный потенциал в.п $A(z)$)

$$\overline{\mathcal{F}(K)} = \frac{i\rho}{2}\int\limits_{\partial^+ K} \bigl(F'(z)\bigr)^2 dz.$$

Это и есть *формула Чаплыгина.*

Поскольку $F'(z)$ голоморфна в окрестности ∞, она разлагается в свой ряд Лорана вне круга $B = B(0, R_0)$, содержащего K (сходимость абсолютная):

$$F'(z) = \sigma + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots,\ |z| \geqslant R_0,$$

откуда

$$\bigl(F'(z)\bigr)^2 = \sigma^2 + \frac{2\sigma c_{-1}}{z} + O(\frac{1}{z^2}),\ z \to \infty\,.$$

Но, по доказанному ранее,

$$2\pi i c_{-1} = \int\limits_{\partial^+ B} F'(z) dz = \mu = \text{Ц}_{\partial^+ B}(A).$$

По интегральной теореме Коши,

$$\int\limits_{\partial^+ K} \bigl(F'(z)\bigr)^2 dz = \int\limits_{\partial^+ B} \bigl(F'(z)\bigr)^2 dz\,,$$

откуда

$$\overline{\mathcal{F}(K)} = \frac{i\rho}{2}\int\limits_{\partial^+ B} \bigl(F'(z)\bigr)^2 dz = \frac{i\rho}{2}\cdot 2\pi i \cdot 2\sigma c_{-1} = i\rho\sigma\mu.$$

Таким образом, получаем *формулу Жуковского*: $\mathcal{F}(K) = -i\rho\sigma\mu$.

Здесь важно отметить *парадокс Бертрана*: результирующая сила давления на крыло K всегда перпендикулярна скорости σ потока на ∞.

Для крыла Жуковского имеем $\mu = 4\pi\sigma R\sin\theta$, $R = \dfrac{1+\beta}{4\cos\theta}$, откуда

$$\mathcal{F}(K) = -i\pi\rho\sigma^2(1+\beta)\tan(\theta).$$

5. Теоремы Рунге и Хартогса – Розенталя

5.1. Формула Помпейю. Напомним, что если f есть $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция в точке $a \in \mathbb{C}$, то, по определению,

$$\overline{\partial} f(a) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\bigg|_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_a .$$

По теореме Коши-Римана f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{C}$, если и только если она $\mathbb{R}$-дифференцируема в этой точке и $\overline{\partial} f(a) = 0$.

Оператор $\overline{\partial} : f \mapsto \overline{\partial} f$ называют оператором Коши-Римана.

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{+\infty\}$. Положим $C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega)\colon \operatorname{supp}(f)$ – компакт в $\Omega\}$, где $\operatorname{supp}(f)$ — наименьшее замкнутое подмножество из Ω, вне которого f обращается в ноль (в Ω). При $k = 0$ пишем $C_0^0(\Omega) = C_0(\Omega)$.

Теорема 5.1 (Формула Помпейю). *Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$, тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:*

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta},$$

где $\Lambda(\cdot)$ – мера Лебега в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Фиксируем $z \in \mathbb{C}$ и найдем $R > 0$ с условием $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(z, R)$. Введем полярные координаты ρ, θ с центром z:

$$\zeta - z = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \overline{\zeta - z} = \rho e^{-i\theta}$$

при $\zeta \neq z$. Таким образом,

$$e^{2i\theta} = \frac{\zeta - z}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \quad , \quad \rho^2 = (\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z}).$$

Дифференцируя последние два равенства по $\overline{\zeta}$, находим:

$$e^{2i\theta} 2i \frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = -\frac{\zeta - z}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} \quad , \quad 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \zeta - z,$$

откуда

$$\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{ie^{i\theta}}{2\rho} \quad , \quad \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{e^{i\theta}}{2}.$$

Рассмотрим $F(\rho, \theta) = \varphi(\zeta) = \varphi(z + \rho e^{i\theta})$, являющуюся 2π-периодической по θ при $\rho > 0$. Тогда при $\zeta \neq z$ имеем:

$$\overline{\partial}\varphi(\zeta) = F'_\rho \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} + F'_\theta \frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = F'_\rho \frac{e^{i\theta}}{2} + F'_\theta \frac{ie^{i\theta}}{2\rho}.$$

Интегрируя повторно в полярных координатах и учитывая периодичность F по θ, получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\delta^R \left(F'_\rho \frac{e^{i\theta}}{2} + F'_\theta\frac{ie^{i\theta}}{2\rho}\right)\frac{1}{-\rho e^{i\theta}}\rho d\rho\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\delta^R F'_\rho d\rho\, d\theta + \int\limits_\delta^R\int\limits_0^{2\pi} F'_\theta d\theta \frac{i}{\rho}\, d\rho\right) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(F(\delta,\theta) - F(R,\theta))\, d\theta = \varphi(z),$$

где в последнем равенстве мы пользуемся непрерывностью φ в точке z и условием $F(R,\theta)=0$. Отметим, что переходом к введенным выше полярным координатам легко доказывается и абсолютная сходимость исходного интеграла. $\square$

Замечание. При $z=0$ имеем:

$$\varphi(0)=\frac{-1}{\pi}\int\frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{\zeta}.$$

По определению обобщенных производных последнее означает, что $\overline{\partial}(\frac{1}{\pi\zeta})$ есть δ-функция Дирака, т.е. $\frac{1}{\pi\zeta}$ есть *фундаментальное решение* уравнения Коши-Римана $\overline{\partial}f=0$.

5.2. Стандартное разбиение единицы. Пусть $\mathbb{Z}^2=\{j=(j_1,j_2)\equiv j_1+ij_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$ – стандартная 1-решетка, $\delta\mathbb{Z}^2=\{a_j\equiv\delta j_1+i\delta j_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$ – стандартная δ-решетка ($\delta>0$) в $\mathbb{C}$.

Фиксируем функцию $\psi\in C_0^1(B(0,1))$ с условиями $0\leqslant\psi(z)\leqslant 1$ при всех z и $\psi(z)=1$ при всех $z\in B(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$. Пусть $A_1=\|\overline{\partial}\psi\|$.

Упражнение 5.1. Доказать, что можно выбрать ψ с условием $A_1\leq 2$.

Фиксируем $\delta>0$. Пусть $B_j=B(a_j,\delta)$, $\psi_j(z)=\psi(\frac{z-a_j}{\delta})$, $j\in\mathbb{Z}^2$. Наконец, при $j\in\mathbb{Z}^2$ определим

$$\varphi_j(z)=\frac{\psi_j(z)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2}\psi_k(z)}.$$

Лемма 5.1. *В указанных обозначениях,*

$$\varphi_j\in C_0^1(B_j),\quad 0\leqslant\varphi_j\leqslant 1,\quad \|\overline{\partial}\varphi_j\|\leqslant\frac{5A_1}{\delta},\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\varphi_j\equiv 1\ \text{ на }\ \mathbb{C},$$

причем каждая точка z принадлежит не более чем 4 кругам B_j.

