# Теорема Жордана

**Несколько лекций из спецкурса проф. Парамонова П.В., мехмат МГУ, осень 2012 г.**

Следующий фундаментальный топологический факт известен в анализе как *теорема о замкнутой жордановой кривой* или как *теорема Жордана.*

**Теорема Жордана.** *Пусть* $\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ *– единичная окружность в* $\mathbb{R}^2$ *и пусть* $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ *– непрерывное инъективное отображение, т.е.* $\Gamma = \gamma(\mathbb{T})$ *– замкнутая жорданова кривая на плоскости. Тогда множество* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *состоит в точности из двух компонент связности (непересекающихся областей).*

Несмотря на простоту формулировки, теорема Жордана до сих пор не имеет (по крайней мере известного широкому кругу математиков) адекватного по простоте и полноте доказательства. В работе [**1**] была предпринята очередная (на наш взгляд успешная) попытка устранить этот пробел. Эта работа осталась без особого внимания российского читателя, видимо, потому, что соответствующее доказательство в ней было дано в весьма конспективной форме. В этом разделе, являющемся "адаптированным" изложением работы [**1**], приводится полное доказательство теоремы Жордана.

## 1. Вводные замечания и вспомогательные леммы

Приведем некоторые элементарные факты из анализа, которые будут использованы в дальнейшем. Во-первых, заметим, что в указанных выше обозначениях отображение $\gamma$ равномерно непрерывно на $\mathbb{T}$, причем обратное отображение $\gamma^{-1} : \Gamma \to \mathbb{T}$ также непрерывно. Во-вторых, если $A$ и $B$ – непустые непересекающиеся компакты в $\mathbb{R}^2$, то величина

$$\mathrm{d}(A, B) := \inf\{|a - b| : \ a \in A, \ b \in B\} > 0.$$

Доказательство этих утверждений основывается на теореме Вейерштрасса, которая гласит, что всякая ограниченная последовательность вещественных чисел имеет сходящуюся подпоследовательность.

Напомним также, что *областью* в $\mathbb{R}^2$ называется всякое непустое открытое множество, любые две точки которого можно соединить ломаной, не выходящей за его пределы.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что единичная окружность $\mathbb{T}$ ориентирована против часовой стрелки согласно с натуральной параметризацией $t(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

Предлагаемое доказательство теоремы Жордана основано на специальной аппроксимации кривой $\Gamma$ замкнутыми жордановыми ломаными и последующем переходе к пределу. Этот естественный подход хорошо известен, так что приведенные ниже Леммы 2 и 3 не новы. А вот Лемма 4 и Лемма 5 являются новыми и представляют самостоятельный интерес. Их цель – получить определенное "числовое" описание указанных замкнутых жордановых ломаных, с помощью которого удается перейти к пределу. Основная трудность состоит в том, чтобы избежать ситуации, которая возникает для (нежордановой) замкнутой кривой вида $\infty$, являющейся (при определенном обходе) пределом замкнутых жордановых ломаных.

**Определение 1.** *Замкнутая жорданова кривая* $\Sigma = \sigma(\mathbb{T})$, *где* $\sigma : \mathbb{T} \to \Sigma$ *– гомеоморфизм, называется* замкнутой жордановой ломаной, *если существует разбиение* $\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N\}$ *отрезка* $[0, 2\pi]$ (*т.е.* $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_N = 2\pi$), *с условиями* $\sigma\left((\cos\theta, \sin\theta)\right) = (a_n\theta + b_n, c_n\theta + d_n)$ *на отрезке* $[\theta_{n-1}, \theta_n]$ *при* $n = 1, \ldots, N$, *где* $a_n$, $b_n$, $c_n$ *и* $d_n$ *– вещественные постоянные.*

**Замечание.** В соответствии с выбором разбиения $\Theta$ естественным образом определяются *вершины* и *ребра* ломаной $\Sigma$. Заметим также, что соседние ребра ломаной $\Sigma$ могут лежать на одной прямой.

- Пару $(\sigma, \Theta)$ назовем *реализацией* ломаной $\Sigma$.

