

Вопросы к экзамену по дисциплине
«Теория функций комплексного переменного»

3 курс, 1 поток, осенний семестр 2025/2026

*Вопросы, отмеченные символом * (например, 41*) в билеты включаться не будут — соответствующий материал может быть использован в дополнительных вопросах.*

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней. Определение и простейшие свойства функции e^z .
2. Одноточечная компактификация комплексной плоскости. Сферическая метрика на $\hat{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция и ее основные свойства.
3. Связность и линейная связность множеств в комплексной плоскости, компоненты связности. Области. Понятие односвязной области, односвязность звездобразной области.
4. Действие функций e^z и z^n , $n \in \mathbb{N}$. Многозначный логарифм и его однозначные ветви в $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Многозначная функция $\sqrt[n]{z}$ и ее однозначные ветви в Ω_α .
5. \mathbb{R} - и \mathbb{C} -дифференцируемость функций комплексного переменного. Дифференциальные операторы $\partial/\partial\bar{z}$ и $\partial/\partial z$. Условия Коши–Римана. Голоморфность функции в точке и в области.
6. Комплексная производная и ее основные свойства. Утверждения о производной сложной и обратной функций. Производные функций e^z , z^n , однозначных ветвей корня и логарифма.
7. Производная по направлению, ее выражение через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial\bar{z}$. Якобиан отображения $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемого данной функцией комплексного переменного. Геометрический смысл комплексной производной (ее модуля и аргумента). Конформность отображений в точке и в области.
8. Дробно-линейные функции. Их конформность в \mathbb{C}_∞ . Сохранение углов между гладкими кривыми при ДЛО. Геометрические свойства ДЛО (круговое свойство, сохранение симметрии относительно обобщенных окружностей).
9. Свойство сохранения сложного отношения при ДЛО и построение ДЛО по «трем точкам». Групповое свойство ДЛО. Вычисление групп дробно-линейных автоморфизмов единичного круга, плоскости \mathbb{C} и верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ .
10. Функция Жуковского и тригонометрические функции комплексного переменного. Их (максимальные) области конформности и образы этих областей.
11. Степенные ряды. Круг сходимости степенного ряда (первая теорема Абеля). Формула Коши–Адамара. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Функции, локально представимые степенными рядами в областях в \mathbb{C} , и их бесконечная дифференцируемость.
12. Пути и кривые в \mathbb{C} . Пути и кривые класса C^1 , гладкие и кусочно гладкие пути и кривые. Длина пути/кривой, спрямляемые пути/кривые. Спряmlяемость пути класса C^1 и формула вычисления длины такого пути.
13. Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути/кривой и его свойства. Интегрируемость непрерывной функции по спрямляемому пути/кривой. Формула для вычисления интеграла по кусочно-гладкому пути.
14. Понятие комплексной первообразной. Критерий существования комплексной первообразной в области. Формула Ньютона–Лейбница.
15. Лемма Гурса (в обычной и усиленной форме).
16. Интегральная теорема Коши для выпуклой области (для функций, голоморфных в области D , и для функций класса $C(D) \cap H(D \setminus \{a\})$ при $a \in D$). Интегральная формула Коши в круге.
17. Локальное представление голоморфных функций степенными рядами. Ряды Тейлора. Формулы для коэффициентов Тейлора голоморфной функции. Единственность разложения голоморфной функции в ряд Тейлора.
18. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры.
19. Лемма о среднем для голоморфных функций. Принцип максимума модуля.
20. Приращение аргумента вдоль пути/кривой. Индекс кривой относительно точки и его свойства.
21. Интегральная теорема и интегральная формула Коши для циклов, гомологичных нулю.
22. Интегральная теорема Коши для односвязной области. Существование голоморфных ветвей корня и логарифма в односвязных областях в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- 23.** Понятие гомотопии путей и кривых, ее простейшие свойства и примеры. Лемма об индексе замкнутых путей, гомотопных в некоторой области. Интегральная теорема Коши для гомотопных путей.
- 24.** Жордановы области и их ориентированные границы. Допустимые области и интегральная теорема Коши для них. Интегральная теорема Коши для допустимых областей D и для функций класса $C(\bar{D}) \cap H(D)$ (доказательство, основанное на теореме Мергеляна, которая должна быть сформулирована в подходящем виде без доказательства).
- 25.** Интегральная формула Коши для производных, теорема Вейерштрасса о локально-равномерно сходящейся последовательности голоморфных функций.
- 26.** Нули голоморфных функций. Теорема единственности.
- 27.** Особые точки суммы степенного ряда на границе круга сходимости. Теорема Принсгейма.
- 28.** Ряды Лорана (разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана, формулы для коэффициентов ряда Лорана, неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана).
- 29.** Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Описание устранимых особых точек. Описание полюсов, понятие порядка полюса.
- 30.** Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Теорема Сохоцкого. Бесконечность как особая точка.
- 31.** Вычеты. Теорема Коши о вычетах и утверждение о полной сумме вычетов. Связь вычетов и коэффициентов ряда Лорана, формулы вычисления вычетов в полюсах, формула для вычета в бесконечности.
- 32.** Понятие интеграла в смысле главного значения (для интегралов от функций комплексного переменного по путям/кривым). Вычет в точке относительно области. Теорема Коши о вычетах для интегралов в смысле главного значения.
- 33.** Логарифмический вычет и его свойства. Вычисление интеграла $\int_{\Gamma} f'/f dz$ по спрямляемой кривой Γ от функции f , голоморфной в окрестности Γ^* и не равной нулю на Γ^* . Принцип аргумента для допустимых областей.
- 34.** Доказательство принципа аргумента, основанное на использовании теорем Рунге/Мергеляна о рациональной аппроксимации (теоремы об аппроксимации формулируются в подходящем виде без доказательства).
- 35.** Теорема Руше. Принцип сохранения области.
- 36.** Формула Помпейю.
- 37.** Теорема Рунге об аппроксимации голоморфных функций рациональными.
- 38.** Теорема Рунге об аппроксимации голоморфных функций многочленами. Метод Рунге движения полюсов.
- 39.** Лемма Шварца и ее простые обобщения. Лемма Шварца–Пика. Общий вид конформных отображений единичного круга на себя.
- 40.** Лемма Бореля–Каратеодори. Малая теорема Пикара и ее доказательство для целых функций класса \mathcal{E} .
- 41*.** Жордановы пути и кривые. Теорема Жордана. Оболочка компакта, свойство оболочки компакта, лежащего в односвязной области.
- 42*.** Критерий односвязности области в терминах циклов, гомологичных нулю.
- 43*.** Свойства вычета относительно области: формула вычета относительно области в полюсе первого порядка; лемма Жордана; вычеты относительно области в точке a , если $f = o(1/(z - a))$ при $a \in \mathbb{C}$ и $f = o(1/z)$ при $a = \infty$.
- 44*.** Потенциал Коши непрерывной функции с компактным носителем и его свойства (существование всюду в \mathbb{C} , равномерная оценка, непрерывность, голоморфность и свойство рациональной аппроксимации).
- 45*.** Теорема Миттаг–Лефлера.
- 46*.** Теорема Гартогса–Розенталя.
- 47*.** Характеристическое свойство конечных произведений Бляшке. Формула Йенсена.
- 48*.** Теорема Каратеодори об аппроксимации голоморфных ограниченных функций конечными произведениями Бляшке.