Доказательство. Очевидно, поскольку

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\psi_k\geqslant 1\ \text{ на всем }\ \mathbb{C}\,.$$

Семейство $\{B_j,\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ называется *стандартным δ-разбиением единицы* на $\mathbb{C}$. $\square$

5.3. Определения основных пространств функций. Введем (или напомним) ряд общепринятых обозначений, важных для дальнейшего. Пусть $E\neq\varnothing$ – произвольное множество в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathcal{A}(E)$ класс функций f, каждая из которых определена и голоморфна в некоторой (своей) окрестности U_f множества E (если E открыто, то $\mathcal{A}(E)$ есть класс всех голоморфных на E функций). Как и ранее, $C(E)$ – пространство всех комплекснозначных *непрерывных и ограниченных* на E функций f с равномерной нормой $\|f\|_E=\sup\limits_{z\in E}|f(z)|$. Для *компакта* $X\neq\varnothing$ через $P(X)$ обозначается *замыкание* в $C(X)$ подпространства $\{P\}|_X$, где $\{P\}$ – совокупность всех полиномов комплексного переменного z. Ясно, что $f\in P(X)$, если и только если f равномерно на X приближается (с любой точностью) полиномами от z. Определим еще пространство $R(X)$ – замыкание в $C(X)$ подпространства $\{g|_X\}$, где g пробегает класс всех рациональных функций (от z) с полюсами вне X. По аналогии, $f\in R(X)$ тогда и только тогда, когда f равномерно на X приближается рациональными функциями. Наконец, положим $C_{\mathcal{A}}(X)=C(X)\cap\mathcal{A}(X^\circ)$, где E° – множество внутренних точек множества E (при $X^\circ = \emptyset$ полагаем $C_{\mathcal{A}}(X) = C(X)$). Следующие включения очевидны:

$$P(X) \subseteq R(X) \subseteq C_{\mathcal{A}}(X) \subseteq C(X).$$

Иначе говоря, приближать (с любой точностью) полиномами или рациональными функциями равномерно на X можно только функции класса $C_{\mathcal{A}}(X)$ («простейшее» необходимое условие приближаемости).

Напомним, что компонентой (связности) множества E в $\mathbb{C}$ называется всякое максимальное связное подмножество из E. Если E – открыто, то всякая его связная компонента является областью, причем E есть конечное или счетное объединение своих компонент. Поэтому, если X – компакт, то его *дополнение* состоит из неограниченной компоненты Ω и ограниченных компонент $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ (если они есть).

Оболочкой компакта X в $\mathbb{C}$ (обозначается через $\widehat{X}$) называется объединение компакта X и всех ограниченных компонент его дополнения.

Ясно, что $X = \widehat{X}$ если и только если множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.

В 1885 г. К. Вейерштрасс и К. Рунге доказали свои знаменитые теоремы о равномерных приближениях функций полиномами. Сформулируем их, используя наши обозначения.

Теорема 5.2 (Вейерштрасс). *Пусть X – отрезок вещественной оси, тогда $C(X) = P(X)$.*

Теорема 5.3 (Рунге). *Пусть X – произвольный компакт в $\mathbb{C}$, тогда*

(1) $\mathcal{A}(X)|_X \subset R(X)$;

(2) $\{\mathcal{A}(X)|_X \subset P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

Основной целью этого раздела является доказательство теоремы Рунге.

5.4. Свойства потенциала Коши. Нам неоднократно понадобится следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Пусть K - компакт, $h \in L_\infty(K, \Lambda(\cdot))$. Положим*

$$f(z) = \int\limits_K \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}$$

(интеграл абсолютно сходится при всех z, см. ниже). Тогда

(а) *Для любого компакта X с условием $X \cap K = \varnothing$ имеем $f \in R(X)$, причем f равномерно на X с любой точностью приближается рациональными дробями вида*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z - a_n}, \quad \text{где} \quad a_n \in K, \ \text{и} \ \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

(б) *Функция f голоморфна вне K, $f \in C(\mathbb{C}^\bullet)$, $f(\infty) = 0$, причем*

$$\|f\| = \|f\|_{\mathbb{C}} \leqslant 2M\sqrt{\pi\Lambda(K)},$$

где $M = \|h\|_{K,\Lambda}$ – норма h в $L_\infty(K, \Lambda(\cdot))$.

Замечание. Функция f, определенная в предыдущей лемме, называется *потенциалом Коши* функции h *по мере Лебега* $\Lambda(\cdot)$ на компакте K.

Доказательство. (а) Пусть $d = \mathrm{dist}(X, K)$, $d > 0$. При $\mu \in (0, d/2)$ разобьем K на конечное число ($N = N(\mu)$) попарно непересекающихся борелевских множеств K_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, с условиями $\mathrm{diam}(K_n) < \mu$. Фиксируем

$$a_n \in K_n, \quad \lambda_n = \int\limits_{K_n} h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta),$$

тогда при $z \in X$ получаем:

$$\Big| \int\limits_K \frac{h(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z-a_n} \Big| = \Big| \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{K_n} \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta}$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{K_n} \frac{h(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{z-a_n} \Big| \leqslant \sum_{n=1}^{N} M \int\limits_{K_n} \Big| \frac{(z-a_n)-(z-\zeta)}{(z-\zeta)(z-a_n)} \Big| d\Lambda(\zeta)$$

$$\leqslant M \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu}{d^2} \Lambda(K_n) \leqslant \frac{\Lambda(K) M}{d^2} \mu \to 0 \quad \text{при } \mu \to 0.$$

(б) Так как функции $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z-a_n}$ голоморфны вне K, в силу (а) и теоремы Вейерштрасса f голоморфна вне K. Свойство $f(\infty) = 0$ очевидно. Оценим $|f(z)|$ для произвольного $z \in \mathbb{C}$. Пусть $r = \sqrt{\Lambda(K)/\pi}$. Поскольку $\Lambda(B(z,r)) = \Lambda(K)$ и функция $\dfrac{1}{|\zeta - z|}$ *убывает* при удалении ζ от (фиксированного) z, мы получаем:

$$|f(z)| \leqslant M \int\limits_K \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta) \leqslant M \int\limits_{B(z,r)} \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta) =$$

$$M \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r} \frac{\rho d\rho\, d\theta}{\rho} = 2M\pi r = 2M\sqrt{\pi \Lambda(K)},$$

причем вместе с нужной равномерной оценкой мы автоматически доказали абсолютную сходимость (при всех z) интеграла, определяющего f. Непрерывность f вытекает из леммы 5.3 ниже. $\square$

Определение 5.1. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $\tau \in (0,1]$. Пространство $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ есть совокупность функций $g \in C(E)$, для каждой из которых найдется $c = c(g) \in [0, \infty)$ с условиями

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leqslant c|z_1 - z_2|^\tau, \quad |g(z_1)| \leqslant c$$

для всех $z_1, z_2 \in E$. Банахова норма в $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ определяется так: $\|g\|_{\tau,E} = \min\{c(g)\}$, где (достигающийся) min берется по всем $c(g)$, удовлетворяющим последним двум неравенствам (проверить!).

