

Программа экзамена по курсу  
«Комплексный анализ»  
III курс, 4 поток, осенний семестр, 2022  
лектор М.А. Степанова

1.  $C$ -дифференцируемость, связь с  $R$ -дифференцируемостью. Условия Коши-Римана. Голоморфность.
2. Конформность линейного отображения, конформность в точке, связь с  $C$ -дифференцируемостью, конформное отображение области.
3. Расширенная комплексная плоскость (сфера Римана). Голоморфность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости.
4. Дробно-линейные отображения. Их свойства: конформность, групповое свойство, круговое свойство, свойство сохранения симметрии, свойство трех точек. Группы дробно-линейных автоморфизмов единичного круга, сферы и плоскости.
5. Интеграл по кривой, его свойства. Первообразная и формула Ньютона-Лейбница. Критерий существования первообразной в области.
6. Лемма Гурса. Теорема о существовании первообразной для односвязной области, интегральная теорема Коши для односвязной области.
7. Интегральная формула Коши для круга. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд, единственность разложения. Интегральная теорема Коши для многосвязной области. Интегральная формула Коши.
8. Неравенства Коши, теорема Лиувилля.
9. Теорема о  $C$ -дифференцируемости степенных рядов. Цепочка из четырех эквивалентных определений голоморфной функции (существование комплексной производной, интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши, разложение в ряд), теорема Мореры.
10. Свойства голоморфных функций: бесконечная дифференцируемость, теорема единственности.
11. Интегральная формула для производной. Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
12. Ряды Лорана (кольцо сходимости, равномерная сходимость на компактах в кольце, голоморфность суммы), теорема о разложении функции, голоморфной в кольце. Единственность разложения, неравенства Коши.
13. Изолированные особые точки, их классификация, связь с рядами Лорана. Теорема Сохоцкого. Целые функции с полюсом на бесконечности. Мероморфные функции с полюсом на бесконечности.
14. Вычеты, их связь с коэффициентами ряда Лорана, вычисление вычетов в полюсах. Теорема о вычетах. Лемма Жордана.
15. Порядок функции в точке, связь порядка с логарифмическим вычетом. Принцип аргумента.
16. Теорема Руше. Принцип открытости, принцип максимума.
17. Многозначные функции. Элемент, аналитическое продолжение по цепочке. Росток функции, аналитическое продолжение ростка вдоль пути. Связь между продолжением вдоль кривой и продолжением по цепочке. Единственность продолжения вдоль пути. Теорема о монодромии. Продолжение производной и интеграла.
18. Полная аналитическая функция (ПАФ). Теорема Пуанкаре-Вольтерры. Функция, аналитическая в области (ветвь), число ее значений. Следствие из теоремы о монодромии об аналитических функциях в односвязной области.
19. Изолированные особые точки (точки ветвления), их классификация.