

Вопросы к экзамену по дисциплине «Комплексный анализ»

«Фундаментальная математика и математическая физика»

осенний семестр 2025/2026

Вопросы, отмеченные символом * (например, 59*) в билеты включаться не будут — соответствующий материал может быть использован в дополнительных вопросах.

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней. Определение и простейшие свойства функции e^z .
2. Одноточечная компактификация комплексной плоскости. Сферическая метрика на $\hat{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция и ее основные свойства.
3. Связность и линейная связность множеств в комплексной плоскости, компоненты связности. Области. Понятие односвязной области, односвязность звездообразной области.
4. Действие функций e^z и z^n , $n \in \mathbb{N}$. Многозначный логарифм и его однозначные ветви в $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Многозначная функция $\sqrt[n]{z}$ и ее однозначные ветви в Ω_α .
5. \mathbb{R} - и \mathbb{C} -дифференцируемость функций комплексного переменного. Дифференциальные операторы $\partial/\partial\bar{z}$ и $\partial/\partial z$. Условия Коши–Римана. Голomorphicность функции в точке и в области.
6. Комплексная производная и ее основные свойства. Утверждения о производной сложной и обратной функций. Производные функций e^z , z^n , однозначных ветвей корня и логарифма.
7. Производная по направлению, ее выражение через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial\bar{z}$. Якобиан отображения $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемого данной функцией комплексного переменного. Геометрический смысл комплексной производной (ее модуля и аргумента). Конформность отображений в точке и в области.
8. Дробно-линейные функции. Их конформность в \mathbb{C}_∞ . Сохранение углов между гладкими кривыми при ДЛО. Геометрические свойства ДЛО (круговое свойство, сохранение симметрии относительно обобщенных окружностей).
9. Свойство сохранения сложного отношения при ДЛО и построение ДЛО по «трем точкам». Групповое свойство ДЛО. Вычисление групп дробно-линейных автоморфизмов единичного круга, плоскости \mathbb{C} и верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ .
10. Функция Жуковского и тригонометрические функции комплексного переменного. Их (максимальные) области конформности и образы этих областей.
11. Степенные ряды. Круг сходимости степенного ряда (первая теорема Абеля). Формула Коши–Адамара. Голomorphicность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Функции, локально представимые степенными рядами в областях в \mathbb{C} , и их бесконечная дифференцируемость.
12. Пути и кривые в \mathbb{C} . Пути и кривые класса C^1 , гладкие и кусочно гладкие пути и кривые. Длина пути/кривой, спрямляемые пути/кривые. Спряmlяемость пути класса C^1 и формула вычисления длины такого пути.
13. Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути/кривой и его свойства. Интегрируемость непрерывной функции по спрямляемому пути/кривой. Формула для вычисления интеграла по кусочно-гладкому пути.
14. Понятие комплексной первообразной. Критерий существования комплексной первообразной в области. Формула Ньютона–Лейбница.
15. Лемма Гурса (в обычной и усиленной форме).
16. Интегральная теорема Коши для выпуклой области (для функций, голоморфных в области D , и для функций класса $C(D) \cap H(D \setminus \{a\})$ при $a \in D$). Интегральная формула Коши в круге.
17. Локальное представление голоморфных функций степенными рядами. Ряды Тейлора. Формулы для коэффициентов Тейлора голоморфной функции. Единственность разложения голоморфной функции в ряд Тейлора.
18. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры.
19. Лемма о среднем для голоморфных функций. Принцип максимума модуля.
20. Приращение аргумента вдоль пути/кривой. Индекс кривой относительно точки и его свойства.
21. Интегральная теорема и интегральная формула Коши для циклов, гомологичных нулю.