Очевидно, что $\mathrm{Lip}_\tau(E) \subset C(E)$ при всех $\tau \in (0,1]$.

Лемма 5.3. *В условиях леммы 5.2, для любого $\tau \in (0,1)$ имеем $f \in \mathrm{Lip}_\tau \mathbb{C}$, причем $\|f\|_{\tau,\mathbb{C}} \leqslant Mc(\tau, K)$ (здесь $c(\tau,K)$ зависит только от τ и K). Однако найдется K, такой, что даже при $h \equiv 1|_K$ имеем $f \notin \mathrm{Lip}_1(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Фиксируем $z_1 \neq z_2$ и пусть $\delta = \dfrac{|z_1 - z_2|}{2}$, $a = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$, $D_1 = B(z_1, \delta)$, $D_2 = B(z_2, \delta)$, $D_3 = B(a, 2\delta) \setminus (D_1 \cup D_2)$, $D_4 = \mathbb{C} \setminus B(a, 2\delta)$. Нам нужно оценить слагаемые в правой части неравенств:

$$|f(z_1)-f(z_2)| \leqslant \sum_{s=1}^{4} \int\limits_{D_s\cap K} |h(\zeta)| \frac{|z_1-z_2|}{|z_1-\zeta||z_2-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{4} 2M\delta \int\limits_{D_s\cap K} \frac{1}{|z_1-\zeta||z_2-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta).$$

Слагаемое, соответствующее $s=1$ ($s=2$ аналогично), оценивается сверху величиной $4\pi M\delta$ как в предыдущей лемме переходом к полярным координатам с центром z_1 и интегрированием по всему D_1. Слагаемое при $s=3$ оценивается сверху тривиально (тем же $4\pi M\delta$). Выберем $r>0$ так, что $\Lambda(B(a,r)\cap D_4)=\Lambda(K)$. При интегрировании по D_4 мы пользуемся оценкой $|z_1-\zeta||z_2-\zeta| \geqslant |\zeta-a|^2/4$, монотонным убыванием подинтегральной функции (от $|\zeta-a|$) и полярными координатами с центром a:

$$\int\limits_{D_4\cap K} \frac{1}{|z_1-\zeta||z_2-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta) \leqslant \int\limits_{D_4\cap K} \frac{4}{|\zeta-a|^2}\, d\Lambda(\zeta) \leqslant$$

$$8\pi \int\limits_{2\delta}^{r} \rho^{-1}\, d\rho = 8\pi \ln(r/(2\delta)) .$$

Теперь легко видеть, что при фиксированном $\tau\in(0,1)$ величина $\dfrac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\tau}$ имеет оценку сверху, не зависящую от z_1 и z_2, если $\delta<1$. Случай $\delta\geqslant 1$ оставляем читателю.

Контрпример для $\tau=1$ строится так. Полагаем $K=\{z : |z|\leqslant 1, \operatorname{Re}(z)\geqslant |\operatorname{Im}(z)|\}$ и рассматриваем $z_1=0$, $z_2=-2\delta$, где $\delta>0$ достаточно мало. $\square$

5.5. Доказательство теоремы Рунге.

Доказательство теоремы 5.3 (Рунге). (1). Докажем, что $\mathcal{A}(X)|_X \subset R(X)$ для любого компакта X.

Пусть f голоморфна в d-окрестности U_d компакта X, надо приблизить f равномерно на X рациональными функциями. Пусть $\delta=d/3$. Построим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j,\varphi_j\}$ (см. лемму 5.1): $B_j=B(a_j,\delta)$ ($a_j\in\delta\mathbb{Z}^2$), $\varphi_j\in C_0^1(B_j)$, $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^2}\varphi_j\equiv 1$. Пусть

$$J=\{j\in\mathbb{Z}^2\colon B_j\subset U_d\}, \quad \varphi=\sum_{j\in J}\varphi_j\in C_0^1(U_d).$$

Ясно, что $\varphi=1$ в δ-окрестности U_δ компакта X, $\varphi=0$ вне U_d.

Положим $g=f\varphi$, $g\in C_0^1(\mathbb{C})$. По теореме 5.1 (Помпейю), при $z\in X$ имеем:

$$f(z)=g(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{U_d\setminus U_\delta} \frac{\overline{\partial} g(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta},$$

поскольку $\overline{\partial} g(\zeta)=\overline{\partial} f(\zeta)=0$ в U_δ. Остается воспользоваться леммой 5.2 при $h(\zeta)=\overline{\partial} g(\zeta)$, $K=\overline{U_d}\setminus U_\delta$.

Следует отметить, что при доказательстве этой части теоремы Рунге как правило пользуются интегральной формулой Коши. Однако для *аккуратного* ее применения (при построении специального контура интегрирования) требуются дополнительные топологические построения, которые в контексте нашего изложения обходятся интегрированием по площади, т.е. с помощью формулы Помпейю. Предложенное здесь доказательство теоремы Рунге легко перерастает в доказательство уже не такой тривиальной теоремы Хартогса – Розенталя (см. ниже).

(2). Надо показать, что $\{\mathcal{A}(X) \subset P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

($\Rightarrow$). Пусть, от противного, $\mathcal{A}(X) \subset P(X)$, но $\mathbb{C} \setminus X$ не связно, т.е. существует ограниченная связная компонента Ω_1 в $\mathbb{C} \setminus X$, в частности $\partial\Omega_1 \subset X$. Фиксируем $a_1 \in \Omega_1$. Так как $f(z) = \dfrac{1}{z - a_1} \in \mathcal{A}(X) \subset P(X)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется полином $p_\varepsilon(z)$ с условием $\left|\dfrac{1}{z-a_1} - p_\varepsilon(z)\right| < \varepsilon$ при всех $z \in X$ и, в частности, при $z \in \partial\,\Omega_1$. Пусть $d = \operatorname{diam}(\Omega_1)$, тогда

$$|1 - p_\varepsilon(z)(z - a_1)| \leqslant \varepsilon d, \quad \forall\, z \in \partial\,\Omega_1.$$

При $\varepsilon < 1/d$ мы получаем противоречие с принципом максимума модуля в Ω_1, так как функция $1 - p_\varepsilon(z)(z - a_1)$ равна 1 при $z = a_1$.

