

Программа курса ТФКП, часть I. Мехмат, I поток, 2024-25 уч.г.

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней. Метрика в \mathbb{C} . Предел последовательности. Определение и простейшие свойства функции e^z .
2. Предел функции. Непрерывность. Классы $o(g)$ и $O(g)$, $z \rightarrow z_0$. Действие функции e^z . Многозначный $\text{Ln}(z)$ и его однозначные ветви $\ln_{(\alpha, \beta)}(z)$. Действие функции z^n ($n \in \{2, 3, \dots\}$). Многозначный $\sqrt[n]{z}$ и его однозначные ветви $\sqrt[n]{z}_{(n\alpha, n\beta)}$.
3. Пути и кривые в \mathbb{C} . Связность и линейная связность. Компоненты связности открытых множеств в \mathbb{C} . Теорема Жордана (доказательство для ломаных).
4. Одноточечная компактификация по Александру. Сферическая метрика на \mathbb{C}^\bullet . Стереографическая проекция: вывод формул, круговое свойство и свойство сохранения углов между (обобщенными) окружностями.
5. Односвязные области в \mathbb{C} . Оболочка компакта из односвязной области в \mathbb{C} .
6. Комплексная производная и её свойства: производные сложной и обратной функции. Производные функций e^z и $\ln_{(\alpha, \beta)}(z)$, z^n ($n \in \{2, 3, \dots\}$) и $\sqrt[n]{z}_{(n\alpha, n\beta)}$.
7. \mathbb{R} - и \mathbb{C} - дифференцируемость. Теорема Коши – Римана. Формулы для частных производных $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \bar{z}$ произведения, частного и сложной функции.
8. Производная по направлению. Якобиан ассоциированного отображения. Голоморфная функция в точке и области. Конформные отображения. Геометрический смысл комплексной производной.
9. Группа дробно-линейных отображений (ДЛО). Конформность ДЛО. Сохранение углов между гладкими путями при конформном отображении.
10. Геометрические свойства ДЛО: круговое свойство, сохранение симметрии; сохранение ангармонического отношения и свойство трёх точек.
11. Дробно-линейные автоморфизмы областей B_1 , Π_+ , \mathbb{C} .
12. Функции z^n ($n \in \{2, 3, \dots\}$) и функция Жуковского. Их основные (максимальные) области конформности и обратные ветви.
13. Многозначные функции. Их непрерывные, голоморфные и конформные ветви. Корень степени n ($\sqrt[n]{z}$) и логарифм ($\text{Ln}(z)$). Их стандартные конформные ветви (с максимальными областями конформности). Общая степенная (z^p) и показательная (a^z) функции, их максимальные голоморфные ветви.
14. Тригонометрические и гиперболические функции. Образы полосы $\Pi'_{(-\pi/2, \pi/2)}$ под действием функций $\sin(z)$ и $\text{tg}(z)$. Обратные тригонометрические м-функции. Функции $\arcsin(w)$ и $\text{arctg}(w)$.
15. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Индекс пути относительно точки и его свойства.
16. Свойства индекса замкнутого пути. Индекс замкнутого жорданова пути (доказательство для ломаной).
17. Спрямолинейные пути и кривые. Интеграл вдоль пути и кривой по комплексной переменной. Теорема существования интеграла от непрерывной функции вдоль спрямолинейного пути.
18. Вычисление интеграла по комплексной переменной вдоль непрерывно-дифференцируемого пути.

19. Лемма Гурса (теорема Коши для треугольников).
20. Лемма о приближении.
21. Теорема Коши для односвязной области (завершение доказательства).
22. Комплексная первообразная. Теорема о существовании первообразной в односвязной области. Формула Ньютона – Лейбница.
23. Интегральная теорема Коши для допустимых областей (б/д). Доказательство для простых областей. Обсуждение примеров.
24. Интегральная формула Коши для допустимой области.
25. Интеграл 1 рода (его оценка и вычисление). Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Основная теорема алгебры.
26. Формула Коши для производных. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Теорема Морера.
27. Равномерная сходимость внутри области. Теорема Вейерштрасса. Метрика в пространстве $\mathcal{A}(D)$ и её полнота.
28. Степенные ряды. Лемма Абеля. Формула Коши – Адамара. Почленная дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов.
29. Теорема Коши о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Единственность разложения в степенной ряд.
30. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Табличные разложения в ряд Маклорена.
31. Теорема о нулях голоморфной функции. Теорема единственности. Особые точки на границе круга сходимости степенного ряда.
32. Обобщенные степенные ряды. Кольцо сходимости. Теорема Лорана. Единственность разложения функции в обобщенный степенной ряд. Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.
33. Изолированные особые точки голоморфных функций (однозначного характера). Их классификация в терминах рядов Лорана.
34. Изолированная особая точка $z = \infty$. Теорема Сохоцкого. Связь рядов Лорана с рядами Фурье (пример $1/(2 - \cos(t))$).
35. Лемма Шварца. Дробно-линейность конформных изоморфизмов круговых областей.
36. Вычеты и их вычисление.
37. Теоремы Коши о вычетах и о полной сумме вычетов.
38. Некоторые типы интегралов, вычисляемых с помощью вычетов (4 примера).
39. Лемма Жордана. Преобразование Фурье рациональных функций. Пример.
40. Специальные области. Функция Шварца. Неванлинновские области. Примеры таких областей. Вычисление интеграла $\int_{|z+i|=1} |z|^2 \ln(iz) dz$.
41. Интеграл в смысле главного значения. Вычет относительно области и его вычисление.
42. Теорема о вычетах для интеграла в смысле главного значения. Примеры вычисления (vp)-интегралов.

43. Гармонические функции (ГрФ) двух переменных. Связь с голоморфными функциями. Внутренняя теорема единственности для ГрФ. Теорема о среднем и принцип минимума-максимума для ГрФ.

44. Инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных. Задача Дирихле (ЗД) для ГрФ. Решение ЗД методом конформных отображений. Разложение ГрФ в ряд по однородным гармоническим полиномам.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Витушкин А.Г. Курс лекций по комплексному анализу. *Манускрипт*, 1991.
- [2] Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу. МИАН, 2004.
- [3] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. “Наука”, 1976.
- [4] Евграфов М.А. (ред). Сборник задач по теории аналитических функций. “Наука”, 1972.