**Лемма 2.** *Теорема Жордана справедлива для любой замкнутой жордановой ломаной.*

**Доказательство.** Пусть $\Sigma$ – замкнутая жорданова ломаная и пусть $\Sigma$ имеет вершины $v_n = \sigma((\cos\theta_n, \sin\theta_n))$ и ребра $\Sigma_n = [v_{n-1}, v_n]$, где $n = 1, \ldots, N$. Пусть также $\Sigma_{N+1} = \Sigma_1$ и $v_0 = v_N$.

Докажем вначале, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ имеет *не более двух* компонент связности. Остановимся на случае $N \geq 4$. При $n = 1, \ldots, N$ рассмотрим множества $U_n = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(z, \Sigma_n) < \delta\}$, где

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\mathrm{d}(\Sigma_j, \Sigma_k)\},$$

а min берется по всем *несоседним* ребрам ломаной $\Sigma$. Если обозначить $\Sigma_0 = \Sigma_N$, то ясно, что

$$U_n \cap \Sigma \subset \Sigma_{n-1} \cup \Sigma_n \cup \Sigma_{n+1},$$

причем $U_n \setminus \Sigma$ состоит из двух компонент – $U'_n$ и $U''_n$, где, для определенности, можно предположить, что $U'_n \cap U'_{n+1} \neq \varnothing$ и $U''_n \cap U''_{n+1} \neq \varnothing$ при $n = 1, \ldots, N-1$. Тогда множества $U' := \bigcup_{n=1}^N U'_n$ и $U'' := \bigcup_{n=1}^N U''_n$ являются областями, причем любую точку $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ можно соединить отрезком с $U'$ или $U''$ вне $\Sigma$.

Докажем теперь, что имеется *не менее двух* компонент связности у множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Выберем систему координат в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы все вершины $v_n = (x_n, y_n)$ ломаной $\Sigma$ имели различные абсциссы $x_n$.

При $z \notin \Sigma$ положим $\eta(z) = 1$, если луч $L_z$ с вершиной в точке $z$, направленный вертикально вверх, пересекает $\Sigma$ *нечетное* число раз. В случае четного числа пересечений $L_z$ и $\Sigma$, положим $\eta(z) = 0$. Отметим, что если $L_z$ содержит (ровно одну) вершину, скажем $v_n$, ломаной $\Sigma$, причем ребра $\Sigma_n$ и $\Sigma_{n+1}$ (пересекающиеся в вершине $v_n$) лежат по одну сторону от $L_z$, то мы считаем, что $L_z$ (вблизи точки $z$) имеет два (или ни одного) пересечения с $\Sigma$. Нетрудно доказать, что $\eta(z)$ непрерывна в каждой точке вне $\Sigma$ и, следовательно (будучи целочисленной), является локально постоянной функцией от $z$ вне $\Sigma$. Следовательно, $\eta(z)$ постоянна в каждой связной компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$.

Если бы у множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ была бы только одна (неограниченная) компонента связности, то, очевидно, $\eta(z)$ была бы тождественным нулем. Пусть теперь $v_m = (x_m, y_m)$ такая вершина $\Sigma$, для которой $y_m = \max\{y_n : \ n = 1, \ldots, N\}$. Тогда ясно, что вблизи точки $v_m$ найдется точка $z$ такая, что $\eta(z) = 1$. $\square$

**Лемма 3.** *Всякий замкнутый жорданов путь $\gamma$ (напомним, что $\gamma : \mathbb{T} \to \Gamma$ – гомеоморфизм) можно с любой точностью равномерно на $\mathbb{T}$ приблизить замкнутым жордановым путем $\sigma$, задающим замкнутую жорданову ломаную $\Sigma$ в смысле Определения 1. При этом $\Sigma$ "вписана" в $\Gamma$ в том смысле, что все ее вершины лежат на $\Gamma$.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы при всех $t \in \mathbb{T}$ и $t' \in \mathbb{T}$ были верны следующие высказывания:

(1) если $|t - t'| \le \varepsilon_1$, то $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \frac{\varepsilon}{2}$, и

(2) если $|\gamma(t) - \gamma(t')| \le \varepsilon_2$, то $|t - t'| < \min\left(\varepsilon_1, \sqrt{3}\right)$.

Положим теперь $\delta = \min\{\varepsilon/2, \varepsilon_2\}$.