($\Leftarrow$). Пусть $\Omega = \mathbb{C} \setminus X$ – связно, $f \in \mathcal{A}(X)$. Согласно (1), для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset \Omega$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что

$$|f(z) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z - a_n}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in X.$$

Остается доказать, что $\left(\dfrac{1}{z-a}\right)\Big|_X \in P(X)$ при всех $a \in \Omega$ (потом каждую функцию $\dfrac{\lambda_n}{z - a_n}$ приблизим многочленом $p_{\varepsilon_n}(z)$ с точностью $\varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon}{2N}$, т.е. f будет приближена с точностью ε).

Пусть $G = \{a \in \Omega : \left(\dfrac{1}{z-a}\right)\Big|_X \in P(X)\}$. Установим, что $G = \Omega$. Действительно, во-первых $G \neq \varnothing$, так как по теореме Коши-Тейлора G содержит все точки из внешности какого-либо круга, содержащего X. Во-вторых, G – замкнуто в Ω, ибо если $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset G$ и $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k \in \Omega$, то $a \in G$, что непосредственно вытекает из равномерной сходимости $\dfrac{1}{z - a_k}$ к $\dfrac{1}{z-a}$ на X при $k \to \infty$. Установим, в-третьих, что G – открыто в Ω. Пусть $a \in G$, $d = \operatorname{dist}(a, X)$, $a_1 \in B(a, d)$. Докажем, что $a_1 \in G$. Из элементарных свойств геометрических прогрессий вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное L, что

$$\left|\frac{1}{z - a_1} - \sum_{l=1}^{L} \frac{(a_1 - a)^{l-1}}{(z-a)^l}\right| < \varepsilon$$

для всех $z \in X$. Но $\dfrac{1}{z-a} \in P(X)$, откуда $\dfrac{1}{(z-a)^l} \in P(X)$ при всех натуральных l и, следовательно, $\dfrac{1}{z - a_1} \in P(X)$.

Теперь равенство $G = \Omega$ следует из связности Ω. $\square$

Замечание. Определим $\mathcal{A}_C(X)$ как замыкание в $C(X)$ пространства $\mathcal{A}(X)|_X$. Тогда теорема Рунге в точности означает, что $\mathcal{A}_C(X) = R(X)$ для всякого компакта X, причем $\{R(X) = P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

Задача 5.1. Пусть $f \in C^1(\mathbb{C})$, причем $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$ – компакт. Положим

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Доказать, что $f - F$ – целая функция, причем $f \equiv F \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Задача 5.2. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, f — голоморфная в D функция. Тогда найдется последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ полиномов комплексной переменной с условием $p_n \to f$ при $n \to +\infty$ равномерно на любом компакте из D.

Задача 5.3. Пусть X – произвольный компакт в $\mathbb{C}$, а $\Omega_1, \ldots$ – его ограниченные компоненты дополнения (если есть). Фиксируем a_j в каждой из Ω_j. Доказать, что для любой $f \in \mathcal{A}(X)$ и произвольного $\varepsilon > 0$, найдется $R(\cdot)$ – рациональная функция с полюсами, принадлежащими множеству $\{a_j\}_{j\geq 1}$ такая, что $\|f - R\|_X < \varepsilon$.

5.6. Теорема Хартогса – Розенталя.

Теорема 5.4 (Хартогс – Розенталь). *Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$ лебеговой меры ноль ($\Lambda(X) = 0$). Тогда $C(X) = R(X)$.*

Доказательство. Сначала установим следующую лемму.

Лемма 5.4. *Пусть $X \subset \mathbb{C}$ – произвольный компакт. Для любой функции $f \in C(X)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется функция $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$ с условием $\|f - \varphi\|_X < \varepsilon$.*

Доказательство. Пользуясь *равномерной непрерывностью* функции f на X, найдем $\delta > 0$ такое, что $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ для всех z_1 и z_2 из X с условием $|z_1 - z_2| < 2\delta$. Теперь рассмотрим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ (см. лемму 5.1). Пусть $J = \{j \in \mathbb{Z}^2 \mid B_j \cap X \neq \varnothing\}$. При $j \in J$ фиксируем какую-либо точку $b_j \in X \cap B_j$. Положим $\varphi(z) = \sum\limits_{j\in J} f(b_j)\varphi_j(z)$. Ясно, что $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$, причем $\forall\, z \in X$ имеем (проверить!):

$$|f(z) - \varphi(z)| = \Big|\sum_{j\in J}(f(z) - f(b_j))\,\varphi_j(z)\Big| < \varepsilon\,.$$

Лемма доказана. □

Пусть теперь $\Lambda(X) = 0$. Для окончания доказательства теоремы 5.4 нам остается показать, что $C_0^1(\mathbb{C})|_X \subset R(X)$. Фиксируем $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Пусть $A = \|\overline{\partial}\varphi\|$ и $S = \mathrm{supp}(\varphi)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая (открытая) окрестность U компакта X, что $\Lambda(U) < \varepsilon$, $\Lambda(\partial U) = 0$. Пусть

$$f_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\overline{U}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}\ , \quad \varphi_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{S\setminus U} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}\,.$$

Остается заметить, что (по теореме 5.1) $\varphi = \varphi_\varepsilon + f_\varepsilon$, причем (по лемме 5.2) $\varphi_\varepsilon|_X \in R(X)$ и $\|f_\varepsilon\| \leqslant 2A\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\pi}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана. □

Упражнение 5.2 (Пример Алисы Рот, 1938 г.). Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$, полученный удалением из некоторого замкнутого круга $\overline{B_0}$ семейства попарно внешних кругов $\{B_j = B(z_j, r_j)\}_{j=1}^{+\infty}$ таких, что X является нигде не плотным и $\sum_{j=1}^{+\infty} r_j < +\infty$. При $j \geq 1$ все $B_j \subset B_0$. Доказать, что $C(X) \neq R(X)$, в частности $\Lambda(X) > 0$.

Указание. Доказать, что мера $d\mu(z) = dz|_{\partial^+ B_0} - \sum_{j=1}^{+\infty} dz|_{\partial^+ B_j}$ ортогональна $R(X)$ и найдется $f \in C(X)$ с условием $\int f(z)\,d\mu(z) \neq 0$.

Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$ и $\{\Omega_j\}_{j\in J}$ – компоненты дополнения к X (множество J непустое и не более чем счетное). Множество $\partial_i X = \partial X \setminus \cup_{j\in J} \partial\Omega_j$ называется *внутренней границей* компакта X.

Следующий пример Е.П. Долженко компакта X с условием $C_{\mathcal{A}}(X) \neq R(X)$ и дополнительными топологическими условиями основан на известном уже примере А. Рот.

Предложение 5.1. *Пусть $\overline{B_0}$ – замыкание некоторого открытого круга B_0, K – носитель (образ) жордановой кривой с условиями $\Lambda(K) > 0$, $K \setminus \{a\} \subset B_0$, где $a \in \partial B_0$ является концевой точкой K. Пусть $\{B_n = B(a_n, r_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ – семейство попарно внешних (непересекающихся замыканиями) открытых кругов в B_0 со следующими условиями:*

каждый $\overline{B_n}$ касается K в одной точке b_n ($n \in \mathbb{N}$), каждая точка $b \in K$ является предельной для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и, наконец, $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n < +\infty$.

