Программа экзамена по комплексному анализу

3 курс, 3 поток (механики)

5 семестр, осень 2022 г.

1. Комплексные числа. Арифметические операции над комплексными числами. Вещественная и мнимая часть комплексного числа. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение.

2. Топология комплексной плоскости: открытые, замкнутые, ограниченные, компактные множества. Непрерывные пути. Линейно связные множества, области.

3. Связные множества на комплексной плоскости. Связность линейно связного множества. Линейная связность открытого связного множества.

4. Формулировка теоремы Жордана. Области, односвязные по Жордану. Односвязность жордановой области. Признак односвязности области.

5. Предел последовательности комплексных чисел. Арифметические свойства пределов последовательностей. Предел и непрерывность комплекснозначных функций комплексного переменного. Бесконечные пределы и пределы в точке ∞.

6. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Топология в $\overline{\mathbb{C}}$. Стереографическая проекция. Явные формулы для стереографической проекции.

7. $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции. Формальные частные производные $\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Комплексная дифференцируемость и комплексная производная. Условия Коши–Римана. Голоморфные функции в области. Голоморфные функции в точке.

8. Конформные функции в точке. Конформные функции в области. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

9. Голоморфность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости.

10. Производная сложной функции. Производная обратной функции.

11. Экспонента и ее свойства. Логарифмы комплексного числа. Стандартные области конформности для степенной функции с натуральным показателем и для экспоненты, голоморфные ветви обратных функций к этим функциям. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента.

12. Дробно-линейные отображения. Свойства дробно-линейных отображений: конформность в $\overline{\mathbb{C}}$, групповое свойство, свойство трех точек.

13. Круговое свойство дробно-линейных отображений. Сохранение симметрии относительно обобщенной окружности при дробно-линейных отображениях.

14. Описание дробно-линейных отображений единичного круга на себя. Описание дробно-линейных отображения верхней полуплоскости на себя.

15. Пути и кривые. Жордановы и замкнутые жордановы пути. Гладкие и кусочно гладкие пути и кривые.

16. Интеграл по кусочно гладкому пути в комплексной плоскости. Сведение к вещественным криволинейным интегралам второго рода. Свойства интеграла. Оценка модуля интеграла. Два примера вычисления интегралов: интеграл от функции $(z-a)^n$ при целых n по окружности с центром в точке a и интеграл от функции z^m при целых неотрицательных m по произвольной кусочно гладкой кривой.

17. Определение области с простой границей. Самая сильная формулировка интегральной теоремы Коши для области с простой границей. Схема сведения интегральной теоремы Коши к формуле Грина для C^1-гладких функций в окрестности замыкания области.

18. Лемма Гурса.

19. Первообразная голоморфной функции в области. Единственность первообразной. Формула Ньютона-Лейбница для непрерывных функций, имеющих первообразную. Существование первообразной для функции в круге, удовлетворяющей условию треугольника, и следствие для голоморфных функций в круге.

20. Лемма о приближении интеграла по гладкому пути интегралами по вписанным ломаным.

21. Вариант интегральной теоремы Коши для односвязных областей. Существование первообразной для функции, голоморфной в односвязной области. Пример функции, голоморфной в области и не имеющей первообразной в этой области.

22. Интегральная теорема Коши для неконцентрического кольца. Интегральная формула Коши для круга.

23. Равномерно сходящиеся ряды комплекснозначных функций: определение, почленное интегрирование, мажорантный признак равномерной сходимости.

24. Теорема о разложении функции, голоморфной в круге, в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры.

25. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда по неотрицательным степеням.

26. Теорема о голоморфности суммы степенного ряда в круге сходимости. Следствие о единственности разложения функции в степенной ряд.

27. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Выражение коэффициентов Тейлора голоморфной функции через производные в точке разложения.

28. Интегральная теорема Коши для функции, голоморфной в окрестности замыкания области с простой границей. Интегральная формула Коши для области с простой границей. Интегральная формула Коши для производных.

29. Теорема Мореры.

30. Теорема Вейерштрасса о пределе последовательности (или сумме ряда) функций, голоморфных в области, сходящейся равномерно на компактах в этой области.

31. Представление голоморфной функции в окрестности ее нуля. Теорема единственности для голоморфных функций. Пример: функция $\sin \dfrac{1}{z}$ в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

32. Теорема о разложении функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Теорема о сходимости степенных рядов по целым степеням. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

33. Изолированные особые точки голоморфных функций. Классификация изолированных особых точек. Теорема об устранимой особой точке. Теорема о полюсе.

34. Теорема Сохоцкого.

35. Точка $z = \infty$ как изолированная особая точка. Связь типа изолированной особой точки с видом ряда Лорана функции в ее проколотой окрестности (для случаев конечной и бесконечной особой точки).

36. Целые функции с устранимой особой точкой в бесконечности. Целые функции с полюсом в бесконечности. Мероморфные функции в расширенной комплексной плоскости.

37. Вычеты. Вычет в терминах ряда Лорана. Теорема Коши о вычетах. Вычет в бесконечности, его выражение в терминах ряда Лорана. Теорема о полной сумме вычетов.

38. Лемма Жордана.

39. Лемма о голоморфной зависимости интеграла от параметра. Интеграл типа Коши, его голоморфность вне носителя пути интегрирования.

40. Аналитическое продолжение Г-функции Эйлера.

Лектор, доцент — Р. В. Пальвелев

Заведующий кафедрой теории функций
и функционального анализа,
академик РАН, профессор — Б. С. Кашин