Рассмотрим стандартную решетку (замкнутых) квадратов диаметра $\delta$:

$$Q_{jk} = \left\{(x, y) : \ \left|x - j\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{\delta}{2\sqrt{2}}, \ \left|y - k\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right\}, \qquad j, k, \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\{Q_s\}_{s=1}^S$ – те из квадратов решетки, которые пересекают $\Gamma$ более, чем по одной точке. Легко видеть, что всегда $2 \le S < +\infty$. Так как $\delta \le \varepsilon_2$, то множество $\gamma^{-1}(Q_1)$ имеет диаметр менее $\sqrt{3}$, т.е. $\gamma^{-1}(Q_1)$ содержится в (однозначно определенной) минимальной замкнутой дуге $T_1 \subset \mathbb{T}$ длины менее $2\pi/3$. Пусть $[\tau_1, \tau_1'] \subset \mathbb{R}$ такой интервал, что отображение $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ есть гомеоморфизм $[\tau_1, \tau_1']$ на $T_1$. Рассмотрим новый путь $\gamma_1$ на $\mathbb{T}$, который совпадает с $\gamma$ на $\mathbb{T} \setminus T_1$, а при $t = (\cos\theta, \sin\theta) \in T_1$ (при $\theta \in [\tau_1, \tau_1']$) положим $\gamma_1(t) = (a_1\theta + b_1, c_1\theta + d_1)$, где постоянные $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ выбраны так, чтобы $\gamma_1$ было непрерывно на $\mathbb{T}$. Таким образом, $\Gamma_1 = \gamma_1(\mathbb{T})$ пересекает $Q_1$ по отрезку $[\gamma(t_1), \gamma(t_1')]$, где $t_1 = (\cos\tau_1, \sin\tau_1)$ и $t_1' = (\cos\tau_1', \sin\tau_1')$ – начало и конец дуги $T_1$ соответственно. Ясно, что $\gamma_1(t_1) = \gamma(t_1)$ и $\gamma_1(t_1') = \gamma(t_1')$.

Возможны два случая. В первом случае (i) пусть отрезок $I_1 = [\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_1')]$ лежит на одной из *сторон* квадрата $Q_1$. Тогда перенумеруем остальные квадраты $Q_s$ так, чтобы $I_1$ лежал также на стороне квадрата $Q_2$. Во втором случае (ii) отрезок $I_1$, за исключением своих концов, лежит строго внутри $Q_1$. В этом случае никакой перенумерации остальных квадратов не делаем. Таким образом, в случае (ii) для всех $s \ge 2$ (а в случае (i) для всех $s \ge 3$) имеем $\gamma_1^{-1}(Q_s) \subseteq \gamma^{-1}(Q_s)$, и для всех $s \ge 1$ выполнено $\operatorname{diam}\gamma_1^{-1}(Q_s) < \sqrt{3}$.

Если $\Gamma_1$ пересекает $Q_2$ не более, чем по одной точке (что возможно только в случае (ii)), то полагаем $\gamma_2 = \gamma_1$. Иначе найдется такая минимальная замкнутая дуга $T_2$ длиной менее $2\pi/3$, которая содержит $\gamma_1^{-1}(Q_2)$. Отметим, что $T_1$ и $T_2$ либо не пересекаются по своим внутренностям (случай (ii)), либо $T_1 \subseteq T_2$ (случай (i)). В обоих случаях найдется гомеоморфизм $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ некоторого отрезка $[\tau_2, \tau_2']$ на $T_2$ и постоянные $a_2$, $b_2$, $c_2$ и $d_2$ такие, что путь $\gamma_2(t)$, равный $\gamma_1(t)$ на $\mathbb{T} \setminus T_2$, и равный $\gamma_2(t) = (a_2\theta + b_2, c_2\theta + d_2)$ при $t = (\cos\theta, \sin\theta) \in T_2$ (при $\theta \in [\tau_2, \tau_2']$) является замкнутым жордановым путем, совпадающим с $\gamma$ в начале $t_2 = (\cos\tau_2, \sin\tau_2)$ и в конце $t_2' = (\cos\tau_2', \sin\tau_2')$ дуги $T_2$, поскольку $t_2$ и $t_2'$ не могут лежать внутри $T_1$.