Пусть $X = \overline{B_0} \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} B(a_n, r_n)$. Тогда $C_{\mathcal{A}}(X) \neq R(X)$.

Доказательство. Отметим, что здесь X° является связной и односвязной. При этом мера $d\mu_z = dz|_{\partial^+ B_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} dz|_{\partial^+ B_n}$ ортогональна $R(X)$. Пусть $f(z) = \int_K (z - \zeta)^{-1} d\Lambda(\zeta)$, тогда $f'(\infty) > 0$, $f \in C_{\mathcal{A}}(X)$, но $\int f(z)\, d\mu_z \neq 0$, т.е. $f \notin R(X)$. $\square$

Задача 5.4. Восстановить пропущенные детали в этом доказательстве.

6. Формулировка теорем Мергеляна.Свойства локализационного оператора Витушкина. Теорема Брауэра.

6.1. Формулировка теорем Мергеляна и доказательство теоремы Коши.

Теорема 6.1 (Мергеляна). *Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$. Для выполнения равенства $C_{\mathcal{A}}(X) = P(X)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{C} \setminus X$ было связным.*

Следствие 6.1 (теорема Лаврентьева). *$C(X) = P(X)$ если и только если $X = \widehat{X}$ и $X^o = \varnothing$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $C_{\mathcal{A}}(X) = P(X)$, тогда автоматически $\mathcal{A}(X) \subset P(X)$ и по теореме Рунге $X = \widehat{X}$.

($\Leftarrow$) Пусть $X = \widehat{X}$. По теореме Рунге достаточно установить, что $C_{\mathcal{A}}(X) = \mathcal{A}_C(X)$. Мы докажем следующий более сильный результат.

□

Теорема 6.2 (Мергеляна). *Пусть X – компакт, Ω_s ($s \in \{1, 2, \dots\}$) – ограниченные компоненты дополнения компакта X (если они есть), Ω_0 – неограниченная компонента дополнения компакта X. Если $d = \inf\limits_{s \geq 0} \{\mathrm{diam}(\Omega_s)\} > 0$, то $C_{\mathcal{A}}(X) = \mathcal{A}_C(X)$.*

Замечание. Если $\mathbb{C} \setminus X$ связно, то индексы $s = 1, \cdots$ отсутствуют и мы полагаем $d = +\infty$.

Доказательство теоремы 6.2 весьма сложно. Мы приведем его в следующей лекции после соответствующей подготовки.

Следствие 6.2 (Интегральная теорема Коши). *Пусть D – область в $\mathbb{C}$, ограниченная конечным числом попарно непересекающихся спрямляемых замкнутых жордановых кривых. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ выполняется равенство:*

$$\int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz = 0.$$

При этих же условиях справедлива интегральная формула Коши, а также формула Коши для производных.

Доказательство. Используется Теорема 6.2 и лемма 5.2 (a). Детали оставляем читателю. □

6.2. Свойства локализационного оператора Витушкина.

Напомним, что если $f \in C^1(\mathbb{C})$, то по теореме Коши-Римана множество $\mathrm{supp}\,(\overline{\partial} f)$ есть множество особых точек функции f (вне него f голоморфна). Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Рассмотрим функцию

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta) \varphi(\zeta)}{z - \zeta}\, d\Lambda(\zeta).$$

В последней формуле интегрирование (реально) ведется по множеству $K = \mathrm{supp}\,(\overline{\partial} f) \cap \mathrm{supp}\,(\varphi)$. По Лемме 5.2, $f_{(\varphi)}$ голоморфна вне K, т.е. ее особые точки лежат среди особых точек функции f и одновременно на $\mathrm{supp}\,\varphi$. Говорят, что оператор $f \mapsto f_{(\varphi)}$ (при фиксированном φ) *локализует* особенности f на $\mathrm{supp}\,(\varphi)$.

Пусть $f \in C_0^1(\mathbb{C})$. Сделаем стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ (см. лемму 5.1). Положим

$$J = \{\, j \in \mathbb{Z}^2 : \overline{B_j} \,\cap\, \mathrm{supp}\,(\overline{\partial} f) \neq \varnothing \,\}.$$

Ясно, что J – конечное множество индексов, причем функция $\varphi = \sum\limits_{j \in J} \varphi_j$ удовлетворяет условиям $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$ и $\varphi(z) = 1$ в некоторой окрестности $\mathrm{supp}\,(\overline{\partial} f)$.

Пусть $f_j = f_{(\varphi_j)}$. Тогда по теореме 5.1 (Помпейю)

$$\sum_{j\in J} f_j(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\sum\limits_{j\in J}\varphi_j(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} = f(z)$$

для всех z. Тем самым f разлагается в конечную сумму функций с «локализованными» особенностями. (Для этой цели нельзя просто полагать $f_j = f\varphi_j$, так как φ_j не голоморфна в $\mathbb{C}$ и у таких f_j могут появиться новые особенности.)

Нашей ближайшей целью является получение аналогичного разложения для произвольной функции f класса $C_0(\mathbb{C})$.

Пусть пока $f\in C^1(\mathbb{C})$. Пользуясь формулой Помпейю, получим:

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial}(f(\zeta)\varphi(\zeta)) - f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta) =$$

$$= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta).$$

Это уже нужная формула локализации.

Определение 6.1. Пусть $\varphi\in C_0^1(\mathbb{C})$. *Локализационным* оператором (оператором *А. Г. Витушкина*), соответствующим функции φ, называется оператор $f\to V_\varphi f$, где $f\in C(\mathbb{C})$ и

$$V_\varphi f(z) \equiv f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta) =$$

$$= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta). \tag{6.10}$$

Лемма 6.1 (Свойства $V_\varphi f$). *Пусть $B = B(a,r)$, $\varphi\in C_0^1(B)$, т.е. $S := \operatorname{supp}(\varphi)\subset B$. При $f\in C_0(\mathbb{C})$ обозначим через $\omega(t)$ модуль непрерывности функции f на $\mathbb{C}$, $t\geq 0$. Тогда:*

(а) $V_\varphi f \equiv f_{(\varphi)} \in C(\mathbb{C}^\bullet)$, $f_{(\varphi)}(\infty) = 0$, *причем имеет место оценка:*

$$\|f_{(\varphi)}\| \leqslant 4\,\omega(r) r\|\overline{\partial}\varphi\| \tag{6.11}$$

(б) *Если f голоморфна на открытом множестве U, то $f_{(\varphi)}$ голоморфна на множестве $U\cup(\mathbb{C}\setminus S)$ (т.е. особенности $f_{(\varphi)}$ локализуются на носителе S функции φ).*
Пусть $U_1 = \{z:\varphi(z)=1\}^o$, тогда $f - f_{(\varphi)}\in\mathcal{A}(U_1)$, т.е. $V_\varphi f$ «вбирает» в себя все особенности функции f на U_1.

