

Вопросы к экзамену по дисциплине
«Теория функций комплексного переменного»

3 курс, 1 поток, весенний семестр 2025/2026

*Вопросы, отмеченные символом * (например, 41*) в билеты включаться не будут — соответствующий материал может быть использован в дополнительных вопросах.*

1. Однолистные функции. Критерий локальной однолистности.
2. Обратный принцип соответствия границ и теорема Носиро–Варшавского (однолистность голоморфной в выпуклой области функции с условием $\operatorname{Re} f' > 0$).
3. Достаточное условие однолистности голоморфной непостоянной в данной области D функции f с условием $f(z) \rightarrow \Gamma$ при $z \rightarrow \partial D$, где Γ — замкнутая жорданова кривая.
4. Теорема Ландау о круге однолистности.
5. Принцип симметрии Римана–Шварца. Пример отыскания конформного отображения с использованием принципа симметрии.
6. Теорема Гурвица о нулях и теорема о локально равномерно сходящейся последовательности однолистных функций.
7. Вычисление групп конформных автоморфизмов областей $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}_\infty$. Отсутствие конформной эквивалентности этих областей.
8. Локальная равномерная ограниченность и локальная равностепенная непрерывность семейств функций. Связь этих понятий для семейств голоморфных функций.
9. Понятие компактности семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Непрерывный функционал на компактном семействе функций.
10. Теорема Римана. Схема доказательства и подробное проведение рассуждения о существовании однолистной функции, отображающей данную область в единичный круг.
11. Теорема Римана. Схема доказательства и подробное обоснование того факта, что экстремальная функция f_0 функционала $f \mapsto f'(a)$ отображает данную область на весь единичный круг.
12. Теорема площадей и ее следствие для функций класса $H(\mathbb{D} \setminus \{0\})$, взаимно-однозначных в единичном круге $\mathbb{D}$.
13. Теорема Бибераха (оценка $|a_2| \leq 2$ для функций класса S) и теорема Кёбе (об $1/4$).
14. Первая и вторая теоремы растяжения для однолистных функций в круге.
15. Радиус выпуклости для класса S однолистных функций в круге $\mathbb{D}$ с нормировками $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$.
16. Существование радиальных пределов почти всюду на единичной окружности у функции f , конформно отображающей единичный круг на некоторую ограниченную область.
17. Теорема Янишевского и ее комплексно-аналитическое доказательство.
18. Области с локально связными границами и теорема Каратеодори о непрерывном продолжении конформного отображения единичного круга на данную область. Схема доказательства.
19. Точки разреза. Жордановы области. Теорема Каратеодори о гомеоморфном продолжении конформного отображения единичного круга на данную область. Схема доказательства.
20. Теоремы Каратеодори о непрерывном и гомеоморфном продолжении конформного отображения: необходимые понятия, определения и формулировки; следствия из теорем Каратеодори — граничное условие нормировки для конформного отображения, продолжение конформного отображения круга на жорданову область до гомеоморфизма $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, теорема Шёнфлиса.
21. Гармонические функции и их основные свойства (теорема о среднем, принцип максимума и минимума).
22. Постановка задачи Дирихле для гармонических функций. Сохранение гармоничности при голоморфной замене переменных и метод конформного отображения для решения задачи Дирихле. Формулировка теоремы Лебега. Гармоничность непрерывной функции, удовлетворяющей в произвольном круге в данной области теореме о среднем.
23. Разложение гармонической функции в круг в ряд по однородным гармоническим многочленам. Аналог теоремы Вейерштрасса для гармонических функций.

- 24.** Метод Фурье и формула Пуассона для решения задачи Дирихле для гармонических функций в круге.
- 25.** Элементы и их аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение по цепочке и вдоль пути, их основные свойства.
- 26.** Аналитическое продолжение по близким путям. Теорема об аналитическом продолжении по гомотопным путям. Теорема о монодромии.
- 27.** Полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса (П.А.Ф.). Теорема Пуанкаре–Вольтерра. Аналитические ветви П.А.Ф. и голоморфные ветви П.А.Ф. Особые точки (аналитических ветвей) П.А.Ф. и их классификация.
- 28.** Теорема об аналитическом продолжении первообразного элемента. Пример ее применения для описания продолжения элемента $E_1(\ln(\sqrt{z_{(o)}} \mathcal{J}(z)))$.
- 29.** Теорема об аналитическом продолжении сложного элемента. Пример ее применения для описания продолжения элемента $E_1(\ln(1 + \sqrt{z_{(o)}}))$.
- 30.** Понятие об алгебраической особой точке П.А.Ф. и об алгебраических П.А.Ф.
- 31.** Одномерные комплексные многообразия и их голоморфные отображения. Неразветвленные голоморфные накрытия. Теорема о поднятии путей.
- 32.** Понятие о римановой поверхности П.А.Ф.
- 33.** Порядок и тип целой функции. Выражение порядка (с доказательством) и типа (без доказательства) через коэффициенты Тейлора в начале координат.
- 34.** Теорема Вейерштрасса о существовании целой функции с заданными нулями.
- 35.** Теорема о связи показателя сходимости последовательности нулей и порядка для целой функции конечного порядка.
- 36.** Теорема Адамара о факторизации. Канонические произведения.
- 37.** Теорема Бореля. Разложение функции $\sin z$ в бесконечное произведение.
- 38.** Плотность системы $\{e^{i\lambda_n t}\}$ в пространстве $C[-\pi, \pi]$ в случае последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ с условием $\liminf_{t \rightarrow \infty} n(t)/t > 2$, где $n(\cdot)$ — считающая функция последовательности Λ .
- 39.** А-точки целых функций. Исключительные значения в смысле Бореля целых функций.
- 40.** Принцип Фрагмена–Линделёфа для целых функций конечного порядка.
- 41*.** Оценка Литтлвуда в задаче Бибербаха.
- 42*.** Модулярная функция. Доказательство малой теоремы Пикара в общем случае.
- 43*.** Целые функции экспоненциального типа. Преобразование Бореля. Понятие о сопряженной диаграмме, индикаторе и индикаторной диаграммах целой функции. Теорема Поля (о связи индикатора и опорной функции сопряженной диаграммы; без доказательства) и теорема об индикаторе производной (без доказательства). Применение преобразования Бореля для решения линейных дифференциальных уравнений в классе целых функций экспоненциального типа.