

Программа курса

«Теория функций комплексного переменного»

(II поток, 5 семестр 2024/25 уч.г., лектор А.В.Домрин)

1. Функции комплексного переменного, их $\mathbb{R}$ -дифференцируемость и $\mathbb{C}$ -дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Примеры их выполнения и невыполнения.
2. Определение и свойства голоморфных функций (включая теорему об обратной функции). Функция e^z , ее свойства, примеры обратных к ней функций.
3. Конформность в точке: определение, связь с голоморфностью. Конформное отображение одного открытого множества на другое. конформная эквивалентность круга и полуплоскости.
4. Расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$. Дробно-линейные отображения (ДЛО) как конформные отображения $\bar{\mathbb{C}}$ на себя.
5. Круговое свойство ДЛО. Сохранение симметрии при ДЛО. Описание всех ДЛО единичного круга на себя.
6. Определение и свойства $\int_{\gamma} f(z) dz$ (линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка через максимум модуля функции и длину пути интегрирования).
7. Формула Ньютона–Лейбница. Интеграл от $(z-a)^n$ по окружности с центром a . Отсутствие голоморфной первообразной у функции $1/z$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
8. Лемма Гурса. Теорема о существовании первообразной в круге. Определение области. Единственность первообразной в области.
9. Первообразная вдоль пути (определение, существование, свойства). Определение интеграла от голоморфной функции по любому непрерывному пути. Теорема Коши о гомотопии.
10. Определение односвязной области. Примеры односвязных и неодносвязных областей. Существование первообразной в односвязной области.
11. Интегральная формула Коши для круга.
12. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши.
13. Теорема Лиувилля. Следствия (невозможность конформного отображения всей плоскости на круг, основная теорема алгебры).
14. Формула Коши–Адамара. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость на компактах в круге сходимости.
15. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Разложения в степенные ряды: экспонента, логарифм, бином Ньютона, рациональные функции.
16. Теорема Мореры. Эквивалентность трех определений голоморфной функции.
17. Понятие порядка нуля. Принцип изолированности нулей.
18. Теорема единственности.
19. Интегральная формула Коши для кольца. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана.
20. Кольцо сходимости ряда по целым степеням $z-a$. Единственность разложения в такой ряд. Неравенства Коши.
21. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Критерий устранимой особой точки.

22. Описание полюса. Понятие порядка полюса. Описание особенностей в терминах ряда Лорана.
23. Определение ограниченной области с кусочно-гладкой границей. Интегральная теорема Коши.
24. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Связь вычета с рядом Лорана.
25. Формулы для подсчета вычетов в полюсах. Интегральная формула Коши. Вычисление $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1)^{-n} dx$ с помощью вычетов.
26. Теорема о логарифмическом вычете.
27. Лемма о непрерывном выборе аргумента вдоль пути. Изменение аргумента функции вдоль пути: определение и свойства. Принцип аргумента.
28. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолистности. Окончательная форма теоремы об обратной функции. Следствие о связи однолистных функций с конформными отображениями.
29. Теорема Вейерштрасса о рядах.
30. Теорема Гурвица. Следствие о пределе однолистных функций.
31. Принцип компактности.
32. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Описание всех конформных отображений единичного круга на себя.
33. Лемма о корнях и логарифмах.
34. Теорема Римана о конформном отображении.