(в) *Разложим $f_{(\varphi)}$ вне $\overline{B(a,r)}$ в ряд Лорана:*

$$f_{(\varphi)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n}.$$

Тогда справедливы оценки:

$$|c_n| \leqslant \omega(r) r^{n+1}\|\overline{\partial}\varphi\|. \tag{6.12}$$

Доказательство. Первое и второе утверждения в (а), а также голоморфность $f_{(\varphi)}$ вне S вытекают из Леммы 5.2 (б) и локализационной формулы (6.10). Для доказательства (6.11) воспользуемся принципом максимума модуля вне B, согласно которому нам достаточно оценить $|f_{(\varphi)}(z)|$ только при $z\in\overline{B}$:

$$|f_{(\varphi)}(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_B \frac{|f(z)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|}|\overline{\partial}\varphi(\zeta)|\,d\Lambda(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\,\omega(2r)\,\|\overline{\partial}\varphi\| \int\limits_B \frac{1}{|z-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta) \leqslant 4\,\omega(r)r\|\overline{\partial}\varphi\|.$$

При этом мы воспользовались очевидным неравенством $\omega(2r) \leqslant 2\omega(r)$ и оценкой, полученной в Лемме 5.2:

$$\int\limits_B \frac{1}{|z-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta) \leqslant 2\pi r.$$

(б) Пусть f голоморфна в $B(b,\delta) \subset U$; докажем, что $f_{(\varphi)} \in \mathcal{A}\big(B(b,\delta/2)\big)$. Выберем $\psi \in C_0^1(B(b,\delta))$, $\psi(z) = 1$ в $B(b,\delta/2)$, и рассмотрим $g = f\psi$, $h = f(1-\psi)$, так что $f_{(\varphi)} = g_{(\varphi)} + h_{(\varphi)}$. Для функции g класса $C_0^1(\mathbb{C})$ соответствующее утверждение доказано выше. А поскольку $h = 0$ в $B(b,\delta/2)$, голоморфность $h_{(\varphi)}$ в $B(b,\delta/2)$ вытекает из локализационной формулы и Леммы 5.2 (б). Итак, $f_{(\varphi)} \in \mathcal{A}(U)$.

Аналогично, по Лемме 5.2 (б) и ввиду $\overline{\partial}\varphi = 0$ в U_1, имеем:

$$f(z) - f_{(\varphi)}(z) = f(z)(1-\varphi(z)) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{S\setminus U_1} \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta) \in \mathcal{A}(U_1).$$

(в) Найдем c_n, $n \geqslant 1$. Из равенств

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{(f(z)-f(a)) - (f(\zeta)-f(a))}{z-\zeta}\,\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta) =$$

$$= (f(z)-f(a))\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{B(a,r)} \frac{(f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta),$$

учитывая, что $\varphi(z) = 0$ вне $B(a,r) = B$ и используя формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

(при $|z-a| > r$ ряд сходится равномерно по ζ на $\overline{B}$), находим при $|z-a| > r:$

$$f_{(\varphi)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^n}\left[-\frac{1}{\pi}\int\limits_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\Lambda(\zeta)\right].$$

Следовательно,

$$c_n = -\frac{1}{\pi}\int\limits_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\Lambda(\zeta). \tag{6.13}$$

Теперь оценка (6.12) тривиальна:

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\| r^{n-1}\pi r^2 = \omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\| r^{n+1}.$$

□

6.3. Теорема Брауэра о продолжении непрерывной функции. .

Завершим эту лекцию кратким доказательством следующего частного случая известной теоремы Брауэра-Титце-Урысона, необходимого для доказательства теоремы 6.2 (Мергеляна).

Теорема 6.3 (Брауэра). *Если X – компакт в $\mathbb{C}$ и $f \in C(X)$, то найдется функция $F \in C_0(\mathbb{C})$ с условиями $F|_X = f$, $\|F\| \leqslant \|f\|_X$.*

Доказательство. При $k \in \mathbb{Z}$ определим $G_k = \{z : \mathrm{d}(z, X) \in [2^{-k}, 2^{-k+1})\}$ и пусть $J(k)$ – совокупность тех индексов j в стандартном δ_k-разбиении единицы $\{B_j^k, \varphi_j^k\}$ при $\delta_k = 2^{-k-4}$, для которых $B_j^k \cap G_k \neq \varnothing$. При всех k и $j \in J(k)$ положим

$$\psi_j^k(z) = \varphi_j^k(z) \Big(\sum_{l \in \mathbb{Z},\, \sigma \in J(l)} \varphi_\sigma^l(z) \Big)^{-1}$$

– совокупность этих функций представляет собой локально-конечное разбиение единицы на $G = \mathbf{C} \setminus X$ (проверить!). Пусть a_j^k – центр B_j^k и z_j^k – какая-либо конкретная точка на X, ближайшая к a_j^k. Теперь остается положить $F(z) = f(z)$ при $z \in X$ и

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j \in J(k)} f(z_j^k)\, \psi_j^k(z)$$

при $z \in G$. Окончательную проверку оставляем читателю.

$\square$

Упражнение 6.1. Пусть K_1 – замкнуто, а K_2 – компакт в $\mathbb{C}$, причем $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Если $f \in BC(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2))$, то существуют такие f_1 и f_2 класса $BC(\mathbb{C})$, голоморфные вне K_1 и K_2 соответственно, что $f = f_1 + f_2$. Эти f_1 и f_2 определены однозначно с точностью до аддитивных постоянных.

Упражнение 6.2. Пусть K – компакт, $\mathbb{C} \setminus K$ – связно, $f \in \mathcal{A}(K)$. Тогда найдется $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность полиномов таких, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ выполнено $p_n^{(k)} \to f^{(k)}$ при $n \to +\infty$ равномерно на K.

7. Схема аппроксимации. Окончание доказательства теоремы Мергеляна.

7.1. Оценка приближения при касании третьего порядка. .

Доказательство теоремы 6.2. Фиксируем X с указанным условием и f – произвольную непрерывную на X и голоморфную на X^o функцию. Продолжим f по теореме Брауэра до функции $f \in C_0(\mathbb{C})$. Пусть $\omega(t) = \omega_{\mathbb{C}}(f,t)$ – модуль непрерывности f на $\mathbb{C}$ ($\omega(t) \to 0$ при $t \to 0+$).

Мы докажем, что найдется константа $A_0 > 0$ такая, что для любого $\delta > 0$ существует $g \in \mathcal{A}(X)$ с условием $\|f-g\|_X < A_0\,\omega(\delta)$. Затем останется устремить δ к 0.

Через $A_0, A_1, A_2, \ldots$ в доказательстве этой теоремы будут обозначаться положительные константы, которым, в принципе, можно придать конкретные числовые значения.