Продолжая аналогичным образом, мы в результате получим замкнутые жордановы пути $\gamma_s$, $s = 1, \ldots, S$. Пусть $t \in \mathbb{T}$, оценим $|\gamma_S(t) - \gamma(t)|$. Если $\gamma_S(t) \neq \gamma(t)$, то найдется такое $s \in \{1, \ldots, S\}$, что $\gamma_S(t) = \gamma_s(t) \neq \gamma_{s-1}(t)$ (считаем, что $\gamma_0 = \gamma$). По построению, $t$ лежит на дуге $T_s$ с началом $t_s$ и концом $t_s'$, $\gamma_s(T_s) \subset Q_s$, $\gamma_s(t_s) = \gamma(t_s)$, $\gamma_s(t_s') = \gamma(t_s')$. Тогда

$$|\gamma_S(t) - \gamma(t)| = |\gamma_s(t) - \gamma_s(t_s) + \gamma(t_s) - \gamma(t)| \leq \delta + |\gamma(t) - \gamma(t_s)|\,.$$

Но $|t - t_s| \leq |t_s' - t_s| \leq \varepsilon_1$ ввиду $|\gamma(t_s') - \gamma(t_s)| \leq \delta \leq \varepsilon_2$. Таким образом,

$$\delta + |\gamma(t) - \gamma(t_s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откуда, окончательно, $|\gamma_S(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$.

Поскольку $\Gamma_S = \gamma_S(\mathbb{T})$ пересекает каждый квадрат решетки либо по пустому множеству, либо по одной точке, либо по "равномерно" проходимому отрезку, нетрудно видеть, что $\sigma = \gamma_S$ – искомая аппроксимация. □

## 2. Две основные леммы

**Лемма 4.** *Пусть $\Sigma$ – замкнутая жорданова ломаная, с реализацией $(\sigma, \Theta)$. Тогда найдется открытый круг $B$, лежащий в ограниченной компоненте $D$ множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, с границей $C$, пересекающей ломаную $\Sigma$ в точках $\sigma(t)$ и $\sigma(t')$, где $t, t' \in \mathbb{T}$ такие, что $|t - t'| \geq \sqrt{3}$.*

**Доказательство.** Пусть при движении вдоль $\Sigma$, соответствующем ориентации на $\mathbb{T}$ и отображению $\sigma$, область $D$ остается слева (иначе сделаем симметрию). В указанных обозначениях найдется круг $B$, для которого значение $|t - t'|$ является максимально возможным. Предположим, что $|t - t'| < \sqrt{3}$. Пусть $T$ – дуга на $\mathbb{T}$, соединяющая точки $t$ и $t'$, имеющая длину, большую $4\pi/3$, направленная (как и $\mathbb{T}$) против часовой стрелки. Будем считать точку $t$ – началом, а $t'$ – концом $T$. Очевидно, что граница $C$ круга $B$ не имеет общих точек с частью $\Sigma' = \sigma(T')$ ломаной $\Sigma$, где $T' = T \setminus \{t, t'\}$. Без ограничения общности будем считать, что $v_1 = \sigma((\cos\theta_1, \sin\theta_1)), \ldots, v_M = \sigma((\cos\theta_M, \sin\theta_M))$ – все (последовательные) вершины ломаной $\Sigma$, которые принадлежат $\Sigma'$, $1 \leq M \leq N$. Положим $u_1 = \sigma(t)$ и $u_2 = \sigma(t')$. Пусть $D_1$ – область, ограниченная $\Sigma' = \sigma(T')$ и отрезком $[u_1, u_2]$ (хордой ломаной $\Sigma$), пусть также $B_1 = B \cap D_1$, $C_1 = C \cap D_1$.

Пусть, для начала, известно, что дуга $C_1$ касается $\Sigma'$ в обеих ее точках $u_1$ и $u_2$ (т.е., окружность $C$ касается прямых $u_1v_1$ и $v_Mu_2$). При этом вектор $\overrightarrow{u_1v_1}$ (соответственно,

$\overrightarrow{v_M u_2}$) должен с касанием "выходить" из $C$ (соответственно, "входить" в $C$), оставляя $B$ слева, а отрезки $[u_1, v_1]$ и $[v_M, u_2]$ должны лежать по одну сторону от прямой $u_1 u_2$.

