

## Вопросы к экзамену по ТФКП

3 курс 2 поток, осенний семестр 2023/2024

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней. Определение и простейшие свойства функции  $e^z$ .
2. Одноточечная компактификация комплексной плоскости. Сферическая метрика на  $\mathbb{C}_\infty$ . Стереиграфическая проекция и ее основные свойства.
3. Связность и линейная связность множеств, компоненты связности, пути и кривые, теорема Жордана. Односвязные области. Оболочка компакта, свойство оболочки компакта, лежащего в односвязной области.
4. Действие функций  $e^z$  и  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Многозначный логарифм и его однозначные ветви в  $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$ ,  $\alpha \in (0, 2\pi)$ . Многозначная функция  $\sqrt[n]{z}$  и ее однозначные ветви в  $\Omega_\alpha$ .
5.  $\mathbb{R}$ - и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемость функций комплексного переменного. Дифференциальные операторы  $\partial/\partial\bar{z}$  и  $\partial/\partial z$ . Условия Коши–Римана. Голоморфность функции в точке и в области.
6. Комплексная производная и ее основные свойства. Утверждения о комплексной дифференцируемости и комплексной производной сложной и обратной функций. Производные функций  $e^z$ ,  $z^n$ , однозначных ветвей корня и логарифма.
7. Производная по направлению, ее выражение через  $\partial f/\partial z$  и  $\partial f/\partial\bar{z}$ . Якобиан отображения, связанного с функцией комплексного переменного. Геометрический смысл комплексной производной (ее модуля и аргумента). Конформность отображений в точке и в области.
8. Дробно-линейные функции. Их конформность в  $\mathbb{C}_\infty$ . Сохранение углов между гладкими кривыми при ДЛО. Геометрические свойства ДЛО (круговое свойство, сохранение симметрии относительно обобщенных окружностей).
9. Свойство сохранения сложного отношения при ДЛО и построение ДЛО по «трем точкам». Групповое свойство ДЛО. Вычисление групп дробно-линейных автоморфизмов единичного круга, плоскости  $\mathbb{C}$  и верхней полуплоскости  $\mathbb{C}_+$ .
10. Функции  $e^z$ ,  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , и функция Жуковского. Их основные (максимальные) области конформности, образы этих областей, и соответствующие обратные ветви.
11. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного. Их (максимальные) области конформности, образы этих областей, и соответствующие обратные ветви.
12. Степенные ряды. Круг сходимости степенного ряда (первая теорема Абеля). Формула Коши–Адамара. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Функции, локально представимые степенными рядами в областях в  $\mathbb{C}$ , и их бесконечная дифференцируемость.
13. Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути/кривой и его свойства. Интегрируемость непрерывной функции по спрямляемому пути/кривой. Формула для вычисления интеграла по кусочно-гладкому пути.
14. Понятие комплексной первообразной. Критерий существования комплексной первообразной в области. Формула Ньютона–Лейбница.
15. Лемма Гурса (в обычной и усиленной форме).
16. Интегральная теорема Коши для выпуклой области (для функций классов  $H(D)$  и  $C(D) \cap H(D \setminus \{a\})$ ,  $a \in D$ ). Интегральная формула Коши в круге.

17. Локальное представление голоморфных функций степенными рядами. Ряды Тейлора. Формулы для коэффициентов Тейлора голоморфной функции. Единственность разложения голоморфной функции в ряд Тейлора.
18. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры.
19. Лемма о среднем для голоморфных функций. Принцип максимума модуля.
20. Приращение аргумента вдоль пути/кривой. Индекс кривой относительно точки, и его свойства.
21. Интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши для циклов, гомологичных нулю относительно области.
22. Критерий односвязности области в терминах циклов, гомологичных нулю. Интегральная теорема Коши для односвязной области. Жордановы области и их ориентированные границы. Допустимые области и интегральная теорема Коши для них. Схема доказательства интегральной теоремы Коши для функций класса  $H(D) \cap C(\bar{D})$  в допустимых областях.
23. Понятие гомотопии путей и кривых, ее простейшие свойства. Интегральная теорема Коши для гомотопных путей. Существование голоморфных ветвей корня и логарифма в односвязных областях в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
24. Интегральная формула Коши для производных, теорема Вейерштрасса о локально-равномерно сходящейся последовательности голоморфных функций.
25. Нули голоморфных функций. Теорема единственности.
26. Особые точки суммы степенного ряда на границе круга сходимости. Теорема Принсгейма.
27. Ряды Лорана (разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана; формулы для коэффициентов ряда Лорана; неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана).
28. Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Описание устранимых особых точек. Описание полюсов, понятие порядка полюса.
29. Изолированные особые точки однозначного характера голоморфных функций и их классификация. Теорема Сохоцкого. Бесконечность как особая точка.
30. Вычеты. Теорема Коши о вычетах и утверждение о полной сумме вычетов. Связь вычетов и коэффициентов ряда Лорана, формулы вычисления вычетов в полюсах, формула для вычета в бесконечности.
31. Понятие интеграла в смысле главного значения (для интегралов от функций комплексного переменного по путям/кривым). Вычет в точке относительно области. Теорема Коши о вычетах для интегралов в смысле главного значения.
32. Свойства вычета относительно области: формула вычета относительно области в полюсе первого порядка; лемма Жордана; вычеты относительно области в точке  $a$ , если  $f = o(1/(z - a))$  при  $a \in \mathbb{C}$  и  $f = o(1/z)$  при  $a = \infty$ .
33. Логарифмический вычет и его свойства. Вычисление интеграла  $\int_{\Gamma} f'/f dz$  по спрямляемой кривой  $\Gamma$  от функции  $f$ , голоморфной в окрестности  $\Gamma^*$  и  $f \neq 0$  на  $\Gamma^*$ . Принцип аргумента (доказательство в обычной формулировке, схема доказательства в усиленной формулировке).
34. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Обратный принцип соответствия границ.

**35.** Лемма Шварца и ее обобщения. Общий вид конформных отображений единичного круга на себя.

**36.** Конечные произведения Бляшке и их характеристическое свойство. Теорема Каратеодори о поточечной аппроксимации функций класса  $\mathcal{B}$  конечными произведениями Бляшке.

**37.** Лемма Бореля–Каратеодори и доказательство малой теоремы Пикара для целых функций класса  $\mathcal{E}_\infty$ .

**38.** Формула Помпейю. Потенциал Коши от функции класса  $L^\infty(K, dx dy)$ ,  $K$  — компакт в  $\mathbb{C}$ , и его свойства (существование всюду в  $\mathbb{C}$ , равномерная оценка, липшицевость с показателем меньше 1, голоморфность вне  $K$  и свойство рациональной аппроксимации).

**39.** Теоремы Рунге об аппроксимации голоморфных функций рациональными функциями и многочленами.

**40.** Применение теорем Рунге: доказательство принципа аргумента, основанное на рациональной аппроксимации и доказательство теоремы Миттаг–Лефлера о существовании мероморфной в области функции с данными полюсами и с данными главными частями рядов Лорана в этих полюсах.

Лектор: д.ф.-м.н., профессор  
кафедры ТФФА

К.Ю. Федоровский

Зав. кафедрой ТФФА  
академик РАН, профессор

Б.С. Кашин