

Программа курса «Комплексный анализ»

(поток матем. экономики, 5 семестр 2023/24 уч.г., лектор А.В.Домрин)

1. Непрерывность, \mathbb{R} -дифференцируемость и \mathbb{C} -дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши–Римана.
2. Определение и свойства голоморфных функций (включая теорему об обратной функции). Функция e^z , ее свойства, примеры обратных к ней функций.
3. Конформность в точке: определение, связь с голоморфностью. Конформное отображение одного открытого множества на другое. конформная эквивалентность круга и полуплоскости.
4. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Дробно-линейные отображения (ДЛО) как конформные отображения $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.
5. Круговое свойство ДЛО. Сохранение симметрии при ДЛО. Описание всех ДЛО единичного круга на себя.
6. Определение и свойства $\int_{\gamma} f(z) dz$ (линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка через максимум модуля функции и длину пути интегрирования).
7. Формула Ньютона–Лейбница. Интеграл от $(z - a)^n$ по окружности с центром a . Отсутствие голоморфной первообразной у функции $1/z$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
8. Теорема о существовании первообразной в круге. Лемма Гурса. Определение области. Единственность первообразной в области.
9. Первообразная вдоль пути (определение, существование, свойства). Определение интеграла от голоморфной функции по любому непрерывному пути. Теорема Коши о гомотопии.
10. Определение односвязной области. Примеры односвязных и неодносвязных областей. Существование первообразной в односвязной области.
11. Интегральная теорема Коши для кольца. Интегральная формула Коши для круга.
12. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши.
13. Теорема Лиувилля. Следствия (невозможность конформного отображения плоскости на круг, основная теорема алгебры).
14. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость на компактах в круге сходимости.
15. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула $c_n = f^{(n)}(a)/n!$.
16. Теорема Мореры. Эквивалентность трех определений голоморфной функции.
17. Понятие порядка нуля. Изолированность нулей. Теорема единственности.
18. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.
19. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана.
20. Кольцо сходимости ряда по целым степеням $z - a$. Единственность разложения в такой ряд. Неравенства Коши.
21. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Критерий устранимой особой точки.
22. Критерий полюса. Понятие порядка полюса. Описание особенностей в терминах ряда Лорана. Теорема Сохоцкого.

23. ∞ как изолированная особая точка. Целые функции с полюсом на ∞ . Мероморфные функции с полюсом на ∞ . Связь с разложением рациональной функции на простейшие дроби.

24. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Связь вычета с рядом Лорана.

25. Формулы для подсчета вычетов в полюсах. Вычисление $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1)^{-n} dx$ и преобразования Фурье от $1/(x^2 + a^2)$ с помощью вычетов.

26. Теорема о логарифмическом вычете. Определение и свойства изменения аргумента функции вдоль пути. Принцип аргумента.

27. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолистности. Окончательная форма теоремы об обратной функции.

28. Теорема Вейерштрасса о рядах. Теорема Гурвица и её следствие.

29. Лемма о корнях и логарифмах. Теорема Римана о конформном отображении.

30. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца.

31. Описание всех конформных отображений единичного круга на себя. Единственность конформного отображения области на круг.

32. Принцип компактности.

33. Лемма о стирании отрезка. Принцип симметрии.