Поскольку $C_1$ не пересекает $\Sigma'$, мы можем найти круг $B'$, принадлежащий области $D_1 \cup B \subset D$, который касается ломаной $\Sigma$ в точках $u_1'$ и $u_2'$, лежащих *внутри* отрезков $[u_1, v_1]$ и $[v_M, u_2]$ соответственно, причем точки $u_1'$ и $u_1$ (а также $u_2'$ и $u_2$) можно сделать сколь угодно близкими друг к другу. Последнее противоречит выбору $B$ так как $|\sigma^{-1}(u_1') - \sigma^{-1}(u_2')| > |t - t'|$.

Во втором случае, пусть известно, что $C_1$ касается ломаной $\Sigma'$ ровно в одной точке, например, $u_1$ (случай касания в точке $u_2$ аналогичен). В этом случае $u_2 = v_{M+1}$ – вершина. Так как ребро $[v_M, v_{M+1}]$ не касается $C_1$, мы снова можем найти круг $B' \subset D_1 \cup B$, который касается $\Sigma'$ в некоторой точке $u_1'$ внутри $[u_1, v_1]$ (близкой к $u_1$), и граница которого проходит через $u_2$. Возникает противоречие, аналогичное предыдущему случаю.

Пусть, наконец, обе точки $u_1 = v_N$ и $u_2 = v_{M+1}$ – вершины $\Sigma$ и касания $C_1$ и $\Sigma'$ нет. Будем непрерывно "раздувать" диск $B$ в сторону области $D_1$, оставляя его в области $D$, а его границу $C$ проходящей через точки $u_1$ и $u_2$. Тогда в некоторый момент дуга $C_1$ коснется ребра $[u_1, v_1]$, или ребра $[v_M, u_2]$, или пересечет $\Sigma'$. Все эти случаи уже рассмотрены как приводящие к противоречию. $\square$

Рассмотрим теперь замкнутую жорданову ломаную $\Sigma$ и выберем одну из компонент $D$ множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Для любой хорды $I$ в $D$ (т.е. отрезка, соединяющего две разные точки на $\Sigma$ и целиком лежащего в $D$ за исключением концевых точек) множество $D \setminus I$ состоит из двух компонент связности (см. Лемму 2). Фиксируем точки $a \in D$ и $b \in D$ с условием $\mathrm{d}(\Sigma, \{a, b\}) \geq 1$. Пусть известно, что для всякой хорды $I$ в $D$ длины $\ell(I) < 2$ точки $a$ и $b$ лежат в одной и той же компоненте множества $D \setminus I$.

**Лемма 5.** *В указанных условиях найдется путь (непрерывное отображение) $\kappa : [0,1] \to D$, соединяющий точки $a$ и $b$ (т.е. $\kappa(0) = a$, $\kappa(1) = b$) с условием $\mathrm{d}(\Sigma, K) \geq 1$, где $K = \kappa([0,1])$.*

**Доказательство.** Пусть $A_a$ – совокупность точек из $D$, которые можно соединить с точкой $a$ путями $\kappa_a$ (определенными на $[0,1]$) с условием $\mathrm{d}(\Sigma, K_a) \geq 1$, где $K_a = \kappa_a([0,1])$. Положим

$$\Sigma_a = \{z \in \Sigma : \ \exists\, a_z \in A_a \text{ такая, что } |z - a_z| = 1\}.$$

Аналогично определяются множества $A_b$ и $\Sigma_b$ для точки $b$. Требуется доказать, что $A_a \cap A_b \neq \varnothing$ (откуда сразу следует, что $A_a = A_b$). Будем считать, что при движении по $\Sigma$ (согласно ориентации), область $D$ остается слева.

Нам необходимо доказать следующее утверждение.

**Лемма 6.** *В указанных условиях имеет место равенство $\Sigma_a = \Sigma_b$. При этом $\Sigma_a$ состоит из конечного числа связных компонент (конечного числа замкнутых промежутков и точек на $\Sigma$).*

**Доказательство.** Пусть $\overline{E}$ – замыкание (непустого) множества $E \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $z \in \Sigma_a$ и $B_z$ – единичный круг с центром $a_z \in A_a$, граница $C_z$ которого содержит точку $z$. Обозначим через $C_z^+$ – открытую полуокружность на $C_z$ с началом в точке $z$ и проходимую против часовой стрелки.

