Программа экзамена по комплексному анализу
Поток механиков, 6 семестр, весна 2025 г.

1. Логарифмический вычет. Теорема о логарифмической производной.

2. Лемма о существовании непрерывной ветви аргумента вдоль пути, ее единственность. Определение приращения аргумента по пути.

3. Принцип аргумента. Теорема Руше.

4. Принцип сохранения области.

5. Теорема Гурвица о нулях. Следствие о нулях сходящейся равномерно внутри области последовательности однолистных функций.

6. Критерий локальной однолистности голоморфной функции.

7. Принцип максимума модуля («локальный» и «глобальный» варианты). Лемма Шварца.

8. «Глобальная» теорема об обратной функции.

9. Пространство функций, голоморфных в области. Сходимость в этом пространстве. Предкомпактные и компактные семейства голоморфных функций в области. Теорема о локальной равностепенной непрерывности локально равномерно ограниченного семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Максимум модуля непрерывного функционала на компактном семействе голоморфных функций.

10. Существование голоморфных ветвей логарифма не обращающейся в нуль голоморфной функции в односвязной области и голоморфных ветвей корней из такой функции.

11. Теорема Римана о конформном отображении. Три класса конформной эквивалентности односвязных областей в расширенной комплексной плоскости.

12. Описание конформных автоморфизмов единичного круга. Существование и единственность конформного отображения односвязной области на единичный круг, переводящего заданную точку области в нуль и имеющего в ней заданный аргумент производной.

13. Принцип симметрии (два варианта).

14. Аналитическое продолжение (по Вейерштрассу). Элементы, канонические элементы, непосредственное аналитическое продолжение, продолжение по цепочке и по пути. Единственность продолжения по пути. Лемма о непрерывной зависимости радиуса элемента продолжения по пути от параметра пути. Продолжение элемента голоморфной в области функции по пути в этой области. Связь продолжений по цепочке и по пути.

15. Теорема о продолжении по близким путям. Теорема о продолжении по путям гомотопии.

16. Аналитические функции в области. Число элементов аналитической функции в области. Теорема Пуанкаре–Вольтерра. Голоморфность однозначной аналитической функции.

17. Продолжение элемента аналитической функции в области по двум путям, гомотопным в этой области. Теорема о монодромии.

18. Действия над аналитическими функциями: сумма, произведение, производная, ограничение на подобласть. Голоморфные ветви аналитической функции в односвязной подобласти.

19. Продолжение композиции канонических элементов. Композиция аналитических функций.

20. Изолированные особые точки аналитических функций, их классификация. Определение типа изолированной особой точки с помощью продолжения элемента аналитической функции по окружности.

21. Теорема об общем виде аналитической функции в проколотой окрестности точки, имеющей точку ветвления конечного порядка. Ряды Пюизо.

22. Существование аналитической (вообще говоря, многозначной) первообразной для голоморфной функции в области. Критерий существования однозначной первообразной.

23. Гармонические функции двух переменных. Связь голоморфных и гармонических функций. Простейшие свойства гармонических функций: бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем по окружности, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема единственности, инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменной.

24. Задача Дирихле для уравнения Лапласа, единственность ее решения. Формула Пуассона для решения задачи Дирихле в круге. Теорема Каратеодори для жордановых областей (без доказательства). Разрешимость задачи Дирихле в жордановой области.

25. Плоскопараллельное установившееся движение жидкости. Безвихревое и бездивергентное течение жидкости. Комплексный потенциал. Выпрямление линий тока.

26. Задача обтекания бесконечного цилиндра, порожденного жордановой областью с гладкой границей. Единственность решения задачи при заданных скорости и циркуляции на бесконечности.

27. Обтекание кругового цилиндра.

Лектор, доцент — Р. В. Пальвелев

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН, профессор — Б. С. Кашин