

Вопросы к экзамену по ТФКП

3 курс 2 поток, весенний семестр 2023/2024

1. Однолистные функции. Критерий локальной однолистности.
2. Обратный принцип соответствия границ и однолистность голоморфной в выпуклой области функции с условием $\operatorname{Re} f' > 0$.
3. Достаточное условие однолистности голоморфной непостоянной в данной области D функции f с условием $f(z) \rightarrow \Gamma$ при $z \rightarrow \partial D$, где Γ — замкнутая жорданова кривая.
4. Принцип симметрии Римана–Шварца
5. Теорема Гурвица о нулях и теорема о локально равномерно сходящейся последовательности однолистных функций.
6. Вычисление групп конформных автоморфизмов областей \mathbb{D} , \mathbb{C} и \mathbb{C}_∞ . Отсутствие конформной эквивалентности этих областей.
7. Локальная равномерная ограниченность и локальная равностепенная непрерывность семейств функций. Связь этих понятий для семейств голоморфных функций.
8. Понятие компактности семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Непрерывный функционал на компактном семействе функций.
9. Теорема Римана и ее доказательство. Конформный радиус области относительно точки.
10. Теорема площадей и ее простые следствия — лемма Бибербаха (оценка $|a_2| \leq 2$ для функций класса \mathcal{S}) и теорема Кёбе об $1/4$.
11. Теоремы растяжения для однолистных функций в круге.
12. Оценка Литтлвуда $|a_n| \leq en$ для функций класса \mathcal{S} .
13. Существование радиальных пределов почти всюду на единичной окружности у функции f , конформно отображающей единичный круг на некоторую ограниченную область. Оценка $\int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(0)|^{2/5} dt$ при $0 \leq r < 1$ для таких f .
14. Теорема Янишевского и ее комплексно-аналитическое доказательство.
15. Области с локально связными границами и теорема Каратеодори о непрерывном продолжении конформного отображения единичного круга на данную область.
16. Точки разреза. Жордановы области. Теорема Каратеодори о гомеоморфном продолжении конформного отображения единичного круга на данную область.
17. Гармонические функции и их основные свойства (теорема о среднем, принцип максимума и минимума).
18. Постановка задачи Дирихле для гармонических функций. Сохранение гармоничности при голоморфной замене переменных и метод конформного отображения для решения задачи Дирихле. Формулировка теоремы Лебега. Гармоничность непрерывной функции, удовлетворяющей в произвольном круге в данной области теореме о среднем.
19. Разложение гармонической функции в круге в ряд по однородным гармоническим многочленам. Аналог теоремы Вейерштрасса для гармонических функций.
20. Метод Фурье и формула Пуассона для решения задачи Дирихле для гармонических функций в круге.
21. Элементы и их аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение по цепочке и вдоль пути, их основные свойства.

22. Аналитическое продолжение по близким путям. Теорема об аналитическом продолжении по гомотопным путям. Теорема о монодромии.
23. Полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса (П.А.Ф.). Теорема Пуакаре–Вольтерра. Аналитические ветви П.А.Ф. и голоморфные ветви П.А.Ф.
24. Особые точки (аналитических ветвей) П.А.Ф. и их классификация. Полное описание П.А.Ф. на примерах $\operatorname{Ln} z$ и z^a .
25. Теорема об аналитическом продолжении первообразного элемента. Полное описание П.А.Ф. $\operatorname{Arctg} z$ как пример использования этой теоремы.
26. Теорема об аналитическом продолжении сложного элемента. Полное описание П.А.Ф. $\cos(\pi/(2+z^{1/3}))$ как пример использования этой теоремы.
27. Полное описание П.А.Ф. $\operatorname{Arcsin} z$ и $(1+z^{1/3})^{1/2}$.
28. Построение модулярной функции. Малая теорема Пикара для целых и для мероморфных функций (доказательство в общем случае).
29. Порядок и тип целой функции. Выражение порядка и типа через коэффициенты Тейлора в начале координат.
30. Теорема Вейерштрасса о существовании целой функции с заданными нулями.
31. Формула Йенсена.
32. Теорема о связи показателя сходимости последовательности нулей и порядка для целой функции конечного порядка.
33. Теорема Адамара о факторизации. Канонические произведения.
34. Теорема Бореля. Разложение функции $\sin z$ в бесконечное произведение.
35. Плотность системы $\{e^{i\lambda_n t}\}$ в пространстве $C[-\pi, \pi]$ в случае последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ с условием $\liminf_{t \rightarrow \infty} n(t)/t > 2$, где $n(\cdot)$ — считающая функция последовательности Λ .
36. Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве $H(D)$ голоморфных функций в (односвязной) области $D \subset \mathbb{C}$. Плотность системы $\{f(\lambda_n z)\}$, где f — целая функция порядка ρ , а $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, в кругах $B(0, R)$, $R > 0$, в комплексной плоскости (формулировка теоремы и схема доказательства).
37. A -точки целых функций. Исключительные значения в смысле Бореля целых функций.
38. Принцип Фрагмена–Линделёфа для целых функций конечного порядка.
39. Одномерные комплексные многообразия и их голоморфные отображения. Неразветвленные голоморфные накрытия. Теорема о поднятии путей.
40. Понятие о римановой поверхности П.А.Ф.

Лектор: д.ф.-м.н., профессор
кафедры ТФФА

К.Ю. Федоровский

Зав. кафедрой ТФФА
академик РАН, профессор

Б.С. Кашин