

Программа курса

«Теория функций комплексного переменного»

(II поток, 6 семестр 2024/2025 уч.г., лектор А.В.Домрин)

1. Непосредственное аналитическое продолжение. Пример его нетранзитивности. Свойство Вейерштрасса и свойство треугольника.
2. Аналитическое продолжение элементов. Полная аналитическая функция.
3. Аналитическое продолжение вдоль пути. Его эквивалентность аналитическому продолжению элементов. Теорема Пуанкаре–Вольтерра.
4. Определение аналитической функции в области. Понятие числа листов. Описание аналитических функций с числом листов 1.
5. Описание полных аналитических функций $\sqrt[n]{z}$ и $\ln z$.
6. Действия над аналитическими функциями (арифметические операции, композиция, сужение на подобласть).
7. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Лемма об особенностях корня из голоморфной функции. Описание особых точек 0 и 1 аналитической функции $\sqrt{1 + \sqrt{z}}$.
8. $z = \infty$ как изолированная особая точка. Главная часть ряда Лорана на ∞ . Особенность $\sqrt{1 + \sqrt{z}}$ при $z = \infty$.
9. Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей.
10. Теорема о монодромии. Следствия об аналитических функциях в односвязной области и о сужении на односвязную подобласть.
11. Понятие ветви. Пример аналитической функции, допускающей выделение ветви, но не распадающейся на ветви. Лемма о корнях и логарифмах.
12. Эквивалентное описание точек ветвления. Теорема о разложении аналитической функции в ряд Пуанкаре.
13. Определение алгебраической особой точки. Суммы и произведения функций с алгебраическими особыми точками.
14. Определение алгебраической функции. Описание алгебраических функций с числом листов 1. Описание всех конформных отображений $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.
15. Теорема о том, что любая алгебраическая функция удовлетворяет полиномиальному уравнению.
16. Теорема о том, что любое неприводимое полиномиальное уравнение задает алгебраическую функцию.
17. Голоморфность интеграла по параметру. Аналитическое продолжение функции $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^\alpha$ при любом $\alpha > 0$.
18. Лемма Абеля. Дифференцируемость $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/\sqrt{n}$ при $0 < x < 2\pi$.
19. Замкнутость и непустота множества особых точек на границе круга сходимости степенного ряда. Пример функции с естественной границей.
20. Лемма о стирании отрезка. Принцип симметрии.
21. Непостоянная ограниченная аналитическая функция на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Малая теорема Пикара. Её следствия.
22. Теорема Монтеля. Большая теорема Пикара. Её следствия.
23. Теорема Каратеодори. Доказательство для областей, локально связных в каждой граничной точке. Примеры конформных отображений, не продолжаемых до гомеоморфизма замыканий.

24. Формула Кристоффеля–Шварца.
25. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник.
26. Эллиптический синус: определение, глобальная мероморфность, двоякопериодичность, дифференциальное уравнение.
27. Определение и общие свойства эллиптических функций.
28. Определение и свойства $\wp$ -функции Вейерштрасса.
29. Дифференциальное уравнение для $\wp$ -функции (через e_1, e_2, e_3 и через g_2, g_3).
30. Алгебраическая теорема сложения для $\wp$ -функции.
31. Теорема Вейерштрасса о функциях с алгебраической теоремой сложения.