Фиксируем произвольное $\delta \in (0,1)$ и построим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ (см. лемму 5.1). Напомним, что $B_j = B(a_j, \delta)$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$,

$$0 \leqslant \varphi_j(z) \leqslant 1,\ \|\overline{\partial}\varphi_j\| \leqslant \frac{A_1}{\delta},\ \sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\varphi_j \equiv 1.$$

При каждом j определим

$$f_j(z) = V_{(\varphi_j)}f(z) = \frac{1}{\pi}\int\frac{(f(z)-f(\zeta))}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi_j(\zeta)\,d\Lambda(\zeta) =$$

$$= f(z)\varphi_j(z) - \frac{1}{\pi}\int\frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi_j(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta).$$

Пусть $J_* = \{\, j \in \mathbb{Z}^2 : B_j \cap \operatorname{supp}(f) \neq \varnothing\,\}$. Отметим, что при $j \notin J_*$ все соответствующие $f_j \equiv 0$ и что число элементов в J_* (коротко $\sharp J_*$) может иметь порядок $1/\delta^2$ (не выше), что «очень велико» при малом δ.

Лемма 7.1. *Каждая функция f_j обладает следующими свойствами:*

(а) $f_j \in C(\mathbb{C}^\bullet)$, $f_j(\infty) = 0$, $\|f_j\| \leqslant A_2\,\omega(\delta)$.

(б) *f_j голоморфна на X^o и вне $\operatorname{supp}(\varphi_j)$; в частности, если $B_j \subset X^o$, то $f_j \equiv 0$. Наконец, $\sum_{j\in J_*} f_j \equiv f$.*

(в) *Пусть*

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n^j}{(z-a_j)^n}$$

– ряд Лорана f_j вне $\overline{B_j}$. Тогда

$$|c_n^j| \leqslant A_2\,\omega(\delta)\,\delta^n.$$

Доказательство. Утверждения (а) и (в) вытекают непосредственно из леммы 6.1 при $r = \delta$. Установим (б). Рассмотрим $\varphi = \sum_{j\in J_*}\varphi_j$, $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности $\operatorname{supp}(f)$, т.е. $\operatorname{supp}(f) \subset U_1 = \big(\varphi^{-1}(1)\big)^o$. Согласно (б) леммы 6.1, функция

$$f - \sum_{j\in J_*} f_j = f - f_{(\varphi)}$$

является целой и равной нулю в точке ∞, т.е. она – тождественный ноль. □

Пусть $J = \{\, j \in J_* : B_j \cap \partial X \neq \varnothing\,\}$. Если $j \notin J$, то либо $B_j \subset X^o$ и $f_j \equiv 0$, либо $B_j \cap X = \varnothing$ и, по лемме 7.1(б), $f_j \in \mathcal{A}(X)$, так что такие f_j не нуждаются в приближении.

Замечание. Если $\Lambda(\partial X) > 0$, то $\sharp J$ имеет порядок $1/\delta^2$, т.е. при приближении функции f с заданной точностью ε на первый взгляд мы должны бы приближать каждую f_j, $j \in J$, с точностью порядка $\varepsilon\delta^2$. Следующая лемма А. Г. Витушкина показывает, что достаточно приближать каждую f_j с точностью порядка ε, если дополнительно имеется "касание"третьего порядка на ∞.

Лемма 7.2 (О касании третьего порядка). *Пусть существует $A_3 > 0$ такая, что для каждого $j \in J$ найдется функция $g_j \in \mathcal{A}(X) \cap C(\mathbf{C})$, голоморфная вне $\overline{B_j^*} = \overline{B(a_j, 2\delta)}$, с оценкой $\|g_j\| \leqslant A_3\, \omega(\delta)$, причем*

$$f_j(z) - g_j(z) = O\Big(\frac{1}{z^3}\Big) \text{ при } z \to \infty$$

(т.е. f_j и g_j имеют касание порядка три на ∞).

Тогда найдется A_0 (выражающаяся только через A_1, A_2, A_3) с условием

$$\Big|\Big| \sum_{j \in J} (f_j - g_j) \Big|\Big| \leqslant A_0\, \omega(\delta).$$

Замечание. Смысл этой леммы таков: если ее требования выполнены при всех достаточно малых δ (где A_3 не зависит от δ), то $f \in \mathcal{A}_C(X)$, поскольку она равномерно на X (с точностью $A_0\, \omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$) приближается функциями

$$g = \sum_{j \in J} g_j + \sum_{j \in J_* \setminus J} f_j$$

класса $\mathcal{A}(X)$.

Доказательство леммы 7.2. Ниже подразумевается, что встречающиеся по мере необходимости константы A_4 – A_8 выражаются только через A_1, A_2 и A_3.

Разложим каждую g_j (здесь всюду $j \in J$) в ряд Лорана вне $\overline{B_j^*}$:

$$g_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^j}{(z - a_j)^n}.$$

Напомним, что вне $\overline{B_j}$ имеем:

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^j}{(z - a_j)^n}.$$

Условие касания (порядка 3) эквивалентно тому, что

$$c_1^j = b_1^j, \quad c_2^j = b_2^j,$$

т.е. у функций f_j и g_j "уравнены"первые два коэффициента Лорана.

Следующие оценки сразу следуют из свойств f_j и g_j:

$$\|f_j - g_j\| \leqslant A_4\, \omega(\delta) \tag{7.14}$$

Теперь покажем, что при $|z - a_j| > 2\delta$ (т.е. вне $\overline{B_j^*}$) справедливы неравенства:

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leqslant A_5\, \omega(\delta) \frac{\delta^3}{|z - a_j|^3}\,. \tag{7.15}$$

Действительно, пусть $F_j(z) = \big(f_j(z) - g_j(z)\big)(z - a_j)^3$, тогда F_j голоморфна вне $\overline{B_j^*}$, причем ∞ – устранима для F_j, ибо F_j ограничена вблизи ∞ по условиям «касания» . Так как на $\overline{B_j^*}$ очевидным образом (см. (7.14)) выполнено

$$|F_j(z)| \leqslant A_4\, \omega(\delta)(2\delta)^3 = A_5\, \omega(\delta)\delta^3,$$

то по принципу максимума модуля вне $\overline{B_j^*}$ последняя оценка верна для всех z, что дает (7.15).

Фиксируем z и оценим

$$\Big|\sum_{j\in J}(f_j(z)-g_j(z))\Big|.$$

Пусть $J_1=\{\,j\in J\,:\,|z-a_j|\le 2\delta\,\}$, а при $k=2,3,\dots$ положим $J_k=\{\,j\in J\,:\,k\delta<|z-a_j|\le (k+1)\delta\,\}$.

