

Программа курса “ТФКП, часть 2”.

Мехмат, группы 301-306, 2024-25 уч. год.

1. Гармонические функции (ГрФ) двух переменных. Связь с голоморфными функциями (ГФ). Внутренняя теорема единственности для ГрФ.
2. Теорема о среднем и принцип минимума-максимума для ГрФ. Инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных. Задача Дирихле (ЗД) для ГрФ. Решение ЗД методом конформных отображений.
3. Разложение ГрФ в ряд по однородным гармоническим полиномам. Аналог теоремы Вейерштрасса для ГрФ.
4. Метод Фурье и формула Пуассона для решения ЗД в круге.
5. Теорема о логарифмических вычетах. Принцип аргумента.
6. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Гомеоморфность однолистной функции в области.
7. Лемма о голоморфной ветви логарифма. Неоднолистность в точке при нулевой производной. Конформность однолистных функций.
8. Критерии локальной однолистности и локальной обратимости.
9. Обратный принцип соответствия границ.
10. Принцип симметрии Римана – Шварца для конформных отображений.
11. Теорема Гурвица о нулях. Сходящиеся последовательности однолистных функций.
12. Равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность семейства функций.
13. Предкомпактность и компактность семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Непрерывный функционал на компактном семействе функций.
14. Доказательство теоремы Римана о конформном отображении.
15. Лемма Кёбе и ее следствие. Лемма Линделёфа.
16. Граничная теорема единственности и окончание доказательства теоремы Каратеодори для жордановых областей.
17. Следствия из теорем Римана и Каратеодори: разрешимость ЗД в жордановой области; усиленный принцип аргумента и теорема Руше; связность любой допустимой области.
18. Характеристика специальных областей в \mathbb{C} . Построение специальной области с двумя полюсами и с произвольно заданными полюсами у функции Шварца.
19. Гомотопные пути в области. Связь 1- и 2- гомотопности путей в области. Классы гомотопных замкнутых путей в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
20. Эквивалентные определения односвязной области в \mathbb{C} .
21. Элементы и их аналитическое продолжение (АП). АП вдоль пути и его свойства.
22. Единственность АП вдоль пути и его связь с АП по цепочке.
23. АП по близким путям и по путям гомотопии. Теорема о монодромии.

24. АП первообразного элемента. Теорема об интегралах по гомотопным путям.
25. Голоморфная ветвь логарифма ГФ в $\Gamma(1)$ -односвязной области. Эквивалентность односвязности и $\Gamma(1)$ -односвязности области.
26. Полная аналитическая функция (ПАФ) в смысле Вейерштрасса. Теорема Пуанкаре–Вольтерра. Аналитические и голоморфные ветви ПАФ.
27. Точки ветвления аналитических ветвей ПАФ, их классификация. Полное описание ПАФ на примерах $\text{Ln}(z)$ и z^p .
28. Полное описание ПАФ $\text{Arctg}(z)$, $\text{Ж}^{-1}(z)$ и $\text{Ln}(\sin(z))$.
29. Полное описание ПАФ $\text{Arcsin}(z)$.
30. Теорема об АП сложного элемента. Пример: ПАФ $\exp \frac{1}{1 + \sqrt{z}}$.
31. Модулярная функция и ее свойства.
32. Малые теоремы Пикара. Есть ли ИПЗ у функции $z + \text{tg}(z)$?
33. Алгебраические элементы и их свойства.
34. ПАФ $\sqrt{1 + \sqrt{z}}$. Некоммутативность её группы Галуа.
35. Алгебраические ПАФ. Теорема Абеля о радикалах (схема доказательства).
36. Понятие о римановой поверхности (РП) ПАФ. РП ПАФ $z^{1/N}$ и $\text{Ln}(z)$.
37. РП в широком смысле. Теорема Ганнинга–Нарасимхана (б/д). Теоремы единственности для голоморфных и гармонических функций на некомпактных римановых поверхностях.

Лектор: д.ф.-м.н., профессор

П.В. ПАРАМОНОВ

Зав. кафедрой Теории функций
и функционального анализа
академик РАН, профессор

Б.С. КАШИН