

Программа курса «Комплексный анализ»

(поток ФМиМФ, 3 семестр 2023/24 уч.г., лектор А.В.Домрин)

1. \mathbb{R} -дифференцируемость и \mathbb{C} -дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Примеры их выполнения и невыполнения.
2. Определение и свойства голоморфных функций (включая теорему об обратной функции). Функция e^z , ее свойства, примеры обратных к ней функций.
3. Конформность в точке: определение, связь с голоморфностью. Конформное отображение одного открытого множества на другое. конформная эквивалентность круга и полуплоскости.
4. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Дробно-линейные отображения (ДЛО) как конформные отображения $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.
5. Свойство трёх точек. Круговое свойство. Сохранение симметрии при ДЛО.
6. Определение и свойства $\int_{\gamma} f(z) dz$ (линейность, аддитивность, независимость от параметризации, зависимость от ориентации, оценка через максимум модуля функции и длину пути интегрирования).
7. Формула Ньютона–Лейбница. Интеграл от $(z - a)^n$ по окружности с центром a . Отсутствие голоморфной первообразной у функции $1/z$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
8. Теорема о существовании первообразной в круге. Лемма Гурса. Определение области. Единственность первообразной в области.
9. Первообразная вдоль пути (определение, существование, свойства). Определение интеграла от голоморфной функции по любому непрерывному пути. Теорема Коши о гомотопии.
10. Определение односвязной области. Примеры односвязных и неодносвязных областей. Существование первообразной в односвязной области.
11. Определение ограниченной области с кусочно-гладкой границей. Интегральная теорема Коши. Схема и три шага доказательства. Интегральная формула Коши.
12. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши.
13. Теорема Лиувилля. Следствия (невозможность конформного отображения плоскости на круг, основная теорема алгебры).
14. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость на компактах в круге сходимости.
15. Голоморфность суммы степенного ряда в его круге сходимости. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула $c_n = f^{(n)}(a)/n!$.
16. Теорема Мореры. Эквивалентность трех определений голоморфной функции.
17. Понятие порядка нуля. Изолированность нулей. Теорема единственности.
18. Интегральная ф-ла Коши для производных. Теорема Вейерштрасса о рядах.
19. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана.
20. Кольцо сходимости ряда по целым степеням $z - a$. Единственность разложения в такой ряд. Неравенства Коши.
21. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Критерий устранимой особой точки.
22. Критерий полюса. Понятие порядка полюса. Описание особенностей в терминах ряда Лорана. Теорема Сохоцкого.
23. ∞ как изолированная особая точка. Целые функции с полюсом на ∞ . Описание всех конформных отображений \mathbb{C} и $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.

24. Определение мероморфной функции. Мероморфные функции на $\overline{\mathbb{C}}$. Связь с разложением рациональной функции на простейшие дроби.
25. Определение вычета. Теорема Коши о вычетах. Связь вычета с рядом Лорана.
26. Формулы для подсчета вычетов в полюсах. Вычисление $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1)^{-n} dx$ и преобразования Фурье от $1/(x^2 + a^2)$ с помощью вычетов. Лемма Жордана.
27. Теорема о логарифмическом вычете. Определение и свойства изменения аргумента функции вдоль пути. Принцип аргумента.
28. Теорема Руше. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолистности. Окончательная форма теоремы об обратной функции.
29. Теорема Гурвица и её следствие о пределах однолистных функций.
30. Лемма о корнях и логарифмах. Теорема Римана о конформном отображении.
31. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца.
32. Описание всех конформных отображений единичного круга на себя. Единственность конформного отображения области на круг.
33. Принцип компактности.
34. Комплексный потенциал безвихревого течения несжимаемой жидкости. Связь с конформным отображением, выпрямляющим линии тока.
35. Источники, стоки, точечные вихри, диполи. Интерпретация теоремы Римана о конформном отображении в терминах точечных вихрей и диполей.
36. Другие физические интерпретации голоморфных функций: электростатика и теплопроводность.
37. Гармонические функции и их связь с голоморфными.
38. Лемма о стирании отрезка. Принцип симметрии.