

Программа экзамена по ТФКП

Факультет фундаментальной физико-химической инженерии

3 семестр, осень 2023 г.

1. Комплексные числа. Арифметические операции над комплексными числами. Вещественная и мнимая часть комплексного числа. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение.
2. Топология комплексной плоскости: открытые, замкнутые, ограниченные, компактные множества. Непрерывные пути. Линейно связные множества, области.
3. Расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$. Топология в $\bar{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция. Явные формулы для стереографической проекции. Гомеоморфизм $\bar{\mathbb{C}}$ и сферы, задаваемый стереографической проекцией.
4. Предел последовательности комплексных чисел. Арифметические свойства пределов последовательностей. Предел и непрерывность комплекснозначных функций комплексного переменного.
5. \mathbb{R} -дифференцируемые функции. Комплексная дифференцируемость. Комплексная производная. Условия Коши–Римана. Голоморфные функции в области. Голоморфные функции в точке.
6. Конформные функции в точке. Конформные функции в области. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
7. Голоморфность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости.
8. Производная сложной функции. Производная обратной функции.
9. Экспонента и ее свойства. Логарифмы комплексного числа. Стандартные области конформности для степенной функции с натуральным показателем и для экспоненты, голоморфные ветви обратных функций к этим функциям. Определения тригонометрических и гиперболических функций комплексного аргумента.
10. Дробно-линейные отображения. Свойства дробно-линейных отображений: конформность в $\bar{\mathbb{C}}$, композиция дробно-линейных отображений, обратное дробно-линейное отображение, свойство трех точек.
11. Круговое свойство дробно-линейных отображений. Сохранение симметрии относительно обобщенной окружности при дробно-линейных отображениях.
12. Дробно-линейные отображения единичного круга на себя. Дробно-линейные отображения верхней полуплоскости на себя.
13. Пути и кривые. Жордановы и замкнутые жордановы пути. Гладкие пути и кривые. Кусочно гладкие пути.

14. Интеграл по кусочно гладкому пути в комплексной плоскости. Сведение к вещественным криволинейным интегралам второго рода. Свойства интеграла. Оценка модуля интеграла. Два примера вычисления интегралов: интеграл от функции $(z - a)^n$ при целых n по окружности с центром в точке a и интеграл от функции z^m при целых неотрицательных m по произвольному кусочно гладкому пути.
15. Лемма Гурса.
16. Лемма о приближении интеграла по гладкому пути интегралами по вписанным ломаным. Интегральная теорема Коши для неконцентрического кольца. Интегральная формула Коши для круга.
17. Равномерно сходящиеся ряды комплекснозначных функций: почленное интегрирование, мажорантный признак (Вейерштрасса) равномерной сходимости.
18. Теорема о разложении функции, голоморфной в круге, в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры.
19. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда по целым неотрицательным степеням.
20. Первообразная голоморфной функции в области. Единственность первообразной. Формула Ньютона-Лейбница для непрерывных функций, имеющих первообразную. Пример голоморфной функции в области, не имеющей первообразной в этой области. Существование первообразной для голоморфной функции в круге.
21. Теорема о голоморфности суммы степенного ряда в круге сходимости. Следствие о единственности разложения функции в степенной ряд.
22. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов Тейлора голоморфной функции через производные в точке разложения.
23. Определение области с простой границей. Интегральная теорема Коши для функции, голоморфной в окрестности замыкания области с простой границей (формулировка и схема доказательства с помощью сведения к формуле Грина).
24. Интегральная формула Коши для области с простой границей. Интегральная формула Коши для производных.
25. Представление голоморфной функции в окрестности ее нуля, порядок нуля. Теорема единственности для голоморфных функций. Пример: функция $\sin \frac{1}{z}$ в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
26. Теорема Мореры.
27. Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций в области, сходящихся равномерно на компактах в этой области.
28. Голоморфность интеграла $\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ в правой полуплоскости.
29. Теорема о разложении функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Теорема о сходимости степенных рядов по целым степеням. Единственность разложения в степенной ряд по целым степеням. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

30. Изолированные особые точки голоморфных функций. Классификация изолированных особых точек. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе.
31. Теорема Сохоцкого.
32. Точка $z = \infty$ как изолированная особая точка. Связь типа изолированной особой точки с видом ряда Лорана функции в ее проколотеи окрестности (для случаев конечной и бесконечной особой точки).
33. Функции, голоморфные во всей комплексной плоскости и имеющие устранимую особую точку в бесконечности. Функции, голоморфные во всей комплексной плоскости и имеющие полюс в бесконечности. Функции, имеющие в расширенной комплексной плоскости только полюсы.
34. Вычеты. Выражение вычета через коэффициент ряда Лорана. Теорема Коши о вычетах. Вычет в бесконечности, его выражение через коэффициент ряда Лорана. Теорема о полной сумме вычетов.
35. Три формулы для вычисления вычетов в полюсах. Лемма Жордана. Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin tx \, dx}{x^2 + a^2}$ для всех положительных значений a и для всех вещественных значений t с помощью вычетов.

Лектор, доцент

Р. В. Пальвелев

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа
механико-математического факультета,
академик РАН, профессор

Б. С. Кашин