

## Программа курса «Комплексный анализ»

(поток матем. экономики, 5 семестр 2025/26 уч.г., лектор А.В.Домрин)

1. Непрерывность,  $\mathbb{R}$ -дифференцируемость и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши–Римана.
2. Определение и свойства голоморфных функций (включая теорему об обратной функции). Функция  $e^z$ , ее свойства, примеры обратных к ней функций.
3. Конформность в точке: определение, связь с голоморфностью. Конформное отображение одного открытого множества на другое. конформная эквивалентность круга и полуплоскости.
4. Расширенная комплексная плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ . Дробно-линейные отображения (ДЛО) как конформные отображения  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя.
5. Круговое свойство ДЛО. Сохранение симметрии при ДЛО. Описание всех ДЛО единичного круга на себя.
6. Определение и свойства  $\int_{\gamma} f(z) dz$  (линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка через максимум модуля функции и длину пути интегрирования).
7. Формула Ньютона–Лейбница. Интеграл от  $(z - a)^n$  по окружности с центром  $a$ . Отсутствие голоморфной первообразной у функции  $1/z$  на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
8. Теорема о существовании первообразной в круге. Лемма Гурса. Определение области. Единственность первообразной в области.
9. Первообразная вдоль пути (определение, существование, свойства). Определение интеграла от голоморфной функции по любому непрерывному пути. Теорема Коши о гомотопии.
10. Определение односвязной области. Примеры односвязных и неодносвязных областей. Существование первообразной в односвязной области.
11. Интегральная теорема Коши для кольца. Интегральная формула Коши для круга.
12. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши.
13. Теорема Лиувилля. Следствия (невозможность конформного отображения плоскости на круг, основная теорема алгебры).
14. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость на компактах в круге сходимости.
15. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула  $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ .
16. Теорема Мореры. Эквивалентность трех определений голоморфной функции.
17. Понятие порядка нуля. Изолированность нулей. Теорема единственности.
18. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.
19. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана.
20. Кольцо сходимости ряда по целым степеням  $z - a$ . Единственность разложения в такой ряд. Неравенства Коши.
21. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Критерий устранимой особой точки.
22. Критерий полюса. Понятие порядка полюса. Описание особенностей в терминах ряда Лорана. Теорема Сохоцкого.

23.  $\infty$  как изолированная особая точка. Определение мероморфной функции. Описание функций, мероморфных на  $\overline{\mathbb{C}}$ . Связь с разложением рациональной функции на простейшие дроби.
24. Целые функции с полюсом на  $\infty$ . Описание всех конформных отображений  $\mathbb{C}$  и  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя.
25. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Связь вычета с рядом Лорана.
26. Формулы для подсчета вычетов в полюсах. Вычисление  $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1)^{-n} dx$  и преобразования Фурье от  $1/(x^2 + a^2)$  с помощью вычетов.
27. Теорема о логарифмическом вычете. Определение и свойства изменения аргумента функции вдоль пути. Принцип аргумента.
28. Теорема Руше. Основная теорема алгебры. Вещественность всех решений уравнения  $\operatorname{tg} z = z$ . Вычисление суммы квадратов обратных к ним величин.
29. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолистности. Окончательная форма теоремы об обратной функции.
30. Лемма «о стирании отрезка». Принцип симметрии.
31. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Описание всех конформных отображений единичного круга на себя.
32. Теорема Римана о конформном отображении (формулировка и доказательство необходимости). Единственность конформного отображения области на круг.