

Программа экзамена по комплексному анализу

Поток механиков, 6 семестр, весна 2023 г.

1. Аналитическое продолжение (по Вейерштрассу). Элементы, канонические элементы, непосредственное аналитическое продолжение, продолжение по цепочке и по пути. Единственность продолжения по пути. Лемма о непрерывной зависимости радиуса элемента продолжения по пути от параметра пути. Связь продолжений по цепочке и по пути.
2. Теорема о продолжении по близким путям.
3. Аналитические функции в области. Число листов аналитической функции в области. Теорема Пуанкаре–Вольтерра. Голоморфность однозначной аналитической функции.
4. Определение гомотопии двух путей с общими концами. Теорема о продолжении по путям гомотопии. Следствие о продолжении элемента аналитической функции в области по двум путям, гомотопным в этой области. Области, односвязные в смысле гомотопий. Теорема о монодромии.
5. Действия над аналитическими функциями: сумма, произведение, производная, ограничение на подобласть.
6. Продолжение композиции канонических элементов. Композиция аналитических функций.
7. Теорема о продолжении элемента первообразной. Первообразная аналитической функции в области. Существование аналитической (вообще говоря, многозначной) первообразной для голоморфной функции в области. Следствие о существовании голоморфной первообразной для голоморфной функции в области, односвязной в смысле гомотопий. Следствие о равенстве интегралов голоморфной функции в области по кусочно гладким путям, гомотопным в этой области.
8. Существование непрерывной ветви аргумента вдоль пути. Определение приращения аргумента по пути.
9. Изолированные особые точки аналитических функций, их классификация. Определение типа изолированной особой точки с помощью продолжения элемента аналитической функции по окружности.
10. Теорема об общем виде аналитической функции в проколотой окрестности точки, имеющей точку ветвления конечного порядка. Ряды Пуанкаре.
11. Логарифмический вычет. Теорема о логарифмической производной.
12. Принцип аргумента. Теорема Руше.
13. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолиственности голоморфной функции.
14. Принцип максимума модуля («локальный» и «глобальный» варианты). Лемма Шварца. Описание конформных автоморфизмов единичного круга.
15. Теорема Гурвица о нулях. Следствие о нулях сходящейся равномерно внутри области последовательности однолистных функций.

16. Пространство функций, голоморфных в области. Сходимость в этом пространстве. Предкомпактные и компактные семейства голоморфных функций в области. Теорема о локальной равностепенной непрерывности локально равномерно ограниченного семейства голоморфных функций. Теорема Монтеля. Максимум модуля непрерывного функционала на компактном семействе голоморфных функций.
17. Существование голоморфных ветвей логарифма не обращающейся в нуль голоморфной функции в односвязной (по Жордану или в смысле гомотопий) области и голоморфных ветвей корней из такой функции.
18. Теорема Римана о конформном отображении. Три класса конформной эквивалентности односвязных областей в расширенной комплексной плоскости.
19. Индекс точки относительно замкнутого пути. Его постоянство в областях внутри дополнения к образу пути. Равносильность двух определений односвязности области на плоскости: по Жордану и в смысле гомотопий.
20. Гармонические функции двух переменных. Связь голоморфных и гармонических функций. Простейшие свойства гармонических функций: бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем по окружности, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема единственности, инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменной.
21. Задача Дирихле для уравнения Лапласа, единственность ее решения. Формула Пуассона для решения задачи Дирихле в круге (доказательство в предположении разрешимости). Теорема Каратеодори (без доказательства). Разрешимость задачи Дирихле в жордановой области.

Лектор, доцент

Р. В. Пальвелев

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН, профессор

Б. С. Кашин