Из элементарной геометрии находим, что $\sharp J_k\leqslant A_6k$ при всех $k\geqslant 1$. Отсюда, а также из (7.14) и (7.15) окончательно получаем:

$$\Big|\sum_{j\in J}(f_j(z)-g_j(z))\Big|\leqslant\sum_{j\in J_1}|f_j(z)-g_j(z)|+\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{j\in J_k}|f_j(z)-g_j(z)|\leqslant$$

$$\leqslant A_7\,\omega(\delta)+\sum_{k=2}^{+\infty}A_6kA_5\,\omega(\delta)\frac{1}{k^3}=A_0\,\omega(\delta).$$

$\square$

Отметим, что ввиду замечания 7.1 нам остается для всех достаточно малых $\delta\in(0,1)$ найти g_j, удовлетворяющие лемме 7.2.

7.2. Окончание доказательства теоремы Мергеляна. Завершим доказательство теоремы 6.2.

Предложение 7.1. *В условиях теоремы 6.2 и обозначениях леммы 7.2, при любом $\delta<\min\{1,d/3\}$ соответствующие g_j, $j\in J$, существуют.*

Доказательство. Фиксируем δ $(0<\delta<\min\{1,d/3\})$, $j\in J$. Тогда найдется такое $s\ge 0$, что $\Omega_s\cap B_j\ne\varnothing$ и, следовательно, имеется жорданова ломаная $\Gamma_1:[0,1]\to\Omega_s\cap B_j^*$ с условием $\operatorname{diam}([\Gamma_1])=\delta$ (где $B_j^*=B(a_j,2\delta)$). Поскольку функция $\operatorname{diam}(\Gamma_1([t_0,t]))$ непрерывна по t $(0\leqslant t_0\leqslant t\leqslant 1)$, нетрудно показать, что существуют t_1 и t_2 $(0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1)$ такие, что ломаная $\Gamma=\Gamma_1|_{[t_1,t_2]}$ с началом $\Gamma(t_1)=\alpha$ и концом $\Gamma(t_2)=\beta$ удовлетворяет свойствам: $\operatorname{diam}(\Gamma)=|\beta-\alpha|=\delta$ и $\Gamma\subset\Omega_s\cap B_j^*$. В частности, Γ лежит вне X (здесь и далее мы отождествляем Γ и ее носитель).

Положим $G_1=B(\alpha,\delta)\cap B(\beta,\delta)$, так что $\Gamma\subset\overline{G_1}$; пусть I – замкнутый луч с вершиной в точке α, идущий в направлении $(\alpha-\beta)$. Нетрудно доказать, что в $\mathbb{C}\setminus I$ существует голоморфная ветвь $V_1(z)$ многозначной функции $\sqrt{z-\alpha}$, а в $\mathbb{C}\setminus(I\cup\Gamma)$ –голоморфная ветвь $V_2(z)$ многозначной функции $\sqrt{z-\beta}$.

Определим $h_0(z)=V_1(z)V_2(z)$ в $\mathbb{C}\setminus(I\cup\Gamma)$. Так как при переходе через I функции V_1 и V_2 меняют только свой знак, то h_0 непрерывно продолжается на область $G=\mathbb{C}\setminus\Gamma$, а из теоремы Мореры сразу следует, что $h_0\in\mathcal{A}(G)$. Меняя, при необходимости, знак у V_1, мы дополнительно можем считать, что $h_0(z)=z+O(1)$ при $z\to\infty$. Теперь положим

$$h_1(z)=\frac{8}{\delta}\Big(h_0(z)-z+\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)=\frac{8}{\delta}\,\frac{(z-\alpha)(z-\beta)-\big(z-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\big)^2}{h_0(z)+\big(z-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\big)}=$$

$$=\frac{8}{\delta}\,\frac{\alpha\beta-\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4}}{2z+O(1)}=-\frac{(\beta-\alpha)^2}{\delta(z+O(1))}.$$

Следовательно, разложение Лорана функции h_1 вне B_j^* имеет вид:

$$h_1(z)=\frac{\delta e^{i\theta}}{z-a_j}+\frac{d_2}{(z-a_j)^2}+\cdots$$

(напомним, что $|\beta-\alpha|=\delta$, т.е. указанное $\theta\in\mathbb{R}$ существует).

По принципу максимума вне $\overline{G_1}$ (полагаем $h_1 = 0$ на Γ) имеем:

$$\|h_1\| \leqslant \|h_1\|_{\overline{G_1}} \leqslant \frac{8}{\delta}(\delta + \delta) \leqslant 16,$$

откуда

$$|d_2| = \Big| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a_j|=3\delta} h_1(\zeta)(\zeta - a_j)\, d\zeta \Big| \leqslant \frac{1}{2\pi} 16 \cdot 3\delta \cdot 2\pi 3\delta = 144\delta^2.$$

Пусть $\mu = \mathrm{d}(X, \Gamma)$, U – открытая $\mu/2$-окрестность ломаной Γ. По теореме Брауэра продолжим h_1 из $\mathbb{C} \setminus (U \cap B_j^*)$ до функции $h \in C(\mathbb{C})$ *с сохранением* sup-нормы (вне B_j^* функция h_1 не меняется). При этом h голоморфна вне $\overline{U}$, т.е в окрестности X.

Наконец, ищем g_j в виде $g_j(z) = \lambda_1 h(z) + \lambda_2 (h(z))^2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$. Напомним, что

$$f_j(z) = \frac{c_1^j}{z - a_j} + \frac{c_2^j}{(z - a_j)^2} + \cdots, \quad |c_1^j| \leqslant A_2 \delta\, \omega(\delta), \ |c_2^j| \leqslant A_2 \delta^2\, \omega(\delta)\,.$$

Нужные условия касания имеют вид:

$$c_1^j = \lambda_1 \delta e^{i\theta}, \quad c_2^j = \lambda_1 d_2 + \lambda_2 \delta^2 e^{2i\theta},$$

откуда λ_1 и λ_2 однозначно находятся, причем очевидны оценки:

$$|\lambda_1| \leqslant A_8\, \omega(\delta), \quad |\lambda_2| \leqslant A_8\, \omega(\delta).$$

Таким образом $\|g_j\| \leqslant A_3\, \omega(\delta)$. □

Теорема 6.2 полностью доказана. □

Упражнение 7.1. Привести пример компакта K, у которого K° связна, односвязна и плотна в K, но $C_{\mathcal{A}}(K) \neq R(K)$.

Упражнение 7.2. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Доказать, что оператор Витушкина $V_\varphi : f \to V_\varphi f$ (действующий по формуле (6.10)) непрерывен в пространствах:

(1) $\mathrm{Lip}_\tau(\mathbb{C})$ $\big(\tau \in (0,1)\big)$;

(2) $C^1(\mathbb{C})$.

Упражнение 7.3. Привести пример банахова подпространства в $\mathbb{C}$, разделяющего точки из $\mathbb{C}$, но не инвариантного относительно оператора Витушкина (выбрать соответствующую индекс-функцию φ).