22. Интегральная теорема Коши для односвязной области. Существование голоморфных ветвей корня и логарифма в односвязных областях в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
23. Понятие гомотопии путей и кривых, ее простейшие свойства и примеры. Лемма об индексе замкнутых путей, гомотопных в некоторой области. Интегральная теорема Коши для гомотопных путей.
24. Жордановы области и их ориентированные границы. Допустимые области и интегральная теорема Коши для них. Интегральная теорема Коши для допустимых областей D и для функций класса $C(\overline{D}) \cap H(D)$ (доказательство, основанное на теореме Мергеляна, которая должна быть сформулирована в подходящем виде без доказательства).
25. Интегральная формула Коши для производных, теорема Вейерштрасса о локально-равномерно сходящейся последовательности голоморфных функций.
26. Нули голоморфных функций. Теорема единственности.
27. Особые точки суммы степенного ряда на границе круга сходимости. Теорема Принстейма.
28. Ряды Лорана (разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана, формулы для коэффициентов ряда Лорана, неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана).
29. Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Описание устранимых особых точек. Описание полюсов, понятие порядка полюса.
30. Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Теорема Сохоцкого. Бесконечность как особая точка.
31. Вычеты. Теорема Коши о вычетах и утверждение о полной сумме вычетов. Связь вычетов и коэффициентов ряда Лорана, формулы вычисления вычетов в полюсах, формула для вычета в бесконечности.
32. Понятие интеграла в смысле главного значения (для интегралов от функций комплексного переменного по путям/кривым). Вычет в точке относительно области. Теорема Коши о вычетах для интегралов в смысле главного значения.
33. Логарифмический вычет и его свойства. Вычисление интеграла $\int_{\Gamma} f'/f dz$ по спрямляемой кривой Γ от функции f , голоморфной в окрестности Γ^* и не равной нулю на Γ^* . Принцип аргумента для допустимых областей.
34. Доказательство принципа аргумента, основанное на использовании теорем Рунге/Мергеляна о рациональной аппроксимации (теоремы об аппроксимации формулируются в подходящем виде без доказательства).
35. Теорема Руше. Принцип сохранения области.
36. Формула Помпейю.
37. Теорема Рунге об аппроксимации голоморфных функций рациональными функциями.
38. Теорема Рунге об аппроксимации голоморфных функций многочленами. Метод Рунге движения полюсов.
39. Лемма Шварца и ее простые обобщения. Лемма Шварца–Пика. Общий вид конформных отображений единичного круга на себя.
40. Лемма Бореля–Каратеодори. Малая теорема Пикара и ее доказательство для целых функций класса \mathcal{E} .
41. Однолистные функции. Критерий локальной однолистности.
42. Обратный принцип соответствия границ и однолистность голоморфной в выпуклой области функции f с условием $\operatorname{Re} f' > 0$.
43. Принцип симметрии Римана–Шварца.
44. Теорема Ландау о круге однолистности.
45. Теорема площадей для однолистных функций. Теорема Кёбе об $1/4$.
46. Теорема Гурвица о нулях и теорема о локально равномерно сходящейся последовательности однолистных функций.
47. Вычисление групп конформных автоморфизмов областей \mathbb{D} , \mathbb{C} и $\widehat{\mathbb{C}}$. Отсутствие конформной эквивалентности этих областей.

48. Локальная равномерная ограниченность и локальная равностепенная непрерывность семейств функций. Связь этих понятий для семейств голоморфных функций.
49. Понятие компактности семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Лемма о верхней грани модуля непрерывного функционала на компактном семействе функций.
50. Теорема Римана. Схема доказательства и подробное проведение рассуждения о существовании одностолбчатой функции, отображающей данную область в единичный круг.
51. Теорема Римана. Схема доказательства и подробное обоснование того факта, что экстремальная функция f_0 функционала $f \mapsto f'(a)$ отображает данную область на весь единичный круг.
52. Теоремы Каратеодори о непрерывном и гомеоморфном продолжении конформного отображения: необходимые понятия, определения и формулировки; принципиальные схемы доказательств.
53. Элементы и их аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение по цепочке и вдоль пути, их основные свойства.
54. Аналитическое продолжение по близким путям. Теорема об аналитическом продолжении по гомотопным путям. Теорема о монодромии.
55. Полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса (П.А.Ф.). Теорема Пуанкаре–Вольтерра. Аналитические ветви П.А.Ф. и голоморфные ветви П.А.Ф. Особые точки (аналитических ветвей) П.А.Ф. и их классификация.
56. Теоремы об аналитическом продолжении первообразного элемента и сложного элемента. Примеры их применения.
- 57*. Жордановы пути и кривые. Теорема Жордана. Оболочка компакта, свойство оболочки компакта, лежащего в односвязной области.
- 58*. Критерий односвязности области в терминах циклов, гомологичных нулю.
- 59*. Свойства вычета относительно области: формула вычета относительно области в полюсе первого порядка; лемма Жордана; вычеты относительно области в точке a , если $f = o(1/(z - a))$ при $a \in \mathbb{C}$ и $f = o(1/z)$ при $a = \infty$.
- 60*. Потенциал Коши непрерывной функции с компактным носителем и его свойства (существование всюду в \mathbb{C} , равномерная оценка, непрерывность, голоморфность и свойство рациональной аппроксимации).
- 61*. Теорема Миттаг–Леффлера.
- 62*. Теорема Гартогса–Розенталя.
- 63*. Характеристическое свойство конечных произведений Бляшке. Формула Йенсена.
- 64*. Теорема Каратеодори об аппроксимации голоморфных ограниченных функций конечными произведениями Бляшке.
- 65*. Достаточное условие однолистности голоморфной непостоянной в данной области D функции f с условием $f(z) \rightarrow \Gamma$ при $z \rightarrow \partial D$, где Γ — замкнутая жорданова кривая.
- 66*. Теоремы растяжения для однолистных функций (доказательство первой или второй теоремы растяжения на выбор).
- 67*. Оценка Литтлвуда в задаче Бибербаха.
- 68*. Существование радиальных предельных значений в почти всех точках окружности \mathbb{T} у конформного отображения круга \mathbb{D} на ограниченную область.
- 69*. Модулярная функция. Доказательство малой теоремы Пикара в общем случае.
- 70*. Понятие об алгебраической особой точке П.А.Ф. и об алгебраических П.А.Ф. Понятие о римановой поверхности П.А.Ф. Формулировка теоремы Ганнинга–Нарасимхана.