Предположим вначале, что точка $z$ не является вершиной ломаной $\Sigma$. Тогда $B_z$ касается некоторого ребра в $\Sigma$, содержащего точку $z$. При условии $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$ точку $z$ (а вместе с ней и круг $B_z$) можно "двигать" вдоль по $\Sigma$ (в направлении, соответствующем ориентации $\Sigma$) до того момента, когда $z$ впервые достигнет следующей вершины, или когда впервые появится точка пересечения $C_z^+$ и $\Sigma$. В первом случае продолжим непрерывное "качение" круга $B_z$ вокруг достигнутой вершины $z$ (по часовой стрелке) до его первого положения, когда $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$, или до того момента, когда $C_z$ станет касательной к следующему после вершины $z$ ребру. Продолжая этот процесс мы обязательно придем к ситуации, когда впервые $C_z^+ \cap \Sigma \neq \varnothing$ (в общей ситуации исходная точка $z \in \Sigma_a$ может оказаться где-то посередине описанного выше процесса). Это последнее положение точки $z$ (обозначим его $z_1$) и будет "крайней" точкой компоненты из $\Sigma_a$, содержащей исходное положение точки $z$.

Действительно, пусть $z_2$ – ближайшая (при движении от $z_1$ вдоль $\Sigma$) точка на $\Sigma$ с условием $z_2 \in C_{z_1}^+ \cap \Sigma$. Докажем, что на (открытом) промежутке $\Sigma_{12}^\circ$ ломаной $\Sigma$ с началом в точке $z_1$ и концом в точке $z_2$ не может быть точек из $\Sigma_a$. Более того, мы сразу докажем, что на $\Sigma_{12}^\circ$ не может быть и точек из $\Sigma_b$ (откуда следует, что $\Sigma_b \subset \Sigma_a$ и, по симметрии, $\Sigma_a \subset \Sigma_b$, что дает $\Sigma_a = \Sigma_b$), так что Лемма 6 будет доказана.

Пусть, от противного, найдутся точки $w \in \Sigma_{12}^\circ$ и $a_w \in A_a \cup A_b$ с условием $|a_w - w| = 1$. Тогда единичный круг $B_w$ (с границей $C_w$ и центром $a_w$) лежит целиком в области $D$. Пусть $I = [z_1, z_2]$ – хорда в $D$. Поскольку $|z_1 - z_2| < 2$, множество $A_a \cup A_b$ (и, соответственно, точка $a_w$) лежит в одной компоненте $D_1$, ограниченной ломаной $(\Sigma \setminus \Sigma_{12}^\circ) \cup [z_1, z_2]$. Так как $a_w \in D_1$, а $w \notin \overline{D}_1$, радиус $[a_w, w)$ круга $B_w$ (не пересекая множества $\Sigma \setminus \Sigma_{12}^\circ$) обязан пересекать хорду $I$. Далее, $B_w$ не содержит $z_1$ и $z_2$, поэтому $C_w$ пересекает $I$ в двух точках. Поскольку $a_w$ и $a_{z_1} \in A_a$ ($a_{z_1}$ – центр круга $B_{z_1}$ полуокружность $C_{z_1}^+$ которого содержит $z_2$) лежат по одну от прямой $z_1 z_2$, мы видим, что либо $a_w = a_{z_1}$ (и точка $w \in \mathbb{C}_{z_1}^+$ предшествует $z_2$), либо $w \in B_{z_1}$, что невозможно. $\square$

Завершим теперь доказательство Леммы 5. Итак $\Sigma_a = \Sigma_b$. Докажем теперь, что $A_a = A_b$. Пусть $z \in \Sigma_a = \Sigma_b$, $a_z \in A_a$, $b_z \in A_b$ и пусть $B_z^a$ и $B_z^b$ – единичные круги с центрами $a_z$ и $b_z$ соответственно, границы $C_z^a$ и $C_z^b$ которых содержат точку $z$. Если $a_z = b_z$, то все ясно. В противном случае угол $\angle(a_z z b_z)$ – ненулевой, так что точка $z$ – вершина ломаной $\Sigma$ и, следовательно, круги $B_z^a$ и $B_z^b$ имеют непустое пересечение. Без ограничения общности будем считать, что непрерывное вращение круга $B_z^a$ вокруг точки $z$, совмещающее $B_z^a$ с $B_z^b$ и осуществляемое в "ближайшую сторону", есть вращение по часовой стрелке. При таком непрерывном вращении мы или придем в положение $B_z^b$ без пересечения $B_z^a$ с ломаной $\Sigma$ (откуда $b_z \in A_a$ и все доказано), или $z = z_1$ будет крайней точкой компоненты $\Sigma_a$, содержащей $z_1$. В последнем случае пусть $z_2$ – следующая за $z_1$ точка $\Sigma_a$ (как в Лемме 6), $a_* \in A_a$ – центр единичного круга $B_*$, граница $C_*$ которого проходит через точки $z_1$ и $z_2$, причем $a_* \neq b_z$. Таким образом, $B_*$ – предельное положение, до которого можно вращать $B_z^a$ без пересечения с $\Sigma$. Если луч $z b_z$ (с вершиной в точке $z$), лежит между лучами $z a_*$ и

$z_1z_2$, то круг $B_z^b$ содержит $z_2$ – противоречие. Если же луч $z_1z_2$ лежит между лучами $za_*$ и $zb_z$, то точки $a_*$ и $b_z$ лежат в разных компонентах $D\setminus[z_1,z_2]$, поскольку отрезок $[a_*,b_z]$, лежащий в $B_*\cup B_z^b\subset D$ пересекает отрезок $[z_1,z_2]$ один раз. Снова приходим к противоречию и, таким образом, Лемма 5 доказана. □

## 3. Доказательство теоремы Жордана

Докажем сначала, что $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$ имеет не менее двух компонент. Достаточно установить наличие *ограниченной* компоненты у этого множества. Для этого рассмотрим достаточно большой круг $B_0$ с центром в нуле и границей $C_0$, содержащий $\Gamma$. Пусть $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m,\ldots$ – замкнутые жордановы ломаные, сходящиеся к $\Gamma$ в смысле Леммы 3 и пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_m\ldots$ – пути (сходящиеся к $\gamma$), реализующие $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m\ldots$ соответственно. По Лемме 4 для каждого $m$ найдется круг $B_m$ (с центром $b_m$ и границей $C_m$), лежащий в области $D_m$, ограниченной ломаной $\Gamma_m$, с условием, что существуют точки $t_m\in\mathbb{T}$ и $t'_m\in\mathbb{T}$ такие, что $|t_m-t'_m|\geq\sqrt{3}$, а $\gamma_m(t_m)\in C_m$ и $\gamma_m(t'_m)\in C_m$. Переходя если нужно к подпоследовательности, мы можем дополнительно считать, что все $\Gamma_m$ лежат в $B_0$ и что последовательность $\{b_m\}$ сходится к некоторой точке $b$ при $m\to+\infty$.

Выберем $\varepsilon>0$ такое, что из условий $t,t'\in\mathbb{T}$ и $|t-t'|\geq\sqrt{3}$ вытекает, что $|\gamma(t)-\gamma(t')|\geq\varepsilon$. Тогда $|\gamma(t_m)-\gamma(t'_m)|\geq\varepsilon$, откуда $|\gamma_m(t_m)-\gamma_m(t'_m)|>\varepsilon/2$ для всех достаточно больших $m$. Следовательно, $\operatorname{diam}B_m>\varepsilon/2$ и $\mathrm{d}(z_m,\Gamma_m)>\varepsilon/4$ при больших $m$. Таким образом, при больших $m$ точки $b_m$ и $b$ лежат в одной (ограниченной) компоненте множества $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma_m$ и, следовательно, $b_m$ и $b$ лежат в одной компоненте $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$. Если $b_m$ и $b$ лежат в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$, то найдется путь $\kappa:[0,1]\to\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$, соединяющий $b$ и $C_0$. Пусть $\mathrm{d}(K,\Gamma)=\delta>0$, где $K=\kappa([0,1])$. Поскольку при больших $m$ имеет место неравенство $\|\gamma-\gamma_m\|_{\mathbb{T}}<\delta/2$, мы получаем, что $\mathrm{d}(K,\Gamma_m)>\delta/2$, так что для больших $m$ точки $b_m$ и $b$ должны лежать в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma_m$, а это дает противоречие.

Докажем теперь, что $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$ имеет не более двух компонент связности. Пусть, от противного, точки $w_1$, $w_2$ и $w_3$ лежат в различных компонентах множества $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$. Положим $\mathrm{d}(\Gamma,\{w_1,w_2,w_3\})=\varepsilon$ и пусть жордановы ломаные $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m,\ldots$ сходятся к $\Gamma$, т.е., соответственно, $\|\gamma-\gamma_m\|_{\mathbb{T}}\to 0$ при $m\to+\infty$. Тогда можно считать, что $\mathrm{d}(\Gamma_m,\{w_1,w_2,w_3\})\geq\varepsilon/2$ (при всех $m$), так что две из трех точек $w_1$, $w_2$ и $w_3$ лежат в одной компоненте множества $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma_m$. Будем считать, что точки $w_1$ и $w_2$ лежат в одной компоненте $D_m$ множества $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma_m$ при всех $m$. Предположим, что существуют $\delta\in(0,\varepsilon)$ и бесконечно много значений $m$ такие, что $w_1$ и $w_2$ можно соединить путем $\kappa_m:[0,1]\to D_m$ с условием $\mathrm{d}(K_m,\Gamma_m)\geq\delta$, где $K_m=\kappa_m([0,1])$. Но тогда $w_1$ и $w_2$ должны лежать в одной компоненте $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma$. Однако, в силу сделанного ранее предположения, это не так, и мы получаем, что такого $\delta$ не существует. Применим теперь (от противного) Лемму 5. Еще раз переходя к подпоследовательности, мы можем утверждать, что для каждого $m$ найдутся точки $z_m=\gamma_m(t_m)$, $t_m\in\mathbb{T}$, и $z'_m=\gamma_m(t'_m)$, $t'_m\in\mathbb{T}$, такие, что точки $w_1$ и $w_2$ лежат в разных компонентах множества $D_m\setminus I_m$, где $I_m=[z_m,z'_m]$, причем $z_m-z'_m=\gamma_m(t_m)-\gamma_m(t'_m)\to 0$ при $m\to+\infty$. Следовательно, $t_m-t'_m\to 0$ при $m\to+\infty$. Без ограничения общности предположим, что для бесконечно многих значений $m$ точка $w_1$ лежит в компоненте $D'_m$ множества

$D_m \setminus I_m$, ограниченной $I_m$ и $\gamma(T'_m)$, где $T'_m$ – минимальная дуга на $\mathbb{T}$, соединяющая $t_m$ и $t'_m$. Ясно, что $\operatorname{diam} D'_m \to 0$ при $m \to +\infty$, так что точка $w_1$ обязана лежать на $\Gamma$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Жордана. □

Использованные при доказательстве теоремы Жордана аргументы и конструкции позволяют установить ряд интересных полезных следствий.

**Следствие 7.** *В условиях теоремы Жордана пусть* $\delta := \min\{|\gamma(t) - \gamma(t')| : t, t' \in \mathbb{T},\ |t - t'| \geq \sqrt{3}\}$. *Тогда ограниченная компонента множества* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *содержит круг с диаметром* $\delta$.

Естественным образом модифицируя Леммы 2, 3 и 5 и вторую часть доказательства теоремы Жордана, получаем следующий важный результат.

**Теорема Жордана для жордановых кривых.** *Пусть* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *– непрерывное инъективное отображение, т.е.* $\Gamma = \gamma([0,1])$ *– жордановы кривая. Тогда* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *– связно.*

Кроме того, справедливо следующее утверждение.

**Следствие 8.** *В условиях теоремы Жордана граница каждой из компонент связности множества* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *совпадает с* $\Gamma$.

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть случай ограниченной компоненты $D$ множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Пусть, от противного, граница $\partial D$ множества $D$ не совпадает с $\Gamma$. Ясно, что $\partial D \subset \Gamma$, поэтому при некотором $t_0 \in \mathbb{T}$ имеем $\gamma(t_0) \notin \partial D$. Тогда найдется такая связная окрестность $T_0$ точки $t_0$ в $\mathbb{T}$, что $\partial D \cap \gamma(T_0) = \varnothing$. При этом жорданова кривая $\Gamma_1 = \gamma(T_1)$, где $T_1 = \mathbb{T} \setminus T_0$, содержит $\partial D$ и не разделяет плоскость в силу теоремы Жордана для жордановой кривой. Противоречие легко получается применением принципа вложенных отрезков. □

## Список литературы


[1] H. Tverberg, *A proof of the Jordan curve theorem*, Bull London Math. Soc., **12** (1980), 34–38.

[2] C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Gauthier-Villars, Paris, 1887, vol. **3**, 587–594.